

# Esercizi di Idraulica Ambientale

Marco Toffolon, Gianluca Vignoli

*Bozza 23 gennaio 2004*

Facoltà di Ingegneria  
Università degli Studi di Trento

Questo volumetto completa le dispense del corso di Idraulica Ambientale fornendo una panoramica di alcune possibili applicazioni delle soluzioni teoriche trovate. Gli esercizi riprendono in parte quelli proposti dal prof. Marco Tubino nel corso di Idraulica Ambientale all'Università degli Studi di Trento. Si è scelto di suddividere gli esercizi a seconda del meccanismo dominante; tuttavia la stretta interrelazione tra i singoli processi, caratterizzabili come fasi di un unico processo di mescolamento, non deve mai essere dimenticata.

Sono state preparate inoltre delle appendici relative ad alcuni temi che vengono affrontati durante il corso. La loro connotazione predominante come strumenti di analisi, piuttosto che come argomenti specifici della materia, ha suggerito l'opportunità di una trattazione separata rispetto agli aspetti teorici discussi nei primi volumi delle dispense.

Trattandosi della prima edizione di questo volume di esercizi, è probabile che errori, sviste e argomentazioni poco chiare siano presenti nel testo. I lettori sono quindi pregati di segnalare agli autori tutte le modifiche che ritengano utili per migliorarne la qualità.

Un vivo ringraziamento va a Gianluca Antonacci e a Luca Zanoni per il loro contributo alla realizzazione e alla correzione di questo testo.

Trento, 23 gennaio 2004

Marco Toffolon

e-mail: [marco.toffolon@ing.unitn.it](mailto:marco.toffolon@ing.unitn.it)

tel.: +39 0461 88 2480

<http://www.ing.unitn.it/~toffolon/>

Gianluca Vignoli

e-mail: [gianluca.vignoli@ing.unitn.it](mailto:gianluca.vignoli@ing.unitn.it)

tel.: +39 0461 88 2480

<http://www.ing.unitn.it/~vignolig/>

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Università degli Studi di Trento

via Mesiano 77

38050 Trento

Italia

fax: +39 0461 88 2672

Parte IV

Esercizi e appendici



# Indice

<b>IV</b>	<b>Esercizi e appendici</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Diffusione molecolare</b>	<b>9</b>
1.1	Concentrazione 1D, 2D e 3D . . . . .	9
1.2	Diffusione 1D confinata . . . . .	10
1.2.1	Numero di sorgenti immagine . . . . .	12
1.3	Diffusione in due direzioni . . . . .	14
1.4	Coefficiente di diffusione e massa . . . . .	17
1.5	Concentrazioni fissate agli estremi . . . . .	18
1.6	Diffusione in un moto a pistone . . . . .	19
1.7	Diffusione trasversale alla confluenza tra due correnti . . . . .	21
1.8	Diffusione trasversale tra due correnti parallele . . . . .	23
1.9	Punto sorgente in un fluido in movimento . . . . .	24
1.10	Diffusore di lunghezza finita . . . . .	26
1.11	Scarico puntuale in acqua bassa . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Campo vicino</b>	<b>33</b>
2.1	Diffusore trasversale . . . . .	33
2.2	Scarico puntuale . . . . .	36
2.3	Sorgente puntuale non stazionaria . . . . .	38
2.4	Diffusione di uno strato di sedimenti . . . . .	43
2.4.1	Il caso di un soluto non pesante . . . . .	45
2.5	Stratificazione verticale . . . . .	47
2.6	Scarico a densità diversa . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Campo intermedio</b>	<b>53</b>
3.1	Sorgente puntuale stazionaria . . . . .	54
3.2	Scarico puntuale in sponda . . . . .	55
3.3	Sorgente puntuale o diffusore? . . . . .	57
3.4	Diffusore di lunghezza finita . . . . .	59
3.5	Strato di mescolamento . . . . .	61
3.6	Portata cumulata . . . . .	62
3.7	Alveo con golene . . . . .	66
3.7.1	Calcolo con i valori mediati sulla sezione . . . . .	66
3.7.2	Calcolo con i valori locali . . . . .	68

<b>4</b>	<b>Campo lontano</b>	<b>71</b>
4.1	Scarico puntuale accidentale . . . . .	71
4.1.1	Origine virtuale . . . . .	73
4.1.2	Metodo della nuvola congelata . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Soluti reattivi</b>	<b>77</b>
5.1	Scarichi stazionari successivi . . . . .	77
5.1.1	Soluzione stazionaria semplificata . . . . .	78
5.1.2	Effetto di scarichi successivi . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Soluzioni grafiche</b>	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>La funzione errore</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Analisi dimensionale</b>	<b>91</b>
C.1	Teorema di Buckingham . . . . .	92
C.1.1	Un esempio nell'ambito dell'idraulica . . . . .	93
C.1.2	Un'applicazione: mescolamento in ambiente stratificato . . . . .	94
C.2	Similarità . . . . .	97
C.2.1	Soluzioni autosimilari . . . . .	97
<b>D</b>	<b>Metodi numerici</b>	<b>99</b>
D.1	Classificazione delle equazioni differenziali . . . . .	99
D.2	Alcune caratteristiche generali . . . . .	101
D.3	Metodi numerici . . . . .	103
D.3.1	Approssimazioni alle differenze finite . . . . .	104
D.3.2	Convergenza della soluzione numerica . . . . .	105
D.3.2.1	Alcune definizioni . . . . .	105
D.3.2.2	Analisi di stabilità . . . . .	106
D.3.2.3	Requisiti sul segno del coefficiente di diffusione . . . . .	107
D.3.3	Parametri significativi . . . . .	108
D.4	Schemi numerici . . . . .	108
D.4.1	Schemi espliciti . . . . .	109
D.4.1.1	Schema <i>upwind</i> . . . . .	109
D.4.1.2	Metodo delle caratteristiche per la pura convezione . . . . .	111
D.4.1.3	Schema alle differenze centrate . . . . .	113
D.4.2	Schemi impliciti . . . . .	113
D.4.2.1	Schema <i>upwind</i> . . . . .	113
D.4.2.2	Schema alle differenze centrate . . . . .	114
D.4.2.3	Schema di Crank-Nicolson . . . . .	114
<b>E</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>115</b>
E.1	Esempi di applicazione . . . . .	116
E.1.1	Onda triangolare . . . . .	116
E.1.2	Onda quadra . . . . .	116

<b>F</b>	<b>Modelli lagrangiani di diffusione turbolenta</b>	<b>119</b>
F.1	Metodologia . . . . .	119
F.2	Serie di numeri pseudo-random . . . . .	123
<b>G</b>	<b>Modelli ADZ nel campo lontano</b>	<b>125</b>
G.1	Modelli a cella . . . . .	125
G.1.1	Interpretazione fisica . . . . .	128
G.2	Modelli convettivi-dispersivi . . . . .	129
	<b>Bibliografia</b>	<b>131</b>





# Capitolo 1

## Esercizi sulla diffusione molecolare

### 1.1 Concentrazione in ambiti mono-, bi- e tridimensionali

La concentrazione viene di norma definita come la massa di soluto nel volume di soluzione considerato:

$$C = \frac{M}{V}$$

che dimensionalmente significa  $[C_{3D}] = M/L^3$  (definizione tridimensionale). Esistono però dei casi in cui risulta conveniente considerare una concentrazione per unità di larghezza o per unità di superficie. Nel primo caso il problema è definito in un ambito bidimensionale, per il quale  $[C_{2D}] = M/L^2$ ; nel secondo caso si parla di ambito monodimensionale e  $[C_{1D}] = M/L$ .

Immaginiamo di considerare un condotto di lunghezza  $L$  avente sezione trasversale rettangolare di lati  $B$  e  $H$ ; si assuma concentrazione costante ovunque. Dal punto di vista operativo, possiamo calcolare la concentrazione tridimensionale considerando la massa di soluto presente e dividendola per il volume totale:

$$C_{3D} = \frac{M}{L H B}.$$

Se una delle dimensioni è molto minore delle altre, ad esempio  $H \ll B$  e  $H \ll L$ , può risultare più semplice definire la concentrazione come

$$C_{2D} = \frac{M}{L B},$$

che può essere ricondotta alla definizione classica attraverso la semplice relazione  $C_{3D} = C_{2D}/H$ . Se poi una sola dimensione è prevalente, ad esempio  $L \gg B \gg H$ , si può definire una concentrazione per unità di area trasversale come

$$C_{1D} = \frac{M}{L},$$

che può essere trasformata a sua volta in  $C_{3D} = C_{1D}/(B H)$ .

## 1.2 Diffusione monodimensionale in un dominio confinato

*Determinare l'andamento della concentrazione per effetto dell'immissione di una massa  $M$  di tracciante passivo, che diffonde con processo monodimensionale fra due pareti poste simmetricamente a distanza  $L$  dal punto di scarico.*

*Dati:  $L = 1\text{ cm}$ ,  $M = 10\text{ g}$ ,  $D = 10^{-5}\text{ cm}^2/\text{s}$*

Il valore asintotico della concentrazione, che si realizza per tempi grandi, è:

$$C_\infty = \frac{M}{2L} = 5\text{ g/cm} \quad (1.1)$$

Il campo di concentrazione viene determinato utilizzando la soluzione fondamentale e ricordando che, per garantire la condizione di flusso nullo in corrispondenza di entrambe le pareti, è necessario considerare infinite sorgenti immagine. Assumiamo un sistema di riferimento con origine in una parete e orientato in modo tale da porre la seconda parete ad una distanza  $x = 2L$ . Poniamo il punto sorgente ad una coordinata  $x = x_0$  all'interno del dominio  $[0, 2L]$ . Le sorgenti immagine vengono collocate riflettendo la posizione della sorgente rispetto alle due pareti e originando quindi due nuovi punti sorgente all'esterno del dominio. Tali sorgenti vengono poi riflesse dalle pareti con un procedimento ricorsivo senza fine che porta a considerare un numero virtualmente infinito di sorgenti. Il procedimento è illustrato in Figura 1.1. La concentrazione  $C$ , per  $0 < x < 2L$ , è calcolabile come

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{[x - x_0 + 2j(2L)]^2}{4Dt} \right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{[x + x_0 + 2j(2L)]^2}{4Dt} \right] \right\} \quad (1.2)$$

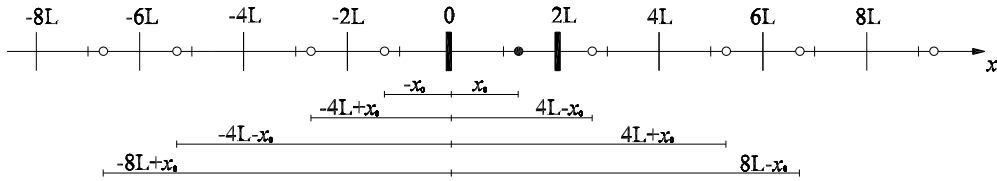


Figura 1.1: Sorgenti immagine dovute alla presenza di uno scarico tra due pareti nel sistema di riferimento con origine nella parete di sinistra. La sorgente è posta in una generica posizione  $x_0$ .

Lo scarico è posto in  $x_0 = L$ . La concentrazione valutata nel punto di scarico  $C_s(t) = C(x_0, t)$  si ottiene sostituendo  $x = L$  nella (1.2):

$$C_s(t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(2jL)^2}{Dt} \right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{[(2j+1)L]^2}{Dt} \right] \right\}$$

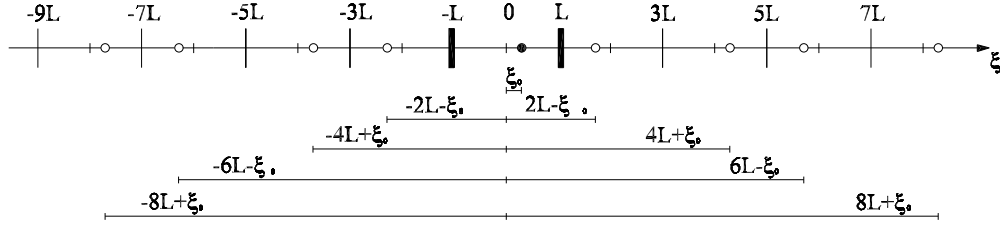


Figura 1.2: Sorgenti immagine in un sistema di riferimento centrato tra le due pareti. La sorgente è posta in una generica posizione  $\xi_0$ .

la quale, dato che le due sommatorie, dove  $(2j+1)$  si riferisce ai termini dispari mentre  $2j$  a quelli pari, possono essere compattate in una sola con  $j$ , si semplifica in

$$C_s(t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(jL)^2}{Dt} \right] \quad (1.3)$$

La soluzione (1.3) è rappresentata in grafico bilogaritmico in Figura 1.3. In Figura 1.4 è stato riportato l'andamento della (1.2) all'interno del dominio per diversi istanti temporali. Si noti che per  $t > 10^5$  s si raggiunge, per lo meno dal punto di vista grafico, la concentrazione asintotica di equilibrio (1.1).

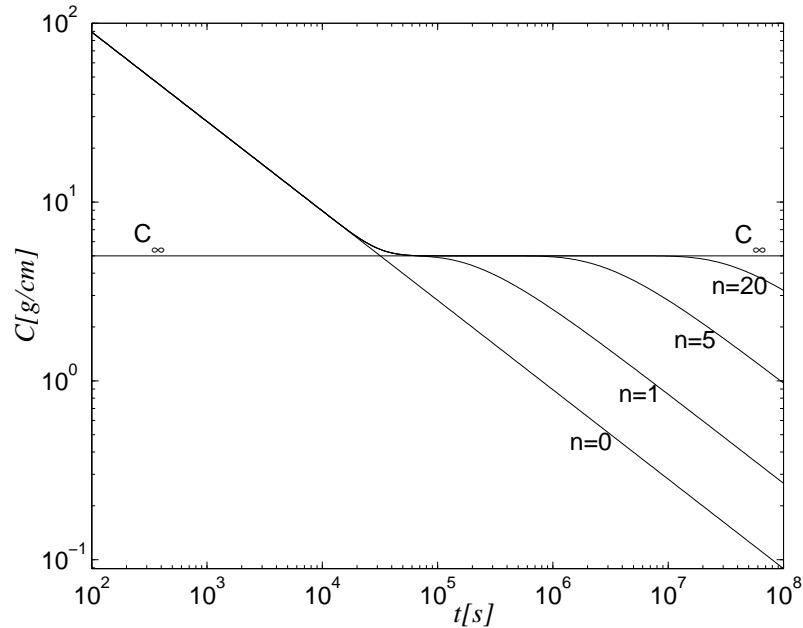


Figura 1.3: Andamento della concentrazione  $C_s(t)$  nel punto di scarico al variare del tempo. Le curve sono tracciate utilizzando un numero  $n$  di sorgenti immagine. Il grafico è bilogaritmico.

**Sistema di riferimento centrato nella sorgente.** Data la simmetria del problema, può risultare conveniente centrare il sistema di riferimento nella sorgente. Utilizzando la coordinata  $\xi$  troviamo che lo scarico è posto in  $\xi = \xi_0 = 0$

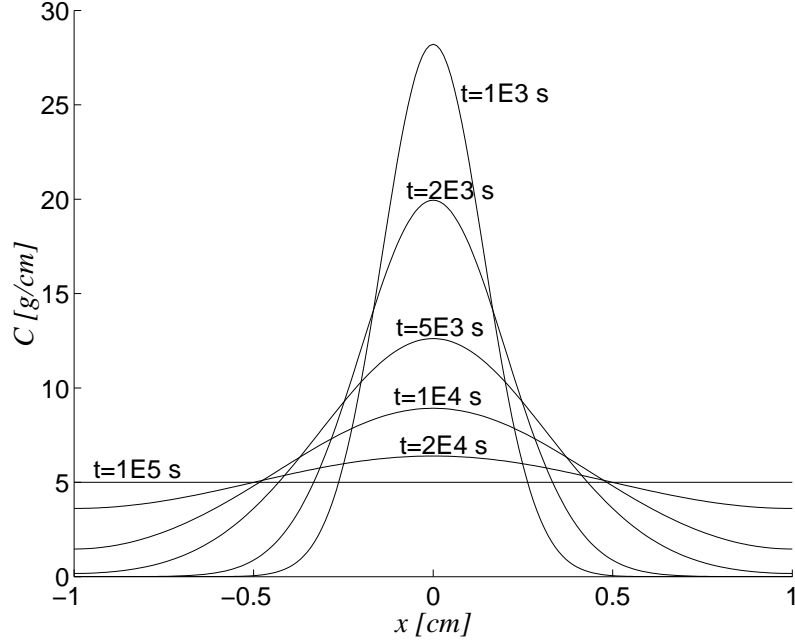


Figura 1.4: Andamento della concentrazione  $C(x, t)$  a diversi istanti  $t$ . Sono state considerate 50 sorgenti immagine.

e le due pareti in  $\xi = \pm L$ . Grazie a questa condizione di simmetria, le sorgenti immagine sono poste in  $\xi = \pm 2jL$ , con  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . La soluzione può così essere scritta nella forma

$$C(\xi, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(\xi + 2jL)^2}{4Dt} \right]$$

che, valutata in  $\xi = 0$  fornisce per  $C_s(t) = C(\xi_0, t)$  lo stesso risultato trovato nella (1.3).

In Figura 1.2 sono riportate le coordinate delle sorgenti immagine nel sistema di riferimento  $\xi$ . Quando non c'è una simmetria particolare, la soluzione espressa utilizzando  $\xi$  risulta più complessa rispetto alla (1.2) che utilizza  $x$ .

### 1.2.1 Considerazioni sul numero di sorgenti immagine da utilizzare

La soluzione (1.3), per essere valutata numericamente, deve essere riscritta nella forma

$$C_s(t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \sum_{j=-n}^n \exp \left[ -\frac{(jL)^2}{Dt} \right] \quad (1.4)$$

con  $n$  numero delle sorgenti immagine che devono essere considerate. La procedura di selezione del numero minimo di sorgenti da utilizzare può essere descritta come segue. La (1.4) può essere esplicitata come

$$C_s(t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \left\{ \exp \left[ -\frac{(0)^2}{Dt} \right] + 2 \exp \left[ -\frac{(L)^2}{Dt} \right] + 2 \exp \left[ -\frac{(2L)^2}{Dt} \right] + \dots \right\}$$

dove si è tenuto conto che, data la simmetria del problema, il contributo delle sorgenti immagine  $\pm j$  è il medesimo. La sommatoria può essere interrotta all'immagine  $j = n$  quando il contributo della sorgente  $j$ -esima, rapportato alla soluzione ottenuta considerando le  $(j - 1)$  sorgenti precedenti, è inferiore ad una soglia prefissata.

**Prima fase.** Nella prima fase del processo diffusivo la nuvola di tracciante ha una dimensione caratteristica ridotta e non interessa la regione del dominio vicino alle pareti. Durante questa prima fase il contributo delle sorgenti immagine è trascurabile. Si noti ad esempio l'andamento della concentrazione nello spazio in Figura 1.4 per tempi piccoli: la concentrazione in prossimità delle pareti è praticamente nulla. In Figura 1.3 sono rappresentate le curve relative alla soluzione valutata con un diverso numero di immagini: tutte le curve sono sovrapposte a dimostrazione del fatto che la soluzione è ben rappresentata dalla sola sorgente principale.

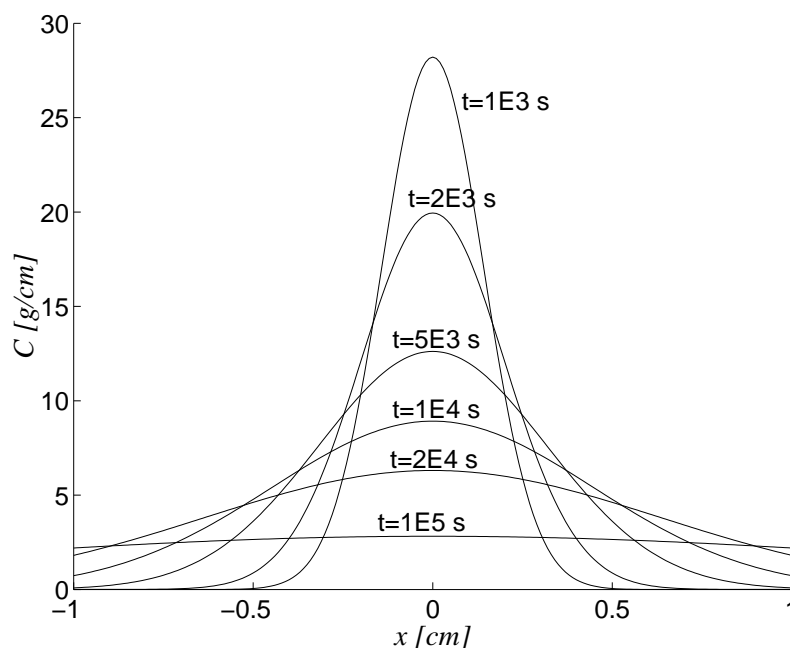


Figura 1.5: Andamento della concentrazione  $C(x, t)$  a diversi istanti  $t$  quando viene considerata solo la sorgente reale ( $n = 0$ ). Si noti che per tempi grandi la massa totale nel dominio diminuisce.

Possiamo ottenere una stima del tempo al quale il contributo delle pareti diventa importante osservando la dimensione caratteristica della nuvola. La soluzione fondamentale

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \exp \left[ -\frac{x^2}{4Dt} \right],$$

valida quando non sono presenti pareti, racchiude circa il 99.7% della massa

totale in uno spazio compreso tra  $-3\sigma$  e  $3\sigma$ , dove

$$\sigma = \sqrt{2Dt}$$

è la varianza della nuvola non confinata. Possiamo quindi stimare il tempo in cui  $L = 3\sigma$ , che fornisce  $t_{3\sigma} = 5.55 \cdot 10^3 s$ . Il 68% della massa è invece compreso tra  $-\sigma$  e  $\sigma$ ; la relazione  $L = \sigma$  fornisce un tempo  $t_\sigma = 5 \cdot 10^4 s$ . Analogamente, per  $L = 2\sigma$  (95% della massa) si trova  $t_{2\sigma} = 1.25 \cdot 10^4 s$ . Dal grafico in Figura 1.3 si vede chiaramente una sorta di spigolo nel valore di  $C_s$ , che prima decade e poi si mantiene costante e pari a  $C_\infty$ . E' interessante notare che tale spigolo può essere compreso approssimativamente tra  $t_{2\sigma}$  e  $t_\sigma$ . La Figura 1.5 rappresenta la soluzione quando si consideri solamente la sorgente fondamentale; da un confronto con la Figura 1.4 si nota che parte della massa iniziale esce dal sistema quando la dimensione della nuvola raggiunge le pareti.

**Seconda fase.** Nella seconda fase, quando la nuvola di tracciante ha occupato tutto lo spazio fra le due pareti, il numero di sorgenti immagine da considerare per avere una buona approssimazione della soluzione è sempre crescente nel tempo. La concentrazione in  $x = 0$ , rappresentata in Figura 1.3, per valori del tempo maggiori di  $t \sim 10^5 s$  dovrebbe mantenersi costante e pari a  $C_\infty$ . A seconda del numero di sorgenti considerato, questo risultato è mantenuto per tempi che crescono all'aumentare del numero di sorgenti.

### 1.3 Diffusione in due direzioni

*Sia data una vasca a pianta quadrata, rappresentata schematicamente in Figura 1.6, piena di acqua in quiete, i cui spigoli misurano  $H = 1 cm$  quelli verticali,  $L = 10 cm$  quelli orizzontali. Un diffusore, collocato lungo uno dei quattro spigoli verticali (di coordinate  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ), scarica istantaneamente una massa  $M = 100 g$  di un tracciante passivo.*

*Calcolare dopo quanto tempo la concentrazione è ovunque inferiore a  $1000 C_e$ , con  $C_e$  concentrazione di equilibrio raggiunta al termine del processo di mescolamento. Si assuma  $D = 10^{-5} cm^2/s$ .*

In questo caso il mescolamento lungo la verticale  $z$  viene imposto dalla presenza del diffusore. Si tratta quindi di determinare il processo di mescolamento lungo le due direzioni orizzontali  $x$  e  $y$ , tenendo conto della presenza delle pareti.

In questo caso il mescolamento lungo la verticale  $z$  viene imposto dalla presenza del diffusore. Si tratta quindi di determinare il processo di mescolamento lungo le due direzioni orizzontali  $x$  e  $y$ , tenendo conto della presenza delle pareti.

La concentrazione finale, raggiunta asintoticamente, è:

$$C_e = \frac{M}{HL^2} = 1 g/cm^3 \quad (1.5)$$

Vedremo in seguito che il valore numerico (e con esso la massa scaricata  $M$  e la dimensione verticale  $H$ ) risulta inessenziale per la soluzione del problema.

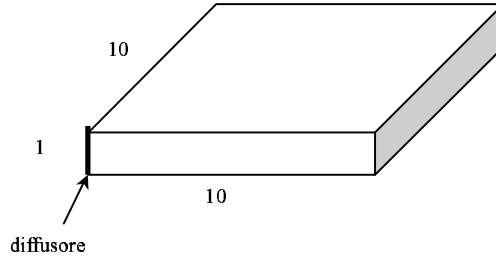


Figura 1.6: Schema della vasca e posizione del diffusore.

Calcoliamo ora l'istante temporale in cui la concentrazione è uguale a  $1000 C_e$  nel punto più sfavorevole, ossia nel punto di scarico  $x = x_0$ ,  $y = x_0$ . Poiché la concentrazione è molte volte (1000) più grande di quella di equilibrio, il processo di mescolamento è presumibilmente nella sua fase iniziale, durante la quale la presenza delle pareti sul lato della vasca opposto al diffusore è trascurabile. Non risulta invece affatto trascurabile la presenza delle pareti che determinano l'angolo nel quale è collocato il diffusore. Risolveremo il problema utilizzando questa ipotesi e verificheremo a posteriori che il contributo delle sorgenti immagini possa essere considerato trascurabile.

La soluzione fondamentale, tenendo conto di tutte le pareti<sup>1</sup>, è

$$C = \frac{M/H}{4\pi Dt} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x - x_0 + 2jL)^2}{4Dt} \right] + \exp \left[ -\frac{(x + x_0 + 2jL)^2}{4Dt} \right] \right\} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(y - y_0 + 2jL)^2}{4Dt} \right] + \exp \left[ -\frac{(y + y_0 + 2jL)^2}{4Dt} \right] \right\} \quad (1.6)$$

dove si noti il prodotto tra le due sommatorie (da non confondere con la somma). Trascurando le sorgenti immagine dei lati opposti all'angolo considerato, che richiedono le sommatorie di un numero virtualmente infinito di termini, si ottiene

$$C = \frac{M/H}{4\pi Dt} \left\{ \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right] + \exp \left[ -\frac{(x + x_0)^2}{4Dt} \right] \right\} \cdot \left\{ \exp \left[ -\frac{(y - y_0)^2}{4Dt} \right] + \exp \left[ -\frac{(y + y_0)^2}{4Dt} \right] \right\} \quad (1.7)$$

Valutata nell'origine dello scarico ( $x = x_0 = 0$ ,  $y = x_0 = 0$ ), la soluzione (1.7) si semplifica in

$$C = \frac{M/H}{4\pi Dt} \cdot \{1 + 1\} \cdot \{1 + 1\} = \frac{M/H}{\pi Dt}$$

che equivale a considerare una sorgente di intensità quadrupla, come ci si poteva aspettare dato che lo spigolo divide il piano  $x - y$  in quattro parti e la sorgente

<sup>1</sup>Per quanto riguarda le sommatorie di infiniti termini, si utilizza la medesima notazione dell'esercizio 1.2.

scarica tutta la propria massa in una sola di queste. Introducendo la (1.5), si ha infine

$$\frac{C}{C_e} = \frac{L^2}{\pi D t}$$

che, per  $C/C_e = 1000$  fornisce la soluzione

$$t = \frac{L^2}{1000\pi D} = 3183 \text{ s}$$

Resta ora da determinare il contributo delle sorgenti immagine trascurate al tempo trovato. A tal fine è sufficiente considerare il contributo alla sommatoria delle prime sorgenti trascurate ( $j = 1, j = 2$ , il problema è il medesimo in  $x$  e  $y$  data la pianta quadrata),

$$\exp\left[-\frac{(2L)^2}{4Dt}\right] \sim 10^{-1364}, \quad \exp\left[-\frac{(4L)^2}{4Dt}\right] \sim 10^{-5457}$$

e confrontarlo con il termine considerato

$$\exp\left[-\frac{(0)^2}{4Dt}\right] = 1$$

Emerge chiaramente come la soluzione sia esclusivamente determinata dalle sole sorgenti considerate.

Si noti però che all'avanzare del tempo le sorgenti immagine acquistano un'importanza sempre maggiore e risultano fondamentali per poter ottenere il valore asintotico di concentrazione: per  $t \rightarrow \infty$  si devono considerare  $n \rightarrow \infty$  sorgenti.

**Indipendenza direzionale.** La (1.6) prevede che il comportamento nelle due direzioni risulti indipendente (grazie al prodotto tra le due coppie di sommatorie). Ciò può essere spiegato osservando che la soluzione fondamentale in un dominio bidimensionale è

$$C(x, y) = \frac{M/H}{4\pi\sqrt{D_x D_y} t} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{4D_y t}\right) \quad (1.8)$$

dove per semplicità sono state trascurate le immagini e la sorgente è stata posta nell'origine. Se integriamo la (1.8) nella direzione  $y$

$$\tilde{C}(x) = \frac{1}{L_y} \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y) dy,$$

che equivale a considerare raggiunta la concentrazione di equilibrio lungo  $y$  tra due pareti distanti  $L_y$ , otteniamo

$$\tilde{C}(x) = \frac{M/H}{4\pi\sqrt{D_x D_y} t} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right) \cdot \frac{\sqrt{4D_y t}}{L_y} = \frac{M/(H L_y)}{\sqrt{4\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right)$$

che corrisponde esattamente alla soluzione fondamentale in un dominio monodimensionale, ovvero in uno tridimensionale confinato in una regione trasversale di dimensioni  $H$  e  $L_y$ .



### 1.4 Determinazione del coefficiente di diffusione e della massa scaricata

Si consideri un problema di diffusione molecolare in un dominio bidimensionale con un rilascio di una massa  $M$  nell'origine degli assi  $x = 0, y = 0$ . Noto l'andamento nel tempo della concentrazione nel punto  $P$ , posto ad una distanza  $r = 1\text{ cm}$  dall'origine, stimare il coefficiente di diffusione  $D$  e la massa  $M$  rilasciata all'istante iniziale.

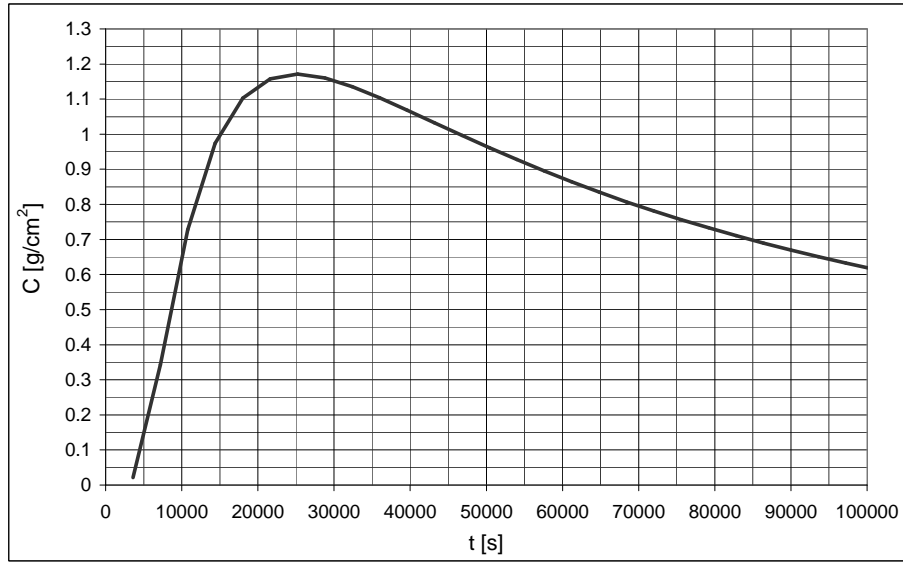


Figura 1.7: Andamento della concentrazione nel tempo.

Supposto un dominio non confinato, la concentrazione nel punto  $P$  viene determinata mediante la soluzione fondamentale

$$C = \frac{M}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right). \quad (1.9)$$

L'andamento della concentrazione nel tempo è rappresentato in Figura 1.7. Dal grafico si può stimare che il massimo di concentrazione  $C_{max} = 1.171\text{ g/cm}^2$  si realizza ad un tempo  $t_{max} = 25000\text{ s}$ . Annullando la derivata della (1.9)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{M}{4\pi Dt^2} \left( \frac{r^2}{4Dt} - 1 \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) = 0$$

si individuano le condizioni per cui si realizza il massimo di concentrazione

$$\frac{r^2}{4Dt_{max}} - 1 = 0, \quad (1.10)$$

dalle quali si può stimare il coefficiente di diffusione

$$D = \frac{r^2}{4t} \cong 1 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Il significato della (1.10) è che la *forma* della funzione che esprime la concentrazione nel tempo dipende solamente dal processo diffusivo, ma non dalla massa scaricata. Infatti la dipendenza da  $M$  della soluzione (1.9) è lineare e quindi la posizione dei massimi e dei minimi non ne è influenzata; quello che conta è il coefficiente  $D$ .

La massa  $M$  si ottiene invece dal valore della concentrazione in un punto. Risulta conveniente considerare la concentrazione massima  $C_{max}$ , che può essere ottenuta sostituendo la relazione (1.10) nella (1.9):

$$C_{max} = \frac{M}{4\pi D t_{max}} e^{-1},$$

dalla quale si può calcolare infine la massa scaricata

$$M = 4\pi e D t_{max} C_{max} = 10 \text{ g}.$$

## 1.5 Concentrazioni fissate agli estremi

*Sia dato un problema di pura diffusione monodimensionale con la condizione iniziale  $C = 0$  al tempo  $t = 0$ , per ogni  $x$ , e le condizioni al contorno (per  $t > 0$ ):  $C = C_0$  in  $x = 0$  e  $C = C_L$  in  $x = L$ .*

*Assumendo  $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  si determini la soluzione asintotica per la concentrazione all'interno del dominio  $0 \leq x \leq 10 \text{ cm}$ . Si valuti anche il flusso di massa a regime. Dati:  $C_0 = 1 \text{ g/cm}$ ,  $C_L = 0 \text{ g/cm}$ ,  $L = 10 \text{ cm}$ .*

Il problema è assolutamente analogo al classico problema di trasmissione del calore tra due pareti a temperature fissate. Il fenomeno è retto dall'equazione di diffusione

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

Il problema asintotico può essere risolto molto semplicemente osservando che, concluso il transitorio, deve valere  $\partial C / \partial t = 0$  e quindi la (1.11) si semplifica in

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

la cui soluzione è  $C(x) = a_0 + a_1 x$ . Utilizzando le condizioni al contorno si ottiene il risultato cercato:

$$C(x) = C_0 - \frac{C_0 - C_L}{L} x = 1 \text{ g/cm} - 0.1 \text{ g/cm}^2 \cdot x.$$

Il flusso di massa, costante in  $x$  a regime, è definito come

$$\dot{M} = -D \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{C_0 - C_L}{L} = 10^{-6} \text{ g/s}$$

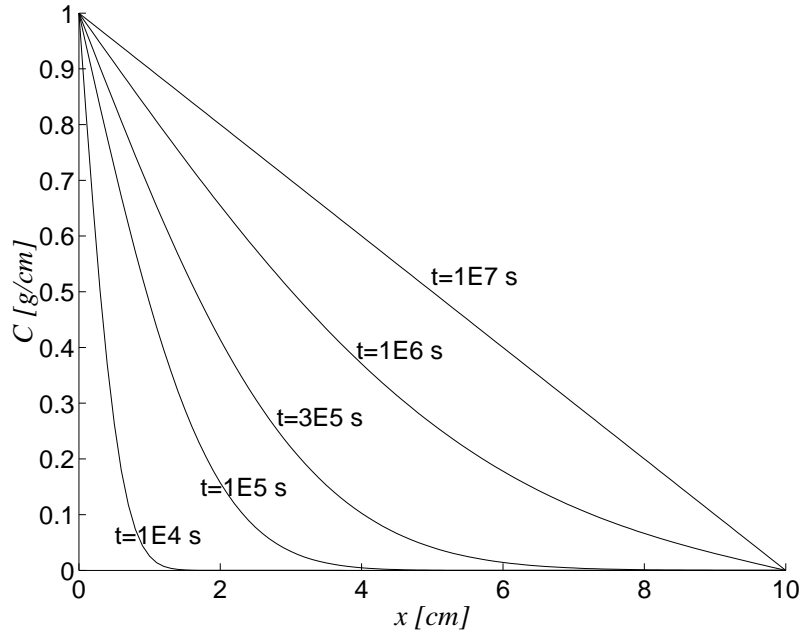


Figura 1.8: Concentrazione tra due estremi fissati al variare del tempo, fino al raggiungimento della configurazione asintotica. La soluzione è ottenuta dalla (1.12) utilizzando un numero sufficiente di sorgenti immagine.

**Transitorio.** La soluzione per il campo di concentrazione nella fase di transizione, prima di arrivare alla soluzione asintotica, è descritta dalla relazione

$$C(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{\sqrt{4Dt}}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ -\operatorname{erfc}\left(\frac{|x - 2jL|}{\sqrt{4Dt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{|x + 2jL|}{\sqrt{4Dt}}\right) \right] \quad (1.12)$$

che, oltre alla soluzione fondamentale per la concentrazione fissate in un punto, tiene conto della presenza aggiuntiva di sorgenti immagine negative in  $x = 2jL$  per annullare la concentrazione in  $x = L$  e di sorgenti positive in  $x = -2jL$  per mantenere il valore  $C_0$  in  $x = 0$ . Il risultato è presentato in Figura 1.8.

## 1.6 Diffusione in un moto a pistone

*Si consideri una tubazione in cui un setto trasversale divide due zone; il fluido scorre alla medesima velocità  $U$  in entrambe, trasportando il setto. In una delle due zone è presente del soluto con concentrazione  $C_0$  inizialmente costante, nell'altra solo il fluido. Si studi la diffusione del soluto nel moto a pistone considerato, dal momento in cui il setto viene rimosso.*

L'equazione che governa il problema

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

può essere semplificata mediante il cambiamento di variabile  $\xi = x - Ut$ , che permette<sup>2</sup> di eliminare formalmente la parte convettiva dell'equazione, che diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}.$$

La soluzione del problema per una distribuzione di concentrazione a gradino è

$$C = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x - Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad (1.13)$$

nel caso in cui la concentrazione iniziale sia pari a  $C_0$  per  $x < 0$  e 0 per  $x > 0$ . Nel caso in cui la concentrazione sia invece  $C_0$  per  $x > 0$  e 0 per  $x < 0$  si ha invece

$$C = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( -\frac{\xi}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = \frac{C_0}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (1.14)$$

per l'antisimmetria della funzione erf (si veda l'Appendice B).

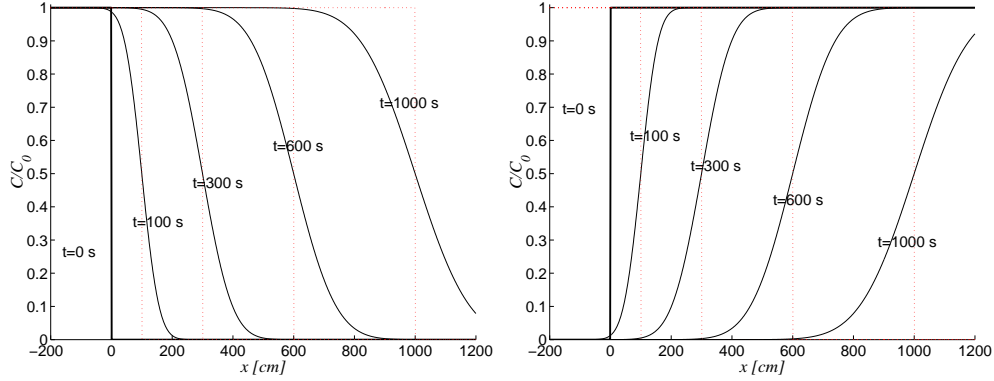


Figura 1.9: Andamento della concentrazione in un moto a pistone con velocità  $U = 1 \text{ cm/s}$ : a sinistra soluzione per un gradino sinistro (1.13), a destra soluzione per un gradino destro (1.14). Il coefficiente di diffusione è stato scelto 'grande' ( $D = 10 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) per amplificare la deformazione dell'onda di concentrazione.

Sfruttando l'autosimilarità della soluzione, le (1.13) e (1.14) possono essere convenientemente riscritte in forma adimensionale:

$$C^* = \frac{1}{2} [1 \mp \operatorname{erf}(\eta)]$$

dove

$$C^* = \frac{C}{C_0}, \quad \eta = \frac{x - Ut}{\sqrt{4Dt}}.$$

<sup>2</sup>In questo nuovo sistema di riferimento la funzione  $C(x, t)$  viene ridefinita come  $\tilde{C}(\xi, \tilde{t})$ , con  $\xi = \xi(x, t)$  e  $\tilde{t} = t$ . Le derivate nello spazio e nel tempo si trasformano rispettivamente in:

$$\frac{\partial C}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial C}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{t}} - U \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi}$$

e quindi  $\partial C / \partial t + U \partial C / \partial x \rightarrow \partial \tilde{C} / \partial \tilde{t}$ , in cui per brevità si può eliminare il soprassegno  $\sim$  e ottenere l'equazione semplificata.

### 1.7 Diffusione trasversale alla confluenza tra due correnti

Siano date due correnti in moto laminare, separate da un setto per  $x < 0$ , che si muovono con la stessa velocità  $U$  nella direzione longitudinale. Una corrente è pulita, mentre l'altra è caratterizzata da una concentrazione costante  $C_0$ . Una rappresentazione schematica del sistema è riportata in Figura 1.10. Studiare il mescolamento tra le due correnti a valle della loro confluenza.

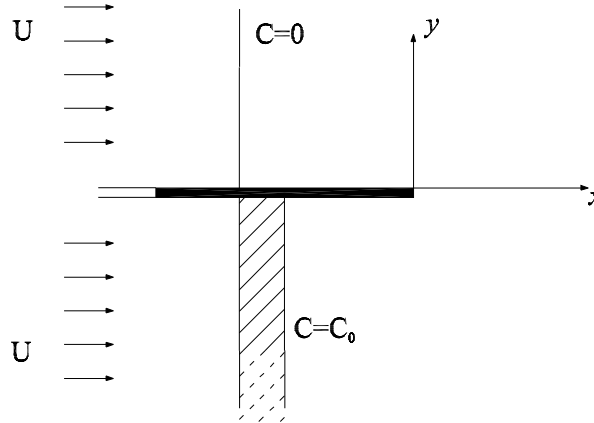


Figura 1.10: Schema di confluenza tra due correnti.

Il problema della confluenza tra due correnti può essere risolto in modo semplificato avvalendosi delle ipotesi di moto laminare con velocità costante e di diffusione molecolare. L'equazione di convezione-diffusione viene scritta in un ambito bidimensionale nella forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (1.15)$$

Il problema è posto in termini stazionari, dato che non cambiano le condizioni al contorno, e si può quindi trascurare il termine  $\partial C / \partial t$ . Inoltre la diffusione longitudinale può essere trascurata in confronto con la convezione se il numero di Peclet è sufficientemente elevato. Possiamo infatti valutare gli ordini di grandezza dei termini  $U \partial C / \partial x$  e  $D \partial^2 C / \partial x^2$  utilizzando una grandezza scala  $L$  per la coordinata longitudinale  $x$ ; si trova

$$\frac{C_0 D}{L^2} \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^{*2}} \ll \frac{C_0 U}{L} \frac{\partial C^*}{\partial x^*} \quad \Leftrightarrow \quad P_e = \frac{UL}{D} \gg 1 \quad (1.16)$$

Resta da definire la scala  $L$  che abbiamo assunto implicitamente. Una scelta possibile è la scala caratteristica del processo convettivo  $L_c = Ut$ ; la condizione (1.16) diventa in questo caso

$$t \gg \frac{D}{U^2} = T_0. \quad (1.17)$$

E' interessante notare che utilizzando la scala caratteristica della diffusione  $L_d = \sqrt{Dt}$  il risultato non cambia. Il significato fisico è più chiaro se si osserva che, per tempi superiori a  $T_0$ ,  $L_c \gg L_d$ , ossia la convezione 'sposta' le particelle di una distanza molto più grande di quanto può fare la diffusione. La condizione (1.17) è facilmente verificata se si considerano valori caratteristici dei moti laminari: se  $U = 1 \text{ cm/s}$  e  $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$  si trova  $t \gg 10^{-5} \text{ s}$ .

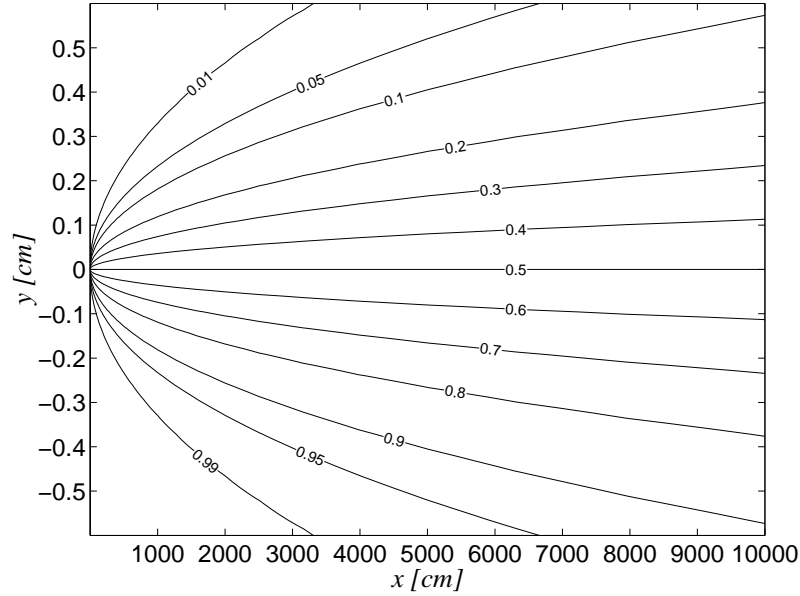


Figura 1.11: Curve di isoconcentrazione  $C/C_0$  nel dominio  $x, y$  a valle della confluenza tra due correnti. La soluzione è ottenuta utilizzando la (1.19).

La (1.15) si può infine scrivere come

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (1.18)$$

Si noti che il termine  $D \partial^2 C / \partial y^2$  non può essere in alcun caso trascurato, perché rappresenta l'unico meccanismo fisico che agisce nella direzione trasversale  $y$ . La soluzione della (1.18) è analoga a quella della diffusione nel tempo di un gradino di concentrazione in un dominio monodimensionale; in questo caso la coordinata  $x$  assume il ruolo del tempo e la  $y$  quello dello spazio nel quale opera la diffusione. Si trova quindi:

$$C = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{y}{\sqrt{4Dx/U}} \right) \quad (1.19)$$

La soluzione è rappresentata in Figura 1.11 nel caso in cui le due correnti non siano confinate da pareti: la nuvola di concentrazione si allarga indefinitamente. Nel caso in cui fossero presenti delle pareti laterali, la concentrazione finale risulterà dipendente dalla larghezza delle due correnti e sarà raggiunta per un valore di  $x$  determinabile in modo convenzionale.

## 1.8 Diffusione trasversale tra due correnti parallele

Due correnti in moto con velocità costante  $U = 1 \text{ cm/s}$  sono separate da un setto divisorio che definisce due zone, aventi concentrazione rispettivamente pari a  $C_1 = 10 \text{ g/m}^3$  e  $C_2 = 25 \text{ g/m}^3$  dello stesso soluto (si veda la Figura 1.12). All'istante  $t = 0$  il setto viene rimosso senza perturbare il campo di moto. Dato un coefficiente di diffusione molecolare  $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ , calcolare per  $t = 3600 \text{ s}$  quanto vale il rapporto tra le concentrazioni misurate nei punti A e B, disposti simmetricamente alla distanza di  $1 \text{ mm}$  dalla originaria posizione del setto.

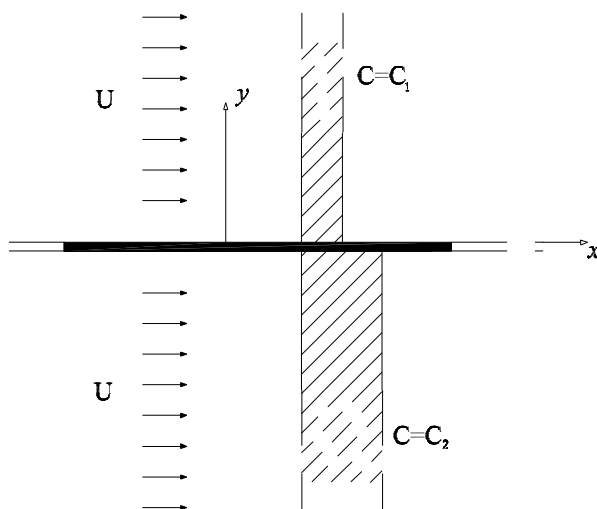


Figura 1.12: Schema di due correnti separate da un setto longitudinale che viene rimosso al tempo  $t = 0$ .

Come nel problema 1.7, il fenomeno è governato dall'equazione di convezione-diffusione (1.15). In questo caso il problema risulta indipendente dalla coordinata  $x$  nel senso che non possono esistere flussi di concentrazione  $D\partial C/\partial x$  nella direzione longitudinale dato che le condizioni iniziali non dipendono da  $x$  e la rimozione del setto avviene in tutto il dominio istantaneamente e non genera alcuna differenza di concentrazione tra posizioni diverse lungo qualsiasi asse parallelo al setto. L'equazione (1.15) si semplifica quindi in

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2},$$

senza alcuna ipotesi sul numero di Peclet. La soluzione è quella per una distribuzione di concentrazione a gradino nella direzione  $y$ , con l'accortezza di osservare che non contano i valori della concentrazione nelle due zone, ma la loro differenza, dato che l'equazione per la concentrazione è lineare e vale la sovrapposizione degli effetti. Assumiamo che il punto A con concentrazione

iniziale  $C_1$  si trovi nella regione con  $x > 0$ ; la soluzione è

$$C = C_1 + \frac{C_2 - C_1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] = \frac{C_1 + C_2}{2} - \frac{C_2 - C_1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4Dt}} \right) \quad (1.20)$$

e può essere valutata in  $y = \pm 0.1 \text{ cm}$  al tempo voluto. Si trova che, per  $t = 3600 \text{ s}$ ,  $C_A = 15.32 \text{ g/m}^3$  e  $C_B = 19.68 \text{ g/m}^3$ , da cui un rapporto pari a 0.78; il rapporto iniziale  $C_1/C_2 = 0.4$  aumenta asintoticamente verso il valore 1 all'avanzare del tempo. Dalla (1.20) si vede infatti che per  $t \rightarrow \infty$ , l'argomento della funzione erf tende a 0 e quindi il valore della concentrazione tende ovunque al valore medio  $(C_1 + C_2)/2$ .

## 1.9 Punto sorgente in un fluido in movimento

*Calcolare il campo di concentrazione dovuto ad un punto sorgente posto nell'origine degli assi in un dominio tridimensionale non confinato. Il fluido è in moto con velocità  $U$  costante, diretta nella direzione dell'asse  $x$ ; si assuma un coefficiente di diffusione  $D$  omogeneo (costante ovunque) e isotropo (indipendente dalla direzione).*

Definiamo punto sorgente uno scarico che rilasciata una portata massica  $\dot{M} = dM/dt$ . La diffusione di massa in un dominio tridimensionale non confinato di fluido in moto con velocità  $U$  è governata dall'equazione di convezione-diffusione

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (1.21)$$

Introducendo la variabile

$$\xi = x - U(t - \tau), \quad (1.22)$$

dove  $\tau$  è l'istante temporale in cui avviene lo scarico infinitesimo  $\dot{M}(\tau)d\tau$ , l'equazione (1.21) si semplifica nell'equazione di pura diffusione tridimensionale (il procedimento è analogo a quello descritto nella nota 2):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Stiamo infatti utilizzando un sistema di riferimento inerziale in moto con la stessa velocità  $U$  della corrente. La soluzione può essere ottenuta come sovrapposizione

$$C(\xi, y, z, t) = \int_{-\infty}^t \dot{M}(\tau) C_u d\tau \quad (1.23)$$

della soluzione elementare

$$C_u = \frac{1}{[4\pi D(t - \tau)]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\xi - x_0)^2}{4D(t - \tau)} \right] \exp \left[ -\frac{(y - y_0)^2}{4D(t - \tau)} \right] \exp \left[ -\frac{(z - z_0)^2}{4D(t - \tau)} \right].$$



che nel caso in cui  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  si semplifica in

$$C_u = \frac{1}{[4\pi D(t - \tau)]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + y^2 + z^2}{4D(t - \tau)} \right]. \quad (1.24)$$

**Soluzione semplificata.** Nel caso generale in cui il numero di Peclet sia grande (si veda l'esercizio 1.7), è lecito trascurare la diffusione in direzione longitudinale in quanto risulta piccola in confronto con la convezione nella stessa direzione associata con la velocità  $U$ . La (1.21) si semplifica quindi nell'equazione

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

che, introdotta la trasformazione di coordinate (1.22), ammette la soluzione

$$C(\xi, y, z, t) = \frac{\dot{M}(\tau)}{4\pi D(t - \tau)U} \exp \left[ -\frac{y^2 + z^2}{4D(t - \tau)} \right] \quad (1.25)$$

che può essere riscritta più convenientemente ritornando alla variabile  $x$ :

$$C(x, y, z, t) = \frac{\dot{M}(t - x/U)}{4\pi Dx} \exp \left[ -\frac{(y^2 + z^2)U}{4Dx} \right] \quad (1.26)$$

Questo tipo di soluzione, che trascura il flusso diffusivo longitudinale, implica che la massa di soluto  $\dot{M}(\tau)d\tau$  scaricata nell'intervallo temporale  $(\tau, \tau + d\tau)$  rimane confinata nella porzione di dominio  $(x, x + dx)$ , infinita nelle direzioni  $y$  e  $z$ , in moto con velocità  $U$ . La posizione e lo spessore di questa 'fetta' di fluido al tempo  $t$  sono rispettivamente  $x = U(t - \tau)$  e  $dx = Udt$ .

**Il caso stazionario.** Un caso particolare è quello in cui la portata di massa  $\dot{M}$  è costante nel tempo. E' interessante notare che la (1.26) diventa una soluzione stazionaria

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi Dx} \exp \left[ -\frac{(y^2 + z^2)U}{4Dx} \right] \quad (1.27)$$

che dipende solo da  $x$ ,  $y$  e  $z$ . La (1.25) invece è invariante in  $\xi$  per qualsivoglia istante di scarico  $\tau$ ; possiamo quindi assumere  $\tau = 0$  senza perdere di generalità e ottenere una soluzione che decade nel tempo seguendo la 'fetta' di fluido nella posizione  $x = Ut$ .

Possiamo avere una stima dell'errore introdotto dal trascurare la diffusione longitudinale utilizzando la soluzione (1.27) per paragonare i termini  $U\partial C/\partial x$  e  $D\partial^2 C/\partial x^2$ . Valutandoli per semplicità nella retta  $y = z = 0$  si ottiene

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\dot{M}}{2\pi x^3}, \quad U \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\dot{M}U}{4\pi Dx^2}$$

da cui si può valutare che il rapporto (in valore assoluto) tra diffusione e convezione longitudinale è pari a  $2D/(Ux) = 1/P_e$ , ossia l'inverso del numero di Peclet valutato utilizzando la distanza  $x$  dallo scarico. L'ipotesi che

$Pe \gg 1$  si traduce quindi nella definizione del campo di validità della (1.27) per  $x \gg 2D/U$ .

Per quanto riguarda l'integrazione (1.23) della (1.24) nel caso stazionario, indichiamo con  $\alpha = t - \tau$  la distanza temporale tra l'istante considerato e lo scarico infinitesimo. La (1.23), con la (1.24), si può scrivere come

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{(4\pi D)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(x - U\alpha)^2 + y^2 + z^2}{4D\alpha} \right] d\alpha$$

la cui integrazione non è banale (si veda l'esercizio 2.3).

## 1.10 Diffusore di lunghezza finita

*Un diffusore di lunghezza  $L$  scarica una portata di massa  $\dot{M}$  di soluto in un fluido in moto con velocità  $U$  costante. Lo scarico avviene uniformemente lungo tutta la lunghezza del diffusore. Calcolare il campo di concentrazione e valutare a quale distanza il diffusore può essere approssimato con una sorgente puntuale (si consideri lo scarico stazionario).*

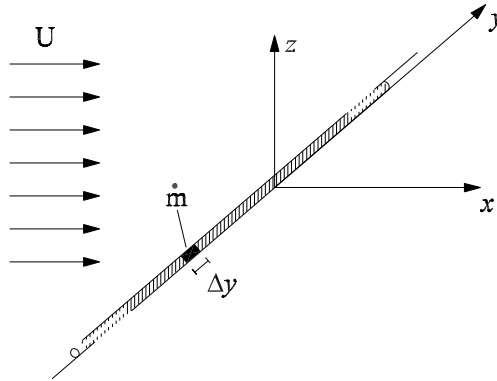


Figura 1.13: Un diffusore come somma di sorgenti infinitesime  $\dot{m}$ .

Il diffusore può essere schematizzato come un insieme di sorgenti elementari, poste in  $x = z = 0$  lungo la coordinata  $y$ , che scaricano istantaneamente una massa  $\dot{m} dt dy$ , dove

$$\dot{m} = \frac{\dot{M}}{L}$$

è la portata massica per unità di lunghezza (si veda la Figura 1.13). Trascurando il contributo della diffusione longitudinale, come discusso nell'esercizio 1.9, ogni soluzione elementare assume la forma

$$dC = \frac{\dot{m}(\eta, \tau) d\eta}{4\pi Dx} \exp \left[ -\frac{(y - \eta)^2 + z^2}{4Dx/U} \right] \quad (1.28)$$

dove  $\tau = t - x/U$  è l'istante in cui viene scaricata la massa ed  $\eta$  è il generico valore della coordinata trasversale  $y$ . La soluzione complessiva è data dall'integrale

della (1.28):

$$C(x, y, z) = \int_{y_a}^{y_b} dC(\eta) \quad (1.29)$$

dove  $y_a$  e  $y_b$  sono le coordinate iniziali e finali del diffusore. Se  $\dot{m}$  è costante in  $y$ , la (1.29) si semplifica in

$$\begin{aligned} C(x, y, z) &= \frac{\dot{m}(\tau)}{4\pi Dx} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dx/U}\right) \int_{y_a}^{y_b} \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2}{4Dx/U}\right] d\eta = \\ &= \frac{\dot{m}(\tau)}{\sqrt{4\pi DUx}} \exp\left[-\frac{z^2}{4Dx/U}\right] \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y-y_a}{\sqrt{4Dx/U}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-y_b}{\sqrt{4Dx/U}}\right) \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

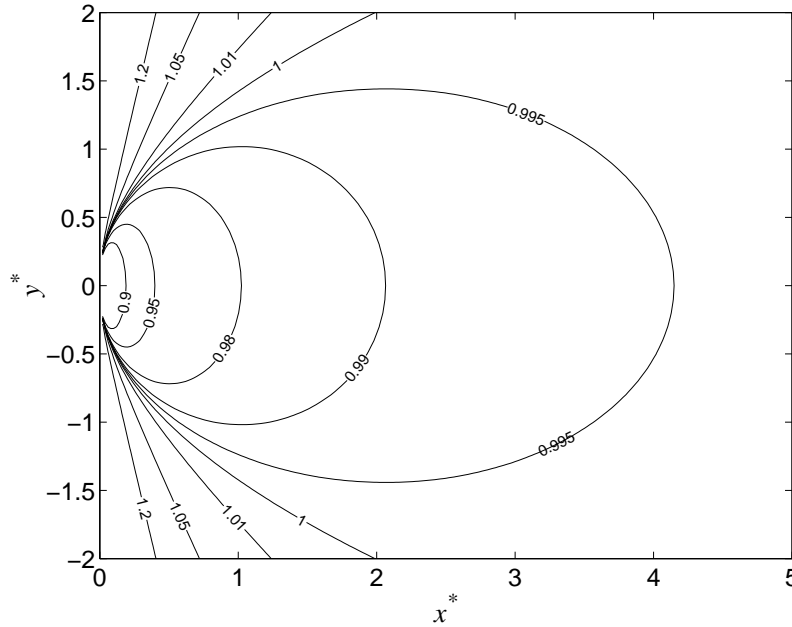


Figura 1.14: Rapporto  $C_d^*/C_p^*$  tra le concentrazioni adimensionali relative ad un diffusore di lunghezza finita e ad uno scarico puntuale, sulla base della (1.32).

Assumendo che lo scarico sia stazionario  $\dot{m}(\tau) = \dot{m} = \dot{M}/L$  e la (1.30) può essere confrontata con la soluzione (1.27) trovata per una sorgente stazionaria puntuale. Il problema può essere reso adimensionale utilizzando le seguenti scale:

$$x = x^* \frac{UL^2}{D}, \quad y = y^* L, \quad z = z^* L, \quad C = C^* \frac{\dot{M}}{UL^2} \quad (1.31)$$

in cui la scala geometrica è la dimensione del diffusore. Troviamo così la soluzione per il diffusore posto in  $x = z = 0$  tra  $y_a = -L/2$  e  $y_b = L/2$ :

$$C_d^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \exp\left(-\frac{z^{*2}}{4x^*}\right) \cdot \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y^* + 1/2}{\sqrt{4x^*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y^* - 1/2}{\sqrt{4x^*}}\right) \right]$$

e, dalla (1.27), la soluzione per il punto sorgente collocato in  $x = y = z = 0$ :

$$C_p^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{4\pi x^*} \exp\left(-\frac{z^{*2}}{4x^*}\right) \exp\left(-\frac{y^{*2}}{4x^*}\right)$$

Il loro rapporto, indipendente da  $z^*$ , risulta

$$\frac{C_d^*}{C_p^*} = \sqrt{4\pi x^*} \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y^* + 1/2}{\sqrt{4x^*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y^* - 1/2}{\sqrt{4x^*}}\right) \right] \exp\left(\frac{y^{*2}}{4x^*}\right) \quad (1.32)$$

In Figura 1.14 è rappresentata la (1.32) nel piano  $x^*, y^*$ . Si può notare come la scala longitudinale  $UL^2/D$  risulti appropriata per il confronto richiesto.

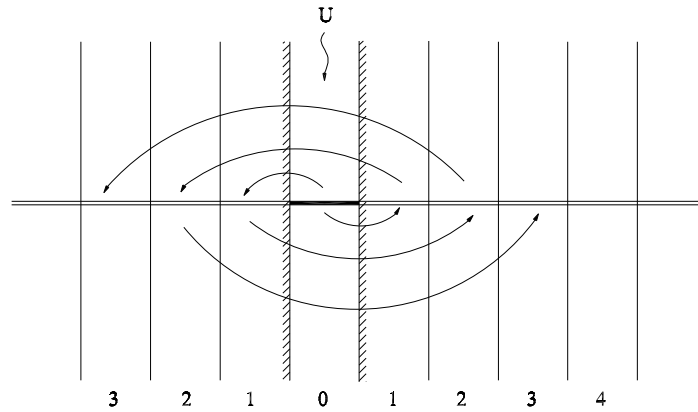


Figura 1.15: Rappresentazione schematica di un diffusore posto tra due sponde.

**Diffusore di lunghezza infinita.** Se si considera un diffusore di lunghezza infinita  $y_a \rightarrow -\infty$  e  $y_b \rightarrow \infty$  e la (1.30) si riduce a

$$C(x, z) = \frac{\dot{m}(\tau)}{\sqrt{4\pi D U x}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dx/U}\right). \quad (1.33)$$

È interessante notare che un diffusore di lunghezza finita risulta equivalente a un diffusore infinito quando la sua lunghezza  $L$  è pari alla larghezza del canale. Per tener conto delle pareti è infatti necessario introdurre delle sorgenti immagine (dei diffusori di lunghezza  $L$ ) che, replicate all'infinito per la presenza delle sponde, vanno ad occupare l'intero asse  $y$ , come si evince dallo schema di Figura 1.15.

## 1.11 Scarico puntuale in acqua bassa

*Si consideri uno scarico puntuale stazionario posto sul fondo di un canale infinitamente largo, di profondità  $Y$ . La velocità  $U$  è costante sull'intera sezione trasversale. Verificare quando lo scarico puntuale può essere approssimato con un diffusore verticale (si veda la Figura 1.16).*

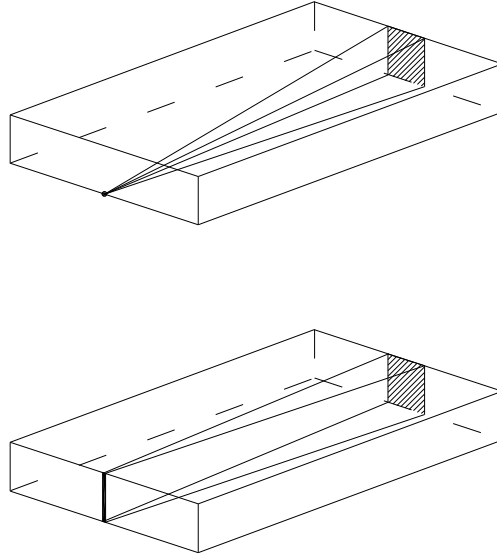


Figura 1.16: Rappresentazione schematica del confronto tra un diffusore verticale e un punto sorgente per uno scarico in acqua bassa.

Quando la dimensione verticale è molto minore delle dimensioni orizzontali, si parla comunemente di *acqua bassa*. In questo caso assumiamo che la larghezza  $B \rightarrow \infty$ , così da rispettare per definizione la condizione  $B/Y \gg 1$ .

Assumiamo che  $Pe \gg 1$  e quindi che la diffusione longitudinale sia trascurabile in confronto alla convezione nella stessa direzione, come discusso in precedenza. La soluzione per uno scarico puntuale può essere derivata dalla (1.27) con l'utilizzo delle sorgenti immagine per tenere in considerazione la presenza delle pareti:

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi Dx} \exp\left(-\frac{y^2 U}{4Dx}\right) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - z_0 + 2jY)^2}{4Dx/U}\right] + \exp\left[-\frac{(z + z_0 + 2jY)^2}{4Dx/U}\right] \right\} \quad (1.34)$$

dove  $z_0$  è la coordinata verticale del punto di scarico.

Quando il mescolamento sulla verticale è stato ottenuto<sup>3</sup>, la (1.34) si può scrivere come

$$\bar{C}(x, y) = \frac{\dot{M}/Y}{\sqrt{4\pi DUx}} \exp\left(-\frac{y^2 U}{4Dx}\right) \quad (1.35)$$

come già trovato per la (1.33), poiché un diffusore che occupa lo spazio tra due pareti è equivalente a un diffusore infinito. E' infatti sufficiente integrare la soluzione fondamentale relativa ad uno scarico infinitesimo  $\dot{m}(z_0)dz_0 = \dot{M}/Y dz_0$

<sup>3</sup>Il mescolamento può essere definito come raggiunto solo definendo convenzionalmente un rapporto tra la concentrazione minima e quella massima sulla verticale. In questo esercizio utilizzeremo il valore  $C_{min}/C_{max} = 0.98$ .

lungo tutto il dominio verticale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{M}/Y}{4\pi Dx} \exp\left(-\frac{y^2 U}{4Dx}\right) \exp\left[-\frac{(z-z_0)^2}{4Dx/U}\right] dz_0$$

per ritrovare la (1.35).

Utilizzando le scale già introdotte con la (1.31), sostituendo  $L = Y$ , la (1.34) e la (1.35) si possono scrivere rispettivamente come

$$C^*(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{4\pi x^*} \exp\left(-\frac{y^{*2}}{4x^*}\right) \cdot 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z^* + 2j)^2}{4x^*}\right] \quad (1.36)$$

$$\bar{C}^*(x^*, y^*) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \exp\left(-\frac{y^{*2}}{4x^*}\right) \quad (1.37)$$

avendo posto il punto sorgente sul fondo ( $z_0^* = 0$ ).

Il rapporto  $C_{min}^*/C_{max}^* = 0.98$  è raggiunto alla coordinata  $x^* = 0.536$  (per  $x^* = 0.134$  nel caso  $z_0^* = 0.5$ ) indipendentemente dalla posizione in  $y$ . Infatti nel caso  $z_0^* = 0$ ,  $C_{min}^* = C^*(z^* = 1)$  e  $C_{max}^* = C^*(z^* = 0)$  e dalla (1.36) si ottiene

$$\frac{C_{min}^*}{C_{max}^*} = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2j)^2}{4x^*}\right] \right\} / \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(1+2j)^2}{4x^*}\right] \right\}$$

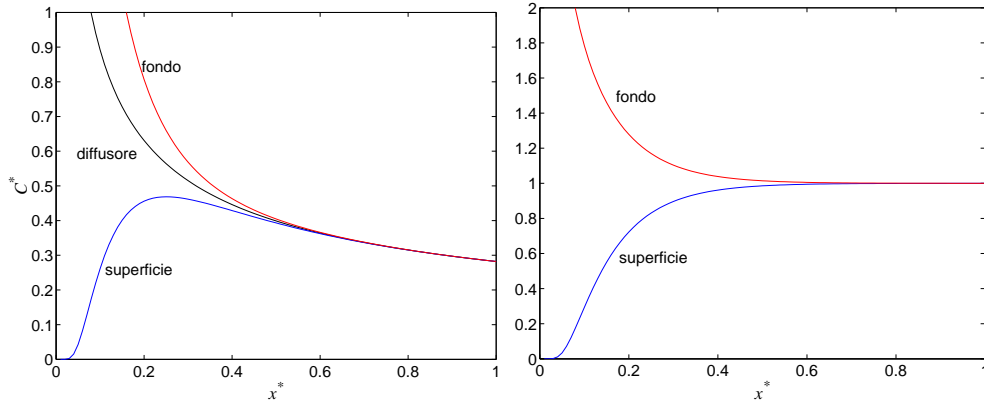


Figura 1.17: Confronto tra punto sorgente e diffusore verticale. A sinistra sono riportati per  $y^* = 0$  i valori della concentrazione per un diffusore (1.37) e quelli per uno scarico posto sul fondo (1.36), in superficie e al fondo. A destra viene mostrato il rapporto (1.38), in superficie e al fondo.

Analogamente, il rapporto  $C^*/\bar{C}^*$  dipende solamente dalla coordinata  $x^*$ :

$$\frac{C^*}{\bar{C}^*} = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \cdot 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z^* + 2j)^2}{4x^*}\right] \quad (1.38)$$

Data l'indipendenza da  $y$ , a valle della posizione  $x^*$  in cui si considera avvenuto il mescolamento verticale, la soluzione (1.37) per il diffusore è sostanzialmente esatta. In Figura 1.17 si può osservare il confronto tra le soluzioni al variare della distanza  $x^*$  dallo scarico.

**Canale di larghezza finita.** Se il canale ha una larghezza  $B$  finita è sufficiente introdurre le sorgenti immagine dovute alla presenza delle sponde, sommando i loro contributi al termine  $\exp(-y^{*2}/4x^*)$ . Data l'indipendenza direzionale della soluzione (1.34) tutte le considerazioni fatte per  $B \rightarrow \infty$  restano valide. Si faccia però attenzione al fatto che se la dimensione  $B$  è comparabile con  $Y$  perde di significato operare la media in una direzione. Infatti, quando è avvenuto il completo mescolamento nella direzione minore, quanto più le dimensioni di  $B$  e  $Y$  sono simili tanto più anche il mescolamento nell'altra direzione è prossimo a realizzarsi e quindi diventa vantaggioso definire semplicemente una media sull'intera sezione trasversale del canale.





## Capitolo 2

# Esercizi sulla diluizione in campo vicino

In questo capitolo vengono affrontati alcuni problemi che sono dominati dal processo di mescolamento lungo la coordinata verticale. Nei corsi d'acqua, infatti, la dimensione verticale (profondità della corrente) è usualmente molto minore di quella trasversale e della scala di variazione longitudinale. Questa semplice considerazione geometrica implica che il mescolamento sulla verticale avviene su una scala temporale che è tipicamente minore della scala temporale legata al miscelamento sulla trasversale. Ciò non significa, d'altra parte, che i due processi avvengano separatamente, l'uno di seguito all'altro; si ha invece che, alla distanza in cui il mescolamento verticale si può considerare concluso, il mescolamento trasversale è in piena azione e la nuvola di tracciante ha spesso una dimensione caratteristica trasversale considerevole.

**Coefficienti costanti.** Negli esercizi di questo capitolo utilizzeremo sempre la soluzione a coefficienti costati, ovvero ipotizzeremo che la velocità e il coefficiente di diffusione siano costanti su tutta la sezione. Si tratta di un'approssimazione, discussa nella seconda parte delle dispense del corso di Idraulica Ambientale, necessaria per poter ottenere delle soluzioni analitiche.

### 2.1 Diffusore trasversale

*Sia dato un corso d'acqua caratterizzato dai seguenti valori dei parametri:  $B = 100\text{ m}$ ,  $Q = 100\text{ m}^3/\text{s}$  (durante le condizioni di magra),  $Y = 2.5\text{ m}$ ,  $i_f = 10^{-4}$ . Viene realizzata un'opera di scarico di liquami pretrattati che presenta un tratto terminale costituito da un diffusore di lunghezza pari alla larghezza del canale disposto sul fondo trasversalmente rispetto all'asse della corrente. La portata di liquame scaricata è pari a  $Q_l = 0.5\text{ m}^3/\text{s}$ , con una concentrazione di  $BOD_5$  pari a  $C_l = 260\text{ g/m}^3$ .*

*Si valuti la lunghezza di completo miscelamento sulla verticale e si determini la regione in cui la concentrazione eccede  $2\text{ g/m}^3$ .*

Trascurando gli effetti dinamici dello scarico e il processo di miscelamento indotto dall'efflusso attraverso gli ugelli del diffusore, si può determinare la distanza  $L_{mv}$  per il completo miscelamento verticale. Assumiamo che la sezione sia rettangolare (e quindi profondità locale costante  $Y(y) = Y$ ). Assumiamo per semplicità che la velocità  $U(y, z)$  sia costante sulla sezione e pari alla velocità media  $U$  della corrente:

$$U = \frac{Q}{BY} = 0.4 \text{ m/s}$$

La velocità d'attrito può essere valutata come

$$u_* = \sqrt{g R_h i_f} = 0.048 \text{ m/s}$$

con  $R_h$  raggio idraulico della sezione. Il coefficiente di diffusione turbolenta mediato sulla verticale è

$$\overline{D_z^t} = 0.067 u_* Y = 8.04 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

La soluzione del problema è data in questo caso dalla soluzione relativa al processo di miscelamento lungo la verticale, posto che quello lungo la trasversale è operato dal diffusore, di larghezza comparabile con quella del corso d'acqua. Troviamo quindi

$$C = \frac{\dot{M}/B}{\sqrt{4\pi \overline{D_z^t} U x}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - z_0 + 2jY)^2}{4\overline{D_z^t} x/U} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + z_0 + 2jY)^2}{4\overline{D_z^t} x/U} \right] \right\} \quad (2.1)$$

che può essere riscritta in termini adimensionali utilizzando

$$x^* = \frac{x}{UY^2/\overline{D_z^t}}, \quad z^* = \frac{z}{Y}, \quad C^* = \frac{C}{C_m}, \quad (2.2)$$

avendo definito la concentrazione asintotica

$$C_m = \frac{\dot{M}}{Q} = \frac{Q_l C_l}{Q} = 1.3 \text{ g/m}^3. \quad (2.3)$$

dove, a rigore, al denominatore dovrebbe essere  $Q + Q_l$  in luogo di  $Q$  (infatti la portata del corso d'acqua aumenta dopo lo scarico); essendo però solitamente  $Q_l \ll Q$ , i risultati non cambiano significativamente. La (2.1) fornisce quindi

$$C^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(z^* - z_0^* + 2j)^2}{4x^*} \right] + \exp \left[ -\frac{(z^* + z_0^* + 2j)^2}{4x^*} \right] \right\}. \quad (2.4)$$

Nel caso in esame, in cui il diffusore si trova sul fondo ( $z_0^* = 0$ ), ossia in corrispondenza di una parete, la soluzione (2.4) può essere semplificata nella forma

$$C^* = \frac{1}{\sqrt{\pi x^*}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(z^* + 2j)^2}{4x^*} \right]. \quad (2.5)$$

Il processo di miscelamento si esaurisce quando la concentrazione è costante ovunque. Si assume convenzionalmente che sia completo quando  $P_m =$

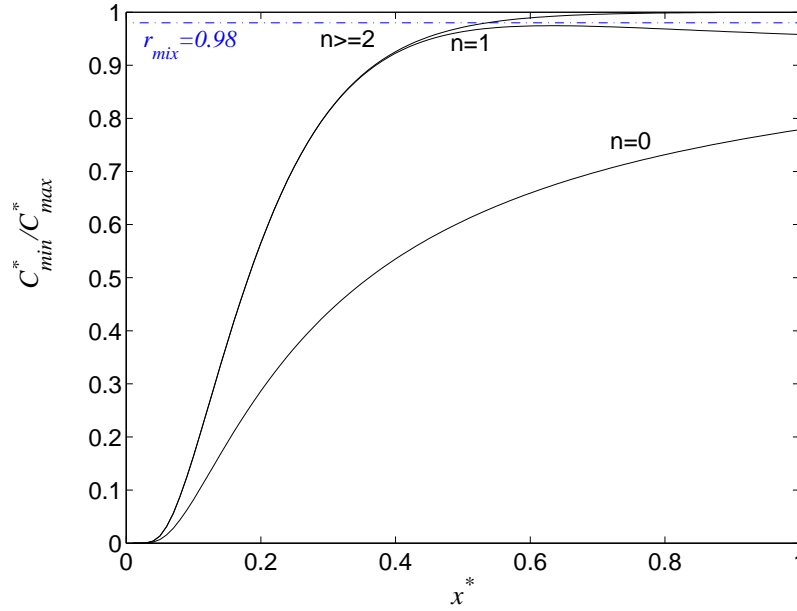


Figura 2.1: Rapporto di mescolamento  $C_{min}^*/C_{max}^*$  al variare di  $x^*$ ; è indicata la linea convenzionale  $C_{min}^*/C_{max}^* = 0.98$ . Le curve dipendono dal numero  $n$  di sorgenti immagine considerato: si nota che per  $x^* < 1$  sono sufficienti due sorgenti.

$C_{min}/C_{max} > 0.98$ . Considerando che, nel caso di scarico sul fondo, il massimo di concentrazione è sempre localizzato sul fondo ( $z^* = 0$ ) e il minimo in superficie libera ( $z^* = 1$ ), dalla (2.5) si trova

$$P_m = \frac{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(1+2j)^2}{4x^*} \right]}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{j^2}{x^*} \right)} > 0.98$$

Utilizzando i risultati in Figura 2.1 si trova che la coordinata longitudinale adimensionale alla quale si realizza convenzionalmente il completo miscelamento è

$$x_{mv}^* = 0.536$$

da cui si ottiene

$$L_{mv} = x_{mv}^* \frac{UY^2}{D_z^t} = 166 \text{ m}$$

Si noti che la soluzione sarebbe a rigori valida solo per un diffusore di larghezza pari a quella del canale.

Il miscelamento sulla verticale avviene in un tempo pari

$$T_{mv} = L_{mv}/U = \frac{Y^2}{D_z^t} = 415 \text{ s}.$$

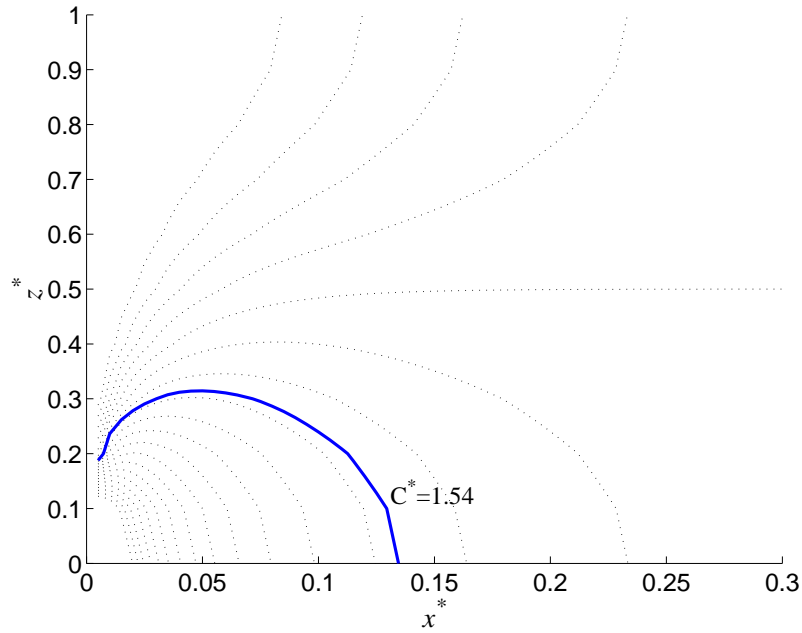


Figura 2.2: Mappa bidimensionale a curve di livello per la concentrazione  $C^*(x^*, z^*)$  ottenuta dalla (2.5). In linea continua è disegnata la curva  $C^* = 1.54$  richiesta dalla (2.6).

Su tale scala temporale non è apprezzabile il decadimento biochimico. Possiamo così considerare la concentrazione espressa dalla (2.3) come un valore asintotico sulla scala del problema che stiamo considerando.

Dovendo trovare la regione in cui la concentrazione è superiore a un valore dato  $C_s = 2 \text{ g/m}^3$ , si richiede

$$C^* > \frac{C_s}{C_m} = 1.54. \quad (2.6)$$

Dalla Figura 2.2 si ottiene un confine approssimativo di tale regione come

$$0 < z^* < 0.32, \quad 0 < x^* < 0.14,$$

che può essere riscritto in termini dimensionali utilizzando le scale (2.2) come

$$0 < z < 0.79 \text{ m}, \quad 0 < x < 42 \text{ m}.$$

## 2.2 Scarico puntuale

*Un collettore fognario scarica un liquame caratterizzato da BOD pari a  $200 \text{ g/m}^3$  con una portata di  $2 \text{ m}^3/\text{s}$ . Il punto di scarico è localizzato al centro sul fondo del canale. I dati caratteristici sono:  $B = 100 \text{ m}$ ,  $Y = 3 \text{ m}$ ,  $U = 0.3 \text{ m/s}$ ,  $u_* = 0.04 \text{ m/s}$ . Determinare la distanza dal punto di efflusso alla quale il BOD si è ridotto a valori non superiori a  $20 \text{ g/m}^3$ , ovunque nella sezione.*

Il punto di scarico ( $z = 0\text{ m}$ ,  $y = B/2$ ) è caratterizzato da coordinate adimensionali  $z_0^* = 0$ ,  $y_0^* = 0.5$ . La portata liquida è  $Q = UBY = 90\text{ m}^3/\text{s}$ , la portata massica di BOD è  $\dot{M} = 200\text{ g}/\text{m}^3 \cdot 2\text{ m}^3/\text{s} = 400\text{ g}/\text{s}$ . Trattandosi di uno scarico stazionario e dovendo considerare la prima fase del miscelamento, si trascura la diffusione longitudinale e il decadimento biochimico. Si assume che il coefficiente di diffusione in direzione trasversale sia doppio rispetto a quello verticale:

$$\overline{D}_y^t = 2\overline{D}_z^t$$

La soluzione dell'equazione

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \overline{D}_z^t \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \overline{D}_y^t \frac{\partial^2 C}{\partial y^2},$$

assegnate le condizioni al contorno, è

$$C = \frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{\overline{D}_z^t\overline{D}_y^t}x} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2 \exp \left[ -\frac{(z + 2jY)^2}{4\overline{D}_z^t x/U} \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y - B/2 + 2jB)^2}{4\overline{D}_y^t x/U} \right] + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(y + B/2 + 2jB)^2}{4\overline{D}_y^t x/U} \right] \right\} \quad (2.7)$$

Introducendo la concentrazione asintotica

$$C_m = \frac{\dot{M}}{Q} = 4.44\text{ g}/\text{m}^3$$

e utilizzando le usuali scale spaziali  $x^* = \frac{x}{UY^2/\overline{D}_z^t}$ ,  $y^* = \frac{y}{B}$ ,  $z^* = \frac{z}{Y}$ , la (2.7) può essere riscritta come

$$C^* = \frac{\beta}{4\pi\sqrt{2}x^*} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2 \exp \left[ -\frac{(z^* + 2j)^2}{4x^*} \right] \right\} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\beta^2 \frac{(y^* - 0.5 + 2j)^2}{8x^*} \right] + \exp \left[ -\beta^2 \frac{(y^* + 0.5 + 2j)^2}{8x^*} \right] \right\} \quad (2.8)$$

dove  $\beta = B/Y = 33.3$ .

La richiesta  $C < 20\text{ g}/\text{m}^3$  si traduce di conseguenza nella

$$C^* < C_s^* = \frac{C}{C_m} = 4.50 \quad (2.9)$$

che deve essere rispettata nel punto corrispondente alle coordinate dello scarico  $z^* = 0$ ,  $y^* = 0.5$ , dove la concentrazione è massima in ogni sezione trasversale. La (2.9) insieme alla (2.8) implicano quindi

$$\frac{\beta}{2\pi\sqrt{2}x^*} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-j^2/x^*} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left( -\frac{\beta^2 j^2}{2x^*} \right) + \exp \left[ -\frac{\beta^2 (1 + 2j)^2}{8x^*} \right] \right\} < C_s^* \quad (2.10)$$

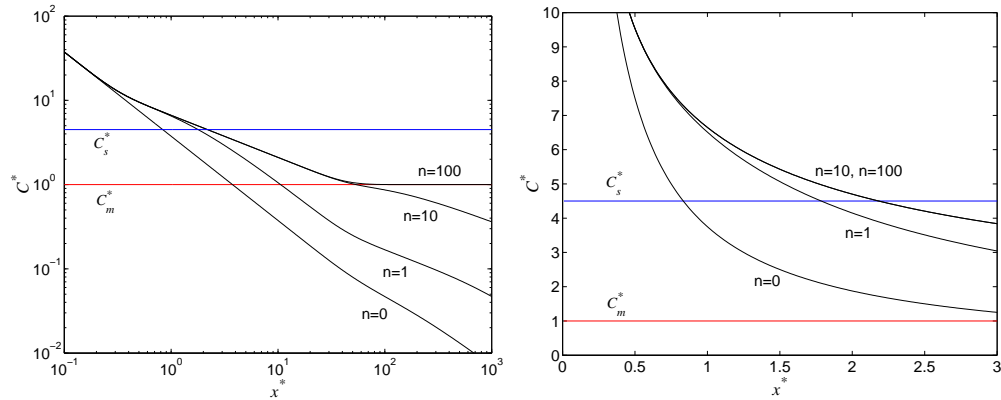


Figura 2.3: Concentrazione  $C^*$  in funzione della coordinata adimensionale  $x^*$ , valutata nel punto  $z^* = 0$  e  $y^* = 0.5$ . Il grafico di sinistra è bilogartimico per poter osservare il fenomeno nella sua globalità; il grafico di destra rappresenta una parte del precedente nella scala naturale. Le diverse curve corrispondono alla soluzione della (2.10) con un diverso numero  $n$  di sorgenti immagine; si noti che sarebbe opportuno utilizzare  $n$  diversi per le sommatorie in  $y^*$  e in  $z^*$ .

che risolta rispetto all'incognita  $x^*$  fornisce

$$x^* > 2.18 \quad \Rightarrow \quad x > 733 \text{ m}$$

Si noti che la (2.10) prevede una sommatoria di infiniti termini; tuttavia, anche nel caso in cui si scelga di considerare solo  $n$  termini, la soluzione per  $x$  non è esprimibile in forma esplicita. Il metodo più chiaro per trovare il valore cercato è quello di rappresentare la concentrazione in un grafico in funzione di  $x^*$ , come è stato fatto in Figura 2.3, e individuare l'intersezione con la retta  $C^* = C_s^*$ . Possiamo vedere che, a seconda della distanza che stiamo considerando, dobbiamo considerare un numero diverso di sorgenti immagine; in particolare, a distanze maggiori dalla sorgente deve corrispondere un numero maggiore di sorgenti immagine.

**Confronto con il diffusore trasversale.** Nel caso in cui sia presente un diffusore di larghezza pari a quella del canale, la condizione  $C^* < C_s^*$  viene raggiunta molto più velocemente. Si trova infatti che la concentrazione è inferiore alla soglia per  $x^* > 0.0157$ , corrispondente a  $x > 5.28 \text{ m}$ . La spiegazione del fenomeno è chiara quando si consideri che il diffusore compie la parte più gravosa del processo di mescolamento, cioè quello lungo la trasversale che deve avvenire su una scala di  $50 \text{ m}$  invece dei  $3 \text{ m}$  lungo la verticale.

## 2.3 Sorgente puntuale non stazionaria

*Sia dato uno impianto di depurazione che scarica una portata massica  $\dot{M}$  variabile secondo la Tabella 2.1 in un corso d'acqua caratterizzato dai seguenti dati:  $B = 100 \text{ m}$ ,  $Q_{\min} = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Y = 2 \text{ m}$ ,  $i_f = 10^{-4}$ . Lo scarico è localizzato*

$t$	$\dot{M}$	$t$	$\dot{M}$	$t$	$\dot{M}$	$t$	$\dot{M}$
1	10	7	100	13	70	19	90
2	5	8	150	14	130	20	130
3	5	9	100	15	30	21	100
4	5	10	70	16	20	22	70
5	5	11	60	17	20	23	60
6	20	12	90	18	20	24	20

Tabella 2.1: Portata massica  $\dot{M}[g/s]$  scaricata in funzione del tempo  $t[h]$  durante una giornata normale.

nel punto  $z_0 = Y/2$ ,  $y_0 = B/2$ . Valutare l'andamento della concentrazione nel tempo ad una distanza  $x^* = 0.134$ .

La variazione giornaliera è tipica degli impianti di trattamento delle acque reflue. Obiettivo dell'esercizio è comprendere quando è possibile utilizzare la soluzione valida per lo scarico stazionario anche nel caso di una variabilità dello stesso e valutare quando questa possa essere considerata lenta.

Ipotizziamo per semplicità di considerare un processo in cui le caratteristiche geometriche e idrodinamiche si mantengano costanti sulla sezione e nel tratto longitudinale considerato. La velocità media è  $U = Q/(BY) = 0.50 m/s$ ; la velocità d'attrito è  $u_f = \sqrt{g R_h i_f} = 0.043 m/s$ . Si assumono i coefficienti di diffusione turbolenta

$$\overline{D_z^t} = 0.067 u_* Y = 5.8 \cdot 10^{-3} m^2/s, \quad \overline{D_x^t} = \overline{D_z^t}, \quad \overline{D_y^t} = 2 \overline{D_z^t}$$

e si adimensionalizza il problema come segue:

$$z^* = \frac{z}{Y}, \quad y^* = \frac{y}{B}, \quad x^* = \frac{x}{UY^2/\overline{D_z^t}}.$$

La media giornaliera della portata massica scaricata è  $\langle \dot{M} \rangle = 57.5 g/s$ , che fornisce una concentrazione asintotica media

$$\langle C_m \rangle = \langle \dot{M} \rangle / Q = 0.575 g/m^3. \quad (2.11)$$

La concentrazione può essere valutata mediante l'integrazione nel tempo

$$C(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^t \dot{M}(\tau) C_u d\tau \quad (2.12)$$

dove  $C_u$  è la soluzione elementare relativa ad uno scarico istantaneo di una

massa unitaria al tempo  $\tau$ :

$$C_u = \frac{1}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2} \sqrt{D_x^t D_y^t D_z^t}} \exp \left\{ -\frac{[x - U(t-\tau)]^2}{4D_x^t(t-\tau)} \right\} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(y - y_0 + 2jB)^2}{4D_y^t(t-\tau)} \right] + \exp \left[ -\frac{(y + y_0 + 2jB)^2}{4D_y^t(t-\tau)} \right] \right\} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - z_0 + 2jY)^2}{4D_z^t(t-\tau)} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + z_0 + 2jY)^2}{4D_z^t(t-\tau)} \right] \right\} \quad (2.13)$$

Osserviamo come è fatta la soluzione alla coordinata  $x^* = 0.134$ , che in un processo bidimensionale stazionario corrisponde all'avvenuto mescolamento quando lo scarico si trova a metà della profondità. Dimensionalmente stiamo considerando

$$x = 0.134 \cdot UY^2 / \overline{D_z^t} = 46 \text{ m}.$$

In Figura 2.4 sono riportate le curve di isoconcentrazione per due sezioni, distanti rispettivamente  $x^* = 0.0134$  (a sinistra, fase iniziale del mescolamento lungo la verticale) e  $x^* = 0.134$  (a destra, quando il mescolamento lungo la verticale è praticamente concluso). Le curve sono ricavate per uno scarico istantaneo puntuale in  $y_0^* = 0.5$  e  $z_0^* = 0.5$  sulla base della soluzione unitaria (2.13); sono valutate nell'istante in cui si localizza il massimo per l'assegnata coordinata  $x$ , ossia per  $t = x/U$ . Possiamo notare due cose: nella prima parte del processo, il mescolamento non risente della presenza delle pareti e la nuvola ha una forma ellissoidale; quando invece il mescolamento sulla verticale è avvenuto, le curve sono pressoché parallele e verticali. Si faccia attenzione però che la nuvola ha comunque una dimensione trasversale non trascurabile.

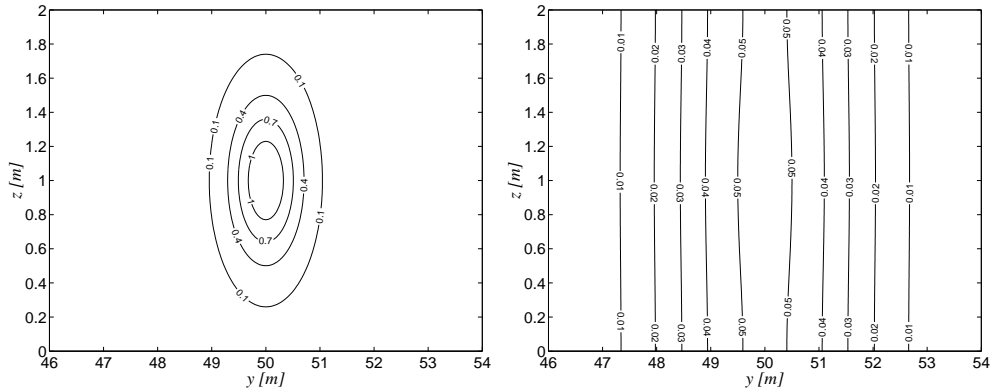


Figura 2.4: Curve di isoconcentrazione nella sezione trasversale dovute ad uno scarico unitario e valutate nella sezione  $x$  al tempo  $t = x/U$ . A sinistra ad una distanza  $x^* = 0.0134$ , a destra a  $x^* = 0.134$ . Viene considerata solo la sezione centrale del canale ( $46 \text{ m} < x < 54 \text{ m}$ ).

Avvalendosi dell'ipotesi che la variazione temporale dello scarico sia lenta rispetto al periodo di tempo durante il quale il processo diffusivo ha avuto luogo



nel tratto spaziale fino a  $x^* = 0.134$ , possiamo utilizzare la soluzione stazionaria relativa ad una portata massica scaricata  $\dot{M}$ , scaricata nell'istante temporale  $\tau = t - x/U$ . Il tempo impiegato dal baricentro della massa infinitesima per giungere alla sezione che stiamo considerando è  $t = x/U = 92 \text{ s}$ . Sotto queste ipotesi, la soluzione semplificata si può scrivere come:

$$C(x, y, z, t) = \frac{\dot{M}(t - x/U)}{4\pi\sqrt{D_y^t D_z^t} x} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(y - y_0 + 2jB)^2}{4D_y^t x/U} \right] + \exp \left[ -\frac{(y + y_0 + 2jB)^2}{4D_y^t x/U} \right] \right\} \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(z - z_0 + 2jY)^2}{4D_z^t x/U} \right] + \exp \left[ -\frac{(z + z_0 + 2jY)^2}{4D_z^t x/U} \right] \right\} \quad (2.14)$$

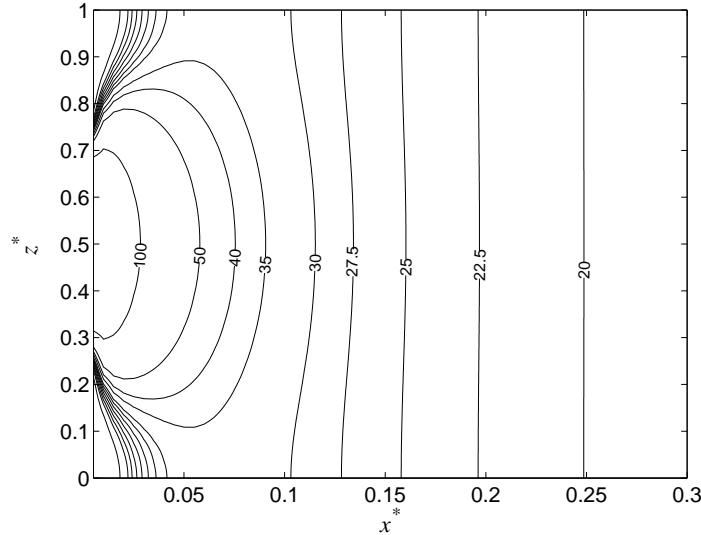


Figura 2.5: Curve di isoconcentrazione adimensionale  $C^*$  in funzione di  $x^*$  e  $z^*$ , in un piano verticale con  $y^* = y_0^*$ . Il rapporto tra larghezza e profondità della sezione è  $B/Y = 50$ .

L'andamento nel tempo della concentrazione alla distanza  $x^* = 0.134$  dallo scarico è rappresentato nel grafico di sinistra della Figura 2.6; la concentrazione è valutata in  $y = y_0$  e  $z = z_0$ . Le curve relative alla soluzione non stazionaria (2.12) sono praticamente indistinguibili da quelle ottenute con la soluzione stazionaria (2.14). Utilizzando il grafico adimensionale di Figura 2.5, per  $x^* = 0.134$  e  $B/Y = 50$  si trova  $C^* = 27.5$ ; per tale valore, utilizzando la scala (2.11), si ottiene  $C = C^* \langle C_m \rangle = 15.8 \text{ g/m}^3$ , che rappresenta la media temporale della soluzione trovata.

Nel grafico di destra della Figura 2.6 è riportato l'andamento della soluzione (2.13) relativa ad uno scarico unitario istantaneo rilasciato a  $t = 0$ : si può vedere come il massimo della soluzione viene determinato dal trasporto convettivo e si

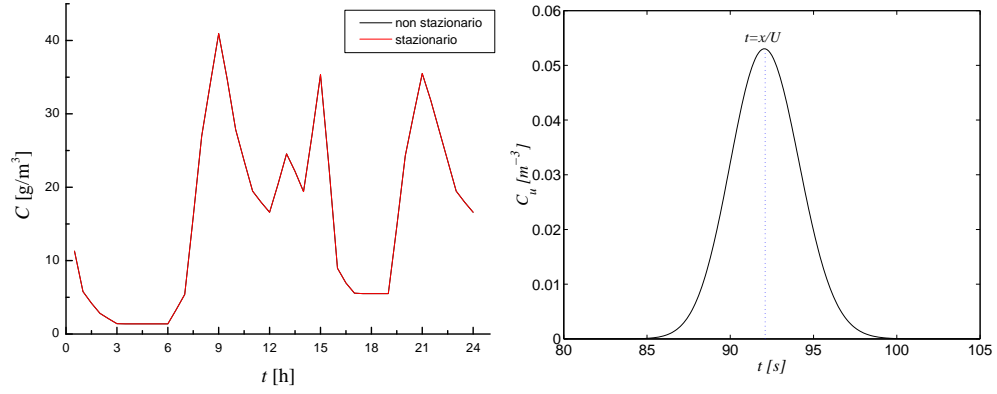


Figura 2.6: Andamento della concentrazione nel tempo in  $x^* = 0.134$  e  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ : nel grafico di sinistra la soluzione non stazionaria (2.12) viene confrontata con la soluzione approssimata stazionaria (2.14), per un ciclo giornaliero. Nel grafico di destra è riportata la soluzione (2.13) relativa ad uno scarico unitario.

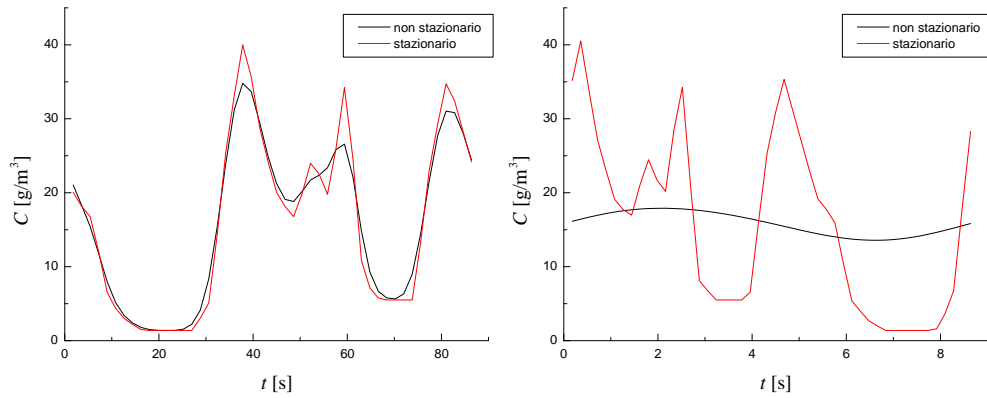


Figura 2.7: Andamento della concentrazione nel tempo in  $x^* = 0.134$ ,  $y = y_0$  e  $z = z_0$ , per una scala temporale con  $\Delta t = 3.6 \text{ s}$  (a sinistra) e  $\Delta t = 0.36 \text{ s}$  (a destra).

localizza quindi in  $t = x/U = 92 \text{ s}$ . La dimensione temporale della soluzione, dell'ordine dei  $10 \text{ s}$  è molto inferiore alla scala di variazione temporale dello scarico  $\Delta t = 3600 \text{ s}$ .

Risulta interessante osservare come si comporta la soluzione (2.12) quando lo scarico varia più rapidamente. In Figura 2.7 possiamo confrontare la soluzione con  $\Delta t = 3.6 \text{ s}$  (a sinistra) e  $\Delta t = 0.36 \text{ s}$  (a destra). Notiamo che quando la scala temporale di variazione dello scarico diventa comparabile con la scala tipica del processo di diffusione, la soluzione viene apprezzabilmente influenzata. Questa considerazione può essere trasferita sul piano spaziale utilizzando come scala caratteristica del processo diffusivo  $L_D = \sqrt{D t}$ , con  $D = \overline{D}_x^t$ . Considerando la concentrazione in  $x = 46 \text{ m}$ , che corrisponde a  $t = 92 \text{ s}$ , si trova che  $L_D \simeq 0.73 \text{ m}$ . Nel caso in cui  $\Delta t = 3600 \text{ s}$ , la variazione temporale si traduce in una variazione spaziale che scala con  $\Delta x = U \Delta t = 1800 \text{ m}$ : per il processo diffusivo lo scarico risulta essere praticamente costante. Nel caso invece in cui  $\Delta t = 3.6 \text{ s}$  o  $\Delta t = 0.36 \text{ s}$  si ha rispettivamente  $\Delta x = 1.8 \text{ m}$  e  $\Delta x = 0.18 \text{ m}$ : le variazioni nello scarico sono così rapide da risentire della diffusione.

**Come ottenere la soluzione non stazionaria.** L'equazione (2.12) prevede un'integrazione nel tempo  $\tau$  che nasconde alcune difficoltà numeriche. Infatti la (2.13) fornisce un contributo trascurabile al di fuori dell'intervallo

$$\left(t - \frac{x}{U}\right) - \delta < \tau < \left(t - \frac{x}{U}\right) + \delta \quad (2.15)$$

a cavallo del massimo  $\tau = t - x/U$ . Posto infatti

$$\xi^2 = \frac{[x - U(t - \tau)]^2}{4\overline{D}_x^t(t - \tau)} \quad (2.16)$$

il termine  $\exp(-\xi^2)$  rende sostanzialmente nulla la soluzione quando  $\xi$  oltrepassa una soglia dipendente dalla tolleranza richiesta. Se richiediamo quindi  $\xi^2 \leq \epsilon$ , posto  $\tau = t - x/U + \delta$ , dalla (2.16) troviamo

$$\delta^2 + \frac{4\overline{D}_x^t}{U^2} \epsilon \cdot \delta - \frac{4\overline{D}_x^t x}{U^3} \epsilon \leq 0$$

che risolta fornisce i valori

$$\delta_{1,2} = \frac{2\overline{D}_x^t}{U^2} \left( -\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + \frac{Ux}{\overline{D}_x^t} \epsilon} \right)$$

che delimitano l'intervallo (2.15) nel quale operare l'integrazione, che deve utilizzare un numero sufficiente di passi temporali per garantire l'accuratezza della soluzione.

## 2.4 Diffusione di uno strato di sedimenti

*Sul fondo di un lungo canale inerodibile con acqua in quiete è presente uno strato di sedimenti di spessore  $h = 3 \text{ cm}$  con concentrazione uniforme  $C_0$ . L'acqua viene messa in moto aprendo lo sbarramento di valle e si realizza un moto*

uniforme, senza influenzare apprezzabilmente lo strato; la pendenza del canale è  $i_f = 1 \cdot 10^{-4}$  e la profondità che si realizza è  $Y = 3 \text{ m}$ , la velocità di sedimentazione è  $w_s = 1 \text{ cm/s}$ . Con il tempo i sedimenti tendono a diffondere verso l'alto. Valutare il profilo di concentrazione che si realizza asintoticamente.

Per studiare questo problema è necessario introdurre nell'equazione di convezione-diffusione l'informazione che i sedimenti sono un soluto pesante, caratterizzabili con una velocità di sedimentazione  $w_s$ . L'equazione si può scrivere nella forma seguente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - w_s \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x^t \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z^t \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2.17)$$

dove si è considerata solamente la componente longitudinale  $u$  della velocità del fluido (variabile a priori lungo  $z$ ), ma abbiamo aggiunto la velocità di caduta del sedimento  $w_s$ . Nel moto non si considera alcuna variabilità trasversale.

L'equazione (2.17) può essere semplificata notando che, nei termini in cui è definito il problema, non c'è motivo per il quale si realizzino dei gradienti longitudinali di concentrazione. Volendo poi studiare la configurazione asintotica, possiamo eliminare la derivata temporale ed ottenere

$$-w_s \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z^t \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

Le condizioni al contorno sono condizioni di flusso nullo alle pareti

$$-D_z^t \frac{\partial C}{\partial z} - w_s C = 0 \quad (z = 0, Y)$$

e permettono di integrare la (2.18) e ottenere la condizione di flusso nullo ovunque tra il fondo e la superficie libera:

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{w_s}{D_z^t} C. \quad (2.19)$$

Per semplificare la trattazione (anche se non è strettamente necessario), introduciamo a questo punto l'ipotesi di poter considerare la diffusività turbolenta costante  $\overline{D}_z^t$ . Un'ulteriore integrazione della (2.19) conduce a

$$C = c_1 \exp \left( -\frac{w_s}{\overline{D}_z^t} z \right).$$

La costante di integrazione  $c_1$  può essere ottenuta attraverso la condizione integrale

$$\int_0^Y C dz = C_0 h \quad \Rightarrow \quad c_1 = C_0 \frac{w_s Y}{\overline{D}_z^t} \frac{1}{1 - \exp \left( -w_s h / \overline{D}_z^t \right)}$$

e si può calcolare la soluzione

$$C = C_0 R_o \frac{h}{Y} \frac{\exp [R_o (1 - z/Y)]}{\exp (R_o) - 1} \quad (2.20)$$

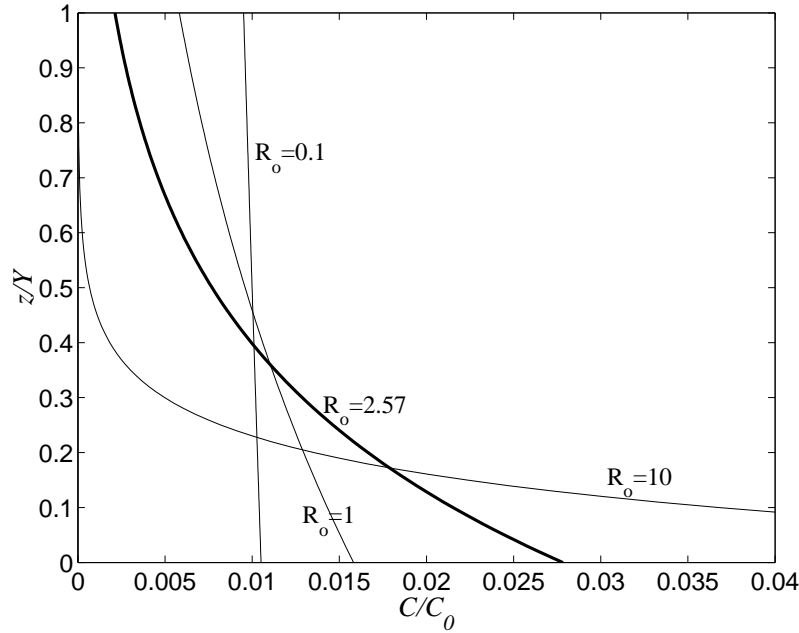


Figura 2.8: Profili asintotici di concentrazione per un sedimento pesante, in termini adimensionali. In linea spessa la soluzione del problema ( $R_o = 2.57$ ); le altre curve sono relative a valori diversi del numero di Rouse.

nella quale è stato introdotto il numero di Rouse

$$R_o = \frac{w_s Y}{\overline{D_z^t}} = 14.9 \frac{w_s}{u_*}, \quad (2.21)$$

che rappresenta un rapporto tra la sedimentazione che porta il sedimento verso il basso e la diffusione che tende a risollevarlo, a causa del gradiente negativo di concentrazione.

Proviamo ora a vedere come sono fatti i profili verticali di concentrazione. La velocità d'attrito è  $u_* = \sqrt{g_i f Y} = 0.054 \text{ m/s}$ , il coefficiente di diffusione turbolenta mediato  $\overline{D_z^t} = 0.067 u_* Y = 0.0109 \text{ m}^2/\text{s}$ . Il numero di Rouse risulta in questo caso  $R_o = 2.75$  e il profilo risultante è riportato in Figura 2.8. Nella figura sono anche riportate le curve corrispondenti ad altri numeri di Rouse: per valori elevati (corrispondenti a sedimenti più 'pesanti') i sedimenti si concentrano sul fondo, mentre per valori minori  $\ll 1$  la concentrazione tende verso un valore costante pari a

$$C_m = \frac{C_0 h}{Y} = 0.01 C_0. \quad (2.22)$$

#### 2.4.1 Il caso di un soluto non pesante

Possiamo studiare in forma analitica l'evoluzione del problema di uno strato di sedimenti solo se consideriamo

$$w_s = 0$$

ossia la situazione in cui il numero di Rouse tende a 0. In questo caso, grazie anche alle considerazioni discusse in precedenza, la (2.17) si riduce alla

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z^t \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2.23)$$

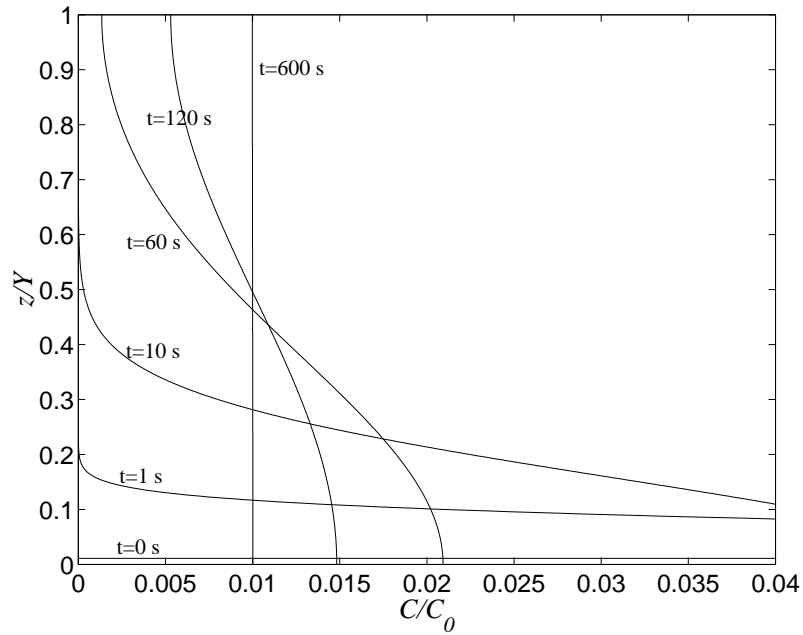


Figura 2.9: Transitorio per la diffusione verticale di un gradino di sedimenti non pesanti ( $w_s = 0 \Rightarrow R_0 = 0$ ).

Il problema è analogo in questo caso a quello di due correnti separate da un setto 1.8, ma differisce per la presenza delle pareti (fondo e superficie libera). Consideriamo il coefficiente di diffusione costante lungo la verticale. Affrontiamo in primo luogo il problema della parete sul fondo: la soluzione della (2.23) con tale condizione al contorno è la differenza di due soluzioni a gradino sinistro, uno in  $z = h$  e uno in  $z = -h$  (si veda anche l'esercizio 1.10),

$$\begin{aligned} C &= \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z-h}{\sqrt{4D_z^t t}} \right) - \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{z+h}{\sqrt{4D_z^t t}} \right) = \\ &= \frac{C_0}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{h-z}{\sqrt{4D_z^t t}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{h+z}{\sqrt{4D_z^t t}} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Introdurre la parete in superficie libera equivale a replicare la (2.24) considerando le sorgenti immagine:

$$C = \frac{C_0}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{h-z+2jY}{\sqrt{4D_z^t t}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{h+z+2jY}{\sqrt{4D_z^t t}} \right) \right]$$

L'andamento dei profili di concentrazione nel tempo è rappresentato in Figura 2.9: nel transitorio il gradino di concentrazione iniziale tende a diffondere verso l'alto fino a raggiungere la concentrazione finale  $C_m$  data dalla (2.22). Si noti come questa soluzione asintotica sia una soluzione limite per  $R_o \rightarrow 0$  della soluzione trovata nel caso di sedimenti pesanti (Figura 2.8).

L'ordine di grandezza del tempo necessario a raggiungere il profilo di equilibrio può essere valutato utilizzando la lunghezza scala della diffusione. Ponendo  $\sqrt{Dt} = Y$  si ottiene

$$t_d = \frac{Y^2}{D_z^t} = 14.9 \frac{Y}{u_*} = 825 \text{ s}. \quad (2.25)$$

Si tenga presente che questo non è un valore numerico accurato, ma ci permette di riconoscere la scala temporale caratteristica sulla quale avviene il fenomeno.

**Tempo scala nel caso di sedimento pesante.** La stima ottenuta con la (2.25) è valida anche nel caso di sedimento pesante; in questo caso si può però considerare anche la scala temporale caratteristica del fenomeno di sedimentazione  $w_s t = Y$ , dalla quale si ottiene  $t_s = Y/w_s = 300 \text{ s}$ . È interessante notare che la dipendenza dalla profondità  $Y$  delle scale  $t_s$  e  $t_d$  è la medesima. Il loro rapporto  $t_d/t_s$  è esattamente il numero di Rouse definito dalla (2.21): per valori piccoli di  $R_o$  la diffusione avviene molto più velocemente della sedimentazione ed è quindi il fenomeno prevalente.

## 2.5 Mescolamento in correnti stratificate verticalmente

*Si stimi il tempo richiesto per il mescolamento lungo la verticale di uno scarico posto a metà della profondità in un corpo idrico ricettore stratificato. La profondità del canale è  $Y = 2 \text{ m}$ , la pendenza  $i = 10^{-4}$ , la velocità media  $U = 0.12 \text{ m/s}$ . Temperatura dell'acqua  $T = 20^\circ \text{C}$ . Altri dati: salinità in superficie  $S_{sup} = 18 \text{ ppt}$ , sul fondo  $S_{fon} = 23 \text{ ppt}$ ; velocità in superficie  $u_{sup} = 0.42 \text{ m/s}$ , in prossimità del fondo  $u_{fon} = 0.02 \text{ m/s}$ .*

L'esercizio prende spunto da un esempio riportato da Rutherford (1994): il corpo d'acqua considerato (Lucas Creek) è uno dei molti piccoli fiumi soggetti alla marea che scorrono ad Auckland (Nuova Zelanda). I profili verticali di velocità e di salinità sono stati misurati in una sezione vicino alla bocca (dove il fiume sbocca nel mare), durante un ciclo di marea. I due momenti più significativi sono la fase di alta marea e quella di bassa marea. Durante la fase di *alta marea* la salinità era sostanzialmente uniforme verticalmente, con un valore prossimo a quello delle acque costiere adiacenti ( $29 \div 30 \text{ ppt}$ ). Durante la *bassa marea*, invece, il flusso di acqua dolce del fiume causava una parziale stratificazione (con un profilo sostanzialmente lineare di salinità e valori decrescenti da  $S_{sup} = 18 \text{ ppt}$  in superficie e di  $S_{fon} = 23 \text{ ppt}$  in prossimità del fondo). Negli ambienti a marea una situazione di stratificazione rilevante viene indicata con il termine *cuneo salino*.

Per prima cosa stimiamo il miscelamento nel caso in cui il corpo idrico sia *non stratificato*. Essendo la velocità d'attrito  $u_* = 0.044 \text{ m/s}$ , stimiamo un coefficiente di diffusione turbolenta mediato

$$\overline{D_z^t} = 0.067 u_* Y = 5.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

Posto lo scarico in  $z_0 = Y/2$ , sappiamo che la lunghezza convenzionale ( $P_m = 0.98$ ) per realizzare il mescolamento lungo la verticale è

$$L_{mv} = 0.134 \frac{UY^2}{\overline{D_z^t}} = 11 \text{ m}$$

da cui un tempo

$$t_{mv} = L_{mv}/U = 91 \text{ s}.$$

Durante la bassa marea il miscelamento verticale è parzialmente inibito. Nel caso di fluido *stratificato* il coefficiente di diffusione ridotto può essere stimato utilizzando la relazione

$$\overline{D_{zstr}^t} = \overline{D_z^t} (1 + a R_i)^b \quad (2.26)$$

dove  $a$  e  $b$  sono coefficienti empirici (si veda la Tabella 2.2) e  $R_i$  è il numero di Richardson

$$R_i = -g \frac{\partial \rho}{\partial z} / \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

che rappresenta il rapporto tra le forze di galleggiamento e le forze inerziali. La densità  $\rho$  del fluido può essere valutata in funzione della temperatura  $T$  e della salinità  $S$  utilizzando la Tabella 2.3<sup>1</sup>. La densità al fondo alla temperatura  $T = 20^\circ \text{C}$  è pari a  $\rho_{fon} = 1015.7 \text{ kg/m}^3$ ; quella in superficie  $\rho_{sup} = 1011.9 \text{ kg/m}^3$ .

Autore	$a$	$b$
(1) Munk and Anderson (1948)	10/3	-3/2
(2) Officer (1976)	1	-2
(3) Schiller and Sayre (1975)	10/3	-5/4

Tabella 2.2: Coefficienti dell'equazione (2.27), nella quale il numero di Richardson  $R_i$  si intende valutato con i valori mediati sul ciclo di marea (Rutherford, 1994).

Poiché non conosciamo gli esatti profili di salinità e velocità, utilizziamo una definizione semplificata del numero di Richardson (2.27)

$$R_i = -gY \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}(\Delta u)^2}$$

che implicherebbe rigorosamente dei profili lineari. Calcoliamo le grandezze da utilizzare:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{sup} - u_{fon} = 0.40 \text{ m/s}, & \Delta \rho &= \rho_{sup} - \rho_{fon} = -3.8 \text{ kg/m}^3, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho_{sup} + \rho_{fon}}{2} = 1013.8 \text{ kg/m}^3 & \Rightarrow & R_i = 0.46 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Per le temperature non riportate nella Tabella 2.3, i valori di  $\sigma$  da utilizzare nel calcolo di  $\rho$  possono essere ottenuti interpolando linearmente tra i valori noti.



	$T [^{\circ}C]$									
$S [ppt]$	0	2	4	6	8	10	15	20	25	30
0	-13	-3	0	-5	-16	-32	-87	-177	-293	-433
5	397	403	402	394	381	362	301	207	87	-57
10	801	804	799	788	772	750	685	586	462	315
15	1204	1204	1195	1181	1162	1138	1067	964	836	686
20	1607	1603	1589	1573	1551	1532	1450	1342	1210	1057
25	2008	2001	1988	1970	1947	1920	1832	1720	1585	1428
30	2410	2400	2384	2363	2340	2308	2215	2098	1960	1801
32	2571	2560	2543	2521	2494	2464	2364	2250	2110	1950
34	2732	2719	2701	2678	2651	2619	2522	2402	2261	2100
36	2893	2879	2860	2836	2808	2775	2676	2554	2412	2250
38	3055	3040	3019	2994	2965	2931	2830	2707	2563	2400
40	3213	3200	3179	3153	3122	3088	2985	2860	2714	2550
42	3377	3361	3337	3310	3279	3243	3138	3011	2864	2700

Tabella 2.3: Variazioni dell'anomalia della densità  $\sigma$  con salinità e temperatura. La densità è data da  $\rho = (1000 + \sigma/100) \text{ kg m}^{-3}$ . Da Millero et al. (1976), citato in Rutherford (1994).

Il coefficiente di diffusione in ambiente stratificato  $\overline{D_{zstr}^t}$  risulta variabile in funzione dei parametri della relazione (2.26). Calcoliamo la lunghezza e il tempo di mescolamento verticale per le tre coppie di valori forniti dalla Tabella 2.2:

$$\begin{aligned}
(1) : \quad \overline{D_{zstr}^t} &= 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad \Rightarrow \quad L_{mv} = 44 \text{ m}, \quad t_{mv} = 364 \text{ s} \\
(2) : \quad \overline{D_{zstr}^t} &= 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad \Rightarrow \quad L_{mv} = 23 \text{ m}, \quad t_{mv} = 193 \text{ s} \\
(3) : \quad \overline{D_{zstr}^t} &= 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \quad \Rightarrow \quad L_{mv} = 35 \text{ m}, \quad t_{mv} = 289 \text{ s}
\end{aligned}$$

Come si nota chiaramente, in questo caso la stratificazione aumenta di  $2 \div 4$  volte (a seconda della formulazione utilizzata) il tempo necessario per ottenere il mescolamento.

## 2.6 Mescolamento di uno scarico a densità diversa

*Si stimi la distanza di diluizione di uno scarico a temperatura elevata ( $T_s = 23.4^{\circ}C$ ) in un corpo idrico a temperatura  $T_a = 15^{\circ}C$ . Lo scarico avviene in sponda in superficie libera. Dati: profondità  $Y = 2 \text{ m}$ , velocità media  $U = 0.65 \text{ m/s}$ , pendenza  $i_f = 1.27 \cdot 10^{-4}$ , portata scaricata  $Q_s = 32 \text{ m}^3/\text{s}$ .*

Anche questo esercizio prende spunto da un esempio riportato da Rutherford (1994): una centrale scarica superficialmente le acque di raffreddamento nel fiume Waikato (Nuova Zelanda) in prossimità di una sponda. Lo scarico, essendo più caldo del fluido ambiente che lo riceve, subisce un effetto di galleggiamento che tende a inibirne il mescolamento. Questo caso è concettualmente diverso dai precedenti: non si realizza la diluizione di una concentrazione, bensì

la diluizione dello scarico stesso fino ad una condizione in cui la differenza di densità scompare (corrispondente al ‘miscelamento’ della temperatura). Lo scarico tenderà a galleggiare e a creare una stratificazione del corpo idrico recettore, che però non possiamo facilmente valutare a priori e non abbiamo indicazioni sul numero di Richardson se non quella che è plausibile ritenere che tenderà a diminuire allontanandosi dallo scarico.

Calcoliamo inizialmente alcune grandezze idrauliche. La velocità d’attrito è  $u_f = \sqrt{g_i f Y} = 0.05 \text{ m/s}$ ; la diffusività turbolenta mediata sulla verticale è  $\overline{D_z^t} = 0.067 u_* Y = 6.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$  nel caso non stratificato. La distanza di mescolamento è di conseguenza

$$L_{mv} = 0.536 UY^2 / \overline{D_z^t} = 208 \text{ m} \quad (2.28)$$

( $P_m = 0.98$  e scarico in superficie libera); nel caso si consideri invece  $P_m = 0.8$ , la distanza necessaria sarà chiaramente minore:

$$L_{mv} = 0.293 UY^2 / \overline{D_z^t} = 114 \text{ m}. \quad (2.29)$$

Dobbiamo poi calcolare la densità del corso d’acqua e quella dello scarico. Assumendo una salinità nulla per entrambi, dalla Tabella 2.3 possiamo calcolare l’anomalia della densità alle due diverse temperature. Per il corso d’acqua a  $15^\circ\text{C}$  si trova  $\sigma = -87$ , da cui  $\rho = 999.13 \text{ kg/m}^3$ . Per lo scarico a  $23.4^\circ\text{C}$ , interpolando linearmente tra i valori a  $T = 20^\circ\text{C}$  e  $T = 25^\circ\text{C}$ , si ha invece  $\sigma = -255.88$  e quindi  $\rho = 997.44 \text{ kg/m}^3$ . Nel punto di scarico si ha quindi una differenze di densità pari a

$$\Delta\rho = \rho_a - \rho_e = 1.69 \text{ kg/m}^3.$$

Nel caso di uno scarico caldo, il miscelamento dipende dal parametro

$$F_d = \frac{U}{\sqrt{gY\Delta\rho/\rho_a}}, \quad (2.30)$$

numero di Froude densimetrico dell’effluente. Per valori piccoli di  $F_d$  ( $F_d < 1$ , corrispondenti a forti differenze di densità) la stratificazione indotta dallo scarico tende ad essere stabile; per  $F_d > 15$  si ha invece la condizione di scarico neutro. Trattandosi di un problema molto complesso, possiamo utilizzare il grafico di Figura 2.10, nel quale la lunghezza di diluizione dello scarico è espressa in funzione di  $F_d$  in termini adimensionali come

$$x^* = \frac{x}{UY/u_*}, \quad (2.31)$$

che non è altro che un modo alternativo di esprimere la scala  $L = UY^2/\overline{D_z^t}$ . Sostituendo la struttura della diffusività turbolenta, si trova infatti

$$L = \frac{UY^2}{0.067 u_* Y} = 14.9 UY/u_*$$

Nel caso in esame inizialmente si ha  $F_d = 3.57$ ; per tale valore, dal grafico di Figura 2.10 si ricava

$$\frac{xu_*}{UY} \simeq 10 \quad \Rightarrow \quad x \simeq 260 \text{ m} \quad (2.32)$$

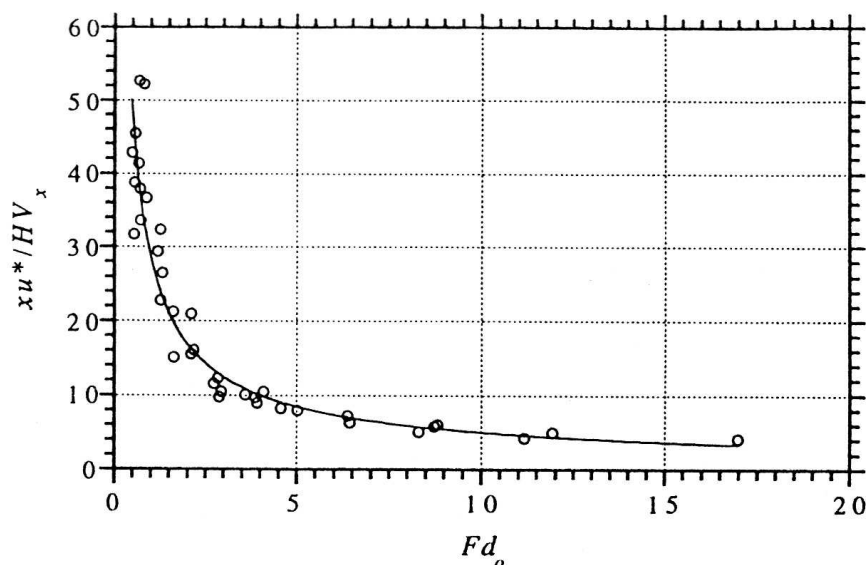


Figura 2.10: Lunghezza adimensionale di mescolamento  $x/(UY/u_*)$  (2.31) in funzione del numero di Froude densimetrico  $F_d$  (2.30). Il grafico è riportato in Rutherford (1994).

che corrisponde alla distanza necessaria per diluire lo scarico caldo. Vale la pena discutere il confronto tra i risultati ottenuti: Rutherford (1994) nota che la soluzione (2.32) è circa doppia rispetto alla distanza di miscelamento (2.29) per uno scarico in un fluido non stratificato. Se però consideriamo la (2.28), le due soluzioni sono comparabili. La differenza sostanziale tra la (2.28) e la (2.29) è dovuta solamente alla definizione convenzionale dell'avvenuto mescolamento. In questo senso, la stima operata dalla (2.32) dipende dalla definizione utilizzata dagli sperimentatori per quanto riguarda il valore numerico, mentre rimane valido in ogni caso l'ordine di grandezza. Si noti che tutta l'analisi è comunque fortemente approssimata, perché sono stati trascurati molteplici fattori, come il fatto che lo scarico è un getto che possiede una quantità di moto non trascurabile e che gli esperimenti che hanno condotto alla Figura 2.10 utilizzavano un diffusore trasversale.

E' possibile infine fare un confronto con le misure di campo sul fiume Waikato: in un tratto fino a 300 m dallo scarico le differenze di temperatura erano apprezzabili, mentre dopo 450 m i gradienti diventavano trascurabili. L'analisi riesce quindi ad individuare correttamente l'ordine di grandezza del valore cercato, ma è bene tener sempre presenti le incertezze insite nell'individuazione di un valore numerico preciso.



## Capitolo 3

# Esercizi sulla diluizione in campo intermedio

In questo capitolo affronteremo il processo di mescolamento nel campo intermedio, quando la concentrazione può essere considerata costante lungo la coordinata verticale del corso d'acqua, ovvero ad una distanza dallo scarico

$$L_{mv} = L_{mv}^* UY^2 / \overline{D_z^t} \quad (3.1)$$

tale da poter considerare concluso il mescolamento verticale. Nella (3.1) il valore di  $L_{mv}^*$  dipende dalla posizione  $z_0^*$  dello scarico e dal modello utilizzato (coefficienti variabili o coefficienti costanti).

Anche in questo capitolo viene utilizzata l'ipotesi che i coefficienti siano costanti. Non viene però trascurato il fatto che i profili verticali di velocità e diffusività turbolenta non siano uniformi: ciò dà origine al fenomeno noto come *dispersione*, quantificabile attraverso dei coefficienti che si sommano agli usuali coefficienti di diffusione turbolenta.

I coefficienti di dispersione sono solitamente indicati con  $K_x$  e  $K_y$ , rispettivamente per la direzione longitudinale e trasversale. La dispersione connessa a  $K_x$  è data dalla non uniformità del profilo verticale della velocità longitudinale, come descritto nel primo volume delle *Dispense* del corso. Una stima teorica nel caso del profilo logaritmico è

$$K_x = 5.86 u_* Y$$

e fornisce un valore molto più elevato di quello relativo alla sola diffusione turbolenta  $\overline{D_z^t} = 0.067 u_* Y$ .

La dispersione trasversale è invece legata ai profili verticali della velocità trasversale e quindi alle correnti secondarie generate primariamente da variazione topografiche. Alcune relazioni per stimare  $K_y$  sono riportate nel secondo volume delle *Dispense*.

### 3.1 Sorgente puntuale e stazionaria al centro del canale

*Un'industria scarica una portata  $Q_e = 10^4 \text{ m}^3/\text{giorno}$  di effluente contenente una sostanza non reattiva in concentrazione pari a  $C_e = 200 \text{ ppm}$  al centro di un corso d'acqua meandriforme. Calcolare l'estensione trasversale della nuvola e la massima concentrazione ad una distanza  $x = 1000 \text{ m}$  dallo scarico, con  $U = 1 \text{ m/s}$ ,  $Y = 8 \text{ m}$ ,  $B = 200 \text{ m}$ ,  $i_f = 10^{-4}$ .*

Inizialmente possiamo valutare le caratteristiche idrodinamiche della corrente per la stima dei coefficienti di dispersione e le caratteristiche dello scarico:

$$\begin{aligned} u_* &= \sqrt{g R_h i_F} = 0.085 \text{ m/s}, \\ \dot{M} &= Q_e \cdot C_e = 23.15 \text{ ppm/s} = 23.15 \text{ g/s}, \end{aligned}$$

avendo ipotizzato che la densità dell'effluente sia pari a  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . La portata del refluo  $Q_e = 0.116 \text{ m}^3/\text{s}$  è trascurabile in termini di contributo liquido rispetto a quella del corso d'acqua  $Q = UBY = 1600 \text{ m}^3/\text{s}$ . Il coefficiente di dispersione trasversale totale, includendo anche il coefficiente di diffusione turbolenta, può essere valutato, per un alveo meandriforme, assumendo  $\alpha = 0.6$ :

$$K_y + \overline{D}_y^t = \alpha u_* Y = 0.6 u_* Y = 0.41 \text{ m}^2/\text{s}$$

Per prima cosa verifichiamo che il mescolamento sulla verticale sia completo. La distanza necessaria è

$$L_{mv} = (0.134 \div 0.536) \frac{UY^2}{\overline{D}_z^t} = (2 \div 8) \frac{UY}{u_*} = (188 \div 751) \text{ m} \quad (3.2)$$

dove la variabilità è dovuta al punto di scarico e si utilizza la stima di  $\overline{D}_z^t$  utilizzata nel capitolo precedente. In  $x = 1000 \text{ m}$  risulta quindi conclusa la fase di campo vicino e la concentrazione si può ritenere uniforme su tutta la profondità.

L'estensione trasversale della nuvola può essere stimata in forma approssimata trascurando la presenza delle sponde del canale, che rappresentano delle pareti impermeabili al flusso di concentrazione. Ipotizzando come di consueto che il processo di diluizione sia diffusivo si trova

$$L_{nuvola} \sim 4\sigma = 4\sqrt{2 \left( \overline{D}_y^t + K_y \right) t} = 4\sqrt{2 \left( \overline{D}_y^t + K_y \right) x/U} = 114 \text{ m}$$

dove  $\sigma$  è la varianza della nuvola stessa. Dal momento che  $L_{nuvola}$  è sensibilmente minore della larghezza del canale  $B$ , ossia stiamo esaminando un punto sufficientemente vicino allo scarico, equidistante dalle due pareti, la presenza delle sponde può essere ragionevolmente trascurata. Analogamente la massima concentrazione può essere stimata come:

$$C_{max} = \frac{\dot{M}/Y}{\sqrt{4\pi \left( K_y + \overline{D}_y^t \right) Ux}} = 0.0404 \text{ g/m}^3 \quad (3.3)$$

Una stima dell'approssimazione introdotta può essere effettuata utilizzando la soluzione completa, senza trascurare cioè la presenza delle sponde del canale. Tale soluzione può essere scritta in termini adimensionali come

$$C^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(y^* - y_0^* + 2j)^2}{4x^*} \right] + \exp \left[ -\frac{(y^* + y_0^* + 2j)^2}{4x^*} \right] \right\} \quad (3.4)$$

avendo introdotto le scale

$$y = y^* B, \quad x = x^* \frac{UB^2}{K_y + \overline{D}_y^t}, \quad C = C^* C_m$$

dove  $C_m = \dot{M}/Q = 0.145 \text{ g/m}^3$ . Cerchiamo una soluzione utilizzando i grafici adimensionali riportati nell'Appendice A. Il punto di osservazione  $x = 1000 \text{ m}$  si trova alla coordinata  $x^* = 0.0103$ ; dalla Figura A.4 relativa ad un punto di scarico nel mezzo del canale ( $y_0^* = 0.5$ ) si ottiene  $C_{max}^* \simeq 3$  e quindi  $C_{max} \simeq 0.04 \text{ g/m}^3$ ; la lettura del grafico non consente un numero di cifre significative più elevato. Il grafico ci consente inoltre di avere un'idea approssimata della dimensione trasversale della nuvola.

Risolvendo numericamente la (3.4) si può ottenere una precisione maggiore e trovare  $C_{max}^* = 2.78$ , ossia  $C_{max} = 0.0404 \text{ g/m}^3$ , risultato equivalente a quello trovato con la (3.3). Si noti che tale corrispondenza cessa di essere valida per distanze  $x$  maggiori, quando la presenza delle sponde diventa determinante.

La lunghezza di mescolamento trasversale si ottiene facilmente utilizzando una formulazione equivalente alla (3.2)

$$L_{mt} = 0.134 \frac{UB^2}{K_y + \overline{D}_y^t} = 13.1 \text{ km}$$

### 3.2 Scarico puntuale in prossimità della sponda

*Uno scarico accidentale di una sostanza non reattiva avviene in prossimità di una sponda di un corso d'acqua rettificato, con  $U = 0.6 \text{ m/s}$ ,  $B = 60 \text{ m}$ ,  $Y = 2 \text{ m}$  e  $i_f = 2 \cdot 10^{-4}$ . Calcolare la distanza necessaria per completare la fase di mescolamento trasversale.*

L'unico meccanismo di diluizione nella direzione trasversale che si realizza in un alveo rettilineo è dovuto alla diffusione turbolenta. Infatti la non uniformità del profilo verticale della velocità longitudinale  $u$  introduce un meccanismo dispersivo che agisce solo nella direzione longitudinale. La dispersione trasversale è invece dovuta alla non uniformità verticale della velocità trasversale  $v$ : in un alveo rettilineo a fondo piano tale velocità può essere assunta sostanzialmente nulla. Quindi la diffusione turbolenta trasversale può essere quantificata come:

$$\overline{D}_y^t \cong 2\overline{D}_z^t = 0.13 u_* Y = 0.0158 \text{ m}^2/\text{s}$$

dove è stata utilizzata una velocità d'attrito pari a  $u_* = \sqrt{gR_h i_F} = 0.061 \text{ m/s}$ .

L'equazione differenziale che governa il fenomeno si può scrivere per il campo intermedio nella forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \overline{D}_x^t \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \overline{D}_y^t \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (3.5)$$

dove si è fatta l'ipotesi che il modello a coefficienti costanti sia adeguato e si considera esaurito il mescolamento verticale (quindi la concentrazione  $C$  è un valore mediato sulla profondità). Introduciamo una variabile  $\xi = x - Ut$  per semplificare la (3.5):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \overline{D}_x^t \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \overline{D}_y^t \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (3.6)$$

La soluzione della (3.6) è

$$C = \frac{M/Y}{4\pi\sqrt{\overline{D}_x^t \overline{D}_y^t t}} \exp\left[\frac{(x - Ut)^2}{4\overline{D}_x^t t}\right] \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[\frac{(y - y_0 + 2jB)^2}{4\overline{D}_y^t t}\right] + \exp\left[\frac{(y + y_0 + 2jB)^2}{4\overline{D}_y^t t}\right] \right\} \quad (3.7)$$

con  $y_0$  posizione dello scarico (per lo scarico in sponda  $y_0 = 0$ ). La (3.7) può anche essere scritta separando la diffusione nella direzione longitudinale da quella trasversale:

$$C(t, x, y) = \frac{M/Y}{\sqrt{4\pi\overline{D}_x^t t}} \exp\left[\frac{(x - Ut)^2}{4\overline{D}_x^t t}\right] \tilde{C}(t, y) \quad (3.8)$$

dove

$$\tilde{C}(t, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\overline{D}_y^t t}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[\frac{(y - y_0 + 2jB)^2}{4\overline{D}_y^t t}\right] + \exp\left[\frac{(y + y_0 + 2jB)^2}{4\overline{D}_y^t t}\right] \right\} \quad (3.9)$$

La lunghezza necessaria per il completo mescolamento trasversale si determina richiedendo che  $P_m = C_{min}/C_{max}$  sia superiore ad un valore fissato, ad esempio 0.98. Tale parametro, come si vede chiaramente facendo il rapporto tra le concentrazioni  $C|_{y=B}$  e  $C|_{y=0}$  calcolate mediante la (3.7), è indipendente dalla diffusione nella direzione longitudinale: infatti tale rapporto si può scrivere come  $\tilde{C}(t, B)/\tilde{C}(t, 0)$  e il mescolamento dipende solamente dal tempo  $t$  trascorso successivamente allo scarico. Per il baricentro della nuvola si ha che  $x = Ut$  e si può introdurre di conseguenza una distanza di mescolamento. Il raggiungimento del miscelamento trasversale si può perciò valutare in maniera analoga a quanto visto nell'esercizio 3.1 per una sorgente puntuale e stazionaria. La procedura appare più chiara rendendo adimensionale la (3.9), utilizzando le scale introdotte per il campo intermedio

$$y^* = \frac{y}{B}, \quad t^* = \frac{t}{B^2/\overline{D}_y^t},$$



con le quali si ottiene

$$\tilde{C}(t^*, y^*) = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t^*}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ \frac{(y^* - y_0^* + 2j)^2}{4t^*} \right] + \exp \left[ \frac{(y^* + y_0^* + 2j)^2}{4t^*} \right] \right\} \quad (3.10)$$

La (3.10) è identica alla (3.4) se si sostituisce  $t^*$  con  $x^*$ . L'unica differenza è il termine moltiplicativo  $1/B$ : una volta raggiunto il mescolamento trasversale la (3.10) tende a tale valore e la (3.8) degenera nella soluzione valida nel campo lontano.

Per uno scarico ubicato in sponda la lunghezza di mescolamento risulta quindi essere pari a

$$L_{mt} = 0.536 \frac{UB^2}{\overline{D_y^t}} = 73.4 \text{ km}.$$

Normalmente un corso d'acqua difficilmente si mantiene rettilineo per una tale distanza, quindi la diluizione si realizza ad opera non solo della diffusione turbolenta ma anche della dispersione indotta dall'andamento non perfettamente rettilineo. Questo effetto può essere quantificato stimando un opportuno coefficiente di dispersione trasversale compreso tra i valori:

$$K_y + \overline{D_y^t} = (0.15 \div 0.6) u_* Y = (0.018 \div 0.073) m^2/s$$

In questo caso la nuova stima per la lunghezza di mescolamento risulta essere inferiore:

$$L_{mt} = 0.536 \frac{Ub^2}{K_y + \overline{D_y^t}} = (70 \div 16) \text{ km}$$

### 3.3 Confronto fra una sorgente puntuale e un diffusore

*Un corso d'acqua usato per l'allevamento delle trote è soggetto ad uno scarico di un effluente trattato proveniente da una miniera. Il mescolamento deve essere sufficientemente rapido da produrre un grado di mescolamento  $P_m = 0.9$  in meno di 5 minuti. È sufficiente uno scarico ubicato a  $B/4$  dalla sponda o è necessario un diffusore? Si assuma  $i_f = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $B = 6 \text{ m}$ ,  $k_s = 15 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$  (alveo con vegetazione) e  $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ .*

Utilizzando la relazione di moto uniforme  $Q = BYk_s\sqrt{i_f}R_h^{2/3}$  si possono stimare le grandezze caratteristiche del corso d'acqua:  $Y = 0.72 \text{ m}$ ,  $U = 0.23 \text{ m/s}$  e  $u_* = 0.053 \text{ m/s}$ . Il mescolamento nel piano della sezione si realizza, nel caso di sorgente ubicata a  $B/4$  dalla sponda, ad opera della diffusione-dispersione trasversale. Non avendo a disposizione alcuna indicazione sull'andamento planimetrico dell'alveo si stimano i coefficienti di diffusione turbolenta e dispersione nella seguente maniera:

$$K_y + \overline{D_y^t} = (0.15 \div 0.30) u_* Y = (0.006 \div 0.012) m^2/s$$

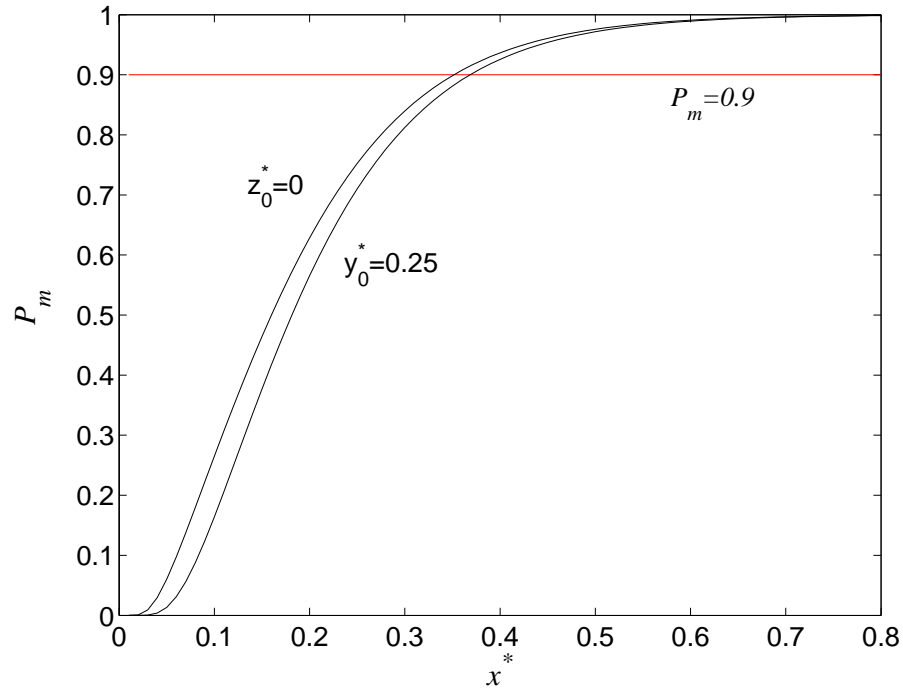


Figura 3.1: Rapporto di mescolamento  $P_m = C_{min}/C_{max}$  in funzione della distanza adimensionale  $x^*$ , per uno scarico posizionato in  $z_0^* = 0$  (diffusore trasversale posto sul fondo con mescolamento sulla verticale) o in  $y_0^* = 0.25$  (scarico puntuale, mescolamento trasversale nel campo intermedio).

Dalla Figura 3.1 si ricava che il grado di mescolamento  $P_m = 0.9$  per una sorgente ubicata in  $y_0^* = 0.25$  si realizza per  $x^* = 0.35$ . La scala longitudinale del mescolamento trasversale vale:

$$L_t = \frac{UB^2}{K_y + \overline{D_y^t}} = (690 \div 1380) m$$

quindi il grado di mescolamento è 90% a una distanza dall'origine pari a:

$$x_{(P_m=0.9)} = 0.35 L_t = (241.5 \div 483) m ,$$

a cui corrisponde un tempo

$$t_{(P_m=0.9)} = \frac{x_{(P_m=0.9)}}{U} = (17.5 \div 35) minuti .$$

Lo scarico ubicato a  $B/4$  non è quindi sufficiente a garantire il mescolamento in 5 minuti. Un diffusore ubicato sul fondo del canale ed esteso lungo tutta la sezione produce un mescolamento più rapido perché svolge il compito di distribuire la concentrazione lungo la trasversale, che risulta essere il compito più gravoso. Rimane da compiere il mescolamento sulla verticale: essendo posto sul fondo ( $z_0^* = 0$ ) il grado di mescolamento  $P_m = 0.9$  si realizza per  $x^* = 0.37$ , ma la scala longitudinale caratteristica è in questo caso

$$L_v = \frac{UY^2}{\overline{D_z^t}} = \frac{UY}{0.067 u_*}$$

e il mescolamento si realizza quindi per

$$x = 0.37 L_v = 17 m \quad \Rightarrow \quad t = 1.2 \text{ minuti}.$$

### 3.4 Diffusore di lunghezza finita

*Si valuti la distanza necessaria perché si completi il mescolamento trasversale in presenza di un diffusore trasversale di lunghezza finita  $S$  collocato sul fondo di canale rettilineo di larghezza  $B$ , profondità  $Y$ . Si consideri uno scarico stazionario  $\dot{M}$  e una portata del corso d'acqua  $Q$ .*

Collochiamo idealmente il diffusore tra una sponda e un punto generico  $y_0 = S$  della sezione trasversale, assumendo l'origine dell'asse  $y$  nella sponda stessa. Trascurando la diffusione longitudinale rispetto alla diffusione (numero di Peclet elevato), ponendosi nel campo intermedio (mescolamento verticale completato) e ipotizzando di poter considerare costanti i coefficienti dell'equazione differenziale

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \overline{D}_y^t \frac{\partial^2 C}{\partial y^2},$$

la soluzione deriva da quella valida per una concentrazione iniziale a gradino di larghezza finita (si vedano ad esempio l'esercizio 1.10, al quale vanno aggiunte le pareti date dalle sponde del canale, e l'esercizio 2.4.1):

$$C^* = \frac{C_0^*}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y^* + y_S^* + 2j}{\sqrt{4x^*}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y^* - y_S^* + 2j}{\sqrt{4x^*}} \right) \right] \quad (3.11)$$

dove sono state introdotte le scale

$$y = y^* B, \quad S = y_S^* B, \quad x = x^* \frac{UB^2}{\overline{D}_y^t}, \quad C = C^* \frac{\dot{M}}{Q}. \quad (3.12)$$

La concentrazione nella porzione di area della sezione relativa al diffusore, attraverso la quale transita una portata  $Q_S = Q S/B$ , è

$$C_0 = \frac{\dot{M}}{Q_S} \quad \Rightarrow \quad C_0^* = \frac{Q}{Q_S} = \frac{B}{S}.$$

In Figura 3.2 viene rappresentato il grado di mescolamento trasversale (fissata una quota  $z$ )

$$P_m = \frac{C_{min}}{C_{max}}$$

in funzione della distanza per diverse lunghezze  $S$  del diffusore. Richiedendo  $P_m = 0.98$  sulla trasversale, si trova una coordinata  $x_{mt}^*$  per la quale il mescolamento trasversale è realizzato.

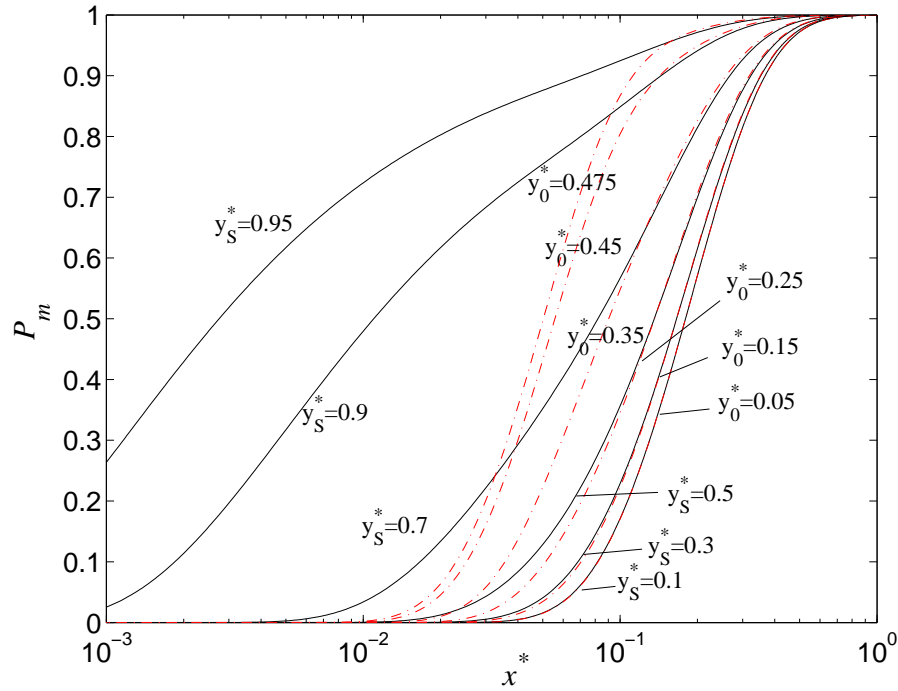


Figura 3.2: Rapporto di mescolamento trasversale  $P_m = C_{min}/C_{max}$  in funzione della distanza adimensionale  $x^*$  (in scala logaritmica). Le curve in linea continua corrispondono a diverse lunghezze del diffusore trasversale  $y_S^* = S/B$ ; le curve punteggiate si riferiscono alla soluzione per uno scarico puntuale posto in  $y_0$  e possono essere confrontate con le precedenti quando  $y_0^* = y_S^*/2$ .

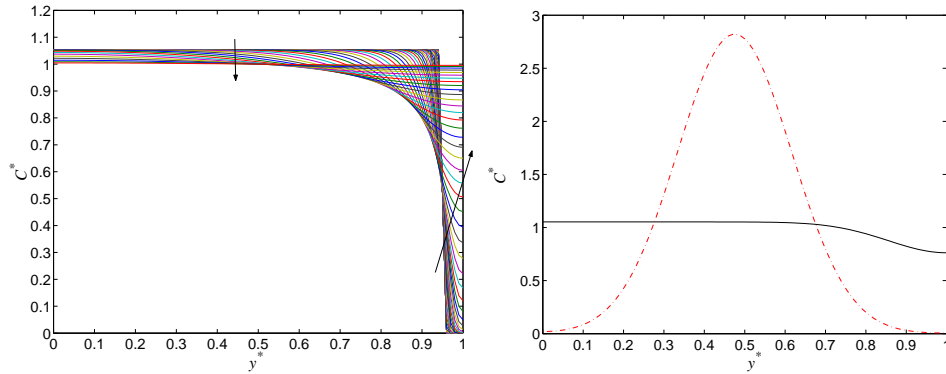


Figura 3.3: Diffusore di lunghezza finita  $S = 0.95 B$ , assumendo che la concentrazione sia uniforme sulla verticale: a sinistra l'andamento della concentrazione per diverse sezioni ( $0 < x^* < 1$ ); a destra la soluzione per il diffusore trasversale (linea continua) è confrontata con la soluzione ottenuta per  $x^* = 0.01$  nel caso di uno scarico posto in  $y_0^* = y_S^*/2 = 0.475$  (linea punteggiata).

Restano infine da discutere alcune considerazioni sulla distanza necessaria per il mescolamento verticale; assumendo che questo sia completo quando  $P_m =$

0.98 sulla verticale e che lo scarico sia collocato sul fondo, la lunghezza risulta

$$L_{mv} = 0.536 \frac{UY^2}{D_z^t}.$$

Quando  $x = L_{mv}$ , in base alle (3.12) si trova una coordinata adimensionale

$$x_{mv}^* = \frac{L_{mv}}{UB^2/\overline{D}_y^t} = \frac{0.536\overline{D}_y^t}{D_z^t} \left(\frac{Y}{B}\right)^2 \cong 1.072 \left(\frac{Y}{B}\right)^2 \quad (3.13)$$

che può essere confrontata con la coordinata  $x_{mt}^*$  trovata in precedenza. Quando il diffusore è abbastanza lungo, il mescolamento trasversale si realizza prima di quello verticale: fattori rilevanti sono i rapporti  $S/B$  e  $Y/B$ . Sono però necessari diffusori piuttosto lunghi: per  $B \simeq 10Y$  la (3.13) prevede  $x_{mv}^* \simeq 0.01$ ; dalla Figura 3.2 si trova che per  $x^* \simeq 0.01$  il mescolamento trasversale non è ancora completo neppure per un diffusore con  $S \simeq 0.95B$ . Un diffusore di lunghezza prossima alla larghezza del canale consente però di diluire più rapidamente ed uniformare la concentrazione su gran parte della sezione trasversale, avvicinandola al valore asintotico raggiunto al termine del mescolamento, come si può notare in Figura 3.3. Naturalmente per  $S = B$  il mescolamento trasversale è istantaneo.

### 3.5 Mescolamento delle acque provenienti da due correnti

*Una città è servita da un acquedotto che utilizza le acque provenienti in parte da sorgenti locali, in parte da un corso d'acqua limitrofo. Le due acque hanno composizione chimica significativamente diversa e devono essere miscelate prima di essere convogliate all'impianto di potabilizzazione. Sia  $Q = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$  la portata di ciascuna corrente. Si calcoli la distanza necessaria per il completo mescolamento trasversale ( $P_m = 0.9$ ) per un canale rettangolare con  $B = 6 \text{ m}$ ,  $i_f = 0.001$ ,  $k_s = 35 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  in due casi: (a) canale rettilineo; (b) canale curvilineo con raggio di curvatura costante pari a  $R = 30 \text{ m}$ .*

Il problema richiede di miscelare due correnti, di cui una 'pulita' (corrente 1) e l'altra 'sporca' (corrente 2, con concentrazione  $C_0$ ). Una volta mescolate la concentrazione sarà data da

$$C_m = \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} C_0.$$

Nel caso specifico si ha che  $Q_1 = Q_2 = Q$  e quindi  $C_m = C_0/2$ . Calcoliamo dapprima le caratteristiche idrodinamiche della corrente di portata  $2Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$  dopo la confluenza. Mediante la relazione di moto uniforme  $Q = BYk_s\sqrt{i_f}R_h^{2/3}$  troviamo  $Y = 0.67 \text{ m}$ ,  $U = 0.74 \text{ m/s}$  e  $u_* = 0.073 \text{ m/s}$ ; da questi valori si stima il coefficiente di diffusione-dispersione

$$\overline{D}_y^t + K_y = \alpha u_* Y \quad (3.14)$$

dove  $\alpha$  dipende dalla tipologia del canale. Nel caso (a) assumiamo  $\alpha = 0.15$ : la (3.14) ci fornisce

$$\overline{D}_y^t + K_y = 7.4 \cdot 10^{-3} m^2/s. \quad (3.15)$$

Nel caso (b) valutiamo il coefficiente di dispersione utilizzando la relazione proposta da Fischer (1969)

$$\alpha = 22 \left( \frac{U}{u_*} \right)^2 \left( \frac{Y}{R} \right)^2$$

e otteniamo

$$\overline{D}_y^t + K_y = 56 \cdot 10^{-3} m^2/s. \quad (3.16)$$

Consideriamo avvenuto il mescolamento quando  $P_m = 0.9$ . Possiamo cercare una soluzione approssimata considerando una sorgente puntuale ubicata in prossimità della sponda; in questo caso  $x_{mt}^* \simeq 0.37$  e di conseguenza

$$L_{mt} = x_{mt}^* \frac{UB^2}{\overline{D}_y^t + K_y}, \quad (3.17)$$

che fornisce: (a)  $L_{mt} = 1334 m$  e (b)  $L_{mt} = 177 m$ . Si tenga presente che questi valori rappresentano una stima in eccesso. Appare chiaramente poi come nel caso del canale curvo la generazione di correnti secondarie aumenta molto il coefficiente di dispersione (3.16) rispetto al caso rettilineo (3.15) e quindi la lunghezza di mescolamento diminuisce di un ordine di grandezza.

Una soluzione più precisa si ottiene osservando che la situazione in esame corrisponde ad un diffusore di lunghezza finita pari a  $B/2$ , esaminato nell'esercizio 3.4. La soluzione (3.11) ci fornisce un valore della coordinata  $x_{mt}^* \simeq 0.32$ , da cui si ottiene mediante la (3.17): (a)  $L_{mt} = 1153 m$  e (b)  $L_{mt} = 153 m$ .

### 3.6 Miscelamento in un alveo naturale

*In prossimità dell'abitato di S. Michele all'Adige è localizzata la confluenza della fossa di Caldaro nel fiume Adige. Le acque della fossa e dell'Adige hanno composizione chimica diversa. Circa 6 km a valle il torrente Noce sfocia nell'Adige. La portata dell'Adige a monte della confluenza con la fossa di Caldaro è pari a  $Q_a = 116 m^3/s$ . Sapendo che la portata e la concentrazione di inquinante nella fossa sono rispettivamente  $Q_c = 20 m^3/s$  e  $C_0 = 1 mg/m^3$ , stabilire (a) se il mescolamento è superiore al 90% in corrispondenza della confluenza con il Noce (sezione 321). Determinare inoltre (b) il valore della concentrazione nel punto  $y = 20 m$  della sezione 295. La coordinata  $y$  ha origine in corrispondenza della sponda destra; in Figura 3.4 è rappresentata la zona presa in considerazione.*

Le caratteristiche geometriche ed idrodinamiche delle sei sezioni indicate in planimetria sono riportate in Tabella 3.1.

Il problema può essere risolto applicando il metodo della portata cumulata, noto anche come modello a *tubi di flusso*; infatti in un alveo naturale l'altimetria

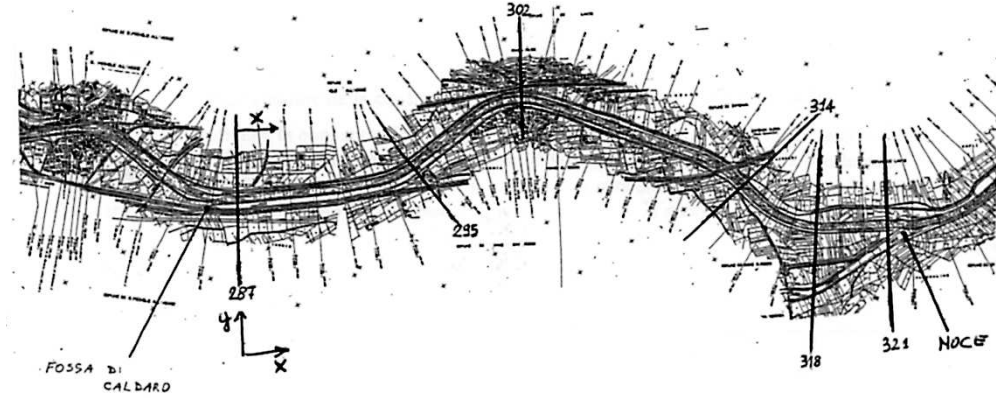


Figura 3.4: Planimetria del tratto di Adige compreso tra la confluenza con la fossa di Caldaro e la confluenza con il torrente Noce.

$j$	Sezione	$x$ [m]	$B$ [m]	$U$ [m/s]	$\Omega/B$ [m]	$u_*$ [m]	$K_y$ [m <sub>2</sub> /s]	$L_j$ [m]
1	287	0	57.58	0.67	3.50	0.082	0.086	823
2	295	1646	60.66	0.56	4.02	0.066	0.080	1343
3	302	2686	59.42	1.05	2.18	0.138	0.090	1505.5
4	314	4657	57.86	0.82	2.86	0.103	0.088	1358.5
5	318	5403	56.75	0.77	3.10	0.095	0.088	580.5
6	321	5818	65.49	1.02	2.04	0.134	0.082	207.5

Tabella 3.1: Caratteristiche delle sezioni raffigurate in Figura 3.4: distanza  $x$ , larghezza in superficie libera  $B$ , velocità media sulla sezione  $U$ , profondità media  $\Omega/B$  (con  $\Omega$  area della sezione), velocità d'attrito media sulla sezione  $u_*$ , coefficiente di dispersione mediato sulla sezione  $K_y$ , lunghezza del tratto  $L_j$ .

delle sezioni è molto variabile e un modello che ipotizzi una sezione rettangolare è spesso poco realistico perché non si riesce a seguire lo spostamento della nuvola di concentrazione nella sezione dovuto a variazioni topografiche.

La portata totale, dopo la confluenza tra la fossa di Caldaro e l'Adige, è

$$Q = Q_c + Q_a = 136 \text{ m}^3/\text{s}.$$

La sorgente ha un'estensione trasversale, valutata in termini della variabile trasversale  $q$  (portata cumulata), pari a  $q_c = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ , che in forma adimensionale è pari a

$$q_c^* = \frac{Q_c}{Q} = 0.147$$

Per la valutazione della scala longitudinale caratteristica è necessario stimare il coefficiente di diluizione efficace  $D_e$ :

$$D_e = \psi K_y U \left( \frac{\Omega}{B} \right)^2 \quad (3.18)$$

dove si assume  $\psi = 2$  e il termine  $\Omega/B$  rappresenta la profondità media; i valori sono riportati nella Tabella 3.2. Per poter applicare il modello a coefficienti

costanti sul tratto di fiume considerato è necessario definire la media pesata dei coefficienti valutati in ogni sezione attraverso la (3.18):

$$\widehat{D}_e = \frac{1}{L_{tot}} \sum_{j=1}^6 D_{ej} L_j = 1.20 m^5/s^2. \quad (3.19)$$

L'equazione differenziale che governa il problema è quindi

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \widehat{D}_e \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \quad (3.20)$$

dove  $C$  è la concentrazione mediata sulla profondità.

$j$	287	295	302	314	318	321
$D_{ej} [m^5/s^2]$	1.43	1.44	0.88	1.18	1.31	0.70

Tabella 3.2: Valori del coefficiente di diluizione efficace  $D_e$ , valutato mediante la (3.18).

La scala longitudinale caratteristica di questo problema, valutata con il metodo della portata cumulata, vale:

$$L = \frac{Q^2}{\widehat{D}_e} = 15.4 km \quad (3.21)$$

Ora abbiamo gli elementi necessari per poter risolvere il problema in maniera analoga a quanto fatto negli esercizi precedenti. Si noti che la scala caratteristica sarebbe stata

$$L' = \frac{\widehat{U} \widehat{B}^2}{\widehat{K}_y} = 32.4 km \quad (3.22)$$

nel caso del modello tradizionale, avendo calcolato  $\widehat{U} = 0.800 m/s$ ,  $\widehat{B} = 59.03 m$  e  $\widehat{K}_y = 0.0861 m^2/s$ . La differenza tra la (3.21) e la (3.22) è legata principalmente al fattore di forma; si trova infatti che una valutazione del coefficiente di diffusione efficace in termini delle grandezze mediate sul tratto di fiume

$$\widehat{D}_e = \psi \widehat{K}_y \widehat{U} \widehat{Y}^2 = 1.27 m^5/s^2$$

non differisce in modo significativo dalla (3.19).

(a) La sezione 321 si trova ad una distanza dalla confluenza fra l'Adige e la fossa di Caldaro pari a  $5818 m$ , corrispondente a  $x_{321}^* = 5818 m/L = 0.377$ , dove  $L$  è stato calcolato nella (3.21). Il campo di concentrazione e quindi il valore del grado di mescolamento nel corso d'acqua sono rappresentati in forma adimensionale in Figura 3.5, sulla base della soluzione valida per un diffusore di lunghezza finita compreso nell'intervallo  $0 \leq q^* \leq q_c^*$ , già trovata con la (3.11),

$$C^* = \frac{C_0^*}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{q^* + q_c^* + 2j}{\sqrt{4x^*}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{q^* - q_c^* + 2j}{\sqrt{4x^*}} \right) \right]$$



dove il problema è stato reso adimensionale utilizzando le relazioni

$$q = q^* Q, \quad x = x^* \frac{Q^2}{D_e}, \quad C = C^* C_m,$$

e indicando con

$$C_m = \frac{Q_c}{Q} C_0 = 0.147 \text{ mg/m}^3 \quad (3.23)$$

il valore asintotico che si realizza al termine del processo di mescolamento, da cui si ricava  $C_0^* = C_0/C_m = 6.8$ .

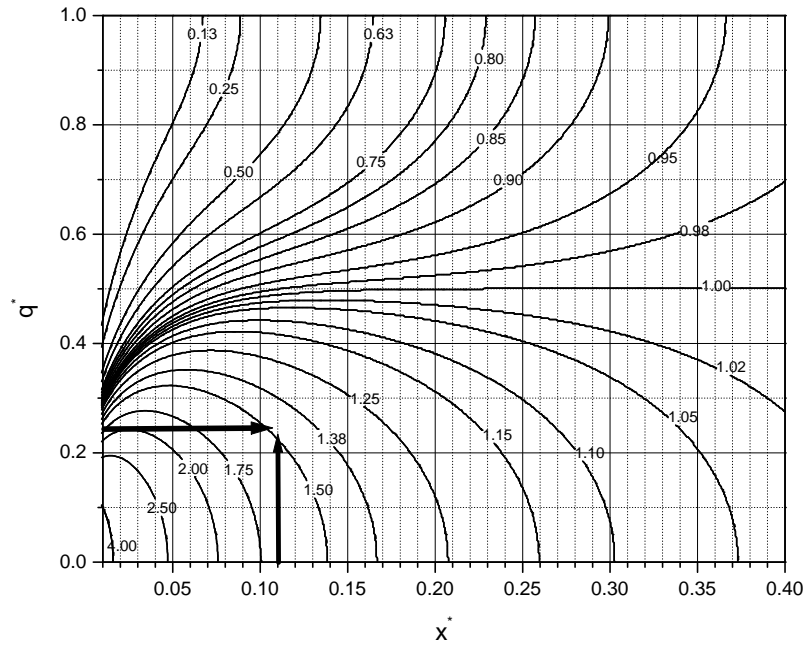


Figura 3.5: Campo di concentrazione a valle di uno scarico distribuito di larghezza  $q_c^* = 0.15$ , avente concentrazione  $C_0^* = 6.8$ , ubicato in prossimità della sponda destra.

In corrispondenza della sezione 321, cioè per  $x^* = 0.377$ , si ricavano i valori:

$$C_{min}^* = 0.95, \quad C_{max}^* = 1.05$$

e il grado di mescolamento vale quindi

$$P_m = \frac{C_{min}^*}{C_{max}^*} = 0.90.$$

Il grado di mescolamento nella sezione 321 è dunque del 90% come richiesto dal problema.

(b) Il punto ubicato a 20 m dalla sponda in corrispondenza della sezione 295 ha una coordinata trasversale, espressa in termini di portata cumulata, che può

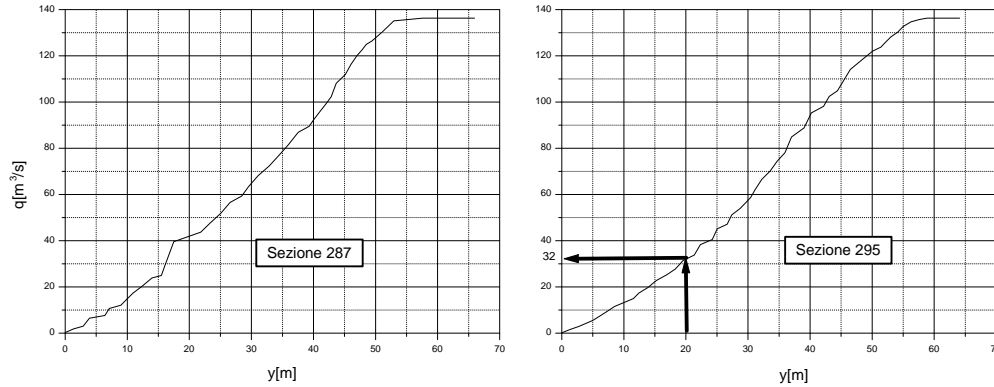


Figura 3.6: Andamento della portata cumulata lungo la coordinata trasversale.

essere ricavata dal grafico di destra della Figura 3.6:  $q_{(y=20\text{ m})} = 32\text{ m}^3/\text{s}$ . Le coordinate adimensionali del punto sono:

$$q^* = \frac{(q_{y=20\text{ m}})}{Q} = \frac{32}{136} = 0.24, \quad x^* = \frac{1646\text{ m}}{L} = 0.11$$

In corrispondenza di questa coppia di punti, dalla Figura 3.5 si ricava

$$C^* = 1.5$$

e quindi, ricordando la scala (3.23), il valore della concentrazione nel punto  $y = 20\text{ m}$  della sezione 295 vale

$$C = C^* C_m = 0.22\text{ mg}/\text{m}^3.$$

### 3.7 Miscelamento in un alveo con golene

*Un'industria casearia scarica 250 g/s di sostanza inquinante in un corso d'acqua ad andamento planimetrico rettilineo con le seguenti caratteristiche: portata liquida  $Q = 250\text{ m}^3/\text{s}$ , pendenza del fondo  $i_f = 10^{-4}$ , larghezza  $B = 120\text{ m}$ . Posto  $K_y = 0.3 u_* Y$ , determinare la regione in cui si ha  $C \geq C_{lim} = 4\text{ g}/\text{m}^3$  nel caso in cui lo scarico sia ubicato in sponda. La geometria della sezione è schematicamente rappresentata in Figura 3.7.*

Il problema può essere risolto in forma approssimata utilizzando i parametri idrodinamici mediati sull'intera sezione. Il risultato a cui si perviene è un'approssimazione della soluzione tanto più grossolana quanto più è articolata la sezione del canale.

#### 3.7.1 Calcolo con i valori mediati sulla sezione

Dapprima si calcola il valore della concentrazione asintotica, da utilizzare come scala delle concentrazioni per rendere adimensionale il problema:

$$C_m = \frac{\dot{M}}{Q} = 1\text{ g}/\text{m}^3,$$

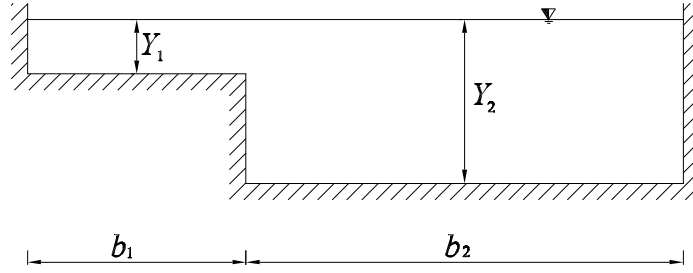


Figura 3.7: Rappresentazione schematica di una sezione trasversale in presenza di zone golenali:  $Y_1 = 1\text{ m}$ ,  $Y_2 = 3\text{ m}$ ,  $b_1 = 40\text{ m}$ ,  $b_2 = 80\text{ m}$ ,  $k_{s2} = 2k_{s1}$ .

quindi, indicando come di consueto con l'apice  $*$  le grandezze adimensionali, si trova

$$C_{lim}^* = \frac{C_{lim}}{C_m} = 4.$$

La regione all'interno della quale la concentrazione adimensionale è maggiore di 4 si ricava dalla Figura A.1 relativa al campo di concentrazione che si realizza a valle di una sorgente ubicata in sponda ( $y_0^* = 0$ ); si ottiene approssimativamente

$$x^* = 0.02, \quad y^* = 0.12. \quad (3.24)$$

La conversione di questi valori in forma dimensionale passa attraverso la definizione delle scale spaziali longitudinale e trasversale. Coerentemente con l'ipotesi di utilizzare i parametri mediati sulla sezione, calcolate  $\Omega = b_1 \cdot Y_1 + b_2 \cdot Y_2 = 280\text{ m}$  e  $B = b_1 + b_2 = 120\text{ m}$ , la profondità e la velocità da utilizzare per la valutazione della scala longitudinale sono rispettivamente:

$$Y = \frac{\Omega}{B} = 2.33\text{ m}, \quad U = \frac{Q}{\Omega} = 0.893\text{ m/s}.$$

Posto  $u_* = \sqrt{g i_F Y} = 0.0478\text{ m/s}$ , il coefficiente di dispersione trasversale assume il valore

$$K_y = 0.3 u_* Y = 0.0335\text{ m/s}$$

e la scala longitudinale da utilizzare nel problema è quindi

$$L_l = \frac{UB^2}{K_y} = 384\text{ km}.$$

La nuvola di tracciante con concentrazione superiore a  $C_{Limite}$  avrà una estensione approssimata pari a:

$$y = y^* b = 14.4\text{ m}, \quad x = x^* L_l = 7678\text{ m}. \quad (3.25)$$

La regione delimitata dalla (3.24) individua una zona della fase 'iniziale' del mescolamento ( $x$  vicino alla sorgente). In questa zona si può approssimativamente tenere conto solo della parete in prossimità della quale è ubicata la sorgente che ha come effetto quello di duplicare la sorgente; l'altra sponda è

troppo lontana nella fase considerata per essere influente. Con le approssimazioni discusse nei capitoli precedenti, la soluzione per uno scarico stazionario valida nel campo intermedio può essere scritta come

$$C = \frac{2\dot{M}/Y}{\sqrt{4\pi K_y U x}} \exp \left[ -\frac{y^2}{4K_y x/U} \right]. \quad (3.26)$$

La curva che delimita la regione con  $C = C_{lim}$  è definita dall'equazione

$$y = \sqrt{2 \frac{K_y x}{U} \ln \left[ \left( \frac{\dot{M}}{C_{lim} U Y} \right)^2 \frac{U}{\pi K_y x} \right]} \quad (3.27)$$

Nel caso in esame  $y_0 = 0$ ; la curva  $y_{lim}(x_{lim})$  è rappresentata in Figura 3.8 (linea continua).

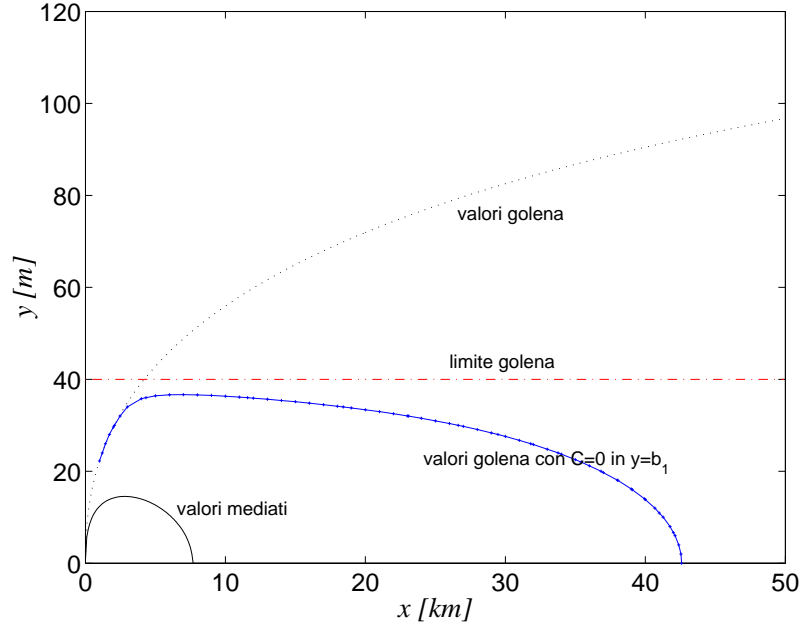


Figura 3.8: Regione del piano  $x$ - $y$  delimitata dalla condizione  $C = C_{lim}$ , fornita dalla (3.27) trascurando la presenza della sponda opposta allo scarico: in linea continua il caso con i valori mediati sull'intera sezione, in linea tratteggiata con i valori caratteristici della golena. La linea punteggiata rappresenta la soluzione (3.30) che impone  $C = 0$  all'interfaccia tra golena e alveo  $y = b_1$ .

### 3.7.2 Calcolo con i valori locali

Dato che il risultato (3.25) prevede che la zona critica rimane all'interno della golena in cui viene scaricato l'inquinante, proviamo a calcolare la soluzione facendo riferimento ai dati caratteristici della golena stessa. I valori  $U_1$  e  $K_{y1}$  relativi si possono ricavare utilizzando una suddivisione della sezione in tre

parti. Poniamo

$$Q_1 = b_1 Y_1 k_{s1} \sqrt{i_f} Y_1^{2/3}, \quad Q_2 = b_2 Y_0 k_{s2} \sqrt{i_f} Y_0^{2/3};$$

richiedendo che  $Q = Q_1 + Q_2$  troviamo  $k_{s1} = 24.1 m^{1/3}/s$  e quindi

$$Q_1 = 9.6 m^3/s, \quad U_1 = 0.24 m/s, \quad u_{*1} = 0.031 m/s, \quad K_{y1} = 9.4 \cdot 10^{-3} m^2/s.$$

Analogamente, per l'alveo inciso si ha

$$Q_2 = 240.4 m^3/s, \quad U_2 = 1.0 m/s, \quad u_{*2} = 0.054 m/s, \quad K_{y2} = 48.8 \cdot 10^{-3} m^2/s.$$

Utilizzando i valori trovati per la golenale e ipotizzando che la (3.26) sia ancora valida, la (3.27) prevede la curva tratteggiata in Figura 3.8. La zona dove  $C > C_{lim}$  è in questo caso molto più ampia del caso mediato, essendo delimitata da  $x \simeq 200 km$  e  $y \simeq 120 m$ , misura confrontabile con l'intera larghezza del corso d'acqua (e quindi non è possibile trascurare la parete opposta rispetto a quella di scarico). È chiaro che la soluzione trovata in questo caso non è corretta perché sottostima la capacità diluitiva dell'alveo principale; d'altra parte anche la soluzione trovata utilizzando i valori mediati sull'intera sezione non considera la diversità del mescolamento nelle due zone della sezione.

Il flusso di concentrazione per unità di superficie in prossimità dell'interfaccia  $y = b_1$  dalla zona 1 alla zona 2 può essere calcolato in generale mediante la definizione

$$q_{y1}(x) = -K_{y1} \left. \frac{\partial C_1}{\partial y} \right|_{y=b_1} \quad (3.28)$$

Una diversa approssimazione può essere quella di ritenere che l'alveo principale sia in grado di smaltire l'inquinante in maniera tale da poter imporre una concentrazione nulla all'interfaccia

$$C = 0 \quad \text{in} \quad y = b_1 \quad (3.29)$$

In tal caso la (3.26) va modificata introducendo delle sorgenti immagine negative in  $y = (2j+1)(2b_1)$  per imporre la (3.29) e delle sorgenti positive in  $y = 2j(2b_1)$  per rispettare la condizione di flusso nullo alle pareti. Si ottiene quindi

$$C = \frac{2\dot{M}/Y}{\sqrt{4\pi K_y U x}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{[y - 2j(2b_1)]^2}{4K_y x/U} \right] + \right. \\ \left. - \exp \left[ -\frac{[y - (2j+1)(2b_1)]^2}{4K_y x/U} \right] \right\} \quad (3.30)$$

La soluzione nell'alveo principale dovrà tenere conto del flusso (3.28) che dalla golenale viene trasferito all'alveo.

La regione delimitata dalla condizione  $C = C_{lim}$  nella zona golenale, secondo la (3.30), è rappresentata in Figura 3.8. Si noti che questa soluzione tende a sovrastimare la diluizione operata dall'alveo principale: la regione 'corretta' si trova nella zona tra la curva punteggiata e quella tratteggiata.



## Capitolo 4

# Esercizi sulla diluizione in campo lontano

Il campo lontano inizia convezionalmente quando la concentrazione risulta costante su tutta la sezione, ovvero quando sia la fase di mescolamento verticale sia quella trasversale sono concluse. Dal momento che la seconda è generalmente molto più lenta della prima, a causa dell'elevato rapporto tra larghezza e profondità nei corsi d'acqua naturali, si considera la distanza dallo scarico

$$L_{mt} = L_{mt}^* UB^2/K_y \quad (4.1)$$

dove  $L_{mt}^*$  dipende dalla posizione dello scarico.

Nel campo lontano si instaura un meccanismo dispersivo legato alla non uniformità trasversale della velocità longitudinale, dovuta a variazioni altimetriche e planimetriche dell'alveo. Il corrispondente coefficiente di dispersione  $K$  può essere quantificato utilizzando le relazioni proposte nel secondo volume delle *Dispense* del corso.

Si noti che nel caso in cui lo scarico sia stazionario e il soluto non sia soggetto a decadimento biochimico, la soluzione nel campo lontano è

$$C = \dot{M}/Q$$

dove  $\dot{M}$  è la portata massica scaricata e  $Q$  la portata liquida del corso d'acqua.

### 4.1 Scarico puntuale accidentale

*Un impianto di potabilizzazione deriva l'acqua da un corso d'acqua naturale. Si deve progettare una riserva necessaria per supplire all'eventuale arresto della captazione conseguente allo scarico accidentale di contaminante, tenendo presente che 40 km a monte dell'opera di captazione è ubicato un ponte autostradale dal quale, in caso di incidente, può cadere un'autocisterna, riversando il suo carico nel corso d'acqua. Risolvere il problema ipotizzando una massa scaricata  $M = 5000 \text{ kg}$  e una concentrazione limite  $C_{lim} = 5 \text{ mg/m}^3$ ; si determini anche la concentrazione massima che si realizza nella sezione considerata. Il corso d'acqua è caratterizzato dalle seguenti grandezze: pendenza  $i_f = 10^{-4}$ , portata  $Q = 250 \text{ m}^3/\text{s}$ , larghezza  $B = 100 \text{ m}$ , profondità media  $Y = \Omega/B = 4 \text{ m}$ .*

Calcoliamo per prima cosa le grandezze idrodinamiche necessarie per risolvere il problema. La velocità media è  $U = Q/(BY) = 0.625 \text{ m/s}$ , la velocità d'attrito  $u_* = \sqrt{g i_f R_h} = 0.060 \text{ m/s}$ . Il coefficiente di dispersione trasversale (considerando al suo interno anche il contributo della diffusione turbolenta) può essere stimato come

$$K_y = \alpha' u_* Y = 0.145 \text{ m}^2/\text{s}$$

dove  $\alpha' \simeq 0.6$  per un alveo naturale meandriforme. La lunghezza di miscelamento trasversale può essere stimata nell'intervallo

$$L_{mt} = (0.134 \div 0.536) \frac{UB^2}{K_y} = (5.8 \div 23) \text{ km}$$

che risulta inferiore alla distanza  $x_0 = 40 \text{ km}$  a valle dello scarico, giustificando l'ipotesi di risolvere il problema utilizzando una schematizzazione di campo lontano. Questa ipotesi è ancora più giustificata dal fatto che la lunghezza di mescolamento trasversale  $L_{mt}$  può essere ulteriormente ridotta se lo scarico accidentale occupa una porzione consistente della sezione come conseguenza delle modalità di scarico.

Una stima veloce della concentrazione massima nella sezione  $x = x_0$  può essere effettuata utilizzando la soluzione

$$\hat{C} = \frac{M/(BY)}{\sqrt{4\pi Kt}} \exp \left[ -\frac{(x - Ut)^2}{4Kt} \right] \quad (4.2)$$

sapendo che il picco si realizza al tempo

$$t_p = \frac{x_0}{U} = 6.40 \cdot 10^4 \text{ s} = 17.78 \text{ h}. \quad (4.3)$$

Il coefficiente di dispersione longitudinale può essere stimato facendo riferimento alla relazione proposta da Fischer

$$K = 0.011 \frac{U^2 B^2}{u_* Y} = 178 \text{ m}^2/\text{s}.$$

In questo caso per il picco si trova

$$\hat{C}(x_0, t_p) = \frac{M/(BY)}{\sqrt{4\pi Kt_p}} = 104.4 \text{ mg/m}^3. \quad (4.4)$$

valore molto superiore al limite ammissibile  $C_{lim}$ .

Si noti che la (4.3) fornisce l'istante nel quale transita per la sezione  $x_0$  il colmo dell'onda di concentrazione (ovvero il massimo in  $x$ ). Il corrispondente valore di concentrazione (4.4) non è però il massimo locale (ovvero il massimo in  $t$ , assegnata la sezione  $x_0$ ), che si ottiene invece annullando la derivata della (4.2) rispetto a  $t$  e considerando la radice positiva

$$t_{max} = \frac{K}{U^2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{Ux}{K} \right)^2} \right] = 63545 \text{ s} = 17.65 \text{ h} \quad (4.5)$$

con la quale si ottiene il valore

$$\hat{C}(x_0, t_{max}) = 104.6 \text{ mg/m}^3, \quad (4.6)$$

peraltro non dissimile dal valore (4.4).



### 4.1.1 Origine virtuale

La soluzione (4.2) non tiene però conto del fatto che la soluzione nel campo lontano non si comporta da subito come gaussiana, ma è necessario introdurre un'origine virtuale della coordinata longitudinale  $x_v$  e del tempo  $t_v$ . Introdurre un'origine virtuale significa considerare un processo diffusivo usuale, con la sola differenza che ha inizio dal punto  $x_v$ . Tutte le caratteristiche rimangono comunque immutate, ad esempio la varianza cresce nel tempo con la legge  $\sigma^2 = 2K(t - t_v)$ . La soluzione si ottiene quindi a partire dalla (4.2) con la sostituzione di coordinate  $x \rightarrow \xi$  e  $t \rightarrow \tau$ , dove

$$\xi = x - x_v, \quad \tau = t - t_v.$$

Sulla base di esperimenti numerici si pone

$$x_v = 0.07 \frac{UB^2}{K_y} = 3024 m$$

e si definisce l'origine virtuale dei tempi

$$t_v = x_v/U = 4838 s = 1.34 h. \quad (4.7)$$

La soluzione può essere scritta come

$$C = \frac{M/(BY)}{\sqrt{4\pi K\tau}} \exp \left[ -\frac{(\xi - U\tau)^2}{4K\tau} \right] = \frac{M/(BY)}{\sqrt{4\pi K(t - t_v)}} \exp \left[ -\frac{(x - Ut)^2}{4K(t - t_v)} \right] \quad (4.8)$$

È utile precisare quando tale soluzione è valida. Una valutazione della distanza convettiva, dopo la quale il processo si può ritenere di tipo diffusivo, è basata su misure di campo:

$$L_x = \alpha \frac{UL_t^2}{K_y} = 8.5 km$$

dove  $L_t \simeq 0.7B$  è una grandezza trasversale di riferimento e  $\alpha \simeq 0.4$ . Poiché la soluzione può essere considerata gaussiana ad una distanza

$$L'_x \simeq (2.5 \div 5)L_x = (21 \div 42) km,$$

nel caso in esame  $x = 40 km$  risulta essere nell'intervallo di applicabilità della soluzione (4.8).

Il massimo locale della concentrazione secondo la (4.8) si realizza ad un istante temporale calcolabile adattando la (4.5)

$$\tau_{max} = \frac{K}{U^2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{U\xi}{K} \right)^2} \right]$$

da cui

$$t_{max} = t_v + \tau_{max} = t_p \left( -\frac{1}{P_e} + \sqrt{1 + \frac{1}{P_e^2}} \right) + t_v \left( 1 + \frac{1}{P_e} - \sqrt{1 + \frac{1}{P_e^2}} \right) \quad (4.9)$$

dove nella seconda relazione è stato introdotto un numero di Peclet  $P_e = U\xi/K$ : quando  $P_e \gg 1$ , l'istante in cui si realizza il massimo non differisce in maniera sostanziale<sup>1</sup> dal valore  $t_p$  calcolato con la (4.3). Con i dati in nostro possesso

---

<sup>1</sup>Per  $\frac{1}{P_e} \ll 1$ , la (4.9) diventa infatti  $t_{max} \simeq t_p - \frac{t_p - t_v}{P_e} \leq t_p$ .

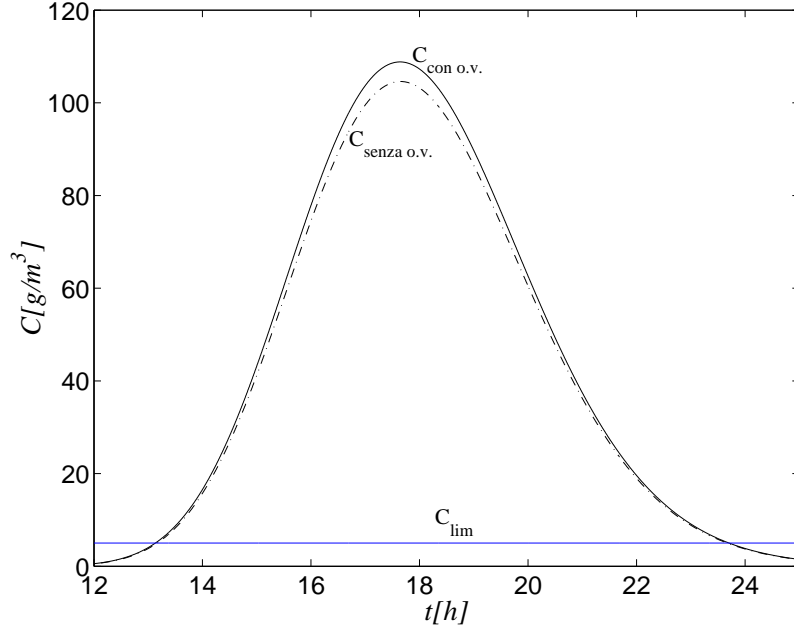


Figura 4.1: Confronto tra la soluzione (4.8) in linea continua e la (4.2) in linea tratteggiata. La concentrazione limite è indicata con  $C_{lim}$ .

troviamo  $P_e = 130$ , da cui si ottiene  $t_{max} = 63545 s = 17.65 h$ , previsto anche dalla (4.5). Il massimo di concentrazione previsto dalla (4.8) risulta in questo caso

$$C(x_0, t_{max}) = 108 mg/m^3$$

che non è dissimile dal risultato della (4.4) o della (4.6). Il confronto tra le due soluzioni è rappresentato in Figura 4.1.

Vogliamo ora calcolare per quanto tempo è necessario chiudere l'impianto di potabilizzazione per avere  $C < C_{lim}$ . Una prima risposta approssimativa è possibile dalla Figura 4.1. Un secondo metodo è quello di risolvere la (4.8) numericamente ponendo  $C = C_{lim}$ : si ottiene in questo caso  $t_1 = 13.34 h$  e  $t_2 = 23.51 h$ , da cui si valuta un tempo totale  $t_2 - t_1 = 10.17 h$ .

#### 4.1.2 Metodo della nuvola congelata

Un metodo alternativo è basato sull'approssimazione della *nuvola congelata*. Si fissa la soluzione all'istante temporale  $t_p = x_0/U$  e si calcola l'ampiezza della nuvola. Per semplicità consideriamo la soluzione (4.8) nelle variabili  $\xi$  e  $\tau$ , che possiamo riscrivere nella forma

$$C(\xi, \tau_p) = C_p \exp \left[ -\frac{(\xi - U\tau_p)^2}{4K\tau_p} \right]$$

con

$$C_p = \frac{M/(BY)}{\sqrt{4\pi K\tau_p}} = 108 mg/m^3, \quad \tau_p = \frac{x_0}{U} - t_v = 16.43 h.$$

Ponendo  $C = C_{lim}$ , troviamo la condizione

$$x_{1,2} - Ut_p = \xi_{1,2} - U\tau_p = \pm \sqrt{4K\tau_p \ln \left( \frac{C_p}{C_{lim}} \right)}$$

che consente di determinare le coordinate

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{4K\tau_p \ln \left( \frac{C_p}{C_{lim}} \right)}. \quad (4.10)$$

Le (4.10) possono infine essere riconvertite in istanti temporali secondo la relazione  $\tilde{t}_{1,2} = x_{1,2}/U$  per dare  $\tilde{t}_1 = 12.71 h$ ,  $\tilde{t}_2 = 22.84 h$  e  $\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = 10.13 h$ . Il risultato ottenuto è abbastanza simile a quello trovato in precedenza. Si noti però che sostituendo i valori temporali nella soluzione ‘vera’ (4.8), si trovano i valori  $C(x_0, \tilde{t}_1) = 1.53 g/m^3$  e  $C(x_0, \tilde{t}_2) = 9.03 g/m^3$ , che non corrispondono in maniera esatta alla condizione richiesta  $C(x_0, t) = C_{lim} = 5 g/m^3$ .

Con la diffusione di potenti mezzi di calcolo numerico, il metodo della nuvola congelata ha perso ormai gran parte del suo interesse applicativo. Al giorno d’oggi risulta infatti molto più semplice risolvere direttamente l’equazione (4.8) con la condizione richiesta. Resta comunque utile per la comprensione del fenomeno analizzare questa tipologia di metodi che sfruttano alcune caratteristiche della soluzione per ottenere un modello semplificato.



## Capitolo 5

# Miscelamento e decadimento di soluti reattivi

### 5.1 Scarichi stazionari successivi

*Lungo l'asta di un fiume sono localizzati numerosi impianti di depurazione che scaricano reflui trattati. Considerando solamente gli scarichi delle tre città maggiori, indicate con  $F$ ,  $G$  e  $H$ , valutare la concentrazione di ossigeno nelle condizioni più critiche, ovvero in condizioni di magra estiva. Il corso d'acqua può essere caratterizzato come segue: portata  $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$ , larghezza  $B = 80 \text{ m}$ , profondità media  $Y = 2 \text{ m}$ , pendenza  $i_f = 10^{-3}$ , temperatura dell'acqua  $T = 15^\circ\text{C}$ . Si considerino come soluti reattivi il  $\text{BOD}_5$  e l'azoto ammoniacale  $\text{NH}_4\text{-N}$  e come valori critici i limiti allo scarico di  $\widehat{C}_b = 40 \text{ mg/l}$  e  $\widehat{C}_n = 3 \text{ mg/l}$ , rispettivamente; si assuma nullo il deficit iniziale di ossigeno rispetto alla saturazione. Le portate scaricate sono<sup>1</sup>  $Q_F = 40000 \text{ m}^3/\text{d}$ ,  $Q_G = 36000 \text{ m}^3/\text{d}$ ,  $Q_H = 90000 \text{ m}^3/\text{d}$ . Le distanze tra gli scarichi sono le seguenti: tra  $F$  e  $G$  circa  $60 \text{ km}$ , tra  $G$  e  $H$  circa  $100 \text{ km}$ , a valle di  $H$  lo sbocco in mare si trova a  $150 \text{ km}$ .*

Per prima cosa cerchiamo di caratterizzare a livello idrodinamico il corso d'acqua. La velocità media è

$$U = \frac{Q}{BY} = 1.25 \text{ m/s},$$

la velocità d'attrito  $u_* = \sqrt{g i_f R_h} = 0.137 \text{ m/s}$ . Assumiamo che sia possibile studiare il fenomeno utilizzando uno schema di campo lontano con un modello a coefficienti costanti. In questo caso l'equazione che governa il comportamento di un soluto reattivo è quella di convezione-dispersione longitudinale alla quale viene aggiunto un termine di reazione

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k_r C_b. \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Le portate scaricate sono spesso espresse in metri cubi al giorno ( $d$ ), considerando una dotazione idrica di alcune centinaia di litri per abitante equivalente al giorno.

Valutiamo il coefficiente di dispersione utilizzando la relazione proposta da Fischer

$$K = 0.011 \frac{U^2 B^2}{u_* Y} = 402 \text{ m}^2/\text{s}.$$

### 5.1.1 Soluzione stazionaria semplificata

Nel caso in cui gli scarichi siano stazionari, la (5.1) si semplifica eliminando la derivata temporale e fornisce la soluzione

$$C = C_0 \exp \left[ -\tilde{k}_r \frac{x}{U} \right], \quad (5.2)$$

valida per ogni soluto  $C$ ; la concentrazione  $C_0$  è la condizione posta in  $x = 0$ . Per tenere conto del contributo del mescolamento idrodinamico, nella (5.2) la costante cinetica della reazione  $k_r$  è stata modificata in

$$\tilde{k}_r = \frac{2}{\alpha}(-1 + \sqrt{1 + \alpha}) k_r \longrightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) k_r + O(\alpha^2), \quad (5.3)$$

dove

$$\alpha = 4 \frac{K k_r}{U^2}.$$

La seconda relazione della (5.3) vale per valori piccoli di  $\alpha$ , come di solito accade. Nei casi comuni tale parametro è così piccolo che  $\tilde{k}_r$  coincide sostanzialmente con  $k_r$ , condizione che equivale a considerare una versione semplificata della (5.1):

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = -k_r C \quad (5.4)$$

nella quale la cinetica di reazione biochimica viene riferita ad un volume di controllo in moto con la velocità media  $U$  del corso d'acqua.

Possiamo ora particularizzare la trattazione al caso del  $BOD_5$ . Indicando con  $C_b$  la sua concentrazione e con  $k_1$  la costante cinetica della reazione di ossidazione, l'equazione differenziale (5.4) può essere scritta come

$$U \frac{\partial C_b}{\partial x} = -k_1 C_b \quad (5.5)$$

e la soluzione (5.2) diventa

$$C_b = C_{b0} \exp \left[ -k_1 \frac{x}{U} \right]. \quad (5.6)$$

Per quanto riguarda la concentrazione di ossigeno  $C_{O_2}$  disciolto nel corso d'acqua, conviene riferirsi al deficit

$$d = C_s - C_{O_2} \quad (5.7)$$

rispetto alle condizioni di saturazione  $C_s$ . La dinamica del deficit di ossigeno è governata da un'equazione analoga alla (5.1), nella quale è presente un termine di riossigenazione avente come costante cinetica il parametro  $k_2$ , il cui ordine di grandezza è comparabile con quello di  $k_1$ . Ripetendo le considerazioni discusse

sopra, possiamo anche in questo caso ricondurci ad un'equazione differenziale semplificata

$$U \frac{\partial d}{\partial x} = -k_2 d + \text{consumo} \quad (5.8)$$

dove il termine di consumo è dato dall'ossidazione della sostanza organica. Nel caso del  $BOD_5$ , per definizione si ha che

$$\text{consumo} = -\frac{dC_b}{dt} = -U \frac{\partial C_b}{\partial x}.$$

Avvalendosi della (5.5) e della soluzione trovata (5.6), la (5.8) può essere riscritta come

$$U \frac{\partial d}{\partial x} = -k_2 d + k_1 C_b = -k_2 d + k_1 C_{b0} \exp \left[ -k_1 \frac{x}{U} \right] \quad (5.9)$$

la cui soluzione è

$$d = d_0 \exp \left( -k_2 \frac{x}{U} \right) + C_{b0} \frac{k_1}{k_2 - k_1} \left[ \exp \left( -k_1 \frac{x}{U} \right) - \exp \left( -k_2 \frac{x}{U} \right) \right]. \quad (5.10)$$

La concentrazione di ossigeno può quindi essere trovata invertendo la (5.7).

**Ossidazione di altre sostanze.** Se, come normalmente avviene, nello scarico sono presenti altre sostanze, per ciascuna di esse vale un'equazione del tipo (5.1). In prima approssimazione si può ritenere che le reazioni siano indipendenti e che quindi per ciascuna specie valga una soluzione (5.2), usualmente nella forma semplificata relativa all'equazione (5.4).

Prendiamo ad esempio l'azoto ammoniacale  $NH_4-N$ , per il quale si può scrivere l'equazione semplificata

$$U \frac{\partial C_n}{\partial x} = -k_n C_n \quad (5.11)$$

dove  $C_n$  è la concentrazione, espressa in termini di  $N$ , e  $k_n$  la costante cinetica della reazione. La soluzione della (5.11) è chiaramente

$$C_n = C_{n0} \exp \left[ -k_n \frac{x}{U} \right] \quad (5.12)$$

Cambia invece il consumo di ossigeno: stechiometricamente per ossidare 1 mole di  $NH_4-N$  sono necessarie 4.6 moli di ossigeno ( $O_2$ ). Quindi nella (5.8) si ha

$$\text{consumo} = -4.6 \frac{dC_n}{dt} = -4.6 U \frac{\partial C_n}{\partial x}$$

Considerando quindi sia il  $BOD_5$  sia l'azoto ammoniacale  $NH_4-N$ , l'equazione per il deficit di ossigeno diventa

$$U \frac{\partial d}{\partial x} = -k_2 d + k_1 C_{b0} \exp \left[ -k_1 \frac{x}{U} \right] + 4.6 k_n C_{n0} \exp \left[ -k_n \frac{x}{U} \right] \quad (5.13)$$

la cui soluzione è

$$d = d_0 \exp\left(-k_2 \frac{x}{U}\right) + C_{b0} \frac{k_1}{k_2 - k_1} \left[ \exp\left(-k_1 \frac{x}{U}\right) - \exp\left(-k_2 \frac{x}{U}\right) \right] + \\ + 4.6 C_{n0} \frac{k_n}{k_2 - k_n} \left[ \exp\left(-k_n \frac{x}{U}\right) - \exp\left(-k_2 \frac{x}{U}\right) \right]. \quad (5.14)$$

Il confronto con la (5.10) permette di estrapolare la soluzione nel caso di un maggior numero di specie chimiche.

### 5.1.2 Effetto di scarichi successivi

In presenza di scarichi successivi è sufficiente suddividere il corso d'acqua in tratti ed assegnare a ciascun tratto le opportune condizioni al contorno. Nel nostro caso scegliamo un riferimento tale che lo scarico  $F$  sia in  $x_F = 0$ , lo scarico  $G$  in  $x_G = 60 \text{ km}$ , lo scarico  $H$  in  $x_H = 160 \text{ km}$ , lo sbocco in mare in  $x_M = 310 \text{ km}$ .

Per il primo tratto la soluzione è quella trovata in precedenza: (5.6), (5.12) e (5.14), con le condizioni iniziali assegnate dal problema

$$d_0 = d|_{x=0} = 0, \quad C_{b0} = C_b|_{x=0} = \frac{\dot{M}_{bF}}{Q}, \quad C_{n0} = C_n|_{x=0} = \frac{\dot{M}_{nF}}{Q}.$$

dove è stata fatta l'ipotesi che il mescolamento sulla sezione avvenga istantaneamente in prossimità dello scarico ( $\dot{M}_{bF}$  e  $\dot{M}_{nF}$  sono rispettivamente le portate di massa di  $BOD_5$  e di  $NH_4-N$ ). Per questa ipotesi, infatti, possiamo utilizzare, ad esempio per il  $BOD_5$ , la concentrazione che si realizzerebbe nel campo lontano

$$C_{b0} = \hat{C}_{bF} \frac{Q_F}{Q + Q_F} \simeq \hat{C}_{bF} \frac{Q_F}{Q} \quad (5.15)$$

dove  $\hat{C}_{bF} = 40 \text{ mg/l}$  è la concentrazione dello scarico e  $Q_F = 40000 \text{ m}^3/d = 0.463 \text{ m}^3/s$  la portata scaricata, trascurabile rispetto a quella del corso d'acqua. Si noti come la concentrazione  $C_{b0}$  risulti molto inferiore grazie alla diluizione idrodinamica. In maniera equivalente possiamo calcolare  $C_{n0}$ , imponendo la concentrazione limite allo scarico per l'azoto ammoniacale  $\hat{C}_{nF} = 3 \text{ mg/l}$ , ed eventualmente un deficit iniziale di ossigeno.

Per il secondo tratto, la soluzione può essere riscritta con una traslazione del sistema di riferimento; ad esempio la (5.6) diventa

$$C_b^{II} = C_{b0G} \exp\left[-k_1 \frac{(x - x_G)}{U}\right]$$

con la condizione iniziale ottenuta dalla soluzione nel primo tratto ( $C_b^I$ ) sommata al nuovo scarico (con portata  $Q_G = 0.417 \text{ m}^3/s$  e concentrazione  $\hat{C}_{bG} = 40 \text{ mg/l}$ ):

$$C_{b0G} = C_b^I|_{x=x_G} + \hat{C}_{bG} \frac{Q_G}{Q}.$$

In modo analogo possiamo calcolare la soluzione per  $C_n^{II}$  e per il deficit  $d^{II}$ .



Per il terzo tratto (a valle dello scarico di portata  $Q_H = 1.04 m^3/s$ ), e per eventuali tratti successivi corrispondenti ad ulteriori scarichi, si ripete il procedimento illustrato discusso sopra. Si noti che è possibile considerare per ciascun tratto una diversa caratterizzazione idrodinamica, come è necessario fare usualmente nei problemi reali.

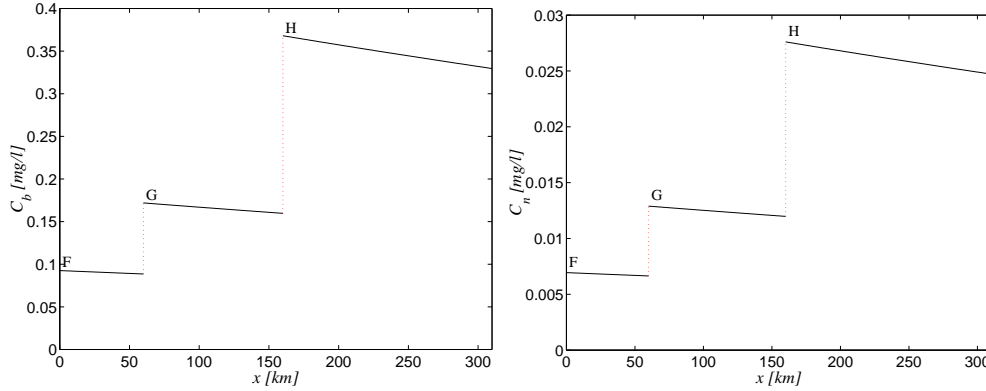


Figura 5.1: Andamento della concentrazione di  $BOD_5$  ( $C_b$ ) e di azoto ammoniacale  $NH_4-N$  ( $C_n$ ) nel corso d'acqua.

I risultati per le concentrazioni  $C_b$  e  $C_n$  sono rappresentati in Figura 5.1. La concentrazione di ossigeno  $C_{O_2} = C_s - d$  è riportata in Figura 5.2, nel caso richiesto (limiti di scarico del depuratore, in linea continua) e nel caso in cui lo scarico confluisca nel corso d'acqua senza essere trattato (in linea punteggiata), assumendo delle concentrazioni di  $BOD_5$  e di  $NH_4-N$  rispettivamente pari a  $\hat{C}_b = 200 mg/l$  e  $\hat{C}_n = 35 mg/l$ ; i grafici di  $C_b$  e  $C_n$  in questo secondo caso possono essere ottenuti semplicemente riscaldando quelli di Figura 5.1.

Le concentrazioni dei soluti (nel caso esaminato  $BOD_5$  e  $NH_4-N$ ) hanno un comportamento discontinuo in corrispondenza degli scarichi, mentre il deficit di ossigeno (o in modo equivalente la concentrazione di ossigeno disciolto) manifesta solamente una variazione nella derivata; questo avviene perché abbiamo trascurato il deficit di ossigeno introdotto dalla portata scaricata.

Nel calcolo abbiamo assunto come concentrazione di ossigeno alla saturazione il valore

$$C_s = 14.161 - 0.3943T + 0.007714T^2 - 0.0000646T^3 = 9.8 mg/l \quad (5.16)$$

(con  $T = 15^\circ C$  temperatura dell'acqua, alla pressione di  $1 atm$  e con salinità assente) e come costanti cinetiche di reazione le stime

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.16 \cdot 10^{-6} 1.047^{T-20} s^{-1} = 0.92 \cdot 10^{-6} s^{-1} = 0.080 d^{-1} \\ k_2 &= 1.16 \cdot 10^{-5} \alpha 1.0159^{T-20} s^{-1} = 3.2 \cdot 10^{-6} s^{-1} = 0.28 d^{-1} \\ k_n &\simeq 0.008 d^{-1} \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove  $\alpha$  è un parametro che dipende dal tipo di corrente (abbiamo qui assunto  $\alpha = 0.3$ ) e il valore di  $k_n$  è stato scelto per finalità didattiche. Si faccia attenzione al fatto che utilizzando formulazioni differenti i parametri possono risul-

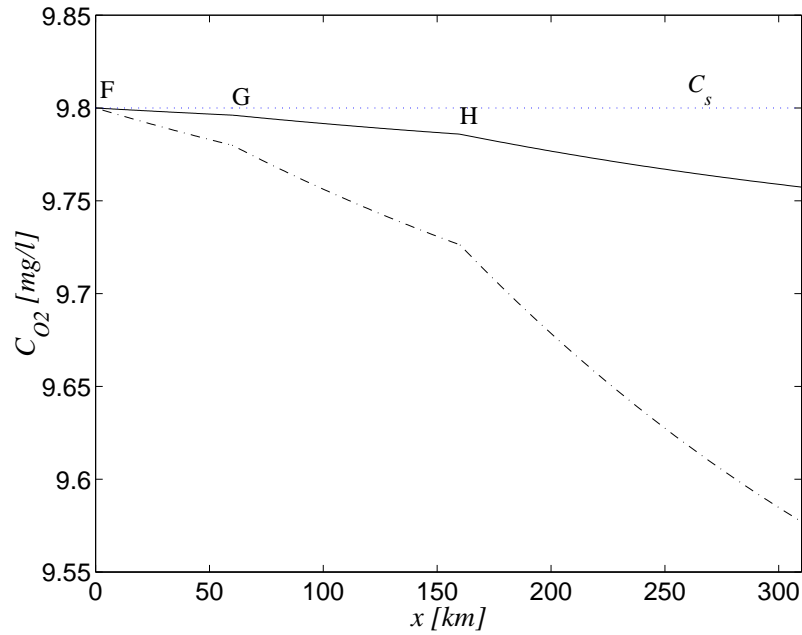


Figura 5.2: Andamento della concentrazione di ossigeno disciolto  $C_{O_2} = C_s - d$  nel caso di uno scarico da depuratore (in linea continua, considerando i limiti massimi di emissione) e di uno scarico non trattato (in linea punteggiata).

tare sensibilmente diversi; in particolare la variabilità delle costanti cinetiche di reazione può essere piuttosto grande (anche come ordine di grandezza).

Come si può vedere dalle formule utilizzate (5.15) e (5.16)-(5.17), le magre estive sono le condizioni più critiche per due motivi: (1) in magra la portata  $Q$  del corso d'acqua è minore e quindi la diluizione è meno efficace; (2) in estate la temperatura più alta fa diminuire la concentrazione di ossigeno alla saturazione, poiché la (5.16) ha un andamento decrescente con  $T$ , e aumenta la cinetica delle reazioni (5.17), incrementando così il consumo di ossigeno. Quando la concentrazione di ossigeno disciolto scende sotto un valore critico di alcuni  $mg/l$  le condizioni anossiche che si instaurano risultano pericolose per le forme di vita presenti nel corso d'acqua.

## Appendice A

### Soluzioni grafiche

Nella pratica, molti problemi possono essere risolti riconducendosi ad un'equazione a coefficienti costanti e alla soluzione adimensionale

$$C^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi\xi^*}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\zeta^* - \zeta_0^* + 2j)^2}{4\xi^*} \right] + \exp \left[ -\frac{(\zeta^* + \zeta_0^* + 2j)^2}{4\xi^*} \right] \right\} \quad (\text{A.1})$$

dove le variabili  $\xi^*$  e  $\zeta^*$  possono assumere di volta in volta significati geometrici differenti. Una volta nota la soluzione della (A.1) in via grafica, si può facilmente ottenere la soluzione dimensionale moltiplicando le variabili adimensionali per le scale caratteristiche del problema. Nelle Figure A.1-A.4 sono riportate le curve di isoconcentrazione ottenute dalla (A.1), per diverse posizioni del punto di scarico  $\zeta_0^*$ .

Il grado di mescolamento  $P_m$  è il rapporto tra la concentrazione massima e la minima previste dalla (A.1):

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{C_{min}^*}{C_{max}^*} = \\ &= \frac{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\zeta_{min}^* - \zeta_0^* + 2j)^2}{4\xi^*} \right] + \exp \left[ -\frac{(\zeta_{min}^* + \zeta_0^* + 2j)^2}{4\xi^*} \right] \right\}}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ -\frac{(\zeta_{max}^* - \zeta_0^* + 2j)^2}{4\xi^*} \right] + \exp \left[ -\frac{(\zeta_{max}^* + \zeta_0^* + 2j)^2}{4\xi^*} \right] \right\}} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

Nella (A.2) i punti in cui è localizzato il massimo di concentrazione si sposta al variare di  $\xi^*$  e del punto di scarico  $\zeta_0^*$ , mentre il minimo si trova sempre in  $\zeta^* = 1$  nel caso in cui  $0 \leq \zeta_0^* \leq 0.5$  (si noti per  $0.5 \leq \zeta_0^* \leq 1$  la soluzione è simmetrica rispetto alla mezzeria). Possiamo però osservare dalle Figure A.2 e A.3 che, fissato  $\zeta_0^*$ , il massimo si sposta in funzione di  $\xi^*$  solo nelle vicinanze dello scarico, per posizionarsi poi sempre verso  $\zeta^* = 0$ , come nel caso di  $\zeta_0^* = 0$  (Figura A.1); solo nel caso in cui  $\zeta_0^* = 0.5$ , per evidenti ragioni di simmetria, il massimo resta invariabilmente posizionato in  $\zeta = 0.5$  (Figura A.4). Il grado di mescolamento  $P_m$  in funzione di  $\xi$  è rappresentato in Figura A.5 per diverse posizioni di scarico  $\zeta_0^*$ .

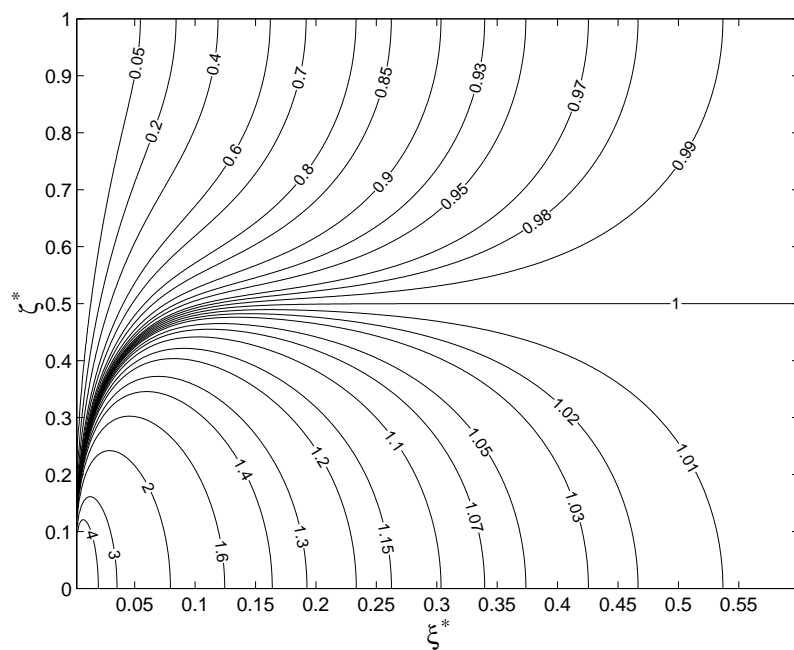


Figura A.1: Curve di isoconcentrazione dalla soluzione (A.1) per  $\zeta_0^* = 0$ .

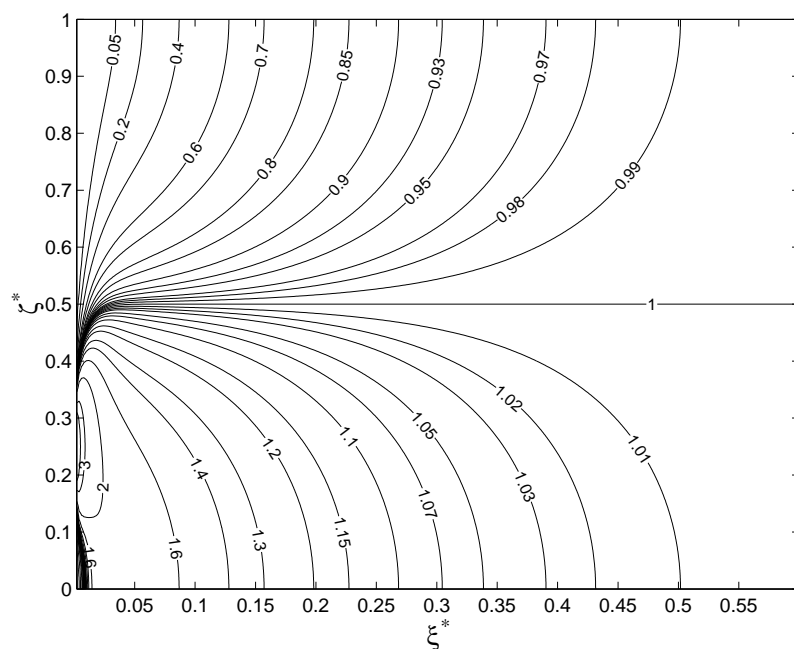


Figura A.2: Curve di isoconcentrazione dalla soluzione (A.1) per  $\zeta_0^* = 0.25$ .

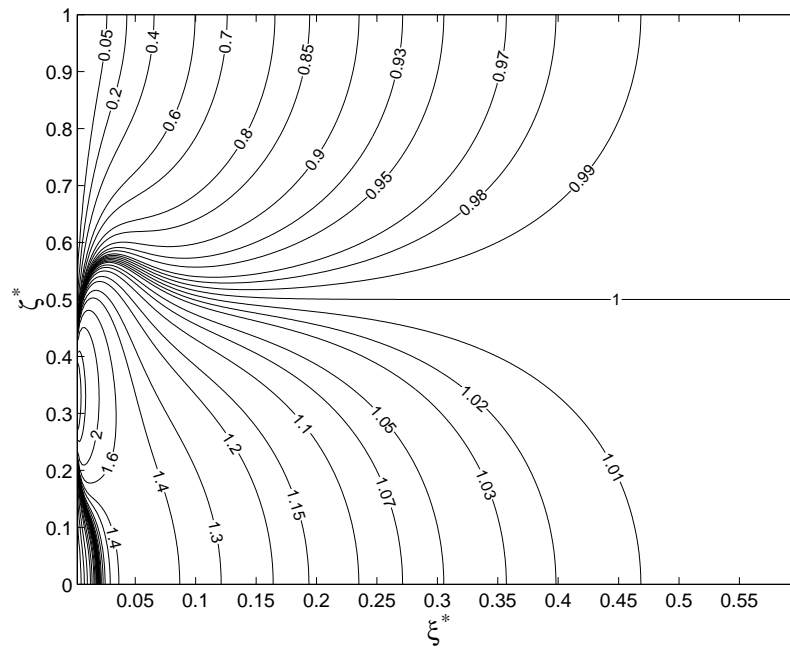


Figura A.3: Curve di isoconcentrazione dalla soluzione (A.1) per  $\zeta_0^* = 0.33$ .

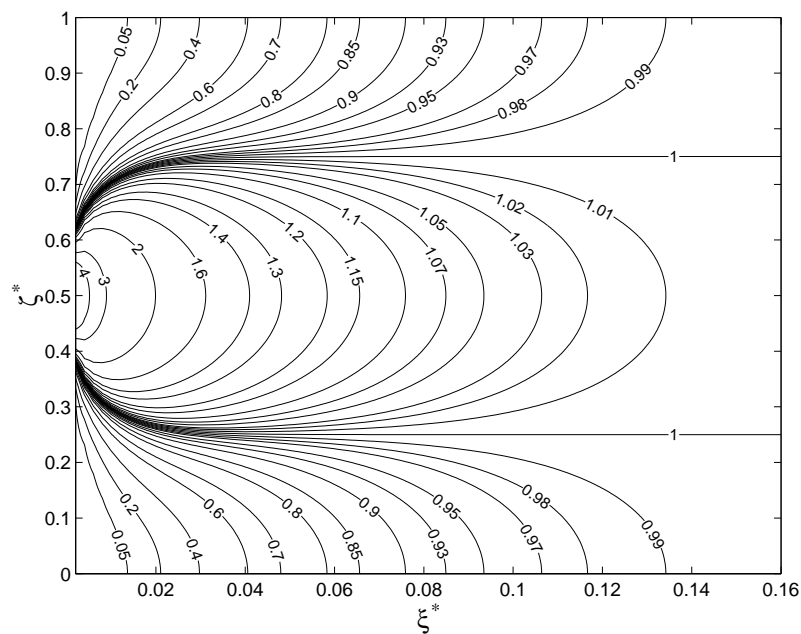


Figura A.4: Curve di isoconcentrazione dalla soluzione (A.1) per  $\zeta_0^* = 0.5$ .

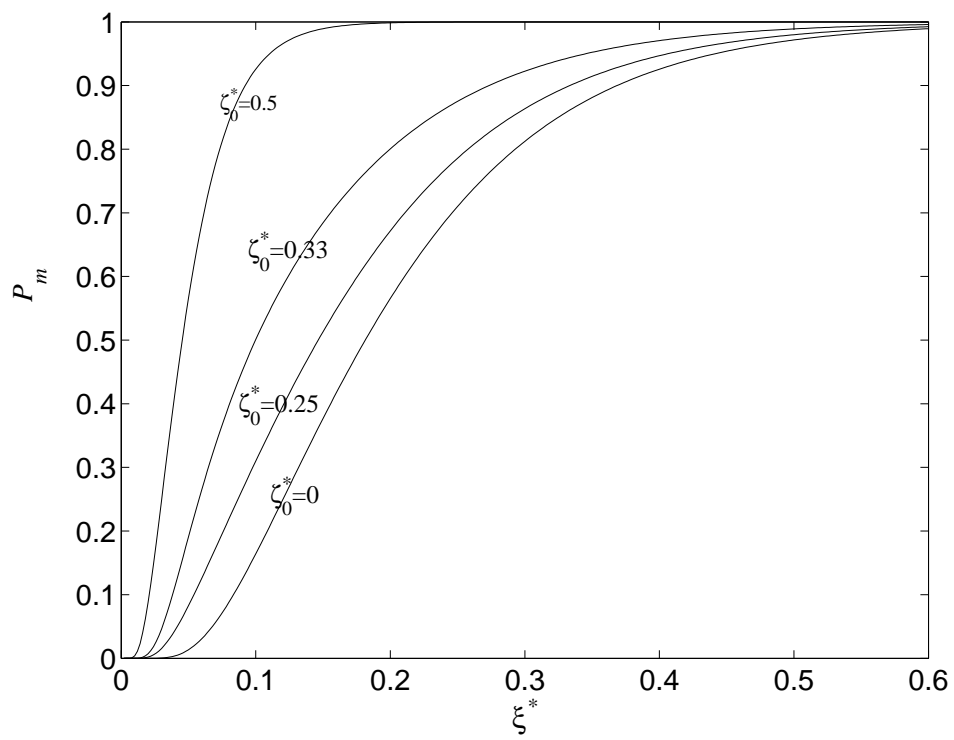


Figura A.5: Grado di mescolamento  $P_m$  ottenuto dalla (A.2) in funzione di  $\xi^*$  per diversi punti di scarico  $\zeta_0^*$ .

## Appendice B

### La funzione errore

La funzione errore (*erf*, *error function*) compare frequentemente nelle soluzioni trovate nelle pagine precedenti. Essa è definita come

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (\text{B.1})$$

Si nota facilmente che la funzione è **antisimmetrica**, ossia  $f(x) = -f(-x)$  e che tende rapidamente al valore  $\pm 1$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

La funzione complementare *erfc* è definita come

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x). \quad (\text{B.2})$$

**Approssimazione numerica.** Poiché la funzione *erf* non può essere espressa in forma esplicita e non sempre è disponibile nelle librerie, può essere utile una versione approssimata:

$$\operatorname{erf}(x) \cong 1 - e^{-x^2} \left( \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{(1 + p x)^k} \right) \quad (\text{B.3})$$

i cui coefficienti valgono

$$p = .3275911, a_1 = .254829592, a_2 = -.284496736, \\ a_3 = 1.421413741, a_4 = -1.453152027, a_5 = 1.061405429 \quad (\text{B.4})$$

Il confronto tra la (B.1) e la (B.3) è riportato in Figura B.2. Come si può notare, l'approssimazione è soddisfacente per  $x > 0$ , dove l'errore rimane entro una fascia dell'ordine di  $10^{-7}$ , mentre la soluzione diverge per  $x < 0$ . Per ovviare a tale mancanza, si possono sfruttare le proprietà di simmetria già ricordate.

Molti dei moderni linguaggi di programmazione hanno la funzione *erf* incorporata; sfortunatamente al FORTRAN manca. Di seguito viene riportata un esempio, in doppia precisione, di una procedura che utilizza la (B.3) per calco-

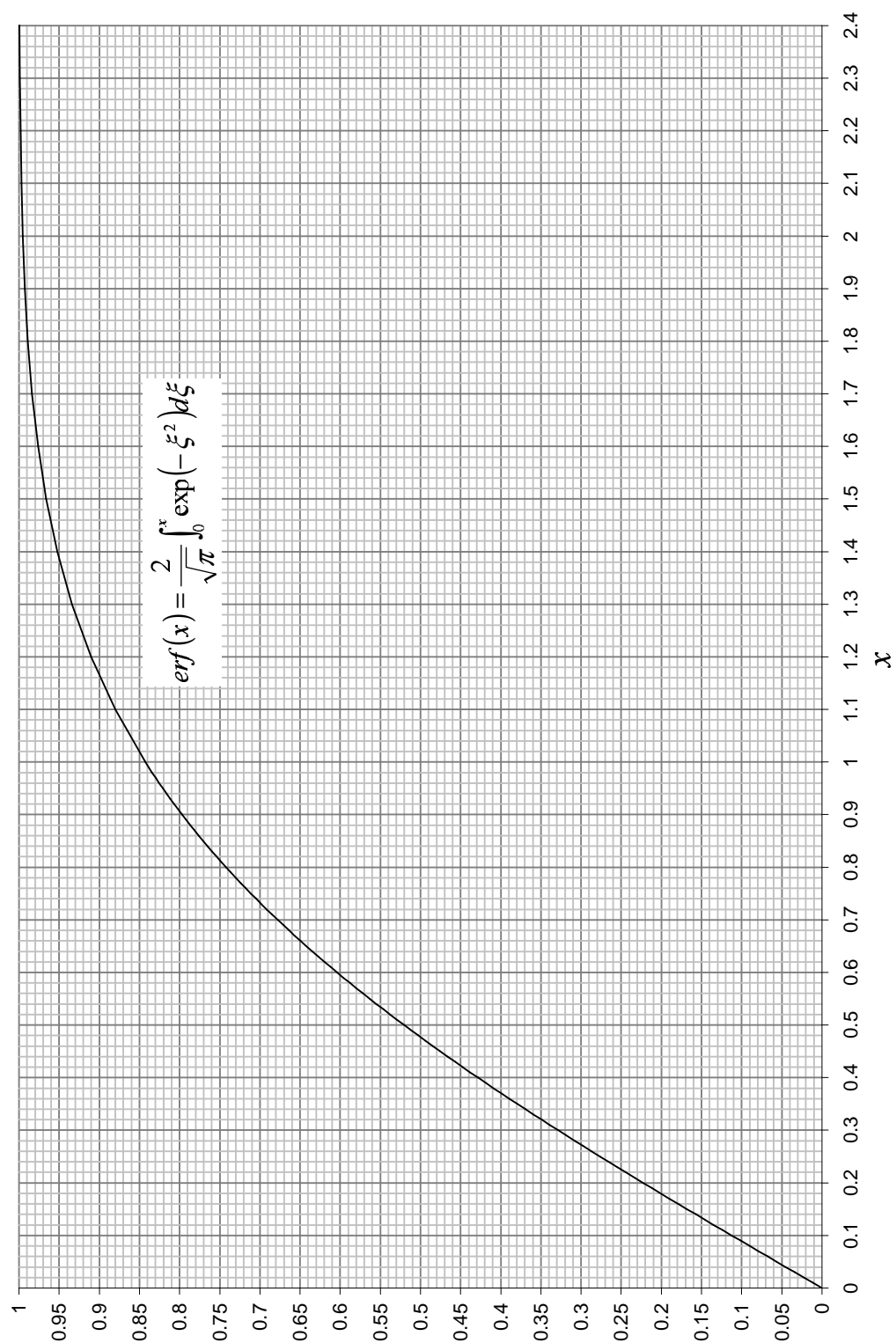


Figura B.1: La funzione  $\text{erf}(x)$ .



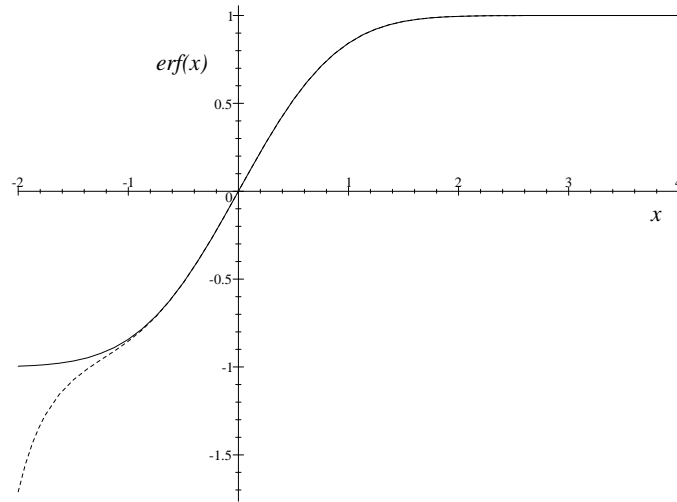


Figura B.2: Confronto tra la soluzione esatta (B.1), in linea continua, e quella approssimata (B.3), in linea tratteggiata.

lare la  $\text{erf}$  in tutto il suo dominio di definizione (compresi i valori negativi di  $x$ ):

```
function erf(x)
real(8):: erf,x,xp,t1,t2
xp=x*sign(1.d0,x)
t1 = 1.d0/(1.d0+0.3275911d0*xp)
t2 = t1*t1
erf = 1.d0-exp(-xp*xp)*(0.254829592d0-0.284496736d0*t1
#+0.1421413741d1*t2-0.1453152027d1*t2*t1
#+0.1061405429d1*t2*t2)*t1
erf=erf*sign(1.d0,x)
return
end
```



## Appendice C

# Analisi dimensionale

L'analisi dimensionale è basata sull'idea molto semplice che le leggi fisiche non devono dipendere dalle unità di misura adottate per le variabili considerate. Le conseguenze di questa osservazione sono molto rilevanti per quanto riguarda l'interpretazione dei fenomeni fisici. Molte considerazioni tra quelle che seguono sono tratte da Barenblatt (1987), al quale si rimanda per un'analisi più approfondita.

La maggior parte delle grandezze fisiche può essere espressa utilizzando esclusivamente cinque dimensioni di base, come: *lunghezza* ( $L$ ), *tempo* ( $T$ ), *massa* ( $M$ ), *temperatura* ( $\theta$ ), *intensità di corrente elettrica* ( $I$ ). La scelta delle grandezze di base è arbitraria e dipende da ragioni storiche e da considerazioni legate alla facilità e precisione delle misure sperimentali; l'unico vincolo nella scelta è che le dimensioni siano indipendenti, cioè non sia possibile ottenerne una a partire da combinazioni delle altre.

Le *unità di misura* vengono utilizzate per *misurare* le grandezze fisiche confrontandole con delle unità di riferimento *esterne*, che variano a seconda del sistema di riferimento utilizzato. Ad esempio una lunghezza può essere misurata in metri, pollici, miglia, anni luce, ecc. Similmente una velocità può essere misurata in metri al secondo o miglia all'ora, ma rimane in ogni caso una lunghezza divisa per un tempo. Esistono diversi sistemi di riferimento; quello più diffuso è il sistema internazionale (SI, *Système Internationale*), nel quale la lunghezza viene misurata in *metri* ( $m$ ), il tempo in *secondi* ( $s$ ) la massa in *chilogrammi* ( $kg$ ), la temperatura in *kelvin* ( $K$ , senza il simbolo del grado  $^{\circ}$ ), la corrente in *ampere* ( $A$ ). Ad alcune grandezze di uso più comune sono stati attribuiti dei nomi speciali, come ad esempio all'unità per misurare la forza (*newton*,  $N = kg \cdot m/s^2$ ).

Alcune quantità non hanno dimensioni, come ad esempio il seno di un angolo, che rappresenta il rapporto tra due lati dello stesso e quindi si esprime come  $L/L$ . Queste grandezze vengono dette *adimensionali*. Esistono però alcune quantità che, pur essendo adimensionali, sono espresse utilizzando delle unità di misura: ad esempio gli angoli possono essere misurati in radianti ( $rad$ ), gradi sessagesimali ( $^{\circ}$ ), gradi centesimali ( $gon$ ).

Spesso le leggi fisiche sono espresse in termini dimensionali. In un caso generico, come  $f = ab + c$ , si deve avere che le dimensioni dei termini a sinistra

dell'uguale sono le stesse di quelli a destra. Un caso in cui assolutamente è necessario avere delle grandezze adimensionali è quando queste rappresentano gli argomenti di funzioni trigonometriche o esponenziali. Nella nota legge di decadimento  $\exp(-kt)$ , dove  $t$  rappresenta un tempo (scriveremo  $[t] = T$ ),  $k$  deve essere espresso come l'inverso di un tempo, ossia  $T^{-1}$  per poter avere un termine adimensionale. Se quindi  $k$  è espresso in  $s^{-1}$ , la variabile tempo  $t$  deve essere coerentemente misurata in  $s$ .

## C.1 Teorema di Buckingham

Il teorema di Buckingham, noto anche come teorema II (*Buckingham's Pi Theorem*), afferma che ogni relazione fisica del tipo  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  è equivalente a una relazione del tipo  $g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-r}) = 0$ , dove  $r$  è il numero di dimensioni coinvolte nel problema e i termini  $\pi_i$  sono gruppi adimensionali ottenuti scalando le variabili originarie  $x_{r+1}, \dots, x_n$  utilizzando  $r$  variabili ( $x_1, \dots, x_r$ ) dimensionalmente indipendenti. La conseguenza è che le funzioni che esprimono le leggi fisiche possono essere scritte in termini di gruppi adimensionali, che risultano essere in numero inferiore alle grandezze considerate inizialmente.

L'indipendenza dimensionale può essere verificata nel modo seguente. Consideriamo un caso in cui siano coinvolte masse ( $M$ ), lunghezze ( $L$ ) e tempi ( $T$ ) come dimensioni fondamentali. Prendiamo tre grandezze  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ , per le quali possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}[Q_1] &= M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1} \\ [Q_2] &= M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2} \\ [Q_3] &= M^{\alpha_3} L^{\beta_3} T^{\gamma_3}\end{aligned}$$

Se scriviamo la matrice degli esponenti delle dimensioni, possiamo individuare l'indipendenza richiedendo che il determinante di tale matrici non risulti nullo, ossia:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{C.1})$$

In tal caso non è possibile misurare una delle variabili utilizzando le altre. L'estensione al caso di un numero  $r \neq 3$  di dimensioni considerate è banale.

Il significato del teorema appare più chiaro quando si riflette sull'operazione che si sta compiendo: invece di utilizzare delle *scale esterne* per misurare le grandezze coinvolte nel problema (il metro, il secondo, il chilogrammo standard), si sono scelte proprio alcune di tali grandezze come unità di misura per le altre. In questo modo alcune variabili, tipicamente quelle più rilevanti, assumono il significato di *scale interne* del problema, che devono quindi essere indipendenti dal punto di vista dimensionale per poter fungere da 'metro' per tutte le altre variabili.

### C.1.1 Un esempio nell'ambito dell'idraulica

Per illustrare il procedimento, si è scelto il problema, noto nelle discipline idrauliche, di determinare la caduta di pressione di una tubazione tra due punti distanti  $\ell$ . Individuate le grandezze fisiche coinvolte nel problema, ossia la distanza  $\ell$ , il diametro  $D$  del tubo, la velocità  $U$ , la scabrezza  $e_s$  delle pareti, la viscosità  $\mu$  e la densità del fluido  $\rho$ , possiamo esprimere la caduta di pressione  $\Delta p$  nella forma

$$\Delta p = f_1(\ell, D, U, e_s, \mu, \rho).$$

Dato che nel problema sono coinvolte  $r = 3$  dimensioni ( $M, L, T$ ), scegliamo come tre scale interne  $D, U$  e  $\rho$ . Le loro dimensioni sono rispettivamente:

$$[D] = L, [U] = L T^{-1}, [\rho] = M L^{-3} \quad (C.2)$$

Avvalendosi della (C.1) si può vedere che le tre grandezze sono dimensionalmente indipendenti. Si noti che la scelta non è univoca, ma implica la conoscenza del fenomeno fisico.

Passiamo quindi alla definizione dei gruppi adimensionali coinvolti. L'analisi dimensionale fornisce:

$$[\Delta p] = M L^{-1} T^{-2}, \quad [\ell] = L, \quad [e_s] = L, \quad [\mu] = M L^{-1} T^{-1}. \quad (C.3)$$

Le variabili della (C.3) possono essere quindi espresse in funzione delle (C.2) nel seguente modo:

$$\Delta p = D^{a_1} U^{b_1} \rho^{c_1}, \quad \ell = D^{a_2} U^{b_2} \rho^{c_2}, \quad e_s = D^{a_3} U^{b_3} \rho^{c_3}, \quad \mu = D^{a_4} U^{b_4} \rho^{c_4} \quad (C.4)$$

Prendiamo in considerazione la prima delle (C.4); ricordando le (C.2) e la prima delle (C.3) si può scrivere l'equazione dimensionale

$$\begin{array}{ccccccc} [\Delta p] & & [D] & & [U] & & [\rho] \\ M L^{-1} T^{-2} & = & (L)^{a_1} & (L T^{-1})^{b_1} & (M L^{-3})^{c_1} \end{array}$$

dalla quale, considerando separatamente le dimensioni  $M, L, T$ , si ha

$$\begin{array}{ll} (M) & 1 = c_1 \\ (L) & -1 = a_1 + b_1 - 3c_1 \\ (T) & -2 = -b_1 \end{array}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene  $a_1 = 0, b_1 = 2, c_1 = 1$ , da cui il primo gruppo adimensionale

$$\Pi_0 = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

Analogamente si trovano

$$\Pi_1 = \frac{\ell}{D}, \quad \Pi_2 = \frac{e_s}{D}, \quad \Pi_3 = \frac{\mu}{\rho U D}$$

nei quali il lettore individuerà facilmente alcuni numeri adimensionali già noti: il numero di Reynolds  $R_e = \Pi_3^{-1}$  e la scabrezza adimensionale della tubazione  $\varepsilon = \Pi_2$ .

Possiamo quindi esprimere la caduta di pressione in maniera semplificata<sup>1</sup>

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_2 \left( R_e, \varepsilon, \frac{\ell}{D} \right)$$

Confronti sperimentali mostrano una dipendenza diretta dal parametro  $\ell/D$  e quindi

$$\Delta p = \rho V^2 \frac{\ell}{D} f_3(R_e, \varepsilon) \quad (\text{C.5})$$

Volendo valutare il gradiente di pressione locale  $dp/dx$ , possiamo far tendere la distanza  $\ell$  a zero ed eliminare il parametro  $\ell/D$ . Si ha in questo caso

$$\left[ \frac{dp}{dx} \right] = M L^{-2} T^{-2} \quad \Rightarrow \quad \Pi_4 = \frac{dp}{dx} \frac{D}{\rho U^2}$$

e la relazione (C.5) si semplifica in

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho U^2}{D} f_4(R_e, \varepsilon) \quad (\text{C.6})$$

che si riconosce esprimere la dipendenza funzionale caratteristica della caduta di carico nelle correnti in pressione.

Quando un parametro adimensionale risulta molto piccolo (o molto grande), spesso esiste la possibilità che il suo contributo al problema risulti trascurabile. Prendiamo ad esempio il caso dei condotti idraulicamente lisci, per i quali la variabile  $e_s$  non entra nella descrizione del sistema fisico; in questo caso vale  $e_s/D \ll 1$  e la (C.6) si semplifica in

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho U^2}{D} f_5(R_e)$$

Un altro caso estremo, valido per i tubi idraulicamente scabri, è quello in cui il numero di Reynolds è molto grande e la soluzione dipende esclusivamente dalla scabrezza relativa:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho U^2}{D} f_6(\varepsilon)$$

**Attenzione!** Non inganni però l'apparente facilità con cui si possono semplificare le relazioni: per ottenere risultati corretti è necessaria una buona conoscenza del sistema fisico che si sta analizzando.

### C.1.2 Un'applicazione: mescolamento in ambiente stratificato

Un secondo esempio, più complesso e direttamente connesso alle problematiche del mescolamento di inquinanti nei corpi idrici viene illustrato di seguito; è tratto da Fischer et al. (1979).

Si consideri lo smaltimento di un volume  $V_s$  di fanghi in un corpo idrico stratificato linearmente nella direzione verticale (si faccia riferimento alla Figura C.1). E' un problema di campo vicino analogo ad un pennacchio scaricato

<sup>1</sup>Si noti che è equivalente scrivere la dipendenza da  $\Pi_3 = R_e^{-1}$  o dal suo inverso  $R_e$ .

nell'atmosfera; in prima approssimazione non si tiene conto né della diffusione né degli effetti convettivi. Si ipotizza che il processo sia controllato dalla differenza di densità tra i fanghi scaricati e l'ambiente che li riceve. I fanghi, inizialmente più pesanti, si mescolano con il fluido più leggero mentre depositano, finché la densità non raggiunge un valore pari a quello ambiente (se si tenesse in considerazione anche l'inerzia, la nuvola dei fanghi oltrepasserebbe tale limite). Durante il processo di sedimentazione, la densità  $\rho_s$  dei fanghi si avvicina a quella  $\rho_a$  dell'ambiente sia perché  $\rho_s$  diminuisce a causa dell'*entrainment* di acqua pulita, che fa aumentare la dimensione della nuvola, sia perché  $\rho_a$  cresce linearmente con la profondità, secondo una legge del tipo

$$\rho_a = \rho_0 - k z$$

Se la fase di discesa si esaurisce in un lasso di tempo sufficientemente ridotto da poter separare la scala temporale di questo fenomeno da quelle successive di diffusione laterale e di azione convettiva legata alle circolazioni interne nel corpo idrico, è possibile ottenere delle informazioni significative utilizzando l'analisi dimensionale.

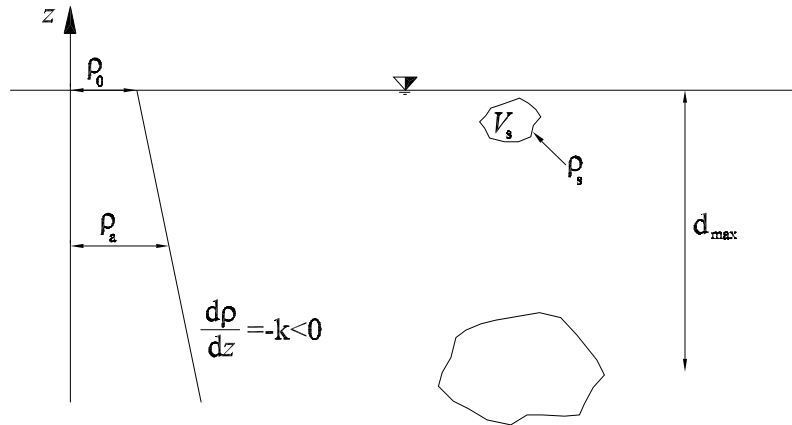


Figura C.1: Rappresentazione schematica del problema dello scarico di una nuvola di fanghi pesanti in un mezzo stratificato

Il primo obiettivo è quello di determinare la massima profondità di penetrazione  $d_{max}$  della nuvola. Il problema suggerisce che  $d_{max}$  possa dipendere dalle densità  $\rho_s$  e  $\rho_0$ , dal grado di stratificazione  $k$ , dal volume dei fanghi  $V_s$ , dall'accelerazione di gravità  $g$  e dalla viscosità cinematica  $\nu$ , ossia

$$d_{max} = f(\rho_s, \rho_0, k, V_s, g, \nu) \quad (C.7)$$

Tale relazione comprende 7 grandezze, che possono essere ridotte a  $7 - 3 = 4$  parametri adimensionali avvalendosi del teorema II, ma senza riuscire a semplificare drasticamente il problema.

Il problema può essere semplificato avvalendosi della conoscenza empirica dei processi fisici coinvolti: la dipendenza (C.7) può infatti essere riscritta sulla base delle seguenti osservazioni. La viscosità  $\nu$ , pur influenzando il campo di

moto, non dovrebbe risultare cruciale nel meccanismo di discesa della nuvola. Nel processo non conta la gravità  $g$  semplice, ma l'eccesso di peso sommerso iniziale della nuvola  $g \Delta \rho V_s$  (dove  $\Delta \rho = \rho_s - \rho_0$ ). Analogamente, il gradiente di densità svolge un ruolo rilevante solo nella forma  $-g d\rho_a/dz$ . La (C.7) diventa quindi

$$d_{max} = f \left( \rho_0, g \Delta \rho, -g \frac{d\rho_a}{dz} \right) \quad (C.8)$$

che può essere ulteriormente elaborata eliminando scalando i termini comprendenti la massa con la densità  $\rho_0$ . In questo modo si eliminano tutti i termini che coinvolgono come dimensione la massa stessa. Si ottiene infine

$$d_{max} = f (g' V_s, g\varepsilon) \quad (C.9)$$

dove abbiamo introdotto la gravità modificata  $g' = g(\rho_s - \rho_0)/\rho_0$  e il gradiente  $\varepsilon = -\frac{1}{\rho_s} \frac{d\rho_a}{dz}$ . Abbiamo quindi ridotto la relazione a 3 grandezze (nelle due dimensioni  $L$  e  $T$ ) che possono essere scritte in termini di un solo gruppo adimensionale adottando come scale le variabili  $g' V_s$  (azione motrice) e  $g\varepsilon$  (meccanismo resistente), che risultano dimensionalmente indipendenti ( $[g' V_s] = L^4 T^{-2}$ ,  $[g\varepsilon] = T^{-2}$ ). Possiamo definire così un gruppo adimensionale ( $3 - 2 = 1$ ):

$$d_{max} \left( \frac{g\varepsilon}{g' V_s} \right)^{1/4} = A \quad (C.10)$$

che deve risultare pari ad un valore costante  $A$  da determinare sperimentalmente: si trova  $A \simeq 2.66$ .

Il tempo di diluizione  $t_{max}$  può essere determinato seguendo la medesima procedura. Data una dipendenza

$$t_{max} = f (g' V_s, g\varepsilon)$$

risulta

$$t_{max} \sqrt{g\varepsilon} = B$$

con  $B$  costante.

La concentrazione di equilibrio  $C_{max}$  del contaminante dipenderà invece dalla massa  $M_c$  scaricata, che si conserva durante la diluizione. Ponendo

$$C_{max} = f (g' V_s, g\varepsilon, M_c)$$

si fissa una relazione con 4 variabili in 3 dimensioni e si ottiene un solo gruppo adimensionale ( $4 - 3 = 1$ )

$$\frac{C_{max}}{C_s} = c \quad \text{con} \quad C_s = M_c \left( \frac{g\varepsilon}{g' V_s} \right)^{3/4}$$

dove  $c$  è la costante da determinare.



## C.2 Similarità

Un'importante applicazione dell'analisi dimensionale è quella della costruzione di modelli fisici in scala ridotta, che si basa sull'ipotesi che, mantenendo immutati alcuni parametri adimensionali, sia possibile riprodurre i fenomeni da studiare riproducendone i tratti essenziali. Il concetto di *similarità fisica* è una generalizzazione del concetto di similarità in geometria. Due triangoli sono simili quando, pur differendo nella misura delle lunghezze dei lati, gli angoli racchiusi sono i medesimi. Analogamente, fenomeni fisici sono chiamati *similiari* quando i valori dei parametri adimensionali sono uguali e differiscono solo per quanto riguarda le variabili dimensionali.

**Modelli e prototipi** L'analisi di similarità è alla base della modellazione dei fenomeni fisici. Definiamo *prototipo* il fenomeno fisico che stiamo esaminando (nella 'realtà'). Vogliamo studiare il comportamento del prototipo utilizzando un *modello*, tipicamente in scala ridotta, che ne preservi alcune caratteristiche. Per fare questo possiamo definire dei rapporti di scala (spaziali, temporali) che permettano di mantenere inalterati i gruppi adimensionali più significativi. Purtroppo è in generale impossibile riprodurre tutte le proprietà del fenomeno, in quanto gruppi adimensionali diversi impongono rapporti di scala differenti. La modellazione del fenomeno può essere d'altra parte condotta selezionando quegli aspetti che risultino più significativi ai fini dell'analisi.

### C.2.1 Soluzioni autosimilari

Una delle possibilità più interessanti dell'analisi dimensionale è quella di trovare delle soluzioni autosimilari. In particolare per i processi che evolvono nel tempo, si possono trovare delle relazioni che risultano invarianti qualora si adottino le scale giuste per adimensionalizzare il problema: un fenomeno dipendente dal tempo viene detto *auto-similare* se la distribuzione spaziale delle sue proprietà in istanti differenti può essere ottenuta da un'altra, nota ad un dato tempo, per mezzo di trasformazioni similari. Semplificando, questo significa che fotografie istantanee del fenomeno sono sempre identiche: solo la scala cambia al variare del tempo.

Un esempio ci permette di illustrare il concetto in maniera più chiara. La soluzione fondamentale monodimensionale per il campo di concentrazione in un dominio monodimensionale (dimensionalmente  $[C] = M/L$ )

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

trovata nel caso della diffusione è una soluzione autosimilare. Abbiamo infatti che, una volta scalate opportunamente le variabili  $C$  e  $x$ , utilizzando  $M$ ,  $D$  e il tempo  $t$  nella forma

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{Dt}}, \quad C^* = \frac{C}{M/\sqrt{Dt}},$$

si ottiene una soluzione unica

$$C^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x^{*2}}{4}\right) \quad (\text{C.11})$$

che può essere particolarizzata scegliendo il tempo  $t$  alla quale viene valutata. La (C.11) dipende esclusivamente da  $x^*$  ed è quindi ‘costante’ nel tempo; è valida per ogni  $t \neq 0$  (al momento dello scarico  $t = 0$  e la soluzione degenera in un Dirac).

## Appendice D

# Metodi di soluzione numerica dell'equazione di convezione-diffusione

Queste brevi considerazioni intendono fornire un'introduzione alla soluzione numerica dell'equazione di convezione-diffusione monodimensionale

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (\text{D.1})$$

considerando il caso più semplice in cui i coefficienti  $U$  e  $D$  sono costanti.

L'equazione (D.1), pur essendo uno dei casi più semplici di equazioni differenziali alle derivate parziali, presenta molte caratteristiche interessanti che sono riscontrabili anche in sistemi più complessi. La comprensione del funzionamento dei metodi di soluzione numerica e il commento delle loro proprietà peculiari, sviluppati in questo caso specifico, possono fornire un'indicazione su come affrontare diverse tipologie di problemi.

### D.1 Classificazione delle equazioni differenziali

Sulla base delle caratteristiche matematiche di un'equazione differenziale è possibile trarre delle informazioni utili sul comportamento della soluzione. Per comprendere la natura delle equazioni differenziali è istruttivo fare riferimento ad alcune equazioni particolari che descrivono fenomeni di cui si conoscono le caratteristiche salienti:

1. equazione di pura convezione:  $\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = 0$
2. equazione di Fourier (pura diffusione):  $\frac{\partial f}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$
3. equazione di pura dispersione<sup>1</sup>:  $\frac{\partial f}{\partial t} - \nu \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$

---

<sup>1</sup>Si noti che il termine *dispersione* ha in questo capitolo un significato diverso da quello

4. equazione delle onde:  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

5. equazione di Laplace:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

6. equazione di Poisson:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g$

Utilizzando una notazione ormai assodata, è stata considerata una funzione  $f(x, t)$  per i primi quattro tipi di equazione, data la natura evolutiva del problema. Negli ultimi due casi si è considerata una funzione  $f(x, y)$  poiché si tratta di problemi di natura spaziale.

L'ordine di un'equazione differenziale alle derivate parziali è dato dal grado massimo in cui compare una qualsiasi derivata: l'eq. 1 è del primo ordine, le eq. 2, 4, 5 e 6 sono del secondo, mentre la 3 è del terzo. Le equazioni sono dette *lineari* se i coefficienti (nel caso specifico  $U, \mu, \nu, a, g$ ) non dipendono dalla funzione  $f$ , ad esempio  $U = U(x, y, t)$ , *non-lineari* altrimenti. Se i coefficienti non dipendono neppure dalle variabili indipendenti  $(x, y, t)$  sono dette a *coefficienti costanti*. Le equazioni lineari godono di alcune importanti proprietà, tra le quali si può ricordare il *principio di sovrapposizione degli effetti*, che consente di ottenere la soluzione di un problema sommando delle soluzioni particolari; questa qualità delle equazioni lineari è stata abbondantemente sfruttata nei capitoli precedenti. Le equazioni non-lineari possono essere risolte analiticamente solo in casi particolari. Se i coefficienti non dipendono dalle derivate di ordine maggiore o uguale di quelle a cui si riferiscono, ossia l'equazione è lineare nelle derivate di ordine massimo, l'equazione è detta *quasi-lineare*; un caso assai noto è quello delle equazioni del moto dei fluidi.

Da un punto di vista matematico, le equazioni differenziali del secondo ordine alle derivate parziali possono essere classificate in tre grandi categorie: ellittiche, iperboliche, paraboliche. Prendiamo il caso dell'equazione quasi-lineare in due variabili indipendenti  $(x, y)$ :

$$Af_{,xx} + Bf_{,xy} + Cf_{,yy} + Ef_{,x} + Ff_{,y} + Gf = H \quad (\text{D.2})$$

dove  $A, B, C$  possono dipendere da  $x, y, f, f_{,x}, f_{,y}$ , mentre  $E, F, G$  da  $x, y, f$  e  $H$  da  $x$  e  $y$ . Il carattere dell'equazione può essere valutato sulla base del segno del discriminante  $\Delta = B^2 - AC$  secondo la Tabella D.1.

$\Delta$	tipo
$< 0$	ellittica
$= 0$	parabolica
$> 0$	iperbolica

Tabella D.1: Classificazione delle equazioni differenziali in base alla (D.2).

della dispersione intesa come meccanismo diluitivo originantesi dalla combinazione di diffusione e convezione non uniforme. Dal punto di vista matematico, la dispersione si riferisce alla presenza di una derivata del terzo ordine nell'equazione differenziale, che dà luogo alla separazione di armoniche di lunghezza diversa, come si vedrà in seguito.

In conformità con la comune intuizione fisica, la classificazione può essere interpretata assegnando un ruolo intrinsecamente differente alle derivate temporali e a quelle spaziali. Il significato di questa classificazione è intimamente legato alle caratteristiche: ipersuperfici  $(n - 1)$ -dimensionali nello spazio delle  $n$  variabili indipendenti lungo le quali si propagano le informazioni e si possono trasmettere le discontinuità.

In base alla classificazione introdotta, l'equazione di convezione-diffusione (D.1) risulta essere di natura parabolica, e degenera in un'equazione del primo ordine quando il coefficiente di diffusione è nullo.

## D.2 Alcune caratteristiche generali

Consideriamo l'equazione di convezione-diffusione-dispersione per la generica funzione  $f(x, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + K \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad (\text{D.3})$$

che può essere risolta separando le variabili e sviluppando la componente della soluzione in  $x$  in serie di Fourier (si veda l'Appendice E):

$$f(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(t) \exp(\imath k_m x) \quad (\text{D.4})$$

dove  $\imath$  è l'unità immaginaria,

$$k_m = \frac{2\pi m}{L}$$

è il numero d'onda e  $L$  è il periodo fondamentale della soluzione; si noti che lunghezze d'onda maggiori corrispondono a numeri d'onda minori. La (D.4) si basa sulla possibilità di esprimere qualsiasi funzione, che sia periodica o definita in un intervallo limitato, esprimendola come una sommatoria di seni e coseni (o, in maniera equivalente, di funzioni esponenziali con argomento immaginario). Così facendo, il problema si restringe a determinare il coefficiente complesso  $g_m$  di ogni termine della sommatoria, che risulta dipendente esclusivamente dalla variabile  $t$ .

Sostituendo lo sviluppo (D.4) nell'equazione (D.3) si ottiene un'equazione differenziale indipendente per ogni componente  $g_m$  della forma

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} = -(\imath k_m U + k_m^2 D + \imath k_m^3 K) g_m ,$$

la cui soluzione è

$$g_m(t) = \alpha \exp [ - (\imath k_m U + k_m^2 D + \imath k_m^3 K) t ] ,$$

dove  $\alpha$  è un coefficiente da determinare imponendo le condizioni iniziali.

La generica componente dello sviluppo (D.4), riscritto come  $f = \sum f_m$ , è quindi

$$f_m = \alpha \exp (-k_m^2 D t) \exp [\imath k_m (x - U t - k_m^2 K t)] \quad (\text{D.5})$$

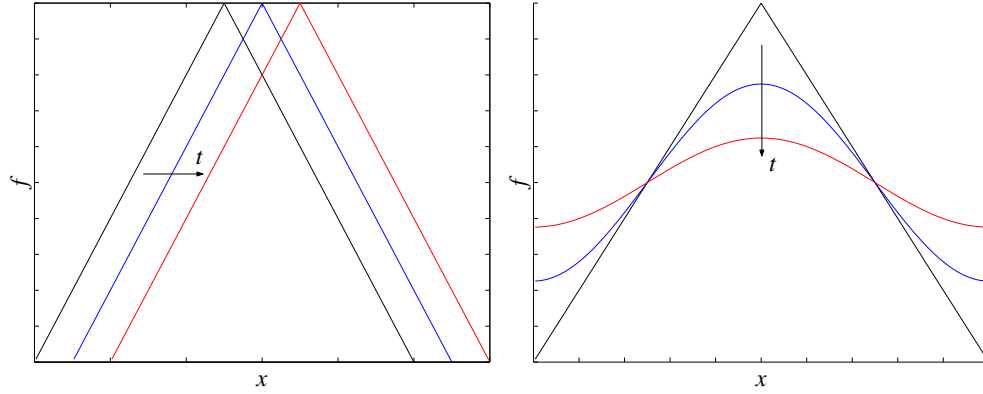


Figura D.1: A sinistra, effetto del puro trasporto convettivo con velocità  $U > 0$ ; a destra, l'effetto di attenuazione indotto dalla diffusione con  $D > 0$ .

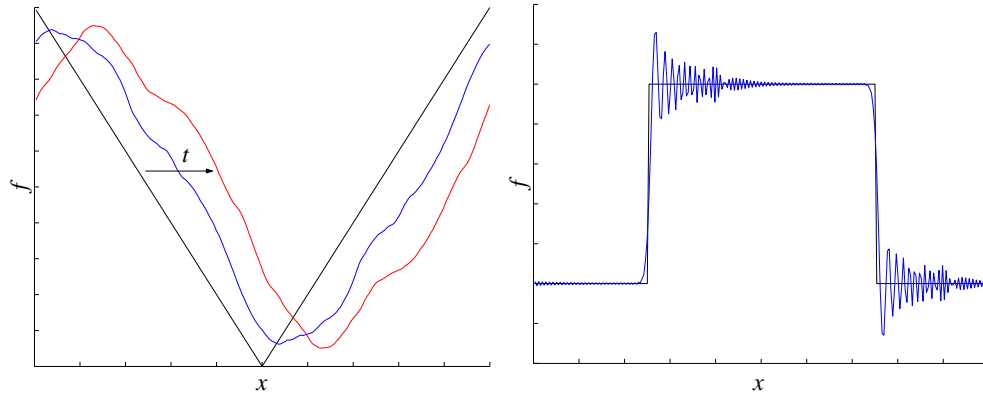


Figura D.2: Effetto della pura dispersione (con  $K > 0$ ). A sinistra si può osservare la deformazione e la traslazione del segnale dovuta alla velocità di fase  $k_m^2 K$ ; a destra si nota la separazione delle frequenze più elevate presenti in un segnale quadro.

nella quale si può notare chiaramente una componente che introduce un decadimento o un'amplificazione del segnale (a seconda del segno del coefficiente di diffusione  $D$ ) e una sua traslazione nello spazio (legata alla velocità  $U$  e alla dispersione  $K$ ).

Possiamo analizzare alcuni casi particolari della (D.5):

- sola convezione ( $D = K = 0$ )

$$f_m = \alpha \exp [ik_m (x - Ut)]$$

la soluzione si propaga indisturbata muovendosi con velocità  $U$ , uguale per ogni numero d'onda  $k_m$ , come nell'esempio rappresentato nella parte sinistra della Figura D.1;

- sola diffusione ( $U = K = 0$ )

$$f_m = \alpha \exp (-k_m^2 Dt) \exp [ik_m x]$$

la soluzione decade o si amplifica esponenzialmente con il tempo (rispettivamente per  $D > 0$  e  $D < 0$ ), come si può notare nella parte destra della Figura D.1; i numeri d'onda maggiori (lunghezze d'onda minori) decadono più rapidamente;

- convezione + diffusione ( $K = 0$ )

$$f_m = \alpha \exp(-k_m^2 Dt) \exp[ik_m(x - Ut)]$$

la soluzione si propaga e decade con il tempo;

- sola dispersione ( $U = D = 0$ ):

$$f_m = \alpha \exp[ik_m(x - k_m^2 Kt)]$$

la soluzione si propaga senza decadere, ma la celerità di propagazione ( $= k_m^2 K$ , velocità di fase) dipende dal numero d'onda  $k_m$ ; se la condizione iniziale non è puramente sinusoidale (ossia è composta da più armoniche), le armoniche che la compongono tendono a separarsi, e quelle con  $k_m$  maggiori si muovono con celerità maggiore; due esempi sono riportati in Figura D.2.

### D.3 Metodi numerici

Esiste un gran numero di metodi numerici per risolvere l'equazione (D.1). In questa sezione verranno introdotti gli strumenti fondamentali per valutare le caratteristiche degli schemi numerici introdotti di seguito. Per un inquadramento più dettagliato, si può far riferimento ad esempio a Hoffman (1993), Abbott and Basco (1989).

Di seguito verranno presentate alcune caratteristiche dei *metodi alle differenze finite*, ossia degli schemi numerici che utilizzano dei rapporti incrementali per approssimare i termini differenziali. Il dominio considerato viene suddiviso in una griglia di calcolo nei cui nodi vengono valutate le funzioni incognite. Per semplicità, di seguito assumeremo una griglia spaziale di passo  $\Delta x$  e temporale di intervallo  $\Delta t$ . Tale ipotesi riduce la complessità della notazione e non comporta importanti differenze dal punto di vista concettuale. Si tenga presente che alcune proprietà degli schemi numerici possono venir meno qualora i passi spaziali della griglia non siano costanti.

Applicare uno schema numerico per risolvere un'equazione differenziale introduce sempre degli errori di natura numerica. Vedremo però nel seguito che discretizzare un'equazione, trasformandola in un'equazione discreta, significa anche risolvere un'equazione differenziale diversa da quella originaria. Per questo motivo la soluzione ottenuta mediante lo schema numerico può mostrare delle caratteristiche che non sono proprie dell'equazione differenziale che si vuole simulare. Obiettivo di questa analisi è di acquisire alcuni strumenti concettuali per comprendere tale fenomeno.

Esistono altri metodi per risolvere numericamente le equazioni differenziali. Si parla di *metodi ai volumi finiti* quando le equazioni sono scritte in forma

integrale facendo riferimento a degli elementi volumetrici e vengono calcolati i flussi entranti e uscenti da tali volumi. I *metodi agli elementi finiti*, concettualmente più complessi, fanno invece uso di formulazioni integrali in cui vengono utilizzate delle funzioni peso che ne caratterizzano le proprietà.

### D.3.1 Approssimazioni alle differenze finite

Risulta utile poter valutare le approssimazioni introdotte dalla soluzione numerica di un'equazione alle derivate parziali.

Possiamo sviluppare in serie di Taylor la funzione  $f$  calcolata nei nodi della griglia rispetto ad un nodo di riferimento di coordinate  $(x_i, t_k)$ . Indicheremo la funzione approssimata con il simbolo  $F_i^k$ , dove  $i$  e  $k$  si riferiscono rispettivamente alla posizione spaziale e temporale. Si trova che:

$$f_{i+1} = F(x + \Delta x) = F_i + \Delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x^4) \quad (\text{D.6})$$

Una derivata può essere valutata con tipi diversi di rapporti incrementali, ad esempio *differenze in avanti*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x^3) \quad (\text{D.7})$$

dove si è utilizzata la (D.6) per valutare l'errore di troncamento; dato che la differenza tra  $\partial f / \partial x$  e  $\partial F / \partial x$  è proporzionale<sup>2</sup> a  $\Delta x$ , la (D.7) è del primo ordine.

Analogamente possono essere valutate le *differenze all'indietro*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i - \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x^3), \quad (\text{D.8})$$

del primo ordine, dove si è valutata la (D.6) in  $x - \Delta x$ , e le *differenze centrate*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right|_i + O(\Delta x^4) \quad (\text{D.9})$$

che risultano essere del secondo ordine poiché l'errore è proporzionale a  $\Delta x^2$ .

La derivata seconda viene comunemente valutata con lo schema del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} = \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{3} \left. \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right|_i + O(\Delta x^4). \quad (\text{D.10})$$

Esistono poi altri schemi per valutare i termini differenziali che si appoggiano su un numero maggiore di punti della griglia di calcolo. La procedura per valutare l'ordine dell'approssimazione si basa in ogni caso sull'utilizzo della (D.6) o di formulazioni equivalenti.

Nel caso di derivate temporali, in luogo della (D.6) si utilizzano relazioni del tipo:

$$f^{k+1} = F(t + \Delta t) = F^k + \Delta t \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_k + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right|_k + \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \right|_k + O(\Delta t^4).$$

---

<sup>2</sup>Lo sviluppo in serie può essere troncato ad un determinato ordine quando il passo di integrazione  $\Delta x$  è sufficientemente piccolo e quindi il termine  $\Delta x^2 \ll \Delta x$ .



### D.3.2 Convergenza della soluzione numerica

Per studiare la convergenza della soluzione numerica è necessario definire alcune tipologie di errori:

- di troncamento (*truncation*): derivano dal troncamento degli sviluppi in serie di Taylor delle derivate ad un certo ordine;
- di arrotondamento (*round-off*): il calcolatore lavora con un numero finito di cifre;
- globale:  $E_i^k = F_i^k - f(x_i, t_k)$ .

Questi errori sono differenti dal punto di vista concettuale. La bontà di uno schema numerico si valuta facendo riferimento all'errore di troncamento, che è una caratteristica propria dello schema, mentre l'errore di arrotondamento dipende esclusivamente dalla precisione della macchina che si sta utilizzando (ed eventualmente dalla precisione prescelta all'interno del linguaggio di programmazione).

#### D.3.2.1 Alcune definizioni

Risulta utile definire alcuni termini che vengono utilizzati nella discussione degli schemi numerici. Con PDE (*Partial Differential Equation*) si intende l'equazione alle differenze parziali originaria, con FDE (*Finite Difference Equation*) l'equazione differenziale risultante dallo schema numerico.

**Consistenza (congruenza).** Un'equazione alle differenze finite è consistente con un'equazione alle derivate parziali se la differenza tra FDE e PDE (ossia l'errore di troncamento) svanisce quando gli intervalli in cui è suddivisa la griglia di calcolo tendono a zero indipendentemente.

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow FDE \rightarrow PDE$$

**Ordine.** L'ordine di un'approssimazione alle differenze finite di un'equazione alle derivate parziali è la rapidità con la quale l'errore globale della soluzione alle differenze finite va a zero quando gli intervalli in cui è suddivisa la griglia di calcolo tendono a zero.

$$err.glob. \propto O(\Delta t^n)$$

**Stabilità.** Quando applicata ad un'equazione alle derivate parziali che ha una soluzione limitata, un'equazione alle differenze finite è stabile se produce una soluzione limitata e instabile se produce una soluzione illimitata. Ossia se è stabile l'errore non si amplifica.

**Convergenza.** Un metodo alle differenze finite è convergente se la soluzione della FDE tende alla soluzione esatta della PDE quando gli intervalli in cui è suddivisa la griglia di calcolo tendono a zero.

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow E_i^k \rightarrow 0$$

**Teorema di equivalenza.** (Lax, 1954) Assegnato un problema lineare ai valori iniziali ben posto (ovvero assegnate la condizione iniziale e le condizioni al contorno) e una sua approssimazione alle differenze finite che sia consistente, la stabilità è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza.

*problema di Cauchy ben posto + consistenza*

$\Downarrow$

*stabilità  $\Leftrightarrow$  convergenza*

**Esempio: metodo di Eulero esplicito.** Si prenda come equazione test

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha f - p(x) = 0, \quad (\text{D.11})$$

con una condizione iniziale del tipo  $f(0) = f_0$ , e si utilizzi lo schema di Eulero esplicito

$$\frac{\partial f}{\partial x} \simeq \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

che fornisce un'equazione numerica del tipo

$$f_{i+1} = f_i - \alpha f_i \Delta x + p(x_i) \Delta x \quad (\text{D.12})$$

Sviluppando in serie di Taylor attorno al punto  $x_i$  si trova

$$f_{i+1} = F_i + \Delta x \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x^3)$$

che, sostituita nella (D.12), insieme a  $f_i = F_i$ , fornisce

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha F - p(x) = -\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - O(\Delta x^2) \quad (\text{D.13})$$

che approssima la (D.11) a meno dei termini a secondo membro; si noti che l'equazione (D.13) introduce derivate di ordine superiore al primo che non erano presenti nella (D.11). Se  $\Delta x \rightarrow 0$  allora l'equazione numerica (D.13) tende a quella differenziale (D.11) e risulta quindi verificata la consistenza dello schema numerico, il cui ordine è 1 visto che l'errore di troncamento introdotto è proporzionale a  $\Delta x$ .

### D.3.2.2 Analisi di stabilità: metodo di von Neumann

Seguendo l'indicazione del teorema di equivalenza di Lax, al fine di valutare la convergenza di uno schema numerico diventa essenziale poterne calcolare le condizioni di stabilità. Seguiamo il metodo di von Neumann. Discretizziamo la funzione nei punti  $x_i$  utilizzando una griglia con passo costante  $\Delta x$ : così facendo  $x_i = i\Delta x$ . Possiamo esprimere la funzione nell'intorno di un generico punto  $x_i$  utilizzando uno sviluppo in serie di Fourier, in maniera analoga a quanto visto nella sezione D.2:

$$f_i = \sum_m \hat{\alpha}_m \exp[i k_m i \Delta x]$$

Per una generica componente dello sviluppo si trova

$$f_{i\pm 1} = f(x_i \pm \Delta x) = \hat{\alpha}_m \exp [ik_m (i \pm 1)\Delta x] = f_i \exp [\pm ik_m \Delta x] \quad (D.14)$$

Mediante la D.14 (e formulazioni analoghe per  $i \pm 2$  e nel tempo), uno schema numerico può essere riscritto nella forma

$$f_i^{k+1} = G f_i^k$$

dalla quale si ottiene il fattore di amplificazione  $G$  (in generale un numero complesso). La soluzione al tempo  $t = n\Delta t$  è data da

$$f_i^n = (G)^n f_i^0,$$

dove  $f_i^0$  è la condizione iniziale nota. Affinché la soluzione sia limitata il modulo del coefficiente di amplificazione deve essere minore di 1, ossia

$$|G| < 1. \quad (D.15)$$

Nella valutazione della (D.14) si può porre per semplicità  $e^{ik_m \Delta x} = e^{\vartheta}$  e verificare la condizione per ogni angolo  $\vartheta$  del piano complesso corrispondente alle diverse componenti armoniche della soluzione. L'analisi di stabilità si riduce quindi a verificare le condizioni necessarie perché sia verificata la condizione (D.15).

### D.3.2.3 Requisiti sul segno del coefficiente di diffusione

Quando viene valutata la stabilità di uno schema numerico applicato all'equazione (D.1), è possibile fare riferimento ad una condizione più semplice e dall'immediato significato fisico. Possiamo infatti notare che una soluzione della (D.1) è stabile (limitata) solo se il coefficiente di diffusione è positivo ( $D > 0$ ).

Riscriviamo l'equazione di convezione-diffusione nella forma

$$\frac{df}{dt} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (D.16)$$

valida lungo la traiettoria nel piano  $x-t$  definita dall'equazione  $dx/dt = U$ . Questo significa che si segue il segnale con la sua velocità  $U$  e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dt}.$$

Dalla (D.16) è possibile vedere che i massimi e i minimi vengono amplificati se  $D < 0$ , mentre vengono attenuati se  $D > 0$ . In un massimo si ha infatti che  $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$ ; se  $D > 0$ ,  $df/dt < 0$  e il valore della funzione  $f$  diminuisce; se  $D < 0$ ,  $df/dt > 0$  e il valore della funzione  $f$  aumenta e il massimo si amplifica. Un comportamento analogo vale per i minimi della funzione, dove  $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$ : per  $D > 0$  la funzione  $f$  cresce e riduce l'entità del minimo; per  $D < 0$   $f$  decresce e il minimo viene amplificato.

Posto che è necessario che il coefficiente di diffusione  $D$  sia positivo perché la soluzione sia fisicamente limitata, nell'applicazione di uno schema numerico può essere introdotta una diffusione numerica artificiale  $D_{num}$ , di cui tratteremo nei paragrafi seguenti. In questo caso per la limitatezza della soluzione numerica deve valere

$$D_{tot} = D + D_{num} > 0. \quad (D.17)$$

### D.3.3 Parametri significativi per l'equazione di convezione-diffusione

L'analisi dell'equazione di convezione-diffusione (D.1) fa emergere alcuni numeri adimensionali, relativi alla griglia di calcolo, che possiedono importanti caratteristiche utili a valutare la possibilità e il campo di applicazione di uno schema numerico.

Possiamo infatti riscrivere l'equazione (D.1) utilizzando come scale del problema le dimensioni della griglia di calcolo, ossia  $x = x^* \Delta x$ ,  $t = t^* \Delta t$ , per ottenere

$$\frac{\partial C}{\partial t^*} + \frac{U \Delta t}{\Delta x} \frac{\partial C}{\partial x^*} = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^{*2}}, \quad (\text{D.18})$$

Si possono così individuare facilmente due parametri adimensionali, il *numero di Courant*

$$C_r = \frac{U \Delta t}{\Delta x} \quad (\text{D.19})$$

e il parametro diffusivo

$$\delta = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2}. \quad (\text{D.20})$$

Il loro rapporto è noto come *numero di Peclet* di cella

$$P_e = \frac{C_r}{\delta} = \frac{U \Delta x}{D} \quad (\text{D.21})$$

ed è analogo al numero di Peclet

$$P_e = \frac{U \ell}{D},$$

introdotto in precedenza dove  $\ell$  è la scala spaziale tipica del fenomeno osservato, che rappresenta il rapporto tra i meccanismi convettivi e quelli diffusivi. Nel caso della definizione (D.21) la scala  $\Delta x$  non è evidentemente una scala fisica del problema, ma deve essere scelta in modo tale da consentire una corretta rappresentazione della soluzione del problema alla scala fisica  $\ell$ .

## D.4 Schemi numerici

In questa sezione vengono esaminate le caratteristiche di alcuni tra i più diffusi schemi numerici a due livelli, che utilizzano cioè due livelli temporali ( $t^k$  e  $t^{k+1}$ ). Per semplicità e senza perdere di generalità, nel seguito assumiamo  $U > 0$ ; imponiamo anche  $D > 0$  per avere una soluzione fisicamente limitata.

Al fine di ottenere una più chiara classificazione, si distinguono gli schemi numerici in *espliciti* ed *impliciti*. Nei primi le incognite possono essere calcolate direttamente, nei secondi è necessario risolvere un sistema lineare di equazioni algebriche.

I primi schemi numerici sono analizzati più in dettaglio come esempio. Per i seguenti vengono segnalate solamente le caratteristiche più significative. Nonostante siano stati proposti numerosissimi schemi numerici, in questa sede

consideriamo solo lo schema *upwind* e quello alle *differenze centrate*. Per avere una casistica più ampia, si rimanda a dei testi più specialistici.

Nella maggior parte degli schemi che verranno analizzati, la derivata temporale è approssimata con una differenza finita del primo ordine:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \cong \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}. \quad (\text{D.22})$$

Schemi più complessi (ad esempio quelli di Lax, Lax-Wendroff o lo schema Leapfrog) usano approssimazioni del secondo ordine che coinvolgono la funzione valutata al tempo  $k - 1$  o altri artifici per incrementare l'ordine dello schema.

#### D.4.1 Schemi espliciti

Gli schemi espliciti consentono la determinazione diretta della soluzione al tempo  $k + 1$  una volta nota quella al tempo  $k$ , ossia

$$\underline{f}^{k+1} = \mathbf{M} \underline{f}^k$$

dove con  $\underline{f}$  si intende il vettore spaziale della soluzione e con  $\mathbf{M}$  la matrice dei coefficienti.

##### D.4.1.1 Schema *upwind*

In questo schema la derivata spaziale viene calcolata come differenza all'indietro (*upwind*, ossia nella direzione contraria alla velocità  $U$ )

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (\text{D.23})$$

mentre per la derivata seconda si utilizza l'approssimazione del secondo ordine (D.10). Entrambe le derivate vengono valutate al tempo  $t_k$ .

L'equazione (D.1) riscritta nella variabile  $f$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

ossia la PDE, viene così discretizzata nella forma

$$f_i^{k+1} = (\delta + C_r) f_{i-1}^k + (1 - C_r - \delta) f_i^k + \delta f_{i+1}^k \quad (\text{D.24})$$

Sviluppando in serie di Taylor la (D.24), dopo alcune manipolazioni algebriche<sup>3</sup> è possibile evidenziare l'equazione differenziale da essa simulata (FDE):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} = (D + D_{num}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{num} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + O(\Delta x^3) \quad (\text{D.25})$$

dove

$$D_{num} = (1 - C_r) \frac{U \Delta x}{2}, \quad K_{num} = - (1 - 3C_r + 2C_r^2 - 6\delta) \frac{U \Delta x^2}{6} \quad (\text{D.26})$$

---

<sup>3</sup>Per questo primo caso è istruttivo ricostruire la successione di passaggi. Si introducono

La (D.25) è chiaramente diversa dalla (D.1): applicare la (D.24) corrisponde a risolvere l'equazione (D.25). In particolare, il coefficiente di diffusione è modificato della quantità  $D_{num}$  e sono state introdotte delle derivate di ordine superiore; ad esempio, la presenza di una derivata del terzo ordine proporzionale a  $K_{num}$  suggerisce come la soluzione numerica possa mostrare un carattere dispersivo, che però è estraneo all'equazione di partenza. Si noti che il segno del coefficiente di diffusione  $D_{num}$ , introdotto numericamente, dipende dal valore di  $C_r$ : valori minori di 1 introducono una diffusione artificiale, valori maggiori riducono la diffusione fisicamente presente, fino al limite di stabilità in cui  $D_{num} = -D$  richiesto per rispettare la (D.17).

La comparsa di un termine associato ad una dispersione numerica  $K_{num}$  influenza la soluzione numerica nella maniera descritta nella sezione D.2. In particolare agisce in modo tale da separare le componenti armoniche del segnale aventi numeri d'onda più elevati. Tale comportamento si nota prevalentemente in presenza di segnali con spigoli pronunciati, che richiedono un numero elevato di armoniche per essere descritti con una sviluppo in serie di Fourier (si veda il paragrafo E.1.2). Nel caso dello schema considerato, frequentemente la diffusione numerica, sommata a quella fisica, smorzano tali oscillazioni. Quando invece la diffusione reale è modesta e lo schema numerico è tale da non introdurne in quantità rilevante, tale fenomeno si manifesta in maniera chiara. In ogni caso, i termini diffusivi legati alle derivate di ordine pari tendono a smorzare maggiormente le componenti armoniche più corte. Ricordando l'analisi svolta nella sezione D.2, il decadimento è infatti proporzionale a  $k_m^q$ , dove  $q$  è il grado della derivata considerata.

Lo schema *upwind* esplicito è stabile sotto condizione. Le condizioni per la stabilità (secondo von Neumann) della (D.24) sono:

$$C_r + 2\delta \leq 1 \quad (D.27)$$

$$2\delta + C_r - C_r^2 \geq 0 \quad (D.28)$$

Nel caso della pura convezione ( $\delta = 0$ ), si riducono alla condizione  $0 \leq C_r \leq 1$ , che si riflette nel vincolo  $\Delta t \leq \Delta x/U$  sul passo temporale una volta assegnato

---

nella (D.24) gli sviluppi

$$\begin{aligned} f_{i+1}^k &= F(x + \Delta x, t) = F_i^k + \Delta x \frac{\partial F}{\partial x}_i^k + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}_i^k + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}_i^k + O(\Delta x^4) \\ f_{i-1}^k &= F(x - \Delta x, t) = F_i^k - \Delta x \frac{\partial F}{\partial x}_i^k + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}_i^k - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}_i^k + O(\Delta x^4) \\ f_i^{k+1} &= F(x, t + \Delta t) = F_i^k + \Delta t \frac{\partial F}{\partial t}_i^k + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}_i^k + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3}_i^k + O(\Delta t^4) \end{aligned}$$

e, ricordando le (D.19) e (D.20), si ottiene una prima versione della FDE

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} - D \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - U \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} + O(\Delta x^3, \Delta t^3) = 0$$

che contiene anche derivate nel tempo di ordine superiore al primo. Queste possono essere eliminate isolando il termine  $\partial F / \partial t$  e sostituendolo nell'equazione stessa più volte, fino ad ottenere la (D.25).

quello spaziale. Nel caso di pura diffusione ( $C_r = 0$ ) si ottiene invece  $0 \leq \delta \leq 1/2$ , ossia  $\Delta t \leq \Delta x^2/(2D)$ .

**Differenze in avanti.** Qualora, in luogo della (D.23), si fossero utilizzate delle differenze in avanti (D.7), lo schema sarebbe risultato instabile solo sotto la restrittiva condizione

$$2\delta \geq C_r(1 + C_r)$$

e incondizionatamente instabile nel caso della pura convezione. La spiegazione di quest'ultima considerazione risulta più chiara esaminando il metodo delle caratteristiche.

#### D.4.1.2 Metodo delle caratteristiche per la pura convezione

E' possibile risolvere facilmente l'equazione della pura convezione

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (\text{D.29})$$

con il metodo delle caratteristiche. Se  $dx/dt = U$ , abbiamo infatti

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \text{cost}$$

e quindi la funzione nel nodo  $x_i$  al tempo  $t_{k+1}$  può essere espressa come

$$f(x_i, t_{k+1}) = f(x_j, t_k), \quad (\text{D.30})$$

dove  $x_j$  viene individuato seguendo a ritroso le linee caratteristiche ( $x = \int U dt = Ut$ ).

Se scegliamo un'interpolazione lineare per valutare la funzione in  $x_j$  nella (D.30), utilizzando i valori della funzione nei nodi  $x_i$  e  $x_{i-1}$ , ricadiamo in uno schema numerico esplicito di tipo *upwind*<sup>4</sup>:

$$f_i^{k+1} = f_j^k = C_r f_{i-1}^k + (1 - C_r) f_i^k \quad (\text{D.31})$$

ottenibile dalla (D.24) ponendo  $\delta = 0$ . La condizione di stabilità si riduce a

$$C_r \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t \leq \frac{U}{\Delta x}, \quad (\text{D.32})$$

che può essere interpretata facendo riferimento alla Figura D.3. La condizione (D.32) richiede che il passo di avanzamento temporale  $\Delta t$  sia minore del tempo richiesto al segnale per percorrere lo spazio  $\Delta x$  tra due nodi della griglia, ossia che lo schema numerico abbia una 'velocità massima'  $\Delta x/\Delta t$  superiore alla velocità fisica  $U$  e sia quindi in grado di seguire il segnale. Quando il numero di Courant eccede l'unità, invece, il segnale proviene da un punto posto all'esterno del dominio  $[x_{i-1}, x_i]$  al tempo  $t_k$  utilizzato dalla (D.31).

---

<sup>4</sup>Utilizzando interpolazioni più complesse, che prevedono un numero maggiore di punti d'appoggio, si ritrovano schemi numerici di ordine più elevato.

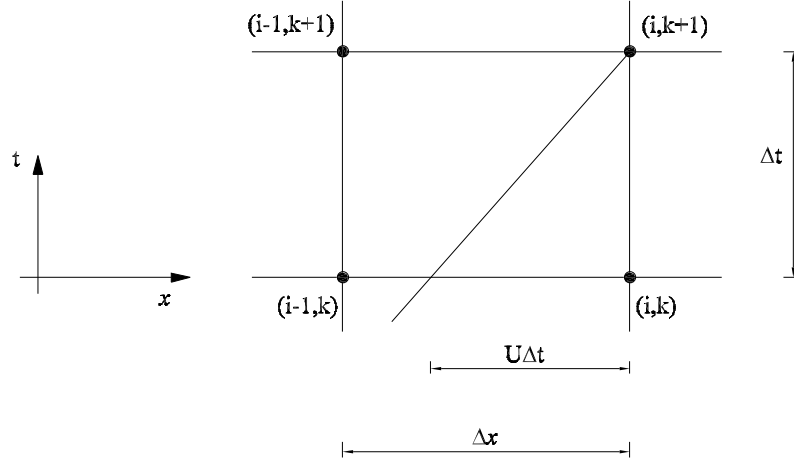


Figura D.3: Rappresentazione schematica del funzionamento del metodo delle caratteristiche per risolvere l'equazione di pura convezione. La (D.31) approssima la richiesta di seguire il segnale lungo le linee caratteristiche.

**Diffusione fittizia.** Vediamo ora come lo schema numerico introduca una diffusione che non sarebbe altrimenti presente nell'equazione (D.29) di pura convezione.

Per valutare come la soluzione viene modificata dallo schema numerico, prendiamo come condizione iniziale un segnale unitario nell'origine ( $f(0, 0) = 1$ ) e nullo altrove. Applicando l'equazione discreta (D.31) possiamo trasferire il segnale nel dominio di calcolo spazio-temporale. Con semplici calcoli algebrici troviamo che la 'massa' del segnale si conserva:

$$\sum_{i=0}^{N_x} f_i^k = 1,$$

la 'media' (la posizione del baricentro) è corretta:

$$\mu = \sum_{i=0}^{N_x} i f_i^k = k C_r,$$

ma la varianza aumenta:

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{N_x} (i - \mu)^2 f_i^k = \sum_{i=0}^{N_x} (i^2 f_i^k) - \mu = k C_r (1 - C_r)$$

Si nota facilmente che la varianza può risultare nulla, come dovrebbe essere nel caso considerato in cui si ha pura convezione di un segnale unitario, solo quando  $C_r = 1$  (la condizione  $C_r = 0$  non è significativa in quanto implica  $\Delta t = 0$ ). Solo in questo caso abbiamo infatti che il segnale si muove lungo i nodi nel reticolo di calcolo e l'interpolazione (D.31) non introduce approssimazioni.



#### D.4.1.3 Schema alle differenze centrate

Utilizzando le differenze centrate (D.9) per il termine  $\partial c / \partial x$ , la (D.1) viene discretizzata nella forma

$$f_i^{k+1} = \left( \delta + \frac{C_r}{2} \right) f_{i-1}^k + (1 - 2\delta) f_i^k + \left( \delta - \frac{C_r}{2} \right) f_{i+1}^k \quad (\text{D.33})$$

che corrisponde alla FDE

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} = (D + D_{num}) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K_{num} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + O(\Delta x^3)$$

dove

$$D_{num} = -C_r \frac{U \Delta x}{2}, \quad K_{num} = - (1 - 2C_r^2 + 6\delta) \frac{U \Delta x^2}{6} \quad (\text{D.34})$$

Le condizioni di stabilità secondo von Neumann sono:

$$C_r \leq 1 \quad (\text{D.35})$$

$$\delta \leq \frac{1}{2} \quad (\text{D.36})$$

$$2\delta - C_r^2 \geq 0 \quad (\text{D.37})$$

Come si può notare dalle (D.34), questo schema introduce una diffusione numerica negativa che tende a rendere instabile la soluzione; in particolare, questo schema è incondizionatamente instabile nel caso della pura convezione ( $D = 0$ ).

#### D.4.2 Schemi impliciti

Negli schemi impliciti la soluzione viene determinata risolvendo un sistema lineare che ha come incognite le funzioni incognite al tempo  $t^{k+1}$  in tutti i punti della griglia spaziale. In forma compatta, per schemi a due livelli, si può scrivere

$$\mathbf{A} \underline{f}^{k+1} = \mathbf{B} \underline{f}^k$$

dove  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono le matrici delle incognite e dei coefficienti e il termine a secondo membro è noto. Nella quasi totalità degli schemi normalmente utilizzati, la matrice  $\mathbf{A}$  delle incognite è una matrice a bande (spesso tridiagonale o pentadiagonale), che può essere risolta agevolmente tramite decomposizione  $LU$ .

##### D.4.2.1 Schema *upwind*

Lo schema *upwind* nella versione implicita è analogo a quello descritto nella sezione D.4.1.1, con la differenza che le derivate spaziali sono valutate al tempo  $t^{k+1}$ . Si ha così una matrice  $\mathbf{A}$  delle incognite tridiagonale corrispondente a:

$$-\delta f_{i-1}^{k+1} + (1 + C_r + 2\delta) f_i^{k+1} - (\delta + C_r) f_{i+1}^{k+1} = f_i^k \quad (\text{D.38})$$

che corrisponde ad una FDE del tipo (D.25) dove

$$D_{num} = (1 + C_r) \frac{U \Delta x}{2}, \quad K_{num} = - (1 + 3C_r + 2C_r^2 + 6\delta) \frac{U \Delta x^2}{6} \quad (D.39)$$

Rispetto ai coefficienti (D.26) dello schema esplicito, vediamo che la diffusione numerica introdotta è sempre positiva e rende lo schema sempre stabile. A fronte di tale vantaggio, esistono però due limitazioni: la prima deriva dal fatto che qualsiasi schema implicito viene rallentato dalla soluzione del sistema lineare; la seconda è che la diffusione numerica introdotta può essere molto rilevante e diventare dominante nel comportamento della soluzione numerica, portando a gravi errori nella simulazione del comportamento reale.

#### D.4.2.2 Schema alle differenze centrate

Lo schema implicito alle differenze centrate si comporta, rispetto alla versione esplicita descritta nella sezione D.4.1.3, in maniera analoga allo schema *upwind*. La matrice tridiagonale delle incognite deriva da:

$$-\left(\frac{C_r}{2} + \delta\right) f_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\delta) f_i^{k+1} + \left(\frac{C_r}{2} - \delta\right) f_{i+1}^{k+1} = f_i^k \quad (D.40)$$

che corrisponde ad una FDE del tipo (D.25) con

$$D_{num} = C_r \frac{U \Delta x}{2}, \quad K_{num} = - (1 + 2C_r^2 + 6\delta) \frac{U \Delta x^2}{6} \quad (D.41)$$

Anche in questo caso la diffusione numerica introdotta è sempre positiva e rende lo schema stabile, però con gli svantaggi discussi nella sezione precedente.

#### D.4.2.3 Schema di Crank-Nicolson

Un'interessante modifica dello schema alle differenze centrate è ottenibile valutando le derivate spaziali ad un istante  $t^{k+\theta}$ , ad esempio per la derivata del primo ordine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cong \theta \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} + (1 - \theta) \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (D.42)$$

e analogamente per quella del secondo ordine. Si ha quindi

$$\begin{aligned} & -\theta \left(\frac{C_r}{2} + \delta\right) f_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\theta\delta) f_i^{k+1} + \theta \left(\frac{C_r}{2} - \delta\right) f_{i+1}^{k+1} = \\ & = (1 - \theta) \left(\frac{C_r}{2} + \delta\right) f_{i-1}^k + [1 - 2(1 - \theta)\delta] f_i^k - (1 - \theta) \left(\frac{C_r}{2} - \delta\right) f_{i+1}^k \end{aligned} \quad (D.43)$$

Lo schema risultante è implicito ed è conosciuto come schema di Crank-Nicolson. Per  $\theta = 0$  si ritrova lo schema alle differenze centrate esplicito, per  $\theta = 1$  quello implicito. L'aspetto più interessante è che per  $\theta = 1/2$  gli errori si compensano parzialmente. Per quanto riguarda la diffusione numerica si ha infatti che i termini introdotti dalla (D.34) e dalla (D.41) si bilanciano per dare  $D_{num} = 0$ . In questo modo la diffusione simulata dalla FDE risulta uguale a quella originariamente presente nella PDE. Termini legati alle derivate di ordine superiori sono però ancora presenti e fanno sì che la soluzione numerica differisca comunque da quella analitica.

## Appendice E

# Sviluppo in serie di Fourier

Lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione  $F(x)$  può essere scritto in termini di componenti trigonometriche come segue:

$$F(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(k_m x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(k_m x) \quad (\text{E.1})$$

dove  $k_m = 2\pi m/L$  e  $L$  è la lunghezza d'onda fondamentale. Note le relazioni

$$\begin{aligned} \exp(i\theta) &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2} \end{aligned}$$

dove  $i = \sqrt{-1}$ , si può riscrivere la (E.1) nella forma

$$F(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \exp(ik_m x) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} \exp(-ik_m x) \quad (\text{E.2})$$

Il passaggio da una formulazione all'altra è possibile attraverso le

$$c_0 = a_0, \quad c_m = \frac{a_m - ib_m}{2}, \quad c_{-m} = \frac{a_m + ib_m}{2}$$

ovvero attraverso le relazioni inverse

$$a_0 = c_0, \quad a_m = c_m + c_{-m}, \quad b_m = i(c_m - c_{-m}) .$$

La (E.2) può essere scritta nella forma compatta

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \exp(ik_m x) \quad (\text{E.3})$$

il cui generico coefficiente  $c_i$  è determinabile attraverso la relazione

$$c_i = \frac{1}{L} \int_L F(x) \exp(-ik_i x) dx . \quad (\text{E.4})$$

Abbiamo infatti che l'integrale (E.4) può essere riscritto, utilizzando la (E.3), come

$$\frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_L \exp [i (k_m - k_i) x] dx = c_i$$

dove si osserva che l'integrale è diverso da zero solo per  $i = m$  (e quindi  $k_m = k_i \Rightarrow e^0 = 1$ ), mentre è nullo per  $i \neq m$  poiché le funzioni integrande sono periodiche.

## E.1 Esempi di applicazione

Risulta utile analizzare alcuni esempi per comprendere meglio il significato delle componenti armoniche. L'analisi in serie di Fourier viene solitamente effettuata utilizzando delle *routine* numeriche che implementano la FFT (*Fast Fourier Transform*). Questa procedura richiede che la funzione da analizzare sia discretizzata in un numero  $N$  di punti pari a una potenza di 2 ( $N = 2^k$ , dove  $k$  è un numero naturale). Il risultato è uno spettro di potenza con  $N/2$  componenti armoniche.

### E.1.1 Onda triangolare

Consideriamo in primo luogo il caso di un'onda triangolare, come quella rappresentata in Figura E.1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 4x & 0 < x < 0.5 \\ f(x) &= 3 + 4x & 0.5 < x < 1 \end{aligned}$$

Lo spettro, rappresentato in Figura E.2, è dominato dalla prima armonica; si noti che, data la simmetria della funzione, sono presenti solo armoniche dispari. Il confronto tra la funzione originaria (linea di spessore maggiore) e le approssimazioni ottenute troncando lo sviluppo ad un numero assegnato di componenti armoniche è riportato in Figura E.1.

### E.1.2 Onda quadra

Il caso dell'onda quadra è più interessante perché risulta difficile ottenere una buona approssimazione di una funzione in cui siano presenti degli spigoli. Prendiamo il caso

$$f(x) = \text{sign}(x - 0.5)$$

Lo spettro di Figura E.4 e soprattutto il confronto di Figura E.3 suggeriscono che è necessario considerare un elevato numero di componenti armoniche di lunghezza d'onda ridotta per poter rappresentare in maniera adeguata la discontinuità della funzione.

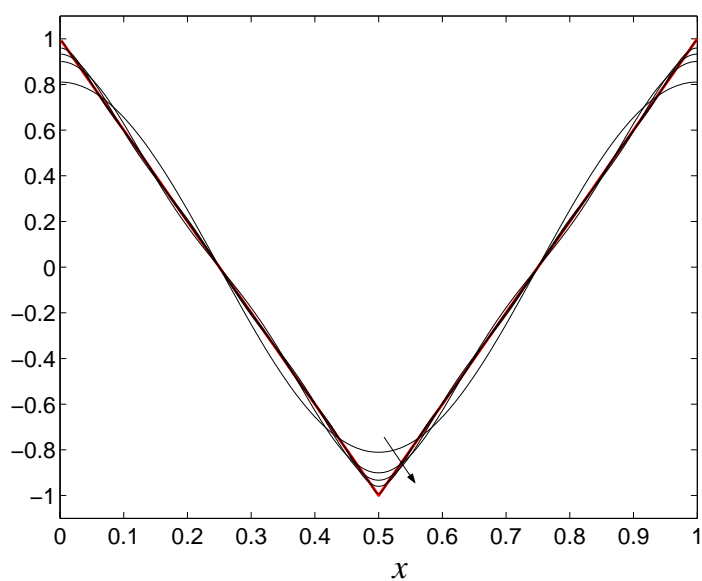


Figura E.1: Onda triangolare: confronto tra la funzione originaria e lo sviluppo in serie di Fourier considerando 1, 3, 5, 10 e 50 armoniche.

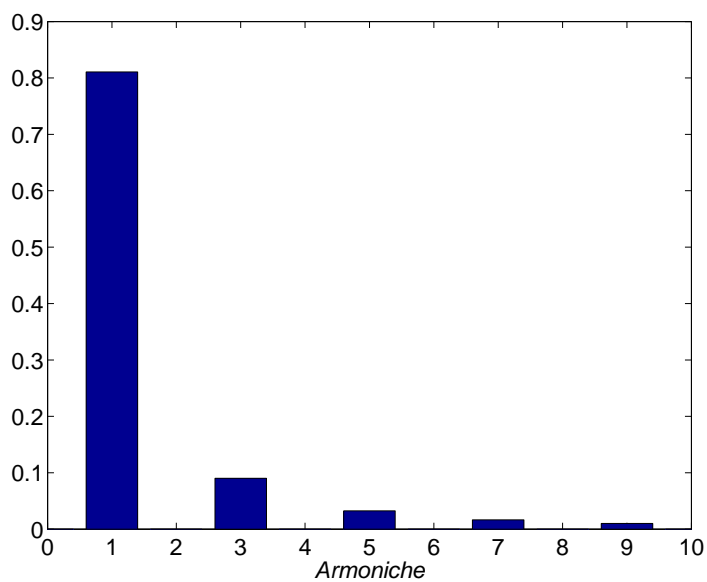


Figura E.2: Spettro di potenza per un'onda triangolare: le prime 10 armoniche.

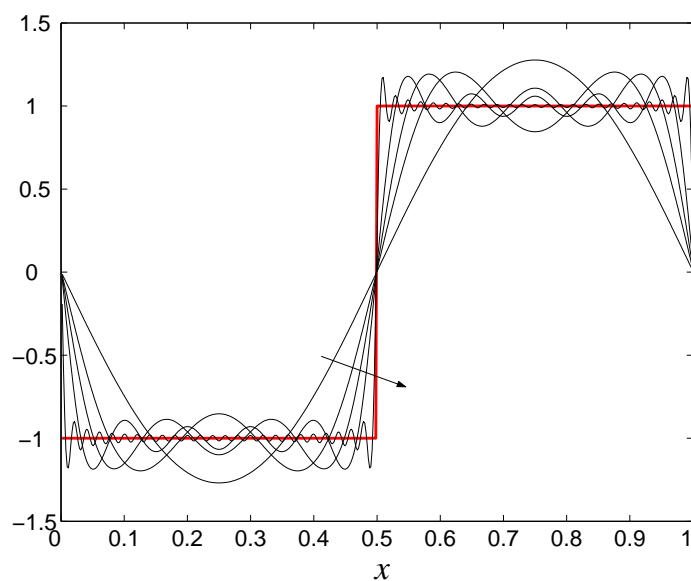


Figura E.3: Onda quadra: confronto tra la funzione originaria e lo sviluppo in serie di Fourier considerando 1, 3, 5, 10 e 50 armoniche.

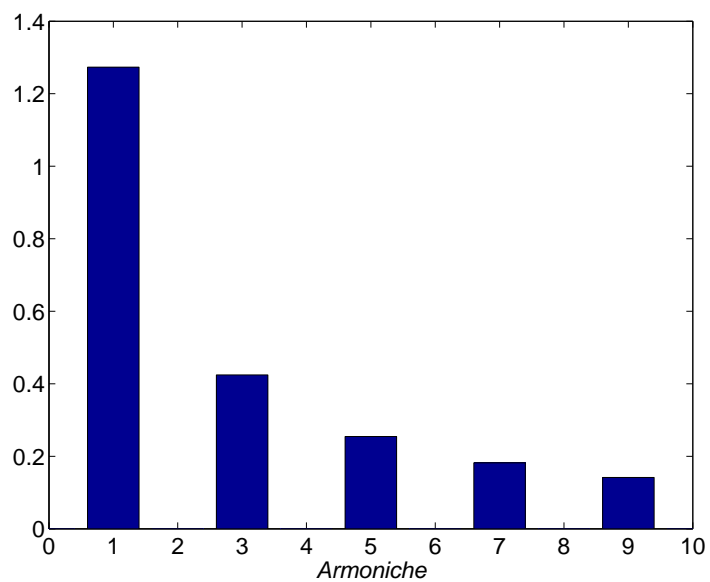


Figura E.4: Spettro di potenza per un'onda quadra: le prime 10 armoniche.

## Appendice F

# Modelli lagrangiani di diffusione turbolenta

### F.1 Metodologia

Nei capitoli precedenti la diluizione di un tracciante dovuta a meccanismi di natura diffusiva è stata studiata utilizzando un punto di vista euleriano, scrivendo quindi delle equazioni differenziali valide in ogni punto del dominio, da risolvere con le opportune condizioni al contorno. È però possibile studiare la diffusione di un tracciante anche per mezzo di un'ottica discreta, seguendo le traiettorie delle particelle; si parla in questo caso di modelli lagrangiani. Noto il campo di moto, un'opportuna schematizzazione della turbolenza consente di simulare la diffusione. Introducendo all'inizio della simulazione un opportuno numero di particelle, si può seguire la traiettoria di ciascuna mediante un'equazione del tipo

$$\frac{d\underline{X}_i}{dt} = \underline{u} + \underline{f}_i \quad (\text{F.1})$$

dove  $\underline{X}_i$  è il vettore che indica la posizione della particella  $i$ -esima,  $\underline{u}$  il campo di moto (deterministico e assegnato, in funzione della posizione) a cui è sottoposta e  $\underline{f}_i$  l'effetto della fluttuazione turbolenta, assegnata attraverso una funzione probabilistica;  $\underline{f}_i$  è caratteristico della singola particella e dell'istante di calcolo, e la funzione è data tramite un generatore di numeri *pseudo random* (si veda il paragrafo F.2).

Nell'ottica lagrangiana rappresentata dall'equazione (F.1) viene seguito il percorso di ogni singola particella, mediante integrazione esplicita della traiettoria. Le tre componenti dell'equazione vettoriale (F.1) sono indipendenti e quindi si possono integrare indipendentemente:

$$\underline{X}_i(t + \Delta t) = \underline{X}_i(t) + \underline{u} \Delta t + \underline{f}_i \Delta t \quad (\text{F.2})$$

dove per semplicità si è supposto che il campo di moto non dipenda da  $t$  (la generalizzazione è banale). Assegnate le caratteristiche della funzione  $\underline{f}_i$ , l'oscillazione casuale da essa introdotta riproduce gli spostamenti dovuti alle flut-

tuazioni turbolente di velocità<sup>1</sup>. La concentrazione locale del tracciante può essere calcolata suddividendo il dominio in volumetti di dimensioni adeguate e contando le particelle presenti all'interno di ciascuno.

Operando una scelta opportuna per l'oscillazione casuale  $\underline{f}_i$  nella (F.2), essa rispecchia macroscopicamente, in una rappresentazione continua, il meccanismo diffusivo che segue una legge fickiana del tipo

$$\phi_k = -D_k \frac{\partial C}{\partial x_k} \quad (\text{F.3})$$

con  $\phi_k$  flusso di concentrazione in direzione  $k$  per unità d'area.

**Parametri e schematizzazione.** Caratteristiche essenziali dei modelli lagrangiani sono la funzione probabilistica  $\underline{f}_i$  e l'intervallo di integrazione  $\Delta t$ , che normalmente sono correlati con una misura dell'intensità della turbolenza. Il termine  $\underline{f}_i$  deriva da una distribuzione di frequenza con media nulla e varianza pari al passo temporale di integrazione.

Definiamo  $T_L$  il tempo di correlazione lagrangiano, ovvero quello dopo il quale si può considerare che la “storia” della particella sia indipendente da quella delle altre partite dalla sorgente allo stesso istante. Al fine di avere sufficiente risoluzione nella traiettoria, si deve utilizzare un passo di integrazione  $\Delta t \ll T_L$ .

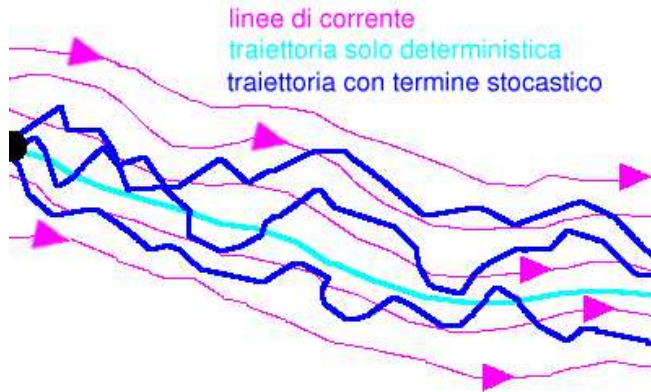


Figura F.1: Simulazione della dispersione tramite sovrapposizione di un termine pseudocasuale che simula la turbolenza ad un termine deterministico corrispondente al campo di moto medio.

La funzione  $\underline{f}_i$  è correlabile ai coefficienti di turbolenza; la corrispondente “PDF” (*Probability Density Function*) avrà una varianza tanto più elevata quanto più è grande il coefficiente di diffusione turbolenta che viene simulato. Si noti che lo schema numerico utilizzato è di tipo esplicito, tuttavia non presenta i problemi di stabilità tipici degli schemi alle differenze finite. Il passo di

<sup>1</sup>Modelli più raffinati introducono l'oscillazione casuale in termini di accelerazione, invece che di velocità.



integrazione della traiettoria delle particelle,  $\Delta t$ , è una frazione del tempo di correlazione lagrangiana  $T_L$ , tempo dopo il quale la particella perde “memoria” delle condizioni precedenti.  $\Delta t$  costituisce il fattore limitante dal punto di vista numerico nel caso di simulazioni lunghe e con tante particelle (necessarie se il dominio è vasto). Si noti come, in assenza del termine stocastico  $\underline{f}_i$  (ovvero di un termine diffusivo turbolento) le particelle immesse nel campo di moto in uno stesso punto seguirebbero tutte la medesima linea di corrente che passa per il medesimo punto di scarico (Figura F.1).

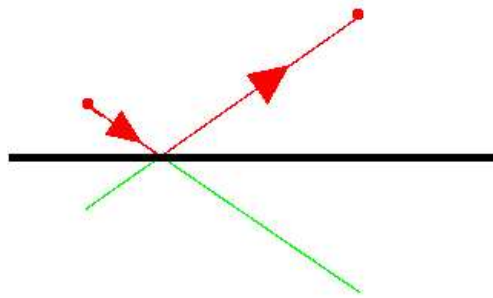


Figura F.2: Riflessione geometrica in corrispondenza dell'interfaccia (condizione di flusso nullo).

Ai bordi del dominio le particelle sono soggette a riflessioni elastiche per simulare la condizione di flusso nullo, seguendo regole “geometriche” (Figura F.2); lo stesso vale in corrispondenza delle interfacce tra fluidi diversi o a densità differente, o comunque in qualsiasi caso si abbia una brusca variazione dei valori dei coefficienti di turbolenza.

È inoltre interessante notare come il meccanismo dispersivo che si genera, ad esempio in corrispondenza di un profilo logaritmico di velocità in un corso d'acqua, come sovrapposizione di un moto orizzontale e di una oscillazione verticale, possa essere rappresentato con uno schema a particelle a condizione di imporre un campo di moto ed una struttura della turbolenza consistenti (Figura F.3).

Qualora si voglia simulare un rilascio *stazionario* si rende necessario integrare le traiettorie di tutte le particelle rilasciate ad ogni passo temporale oltre a quelle già immesse nel campo di moto negli istanti precedenti. L'intervallo di rilascio  $\Delta t_r$  delle particelle in questo caso deve essere tale da ben rappresentare un'emissione continua (Figura F.4). L'ordine di grandezza di  $\Delta t_r$  è fornito dalla disuguaglianza  $U \Delta t_r \leq \sigma$ , dove  $\sigma$  è la dimensione caratteristica della nuvola e  $U$  la velocità euleriana media (del campo di moto) in corrispondenza del punto di immissione del tracciante; ovvero, la distanza tra i baricentri di due nuvole “rilasciate” consecutivamente deve essere inferiore alla dimensione caratteristica delle nuvole stesse.

**Vantaggi e svantaggi.** L'adozione di un modello lagrangiano per il calcolo della dispersione porta alcuni vantaggi ma anche alcuni svantaggi rispetto ad un approccio più classico quale può essere ad esempio uno schema numerico

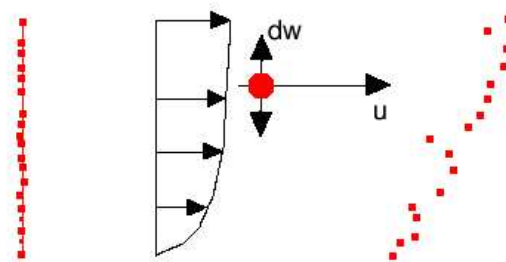


Figura F.3: Meccanismo di dispersione associato ad un profilo logaritmico di velocità



Figura F.4: Intervallo di rilascio delle particelle nel punto sorgente.

alle differenze finite. Un aspetto positivo è certamente il fatto che permette la descrizione del processo diffusivo anche a scala molto piccola, con una chiusura delle turbolenza che può variare nello spazio e nel tempo anche in maniera non uniforme. Non esiste la limitazione, tipica dei modelli a volumi finiti che lega una cella ad un unico valore del coefficiente di diffusione turbolenta, poiché le celle vengono utilizzate nel metodo lagrangiano solamente nella fase di conteggio delle particelle (si veda la Figura F.5). Un punto a sfavore invece consiste nell'elevato costo computazionale richiesto dalla simulazione, specialmente quelle su domini tridimensionali vasti o su scale temporali lunghe. Per tale motivo questa tipologia di modelli è utilizzata prevalentemente quando si voglia indagare nel dettaglio singoli scenari di diffusione di inquinanti, e più raramente nel caso di simulazioni a lungo termine (ad esempio medie annuali di concentrazione su un'area).

In Figura (F.6) è riportato, a titolo esemplificativo, un modello lagrangiano che simula l'emissione di inquinanti da una ciminiera.

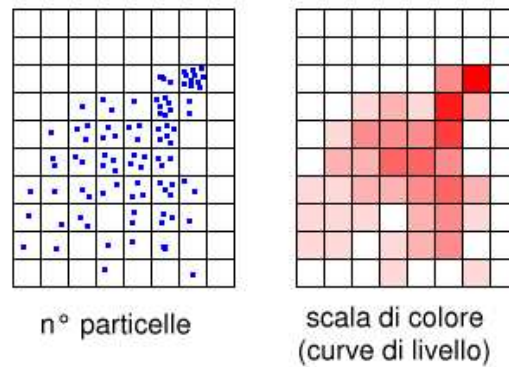


Figura F.5: Rappresentazione in termini di particelle e in scala di colore (o curve di livello) sulla base della densità di particelle all'interno di ogni cella.

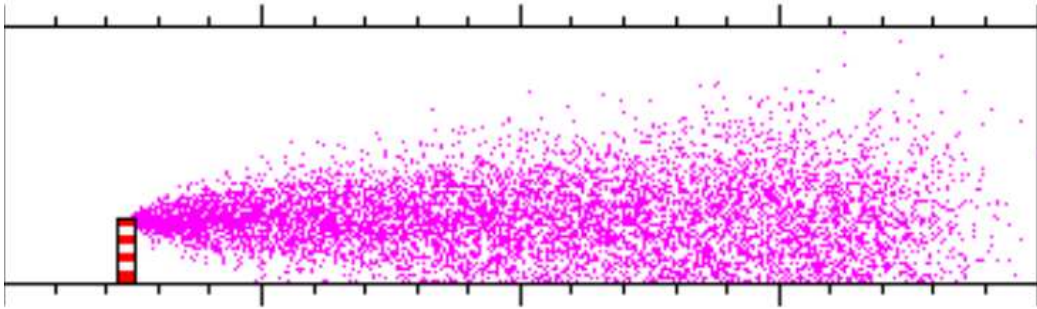


Figura F.6: Esempio di simulazione di rilascio stazionario simulato con schema lagrangiano.

## F.2 Serie di numeri pseudo-random

Di seguito è riportata una subroutine in FORTRAN per la generazione di una serie pseudocasuale di numeri random, con distribuzione uniforme tra 0 e 1.

```
real*8 function rand.unif()
  implicit none
  real*8 :: a, c, d
  logical :: first
  data first /.true./
  save :: first, d
  parameter(a=16807.d0, c=2147483647.d0)
  if (first) then
    d = 1.d7
    first = .false.
  endif
  d = d*a
```

```

    d = mod(d,c)
    rand_unif = d/c
    return
end function

```

La precedente subroutine può essere sfruttata per creare un'analogia funzione di probabilità di forma gaussiana con media nulla e varianza unitaria<sup>2</sup>.

```

real*8 function rand_gauss()
  implicit none
  integer*1 :: iset
  real*8 :: fac, gset, rsq, v1, v2, rand_unif
  data iset /0/, gset /0.d0/
  save :: iset, gset
  if (iset == 0) then
    rsq = 0.d0
    do while (rsq > 1.d0 .or. rsq == 0.d0)
      v1 = 2.d0*rand_unif()-1.d0
      v2 = 2.d0*rand_unif()-1.d0
      rsq = v1*v1+v2*v2
    enddo
    fac = dsqrt(-2.d0*dlog(rsq)/rsq)
    gset = v1*fac
    rand_gauss = v2*fac
    iset = 1
  else
    rand_gauss = gset
    iset = 0
  endif
  return
end function

```

---

<sup>2</sup>La generalizzazione a media non nulla e varianza qualsiasi si opera tramite un cambiamento di variabile  $x' = Ax + B$ .

## Appendice G

# Modelli ADZ di dispersione nel campo lontano

La soluzione per il campo di concentrazione trovata nel campo lontano risolvendo l'equazione di convezione-diffusione possiede il pregio di essere fisicamente basata. D'altra parte, la trattazione monodimensionale non consente a volte di riprodurre l'effetto della variabilità tipica dei corsi d'acqua naturali. Ad esempio, la presenza di zone golenali richiederebbe di utilizzare modelli bidimensionali (o addirittura tridimensionali) a coefficienti variabili, rendendo assai complessa la procedura di soluzione. Una possibile alternativa per ottenere un risultato pratico è quella di sviluppare dei modelli di tipo 'scatola nera' (*black box*), che si avvalgono di formulazioni semplificate e parametri da tarare con dati di campo. Una classe particolare di modelli è quella nota come ADZ (*Aggregated Dead Zone*). Distinguiamo due formulazioni: la prima è costituita da un modello a celle, la seconda è accoppiata con un modello di convezione-dispersione longitudinale.

### G.1 Modelli a cella

In questo caso il corso d'acqua viene suddiviso in tronchi, per ciascuno dei quali si utilizza un modello zero-dimensionale (ovvero che utilizza esclusivamente equazioni di bilancio di grandezze scalari). L'equazione utilizzata è concettualmente molto semplice e si basa sulla conservazione della massa nella forma nota come equazione dei serbatoi:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M}_{in} - \dot{M}_{out} \quad (G.1)$$

dove

$$M = C_v V$$

è la massa di tracciante contenuta nel volume di controllo  $V$  che si sta considerando e

$$\dot{M}_{in} = C_1 Q_1, \quad \dot{M}_{out} = C_2 Q_2$$

sono rispettivamente le portate di massa entranti e uscenti nel sistema, corrispondenti alle portate liquide  $Q_1$  e  $Q_2$ , con le loro concentrazioni  $C_1$  e  $C_2$ .

Quando le condizioni idrauliche sono stazionarie,  $Q_1 = Q_2 = Q$ ; fissato quindi il volume di controllo  $V$ , la (G.1) si può scrivere come

$$\frac{dC_v}{dt} = \frac{Q}{V} (C_1 - C_2) . \quad (\text{G.2})$$

Introduciamo un tempo caratteristico

$$t_v = \frac{V}{Q} \quad (\text{G.3})$$

come rapporto tra volume e portata;  $t_v$  viene detto tempo di percorrenza (*travel time*). Ipotizziamo anche di poter legare la concentrazione in uscita  $C_2$  alla concentrazione  $C_v$  all'interno del volume di controllo, come è usuale quando si considerano reattori ben miscelati<sup>1</sup>, ovvero di porre la relazione

$$C_v(t) = \gamma C_2(t) . \quad (\text{G.4})$$

Grazie alle (G.3)-(G.4), l'equazione di bilancio può essere riscritta come

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{C_1(t - \tau) - C_2(t)}{\gamma t_v} \quad (\text{G.5})$$

dove è stato introdotto un ritardo  $\tau$  tra l'ingresso  $C_1$  e l'uscita  $C_2$  per tener conto della non istantaneità della risposta del sistema.

**Caratteristiche matematiche.** Definiamo il momento  $n$ -esimo dell'onda di concentrazione

$$m^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} t^n C(t) dt . \quad (\text{G.6})$$

Poiché la massa di tracciante che transita in una sezione è

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} Q C(t) dt ,$$

data la costanza di  $Q$  deve risultare

$$m_{C_1}^{(0)} = m_{C_2}^{(0)} = \frac{M}{Q} ,$$

ossia il momento di ordine 0 si conserva.

D'altra parte, il momento di ordine 1 è legato al baricentro temporale dell'onda di concentrazione. Integrando la (G.5) nella forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \frac{dC_2(t)}{dt} dt = \frac{1}{\gamma t_v} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t C_1(t - \tau) dt - \int_{-\infty}^{\infty} t C_2(t) dt \right]$$

---

<sup>1</sup>Per approfondimenti, si vedano i corsi di Ingegneria Sanitaria.

si trova<sup>2</sup> che

$$\gamma t_v = \bar{t}_{C_2} - \bar{t}_{C_1} - \tau \quad (\text{G.7})$$

avendo definito il baricentro di  $C(t)$ :

$$\bar{t}_C = \frac{m_C^{(1)}}{m_C^{(0)}}.$$

Sapendo che la differenza tra i baricentri dell'onda in ingresso e di quella in uscita è esattamente il tempo di percorrenza

$$\bar{t}_{C_2} - \bar{t}_{C_1} = t_v,$$

definendo il tempo di residenza

$$T = \gamma t_v \quad (\text{G.8})$$

possiamo riscrivere la relazione (G.7) come

$$t_v = T + \tau. \quad (\text{G.9})$$

La (G.5) può quindi essere espressa, grazie alla (G.8), in termini di tempo di residenza:

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{C_1(t - \tau) - C_2(t)}{T} \quad (\text{G.10})$$

Integrando la (G.5) per ottenere i momenti secondi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{dC_2(t)}{dt} dt = \frac{1}{\gamma t_v} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 C_1(t - \tau) dt - \int_{-\infty}^{\infty} t^2 C_2(t) dt \right]$$

e sviluppando gli integrali in maniera analoga a quanto visto in precedenza, si trova che la varianza, definita per una generica  $C(t)$  come

$$\sigma_C^2 = \frac{m^{(2)}}{m^{(0)}} - \left( \frac{m^{(1)}}{m^{(0)}} \right)^2,$$

segue la legge

$$\sigma_{C_2}^2 - \sigma_{C_1}^2 = T^2. \quad (\text{G.11})$$

---

<sup>2</sup>Integrando per parti il primo membro e operando il cambiamento di variabile  $\xi = t - \tau$  si ha infatti

$$t C_2|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} C_2(t) dt = \frac{1}{\gamma t_v} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \tau) C_1(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} t C_2(t) dt$$

da cui, ricordando la definizione (G.6),

$$-m_{C_2}^{(0)} = \frac{1}{\gamma t_v} \left[ m_{C_1}^{(1)} - \tau m_{C_1}^{(0)} - m_{C_2}^{(1)} \right]$$

e infine la (G.7).

### G.1.1 Interpretazione fisica

Se facciamo riferimento ad un tratto di corso d'acqua naturale con una geometria complessa, normalmente si può definire una porzione della sezione come alveo inciso (alveo principale) e altre parti come zone golenali. Quando un'onda di tracciante si propaga, queste ultime svolgono il ruolo di trattenere il tracciante poiché la velocità al loro interno è molto minore che nell'alveo inciso; per questo motivo vengono dette 'zone morte' (*dead zone*). Successivamente, quando la concentrazione al loro interno è maggiore di quella nell'alveo inciso, esse rilasciano il tracciante e tendono quindi a laminare l'onda di concentrazione, così come le zone di espansione dei corsi d'acqua laminano le piene.

Suddividiamo quindi il volume totale  $V$  del tratto considerato in due parti

$$V = V_A + V_D$$

dove  $V_A$  è il volume interessato dal comportamento convettivo (corrispondente all'alveo inciso) e  $V_D$  il volume di accumulo. Dalla definizione (G.3) si ottiene che

$$t_v = \frac{V_A}{Q} + \frac{V_D}{Q}. \quad (\text{G.12})$$

Proviamo ora a confrontare la (G.12) con i risultati trovati nel paragrafo precedente (G.9) e (G.11).

- *Convezione dominante.* Quando  $V_D \sim 0$ , l'onda di concentrazione viene traslata tra la sezione di ingresso e quella di uscita senza subire apprezzabili deformazioni: ponendo  $\sigma_{C_1}^2 = \sigma_{C_2}^2$ , la (G.11) implica  $T = 0$ . Di conseguenza, la (G.9) ci assicura che il ritardo

$$\tau = t_v = \frac{V_A}{Q}$$

e la (G.8) fornisce  $\gamma = 0$ .

- *Dispersione dominante.* Quando invece  $V_A \rightarrow 0$ , mentre  $V_D$  mantiene un volume finito, il ritardo  $\tau \rightarrow 0$  (un segnale entrante fornisce istantaneamente una risposta all'uscita). La differenza tra i baricentri di  $C_1$  e  $C_2$  deve essere legata all'effetto di  $V_D$ :

$$T = t_v = \frac{V_D}{Q}$$

e quindi  $\gamma = 1$ .

Tra i due estremi considerati, possiamo associare il ritardo  $\tau$  al volume convettivo  $V_A$  e il tempo  $T$  impiegato mediamente dal tracciante per attraversare le zone golenali al volume di ristagno  $V_D$ :

$$\tau = \frac{V_A}{Q}, \quad T = \frac{V_D}{Q}$$

da cui si ottiene  $\gamma = T/t_v = V_D/V$ . Il significato dei parametri  $\tau$  e  $T$  è evidenziato in Figura G.1: il ritardo  $\tau$  trasla rigidamente la curva  $C_2$  in uscita, il tempo di residenza  $T$  deforma la curva aumentandone la varianza.



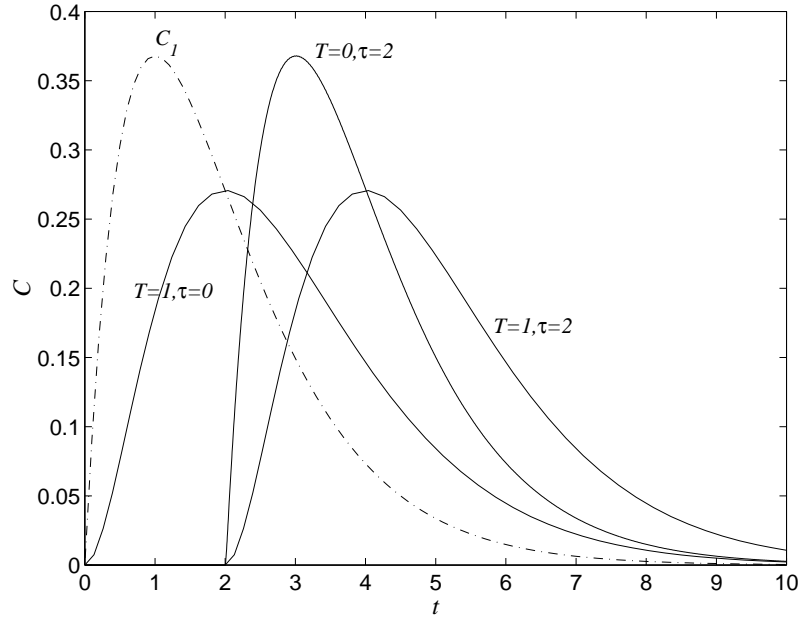


Figura G.1: Concentrazione  $C_2$  in uscita calcolata attraverso la (G.5). L'onda di concentrazione in ingresso  $C_1$  è disegnata in linea punteggiata. Le curve in linea continua corrispondono a diverse coppie di valori dei parametri  $T$  e  $\tau$ ; i parametri dell'equazione (G.5) sono ricavabili come  $t_v = T + \tau$  e  $\gamma = T/t_v$ .

**Taratura del modello.** Un modello di questo tipo può essere applicato convenientemente ponendo in serie (ed eventualmente in parallelo)  $N$  elementi che rispondono all'equazione di bilancio (G.5), che può agevolmente essere integrata con un normale schema numerico. Per ogni elemento considerato devono essere tarati i parametri  $t_v$  e  $\gamma$ . Il primo può essere stimato come

$$t_v = \frac{V}{Q} \simeq \frac{L}{U},$$

con  $L$  lunghezza del tratto e  $U$  velocità media, mentre  $\gamma$  dipende dall'entità delle zone golenali.

## G.2 Modelli convettivi-dispersivi

La seconda formulazione, nota come D-DZM (*Dispersion-Dead Zone Model*) accoppia un modello di convezione-dispersione del tipo discusso nel capitolo 4 (ADE, *Advection-Diffusion Equation*), per la parte incisa della sezione, ad un modello ADZ per la zona di ristagno. Il sistema di equazioni è dato quindi da due equazioni; la prima è relativa all'alveo inciso

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} - K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -\varepsilon \frac{\partial C_s}{\partial t}, \quad (\text{G.13})$$

dove  $C$  è la concentrazione nell'alveo inciso,  $C_s$  quella nella zona di ristagno,  $U$  la velocità media della corrente nella sezione,  $K$  il coefficiente di dispersione, e

$$\varepsilon = \frac{V_D}{V_A}$$

con  $V_D$  volume attribuito alla parte di ristagno e  $V_A$  al canale inciso. Utilizzando l'ipotesi geometrica che  $V_A = A_A L$  e  $V_D = A_D L$ , tale parametro può essere anche espresso come  $\varepsilon = A_D/A_A$ , con  $A_D$  area trasversale efficace della parte di ristagno e  $A_A$  area trasversale del canale inciso. La seconda equazione si riferisce alla zona di ristagno

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = \frac{1}{T} (C - C_s) , \quad (\text{G.14})$$

dove  $T$  è una misura del tempo di ristagno, ovvero il tempo di residenza del tracciante nella 'zona morta' (*dead zone*). Si noti la stretta corrispondenza della (G.14) con la (G.10).

L'equazione (G.13) può essere riscritta, grazie alla (G.14), come

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} - K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon}{T} (C_s - C) . \quad (\text{G.15})$$

I termini a secondo membro della (G.14) e della (G.15) rappresentano i flussi di concentrazione scambiati tra la zona di ristagno e l'alveo inciso. Il parametro  $\varepsilon$  tiene conto dei diversi volumi delle due zone e permette di rispettare il principio di conservazione della massa.

Il parametro  $T$  rappresenta il tempo necessario perché il flusso di massa si trasferisca dal canale alla zona di ristagno e viceversa. Valori elevati di  $T$  corrispondono ad una riduzione della capacità di scambio, mentre valori di  $T$  tendenti a 0 rappresentano scambi quasi istantanei, grazie ai quali la concentrazione  $C_s$  risulta praticamente identica a  $C$ .

Per quanto riguarda la taratura del modello, i parametri relativi alla dispersione longitudinale ( $U$  e  $K$ ) sono normalmente valutati attraverso le relazioni viste nel capitolo 4. I parametri del modello ADZ,  $\varepsilon$  e  $T$ , sono invece tarati di norma facendo riferimento a misure di campo riferite al corso d'acqua che si sta considerando.

# Bibliografia

M.B. Abbott, D.R. Basco, *Computational fluid dynamics. An introduction for engineers*, Longman S.T., 1989.

G. I. Barenblatt, *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach Science Publishers S.A., OPA (Amsterdam), 1987.

H.B. Fischer, E.J. List, R.C.Y. Koh, J. Imberger, N.H. Brooks, *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, NewYork, 1979.

J.D. Hoffman, *Numerical methods for engineers and scientists*, McGraw-Hill, 1993.

J.C. Rutherford, *River Mixing*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.