

Appunti di Idraulica Ambientale

Giovanni Seminara, Marco Tubino

Bozza 14 gennaio 2004

Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Trento

Seconda e terza parte delle dispense del corso di Idraulica Ambientale.

La realizzazione di queste dispense è avvenuta grazie al contributo di Giuliano Rizzi, Marco Toffolon, Gianluca Vignoli e Luca Zanoni.

I lettori sono pregati di segnalare gli errori presenti nel testo a:

Marco Toffolon

e-mail: marco.toffolon@ing.unitn.it

tel.: +39 0461 88 2480

<http://www.ing.unitn.it/~toffolon/>

Gianluca Vignoli

e-mail: gianluca.vignoli@ing.unitn.it

tel.: +39 0461 88 2480

<http://www.ing.unitn.it/~vignolig/>

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Università degli Studi di Trento

via Mesiano 77

38050 Trento

Italia

fax: +39 0461 88 2672

Trento, 14 gennaio 2004

Indice

II	Processi di mescolamento in alvei naturali	7
4	Mescolamento nel campo vicino	9
4.1	Applicabilità dello schema diffusivo	9
4.2	Diffusività turbolenta verticale	10
4.3	Sorgente trasversale distribuita stazionaria	11
4.3.1	Soluzione con U e \mathcal{D}_z^T costanti	12
4.3.2	Soluzione con U e \mathcal{D}_z^T variabili	16
4.4	Sorgente puntuale stazionaria	18
4.5	Sorgente puntuale non stazionaria	23
5	Mescolamento nel campo intermedio	25
5.1	Equazione mediata sulla profondità	25
5.2	Misure di laboratorio della $\overline{\mathcal{D}_y^T}$	27
5.3	Stima del coefficiente di dispersione trasversale	33
5.3.1	Effetto di variazioni di profondità nella sezione	33
5.3.2	Effetto di pennelli trasversali	34
5.3.3	Effetto della curvatura della corrente	34
5.3.4	Stime conclusive	36
5.3.5	Variazioni spaziali di K_y	37
5.4	Modello a coefficienti costanti	38
5.4.1	Qualche verifica sperimentale	41
5.5	Diffusore di lunghezza finita	42
5.6	Modello a tubi di flusso	43
5.6.1	Il procedimento	43
5.6.2	Soluzione a valle di una sorgente lineare verticale	44
6	Mescolamento nel campo lontano	47
6.1	Introduzione	47
6.2	Miscelamento in correnti uniformi	48
6.2.1	Dispersione longitudinale per effetto del profilo verticale logaritmico di velocità	48
6.2.2	L'effetto della disuniformità nella distribuzione trasversa- le della velocità	49
6.2.3	Qualche formula empirica	53
6.2.4	Soluzione per $C(\hat{x}, t)$	54

6.3	Stima di K	56
6.3.1	Dati sperimentali	56
6.3.2	Effetto della larghezza del corso d'acqua	56
6.3.3	Effetto della curvatura della corrente in alvei meandriformi	56
6.3.4	Effetto di zone stagnanti	58
6.4	Soluzione di alcuni problemi	58
6.4.1	Sorgente puntuale istantanea	58
6.4.2	L'approssimazione della nuvola congelata	60
6.4.3	Soluzione per sorgente variabile nel tempo	61
6.4.4	Soluzione per assegnata distribuzione spaziale di concentrazione ad un istante fissato	62
6.4.5	Soluzione per assegnata distribuzione temporale di concentrazione in una sezione fissata	62
7	Soluti reattivi	65
7.1	Soluti reattivi	65
7.1.1	Liquami ed esigenza di ossigeno	65
7.2	Bilancio di ossigeno	67
7.2.1	Ossigeno disciolto	67
7.2.2	Ossidazione del liquame e decadimento del BOD	68
7.2.3	Il processo di riareazione	68
7.2.4	Bilancio di ossigeno in assenza di miscelamento	69
7.3	Bilancio di O_2 e miscelamento	70
7.3.1	Il decadimento del BOD	70
7.3.2	Il bilancio di ossigeno	73
III Dispositivi di smaltimento degli inquinanti: meccanica dei getti, pennacchi e getti galleggianti		75
8	GETTI E PENNACCHI TURBOLENTI	77
8.1	Turbolenza libera quasi-unidirezionale	77
8.1.1	Forma semplificata delle equazioni di Reynolds	77
8.2	Getti piani e assialsimmetrici	80
8.2.1	Visualizzazione di getti	80
8.2.2	L'ipotesi di autosimilarità	80
8.2.3	Soluzione autosimilare per i getti piani	82
8.2.4	Il caso dei getti assialsimmetrici	84
8.3	Pennacchi	88
8.3.1	Formulazione per pennacchi stazionari	88
8.3.2	Pennacchi stazionari bidimensionali	90
8.3.3	Soluzione autosimilare	92
8.3.4	Costanza del flusso di calore	93
8.3.5	Distribuzioni di velocità e temperatura	93
8.3.6	Pennacchi assialsimmetrici	95
8.4	Getti galleggianti	98
8.4.1	Nozione	98

<i>INDICE</i>	5
8.4.2 Getti galleggianti assialsimmetrici	98
8.4.3 Getti galleggianti piani	101
A Lista dei simboli	105
B Lista dei simboli Capitolo 8	109
Elenco delle tabelle	111
Elenco delle figure	111
Bibliografia	114

Parte II

Processi di mescolamento in alvei naturali

Capitolo 4

MISCELAMENTO VERTICALE DI TRACCIANTI PASSIVI NEL CAMPO VICINO

4.1 Introduzione: applicabilità dello schema diffusivo

In assenza di caratteristiche *attive* dell’effluente, il miscelamento nel campo vicino si realizza per effetto della diffusione turbolenta ed è prevalentemente influenzato dalla dimensione verticale, poiché tipicamente nei corsi d’acqua la profondità risulta molto minore della larghezza. L’approssimazione di campo vicino implica infatti che durante la fase di miscelamento verticale l’estensione trasversale della nuvola di tracciante risulta troppo modesta perché il processo possa essere significativamente influenzato dalle variazioni trasversali delle caratteristiche del moto. Ne consegue, in generale, la possibilità di semplificare i termini convettivi dell’equazione di convezione-diffusione turbolenta

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

(si veda la parte I delle dispense “Fondamenti sulla diffusione e dispersione di traccianti passivi”) assumendo che il campo di moto risulti localmente unidirezionale, cioè $U=(u,0,0)$, con u variabile lungo la direzione verticale z . Il miscelamento nel campo vicino è dunque condizionato dalle sole distribuzioni verticali delle proprietà del moto (velocità, viscosità e diffusività cinematica turbolenta).

La teoria di Taylor dimostra che il processo di miscelamento indotto da una turbolenza omogenea e stazionaria è interpretabile, per tempi molto maggiori della *scala temporale lagrangiana* T_L , come un processo diffusivo alla Fick, con diffusività turbolenta costante. I risultati della teoria sono, come noto, estendibili al caso in cui la turbolenza è omogenea in una sola direzione.

Alternativamente si può far riferimento a una *scala spaziale lagrangiana* L_L nella forma

$$L_L = \sqrt{\langle U_\ell'^2 \rangle} T_L \quad (4.1)$$

che fornisce l'ordine di grandezza della distanza che la generica particella di fluido deve percorrere prima di *perdere memoria* della sua velocità iniziale. In termini della scala spaziale lagrangiana L_L la condizione di validità dello schema diffusivo è

$$L > L_L \quad (4.2)$$

con L scala spaziale che definisce le dimensioni della nuvola di tracciante.

Nel caso dei corsi d'acqua L risulta dell'ordine della profondità Y della corrente, sicché lo schema diffusivo risulta a rigore applicabile solo quando le dimensioni della nuvola eccedono apprezzabilmente la profondità. In altre parole la prima fase del miscelamento verticale non potrebbe essere analizzata attraverso uno schema diffusivo (con diffusività turbolenta indipendente dal tempo). Nella pratica ingegneristica tale difficoltà viene usualmente ignorata utilizzando lo schema diffusivo a partire dall'istante di immissione del tracciante.

4.2 Diffusività turbolenta verticale

La diffusività turbolenta verticale \mathcal{D}_z^T viene usualmente stimata facendo appello all'analogia di Reynolds, come già suggerito da Taylor (1954). Si pone cioè

$$\mathcal{D}_z^T(z) = \nu_T(z) \quad (4.3)$$

che equivale a considerare il numero di Schmidt pari a

$$S_c^{\text{turb}} = \frac{\nu_T(z)}{\mathcal{D}_z^T(z)} = 1 \quad (4.4)$$

dove $\nu_T(z)$ è la viscosità cinematica turbolenta. Tale ipotesi risulta sperimentalmente verificata con un errore del 5-10%. Per una corrente turbolenta a superficie libera, mediamente stazionaria, uniforme e piana, si ha quindi

$$\mathcal{D}_z^T(z) = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{Y}\right) \quad (4.5)$$

con $\kappa = 0.41$ costante di Von Karman, u_* velocità di attrito, Y profondità della corrente e z distanza dal fondo. La distribuzione di \mathcal{D}_z^T è cioè *parabolica*.

Vedremo nel seguito come la distribuzione di concentrazione non sia molto sensibile alla distribuzione verticale di \mathcal{D}_z^T e quindi risulti spesso sufficientemente adeguato utilizzare una distribuzione uniforme di \mathcal{D}_z^T pari al valor medio della distribuzione (4.5). Utilizzando il soprasegno per indicare la media lungo la verticale si ha

$$\overline{\mathcal{D}_z^T} = \frac{1}{Y} \int_Y \mathcal{D}_z^T dz = \frac{1}{6} \kappa Y u_* = 0.067 u_* Y \quad (4.6)$$

La (4.6) ha ricevuto alcune conferme sperimentali (vedi Tabella 4.1).

b [m]	Y [m]	\bar{U} [m/s]	u^* [m/s]	$\bar{\mathcal{D}}_z^T/Yu_*$	Autori
2.44	0.4	0.049-0.136	0.049-0.136	0.063	Jobson & Sayre (1970)
0.76	0.071	0.040	0.040	0.042	Schiller & Sayre (1973)
0.56	0.039-0.076	0.041-0.058	0.041-0.058	0.067	McNulty (1983)
0.56	0.050-0.065	0.014-0.016	0.014-0.016	0.067	Nokes (1986)

Tabella 4.1: Risultati sperimentali per la diffusività turbolenta verticale.

Si noti che un risultato analogo alla (4.6) è stato ottenuto da Csanady (1976) per uno strato limite atmosferico non stratificato:

$$\overline{\mathcal{D}}_z^T = 0.05u_*Y \quad (4.7)$$

con Y spessore dello strato limite. La scala temporale del miscelamento verticale T_z è, per ovvi motivi dimensionali, pari a

$$T_z \sim \frac{Y^2}{\overline{\mathcal{D}}_z^T} = \frac{Y}{0.067u_*} \quad (4.8)$$

La (4.8) conduce a stime per T_z nei corsi d'acqua che si aggirano intorno a 100-1000 s. Tale valore risulta in generale molto minore della scala temporale T_y del miscelamento trasversale.

4.3 Miscelamento verticale a valle di una sorgente trasversale distribuita stazionaria

Consideriamo un'opera di scarico costituita da un diffusore, disposto trasversalmente rispetto all'asse del corso d'acqua, che scarica in modo distribuito una portata massica \dot{M} lungo l'intera larghezza b del corso d'acqua. Sia z_0 la quota dell'asse del diffusore. Ignoriamo per il momento la dinamica dell'effluente subito a valle del diffusore, dipendente dalla geometria dello stesso e dalle condizioni idrauliche. Schematizziamo cioè il diffusore con una sorgente lineare distribuita, di intensità \dot{M}/b , localizzata in $z = z_0$ (Figura 4.1).

Ignorando gli effetti legati alla presenza delle sponde, che inducono localmente variazioni trasversali delle distribuzioni di concentrazione e velocità, e trascurando inoltre gli effetti della diffusione longitudinale, l'equazione della diffusione-convezione turbolenta si riduce alla forma

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (4.9)$$

dove è assente il termine $\partial C / \partial t$ non stazionario avendo assunto costante la portata massica \dot{M} dell'effluente, mentre u e \mathcal{D}_z^T sono in generale variabili con la quota z .

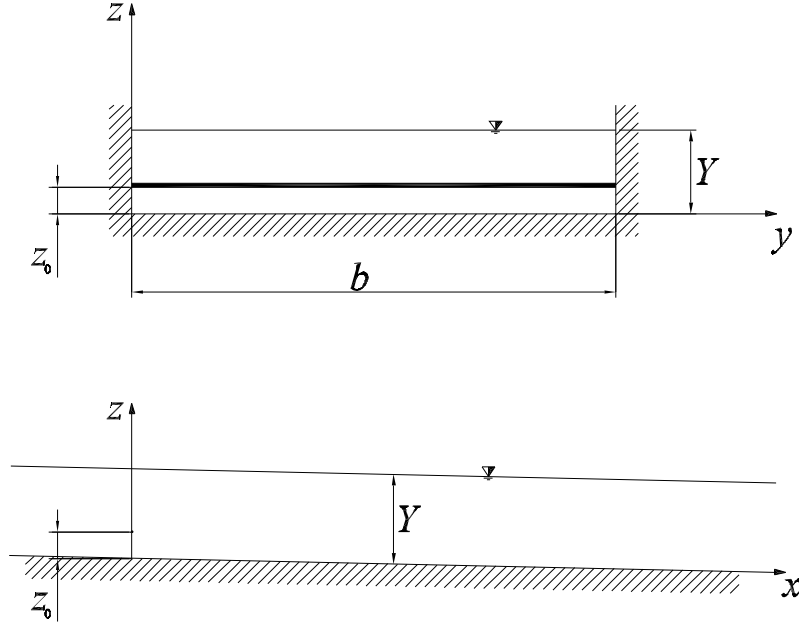


Figura 4.1: Schematizzazione di sorgente lineare distribuita.

4.3.1 Soluzione con U e \mathcal{D}_z^T costanti

Un'analisi approssimata delle soluzioni della (4.9) può ottenersi trascurando le variazioni verticali della velocità e della diffusività, cioè ponendo

$$u(z) = \bar{U}, \quad \mathcal{D}_z^T(z) = \overline{\mathcal{D}_z^T} \quad (4.10)$$

con \bar{U} velocità mediata sulla verticale. In tal caso il problema si riduce a quello esaminato nel capitolo 1 del volume “Fondamenti sulla diffusione e dispersione di traccianti passivi” qui modificato dalla presenza della superficie libera e del fondo. Nel caso in cui la regione risulti non confinata, la soluzione si scrive:

$$C(x, z) = \frac{\dot{M}}{b\sqrt{4\pi\overline{\mathcal{D}_z^T}x\bar{U}}} \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2\bar{U}}{4x\overline{\mathcal{D}_z^T}} \right] \quad (4.11)$$

La (4.11) si ricava per altro agevolmente notando la stretta analogia tra la (4.9), nel caso di coefficienti costanti, e l'equazione della diffusione 1D (vedi equazione 1.4.1 del volume “Fondamenti sulla diffusione e dispersione di traccianti passivi”). La soluzione può dunque porsi nella forma

$$C(x, z) = \frac{c_1}{\sqrt{4\pi\overline{\mathcal{D}_z^T}x/\bar{U}}} \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2\bar{U}}{4x\overline{\mathcal{D}_z^T}} \right] \quad (4.12)$$

dove la costante c_1 si determina ricordando che la stazionarietà e la conseguente trascurabilità dell'effetto della diffusione longitudinale implicano che la massa di soluto che attraversa nell'unità di tempo la generica sezione deve mantenersi costante. La portata massica di soluto nella generica sezione deve risultare

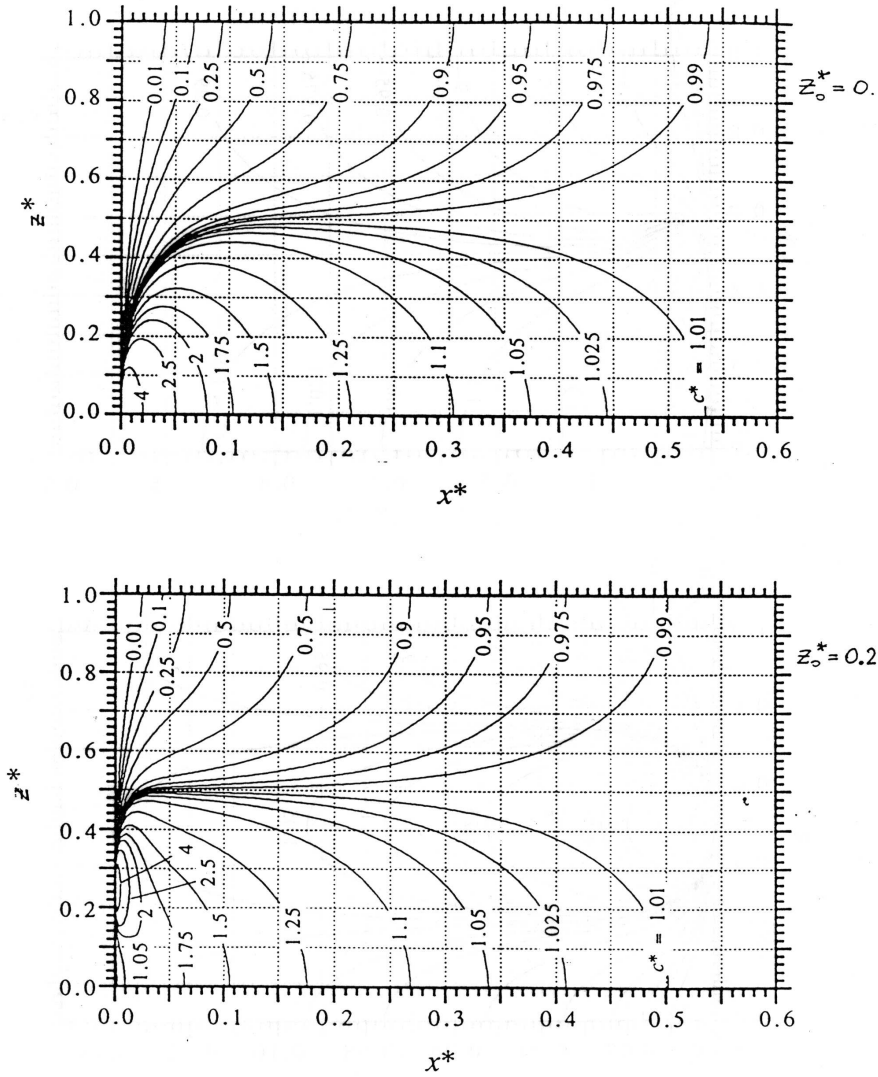


Figura 4.2: Linee a C^* costante relative all'efflusso da una sorgente distribuita lineare (modello a coefficienti costanti).

dunque pari a alla portata massica dello scarico \dot{M} . Nel caso in esame si ha allora, per unità di larghezza,

$$\int_{-\infty}^{\infty} CU dz = \frac{\dot{M}}{b} \quad (4.13)$$

che conduce a

$$c_1 = \frac{\dot{M}}{b\bar{U}} \quad (4.14)$$

donde la (4.11). La presenza della superficie libera e del fondo si mette in conto agevolmente utilizzando il metodo delle immagini. Segue

$$C = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C(x, z, z_0 + 2nY) + C(x, z, -z_0 + 2nY)] \quad (4.15)$$

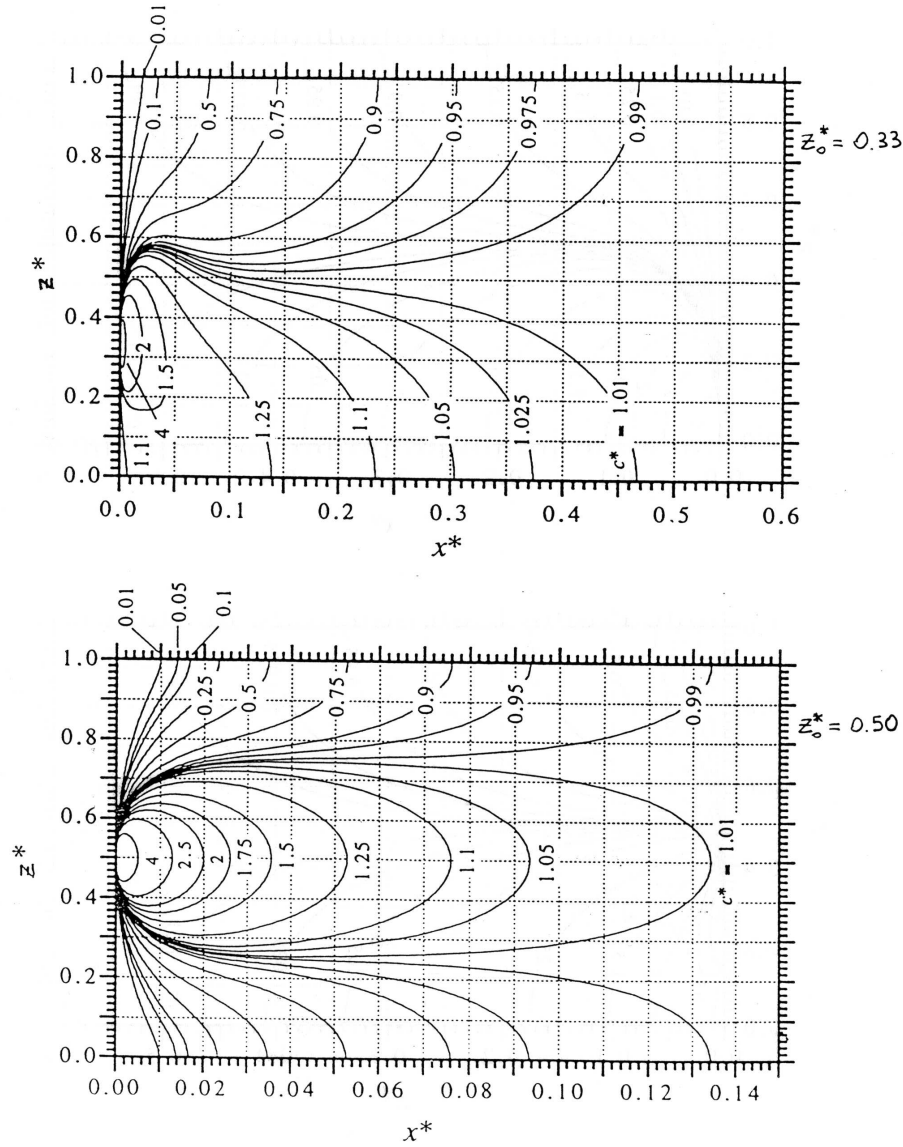


Figura 4.3: Linee a C^* costante relative all'efflusso da una sorgente distribuita lineare (modello a coefficienti costanti).

È sufficiente utilizzare i primi termini della sommatoria, salvo che negli stadi avanzati del processo di miscelamento quando la distribuzione di C è molto prossima ad una distribuzione uniforme.

Le Figure 4.2 e 4.3 forniscono la distribuzione di C ottenuta dalla (4.15) per diverse posizioni della sorgente lungo la verticale nel caso del modello a coefficienti costanti. Le variabili sono normalizzate nella forma seguente:

$$C^* = \frac{C}{C_m}, \quad x^* = \frac{x}{\bar{U}Y^2/\bar{D}_z^T}, \quad z^* = \frac{z}{Y} \quad (4.16)$$

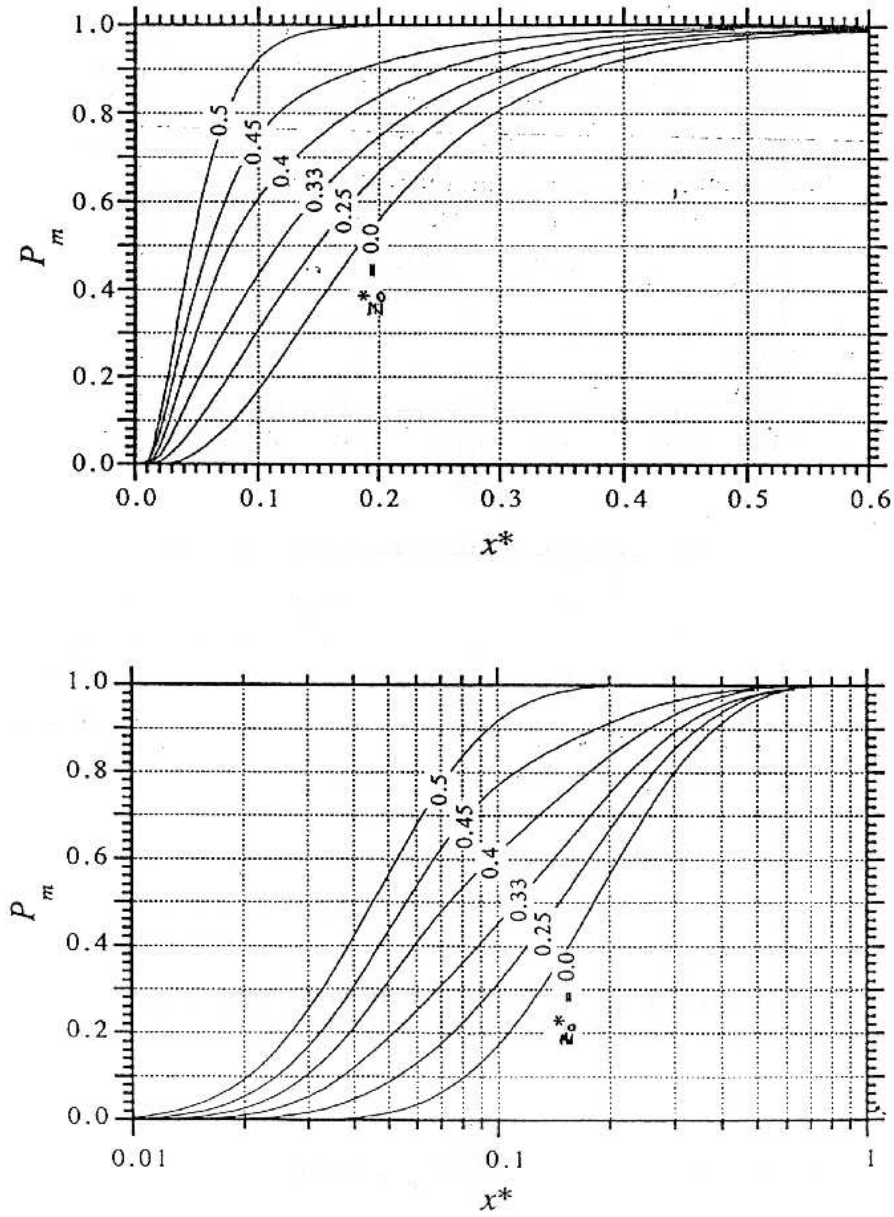


Figura 4.4: Grado di miscelamento in funzione della distanza a valle di una sorgente (lineare) distribuita nel modello a coefficienti costanti. La sorgente è localizzata alla quota (adimensionale) z_0^* . Sopra la scala per x^* è lineare, sotto logaritmica.

essendo

$$C_m = \frac{\dot{M}}{Q} \quad (4.17)$$

con Q portata volumetrica del corso d'acqua.

Il picco di concentrazione, che nella sezione iniziale si realizza in corrispondenza della sorgente, tende a spostarsi verso il fondo se la sorgente è localizzata

nell'intervallo $(0, Y/2)$ e verso la superficie libera se z_0 è compreso nell'intervallo $(Y/2, Y)$. La Figura 4.4 mostra l'andamento del parametro di miscelamento

$$P_m \equiv C_{\min}/C_{\max} \quad (4.18)$$

con C_{\min} valore minimo e C_{\max} valore massimo della concentrazione nella generica sezione a valle dello scarico.

Si noti che, fissato x^* , P_m è massimo per $z_0^* = 0.5$: in questo caso si ha $P_m = 0.98$ per $x^* = 0.134$. Per $z_0^* = 0$ si ha l'altro caso limite, in cui $x^* = 0.536$. Definita convenzionalmente la distanza di miscelamento verticale L_z come distanza alla quale si ha $P_m = 0.98$ segue inoltre

$$L_z = (0.134 \div 0.536) \frac{\bar{U}Y^2}{\mathcal{D}_z^T} \quad (4.19)$$

con z_0^* variabile da 0.5 a 0. Ricordando la (4.6) si ha quindi:

$$\frac{L_z}{Y} = (2 \div 8) \frac{\bar{U}}{u_*} \quad (4.20)$$

Poiché valori caratteristici del rapporto \bar{U}/u_* per alvei naturali variano fra 10 e 20, la distanza di miscelamento verticale risulta mediamente compresa nell'intervallo $(30 \div 120)Y$ al variare della quota di scarico da $Y/2$ al fondo.

4.3.2 Soluzione con U e \mathcal{D}_z^T variabili

McNulty (1983) e Nokes (1986) hanno risolto la (4.9) assumendo

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_r} \right) \quad (4.21)$$

$$\mathcal{D}_z^T = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{Y} \right) \quad (4.22)$$

operando cioè nell'ambito dell'analogia di Reynolds. La Figura 4.5 fornisce un confronto fra i profili di concentrazione relativi al modello semplificato (a coefficienti costanti) e al modello qui esaminato per assegnato valore del coefficiente di resistenza

$$C_f = \left(\frac{u_*}{\bar{U}} \right)^2 \quad (4.23)$$

I risultati non differiscono apprezzabilmente; tuttavia alcune osservazioni appaiono rilevanti.

- i) *Il picco di concentrazione tende a spostarsi verso il fondo più rapidamente nel modello a U e \mathcal{D}_z^T variabili.* Infatti la diminuzione di \mathcal{D}_z^T verso il fondo implica una minore capacità di diffusione turbolenta e quindi una minore rapidità di riduzione della concentrazione. Questo effetto è accentuato dal fatto che al di sotto del picco di concentrazione il gradiente di concentrazione decresce più rapidamente e questo effetto riduce il flusso diffusivo in prossimità del fondo. D'altra parte la velocità decresce verso

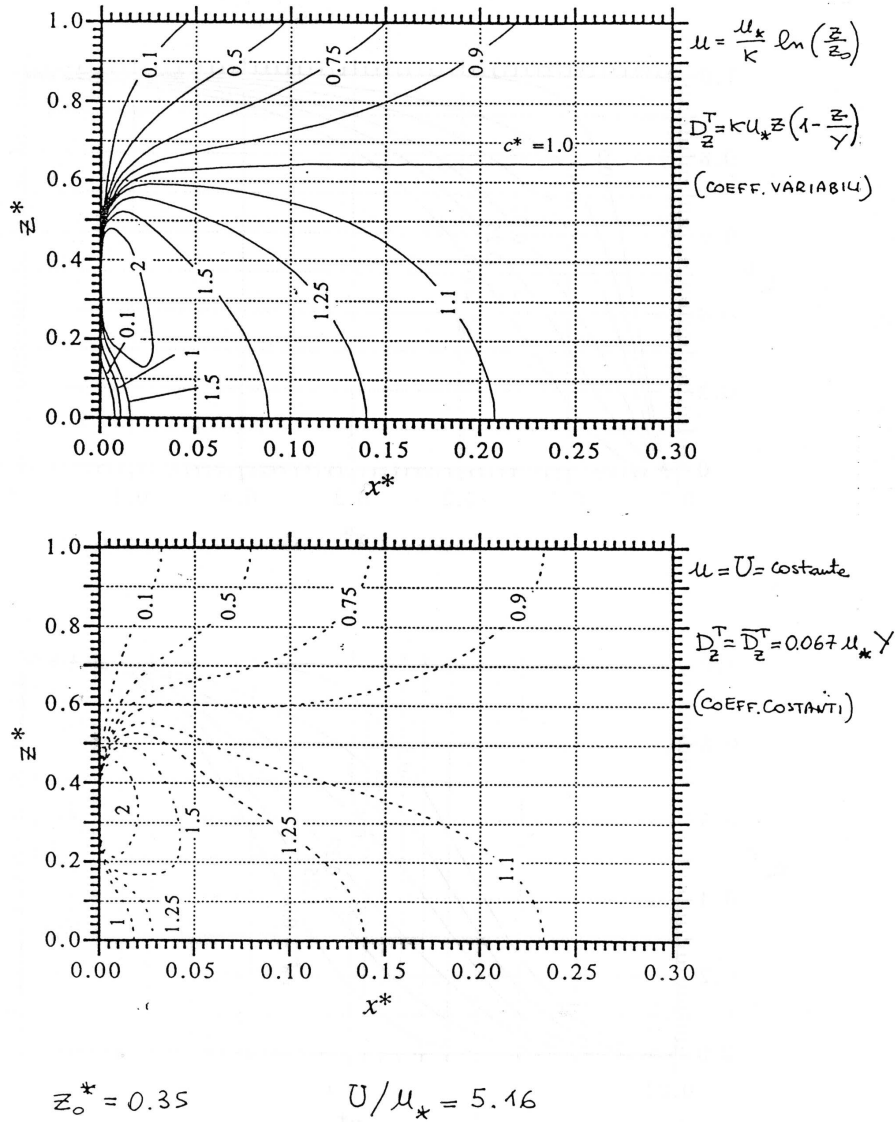


Figura 4.5: Confronto fra i profili di concentrazione nei modelli a U e D_z^T costanti (---) e variabili (—) con $C_f = 0.037$.

il fondo, il che implica che il tracciante ha a disposizione un tempo progressivamente crescente per diffondere. Il primo effetto tuttavia prevale e si ha così un'accresciuta tendenza del tracciante a migrare verso il fondo nel caso $z_0^* = 0.35$ e una ridotta tendenza a migrare verso la superficie libera per $z_0^* = 0.65$.

- ii) *La profondità di scarico ottimale risulta dipendente dal coefficiente di attrito.* È possibile mostrare che esiste una profondità di scarico alla quale il picco di concentrazione resta localizzato a quella profondità, non si sposta cioè né verso la superficie libera né verso il fondo. In tal caso la concentrazione sulla superficie libera e sul fondo risultano minime sicché

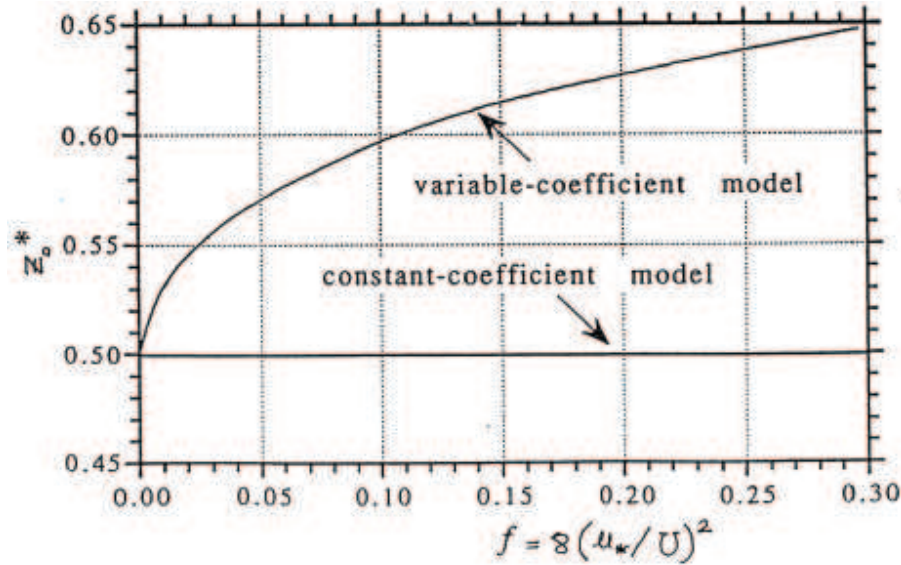


Figura 4.6: Andamento della profondità ottimale di scarico nei modelli a coefficienti costanti e variabili, in funzione di $f = 8C_f$.

il miscelamento è massimo. La Figura 4.6 mostra che la z_0^* ottimale risulta costante ($= 0.5$) nel caso del modello a U e \mathcal{D}_z^T costanti e varia apprezzabilmente nel modello a coefficienti variabili con C_f .

- iii) Infine la distanza L_z per il completo miscelamento verticale risulta anch'essa dipendente dal modello utilizzato. La Figura 4.7 mostra che:
 - se z_0^* è prossimo a quello ottimale L_z non cambia apprezzabilmente fra i diversi modelli;
 - se z_0^* è prossimo a 0 o a 1 il modello a coefficienti costanti tende a sovrastimare L_z di un ammontare dell'ordine del 15%.
- iv) Si noti che un'apprezzabile influenza sulle curve iso-concentrazione deriva dal carattere scabro o liscio del canale. Le Figure 4.7 e 4.8 ne mostrano l'andamento per due diversi valori di C_f .

4.4 Miscelamento verticale a valle di una sorgente puntuale stazionaria

Esaminiamo ora il caso in cui lo scarico avvenga attraverso una semplice condotta. Ignorando ancora gli effetti dinamici nell'immediato intorno dello scarico, quest'ultimo può modellarsi nella forma di una sorgente puntuale. Ignorando anche gli effetti della diffusione turbolenta longitudinale l'equazione della diffusione-convezione turbolenta si scrive in questo caso nella forma:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (4.24)$$

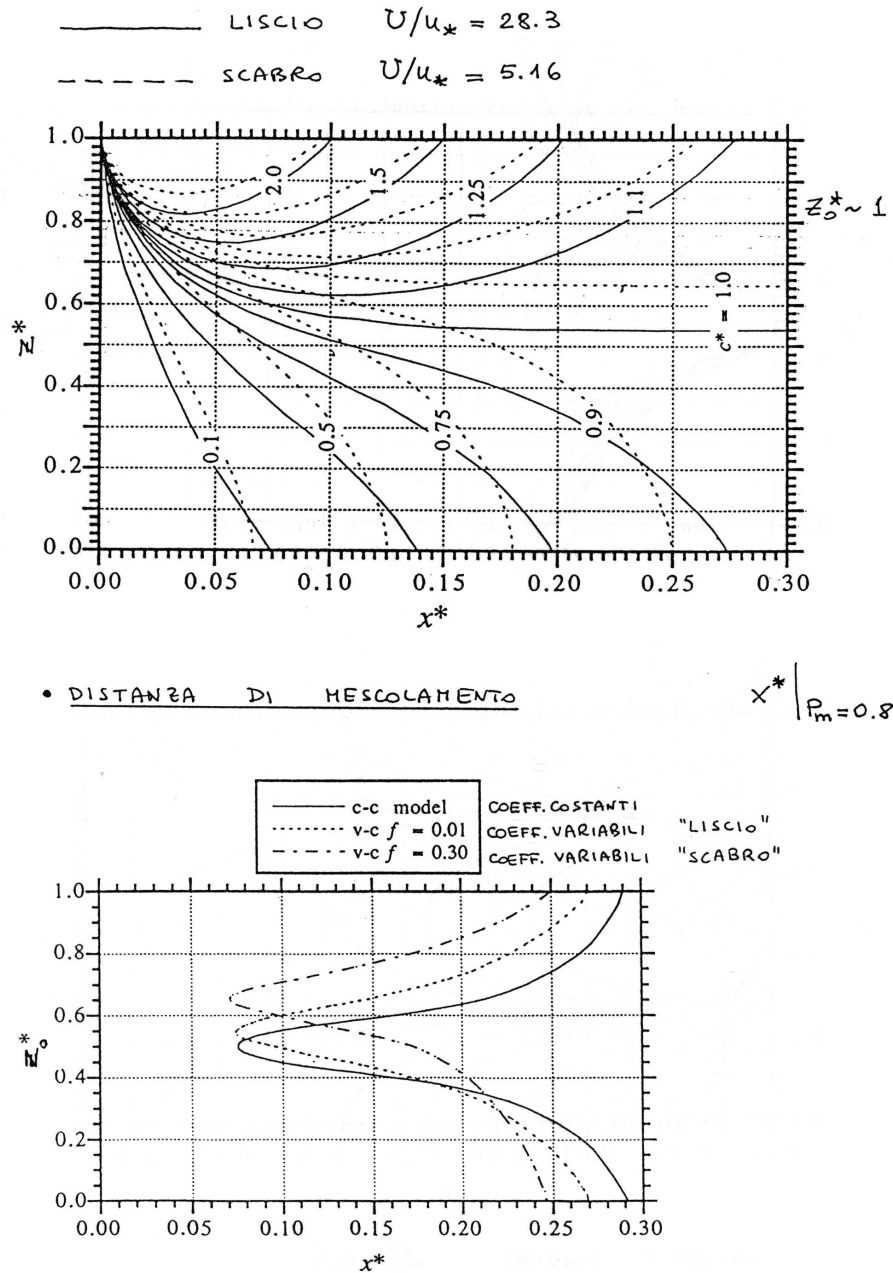


Figura 4.7: Sopra: linee isoconcentrazione nel caso del modello a coefficienti variabili (— $C_f = 0.00125$; - - - $C_f = 0.0375$). Sotto: confronto fra le distanze necessarie al raggiungimento di un grado di miscelamento 0.8 nel modello a coefficienti costanti e in quello a coefficienti variabili.

Adottando ancora lo schema a u , D_y^T e D_z^T costanti (e pari ad \bar{U} , \bar{D}_y^T e \bar{D}_z^T rispettivamente) e assumendo la sezione rettangolare è possibile ricavare la soluzione della (4.24) a partire dalla soluzione nota per il caso di regione del

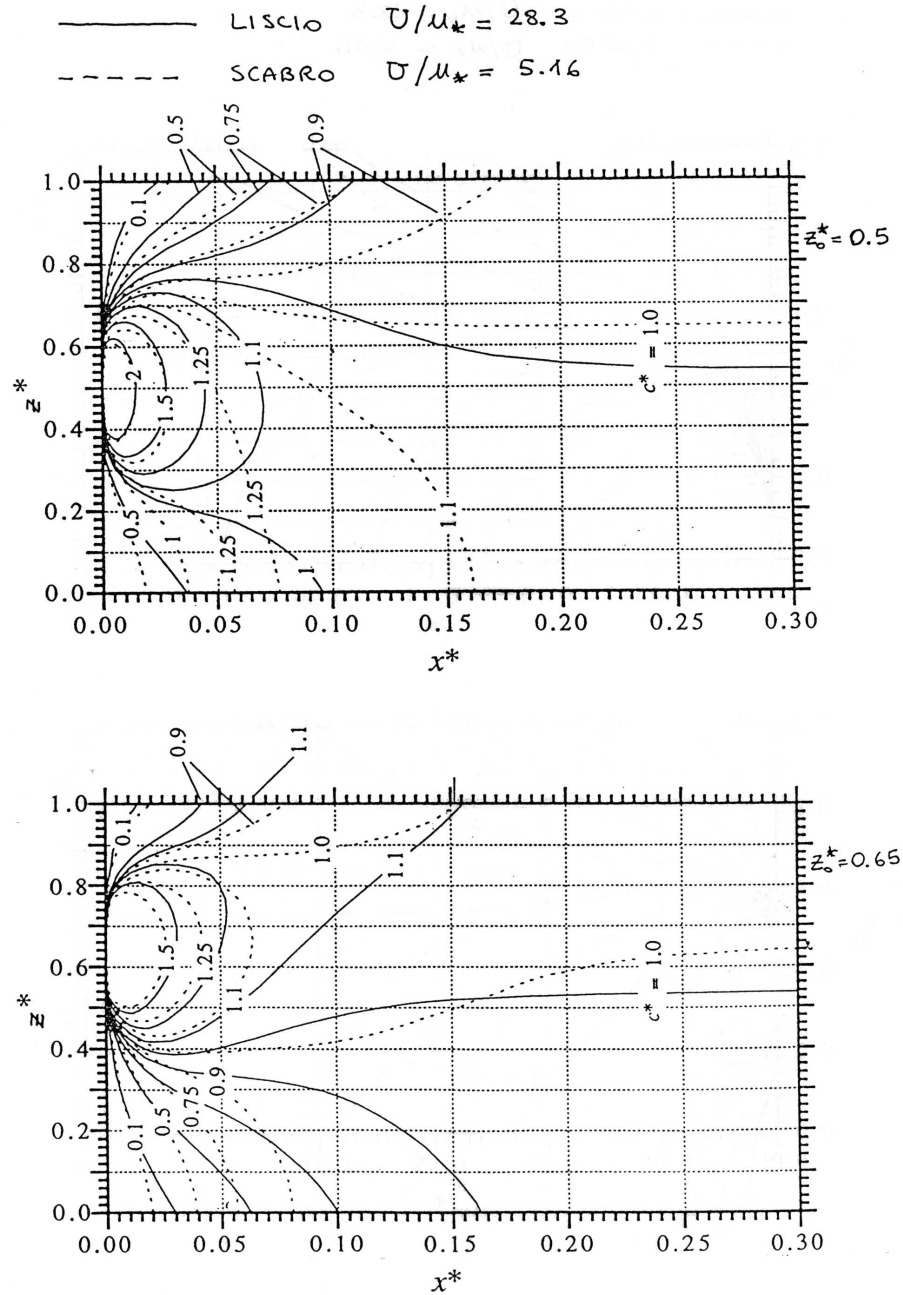


Figura 4.8: Linee isoconcentrazione nel caso del modello a coefficienti variabili (— $C_f = 0.00125$; - - - $C_f = 0.0375$).

moto non confinata che si scrive:

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{\mathcal{D}_y^T \mathcal{D}_z^T} x} \exp \left[-\frac{(y - y_0)^2}{4\mathcal{D}_y^T x} \bar{U} - \frac{(z - z_0)^2}{4\mathcal{D}_z^T x} \bar{U} \right] \quad (4.25)$$

con \dot{M} portata di tracciante immessa in $(0, y_0, z_0)$. La (4.25) naturalmente non soddisfa alle condizioni al contorno di flusso nullo in corrispondenza delle

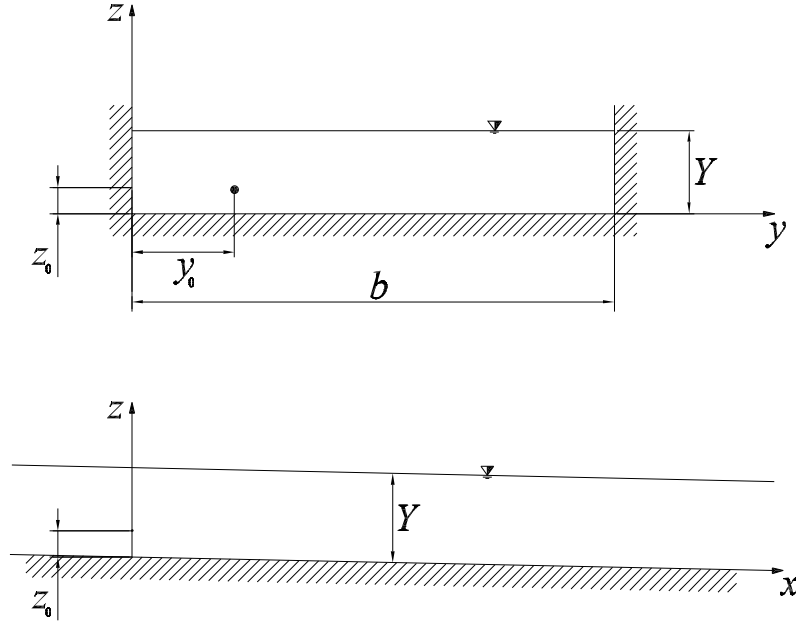


Figura 4.9: Schematizzazione di sorgente puntuale.

sponde, della superficie libera e del fondo:

$$\overline{\mathcal{D}}_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \Big| = 0 \quad (y = 0, b) \quad (4.26)$$

$$\overline{\mathcal{D}}_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \Big| = 0 \quad (z = 0, Y) \quad (4.27)$$

Allo scopo di ottenere una soluzione che soddisfa anche alle (4.26) e (4.27) è necessario introdurre opportune sorgenti immagine. Segue:

$$C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi x \sqrt{\overline{\mathcal{D}}_y^T \overline{\mathcal{D}}_z^T}} \cdot \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(y - y_0 + 2nb)^2}{4\overline{\mathcal{D}}_y^T x} \bar{U} \right] + \exp \left[-\frac{(y + y_0 + 2nb)^2}{4\overline{\mathcal{D}}_y^T x} \bar{U} \right] \right\} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(z - z_0 + 2nY)^2}{4\overline{\mathcal{D}}_z^T x} \bar{U} \right] + \exp \left[-\frac{(z + z_0 + 2nY)^2}{4\overline{\mathcal{D}}_z^T x} \bar{U} \right] \right\} \quad (4.28)$$

La Figura 4.10 mostra la struttura della soluzione (4.28) nel caso in cui $y_0^* = 0.5$, $z_0^* = 0.5$, $\overline{\mathcal{D}}_y^T = 2\overline{\mathcal{D}}_z^T$ e $\beta = b/Y = 50$. Si noti che il miscelamento verticale è raggiunto per $x^* = 0.134$ similmente al caso della sorgente distribuita. Tuttavia all'avvenuto miscelamento verticale corrisponde in questo caso un valore di C^* assai superiore del caso precedente (pari a circa 25) mentre occorre raggiungere distanze più di 100 volte superiori affinché l'avvenuto miscelamento trasversale conduca a valori di C^* prossimi ad 1. Andamenti simili sono ottenibili al variare dei parametri e della posizione della sorgente.

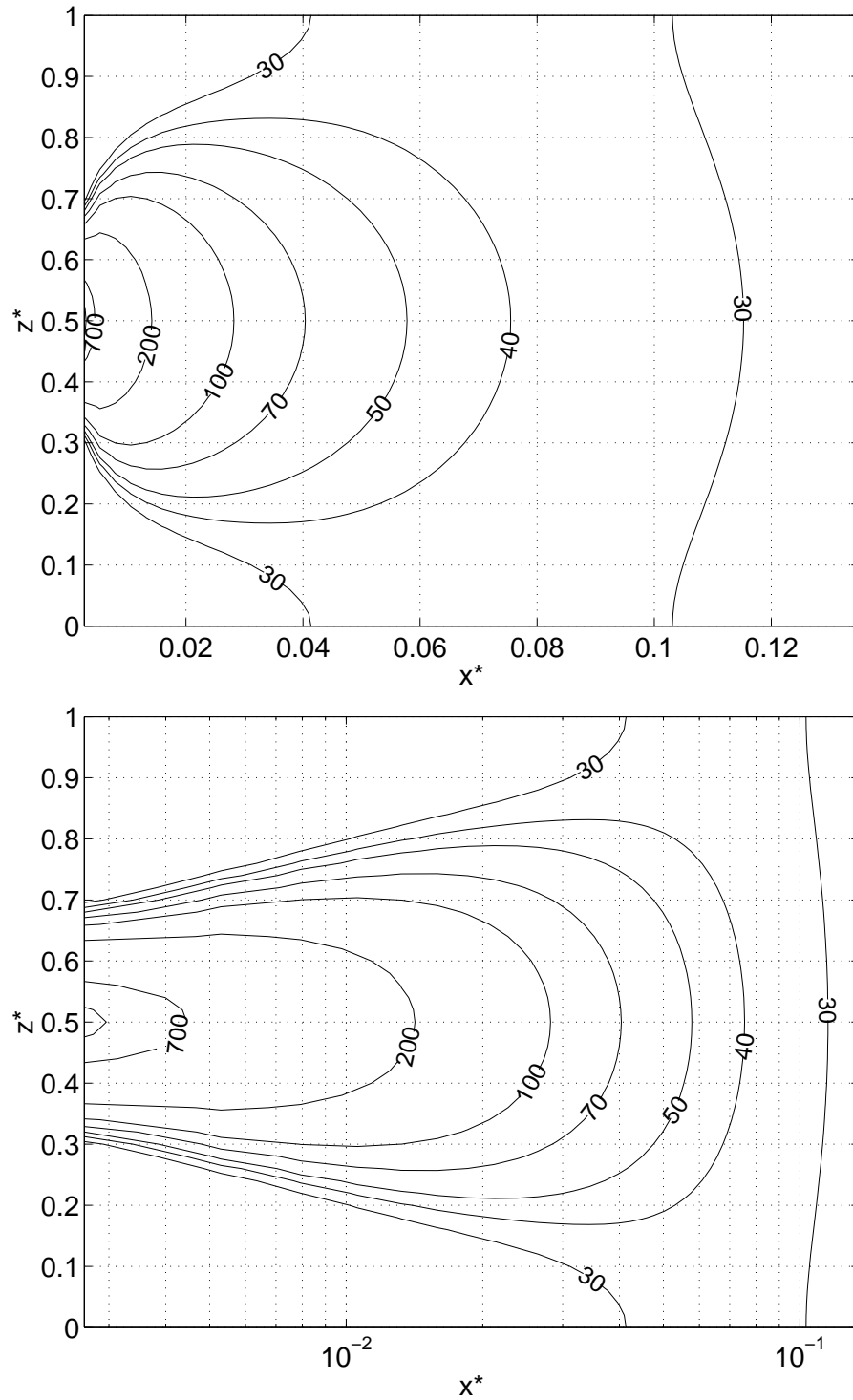


Figura 4.10: Distribuzione delle linee isoconcentrazione nel piano $y = 0.5b$ per una sorgente puntuale localizzata, con $y_0^* = z_0^* = 0.5$ e $b/Y = 50$. Si è assunto inoltre $\overline{D}_y^T / \overline{D}_z^T = 2$. Sopra la scala per x^* è lineare, sotto logaritmica.

4.5 Miscelamento verticale a valle di una sorgente puntuale non stazionaria

In questo caso il carattere non stazionario della sorgente rende il problema più complesso. È necessario anzitutto fare riferimento all'equazione della diffusione-convezione nella forma completa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (4.29)$$

dove u risulta in generale funzione di x , y e z . \mathcal{D}_x^T e \mathcal{D}_z^T hanno una distribuzione parabolica nella direzione verticale mentre meno nota è la distribuzione verticale di \mathcal{D}_y^T (si veda il Capitolo 2 della parte I “Fondamenti sulla diffusione e dispersione di traccianti passivi”). La soluzione della (4.29) nel caso generale non è nota. Non è difficile ottenerne tuttavia una soluzione approssimata *a coefficienti costanti*. È sufficiente infatti ricordare la soluzione per una sorgente 3D in un moto uniforme in una regione non limitata. Se M è la massa immessa all'istante $t = 0$ in $x = 0$, $y = y_0$, $z = z_0$ si trova:

$$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{\mathcal{D}_x^T \mathcal{D}_y^T \mathcal{D}_z^T}} \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{U}t)^2}{4\mathcal{D}_x^T t} - \frac{(y - y_0)^2}{4\mathcal{D}_y^T t} - \frac{(z - z_0)^2}{4\mathcal{D}_z^T t} \right\} \quad (4.30)$$

L'imposizione della condizione di flusso nullo in $y = (0, Y)$ e $z = (0, b)$ si ottiene ancora con il metodo delle immagini; dunque, per la massa unitaria di tracciante si trova:

$$C_u(x, y, z, t; \tau) = \frac{1}{(4\pi)^{3/2} \sqrt{\mathcal{D}_x^T \mathcal{D}_y^T \mathcal{D}_z^T} (t - \tau)^{3/2}} \exp - \left\{ \frac{[x - \bar{U}(t - \tau)]^2}{4\mathcal{D}_x^T (t - \tau)} \right\} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(y - y_0 + 2nb)^2}{4\mathcal{D}_y^T (t - \tau)} \right] + \exp \left[-\frac{(y + y_0 + 2nb)^2}{4\mathcal{D}_y^T (t - \tau)} \right] \right\} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(z - z_0 + 2nY)^2}{4\mathcal{D}_z^T (t - \tau)} \right] + \exp \left[-\frac{(z + z_0 + 2nY)^2}{4\mathcal{D}_z^T (t - \tau)} \right] \right\} \quad (4.31)$$

avendo indicato con τ l'istante d'immissione. Se infine la sorgente va variando la sua portata di tracciante con legge $\dot{M}(\tau)$ la soluzione finale si scrive nella forma:

$$C(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^t C_u(x, y, z, t; \tau) \dot{M}(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

Capitolo 5

MISCELAMENTO TRASVERSALE DI TRACCIANTI PASSIVI NEL CAMPO INTERMEDIO

Nella maggior parte dei corsi d'acqua il miscelamento verticale si realizza assai prima che si completi il miscelamento trasversale. Ciò giustifica l'opportunità di analizzare il processo di miscelamento nel campo intermedio ignorando le variazioni verticali della concentrazione, facendo cioè riferimento all'equazione della diffusione turbolenta mediata sulla profondità.

5.1 Equazione della diffusione turbolenta mediata sulla profondità

Consideriamo un canale caratterizzato da una quota del fondo $\eta(x, y)$, da una quota della superficie libera $h(t, x, y)$ e da una profondità $Y(t, x, y) = h(t, x, y) - \eta(x, y)$, riferite ad un sistema cartesiano x, y, z e lentamente variabili. Sia x la coordinata longitudinale, y quella trasversale e z quella verticale orientata verso l'alto. Decomponiamo concentrazione e velocità in componenti mediate sulla profondità e deviazioni dalla media nella forma

$$u = \bar{U} + u' \quad v = \bar{V} + v' \quad C = \bar{C} + C' \quad (5.1)$$

$$\bar{U} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h u dz \quad \bar{V} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h v dz \quad \bar{C} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h C dz \quad (5.2)$$

Il lettore non confonda le notazioni della (5.1) con quella d'uso nella turbolenza.

Consideriamo l'equazione della diffusione turbolenta nella forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uC) + \frac{\partial}{\partial y}(vC) + \frac{\partial}{\partial z}(wC) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_x^T \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_y^T \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{D}_z^T \frac{\partial C}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Operiamo sul primo membro della (5.3) la media sulla verticale nella forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta}^h [C_{,t} + (uC)_{,x} + (vC)_{,y} + (wC)_{,z}] dz = \\
& = (\bar{C}Y)_{,t} + (\bar{U}\bar{C}Y)_{,x} + (\bar{V}\bar{C}Y)_{,y} - \\
& - (C)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} - (uC)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - (vC)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + (wC)_{z=h} + \\
& + (uC)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (vC)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - (wC)_{z=\eta}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Le condizioni cinematiche in superficie libera, definita dall'equazione $\mathcal{F}_s = z - h = 0$, e sul fondo, dove $\mathcal{F}_f = z - \eta = 0$, impongono:

$$[\mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{F}_s]_{z=h} = 0 \quad [\mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{F}_f]_{z=\eta} = 0 \tag{5.5}$$

con $\nabla \mathcal{F}_f \equiv (-\eta_{,x}, -\eta_{,y}, 1)$ e $\nabla \mathcal{F}_s \equiv (-h_{,x}, -h_{,y}, 1)$. Si ottiene quindi:

$$-h_t - uh_{,x} - vh_{,y} + w = 0 \quad -u\eta_{,x} - v\eta_{,y} + w = 0 \tag{5.6}$$

Osservando inoltre che si ha:

$$\overline{uC} = \bar{U}\bar{C} + \overline{u'C'} \quad \overline{vC} = \bar{V}\bar{C} + \overline{v'C'}$$

la (5.4) diventa

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta}^h [C_{,t} + (uC)_{,x} + (vC)_{,y} + (wC)_{,z}] dz = \\
& = (Y\bar{C})_{,t} + (Y\bar{U}\bar{C})_{,x} + (Y\bar{V}\bar{C})_{,y} + (Y\overline{u'C'})_{,x} + (Y\overline{v'C'})_{,y}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

La (5.7) rivela dunque che l'operazione di media sulla verticale fa emergere dai termini convettivi contributi *dispersivi* nei prodotti fra gli scostamenti di velocità e concentrazione. Operiamo analogamente sui termini diffusivi della (5.3).

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta}^h [(\mathcal{D}_x^T C)_{,x} + (\mathcal{D}_y^T C)_{,y} + (\mathcal{D}_z^T C)_{,z}] dz = \\
& = (Y\overline{\mathcal{D}_x^T C})_{,x} + (Y\overline{\mathcal{D}_y^T C})_{,y} + \\
& - (\mathcal{D}_x^T C)_{z=h} h_{,x} - (\mathcal{D}_y^T C)_{z=h} h_{,y} + (\mathcal{D}_z^T C)_{z=h} + \\
& + (\mathcal{D}_x^T C)_{z=\eta} \eta_{,x} + (\mathcal{D}_y^T C)_{z=\eta} \eta_{,y} - (\mathcal{D}_z^T C)_{z=\eta}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

La condizione di flusso di massa nullo attraverso la superficie libera si scrive:

$$\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{n}_s|_{z=h} = q_x^T n_{sx} + q_y^T n_{sy} + q_z^T n_{sz}|_{z=h} = 0 \tag{5.9}$$

Ma

$$\mathbf{n}_s = \frac{\nabla \mathcal{F}_s}{|\nabla \mathcal{F}_s|} = \frac{(-h_{,x}, -h_{,y}, 1)}{\sqrt{1 + h_{,x}^2 + h_{,y}^2}} \tag{5.10}$$

donde la (5.9) porge:

$$\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{n}_s|_{z=h} = -\mathcal{D}_x^T C_{,x}|_{z=h} h_{,x} - \mathcal{D}_y^T C_{,y}|_{z=h} h_{,y} + \mathcal{D}_z^T C_{,z}|_{z=h} = 0 \quad (5.11)$$

Condizione analoga si ricava immediatamente imponendo la condizione di flusso nullo attraverso il fondo. Nel secondo membro della (5.7) sopravvivono dunque soltanto i primi due termini. Anche in questo caso si può eseguire una decomposizione della forma:

$$\overline{\mathcal{D}_x^T C_{,x}} = \overline{\mathcal{D}_x^T \bar{C}_{,x}} + \overline{\mathcal{D}'^T_x C'_{,x}} \quad \overline{\mathcal{D}_y^T C_{,y}} = \overline{\mathcal{D}_y^T \bar{C}_{,y}} + \overline{\mathcal{D}'^T_y C'_{,y}} \quad (5.12)$$

L'inadeguatezza delle conoscenze sulla distribuzione di \mathcal{D}_x^T e \mathcal{D}_y^T rende incerta l'applicazione della decomposizione precedente e ha suggerito l'opportunità di trascurare senza ulteriori giustificazioni i termini nelle fluttuazioni delle (5.12).

Con l'ausilio delle (5.11) e (5.12), e ricordando la condizione analoga di flusso nullo alla superficie del fondo, si perviene infine alla seguente forma mediata lungo la verticale dell'equazione della diffusione turbolenta:

$$(Y\bar{C})_{,t} + (Y\bar{U}\bar{C})_{,x} + (Y\bar{V}\bar{C})_{,y} = \left[Y(\overline{\mathcal{D}_x^T \bar{C}_{,x}} - \overline{u'C'}) \right]_{,x} + \left[Y(\overline{\mathcal{D}_y^T \bar{C}_{,y}} - \overline{v'C'}) \right]_{,y} \quad (5.13)$$

La (5.13) può essere riscritta assumendo che i termini nei prodotti fra gli scostamenti di velocità e quelli di concentrazione possano porsi in forma diffusiva attraverso l'introduzione di coefficienti di dispersione nella forma:

$$-\overline{u'C'} = K_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \quad -\overline{v'C'} = K_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \quad (5.14)$$

sicché la (5.13) assume la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(Y\bar{C}) + \frac{\partial}{\partial x}(Y\bar{U}\bar{C}) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\bar{V}\bar{C}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[Y(\overline{\mathcal{D}_x^T} + K_x) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Y(\overline{\mathcal{D}_y^T} + K_y) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

La (5.15) pone naturalmente il problema della valutazione di K_x , K_y , $\overline{\mathcal{D}_x^T}$ e $\overline{\mathcal{D}_y^T}$. Spesso, data la difficoltà di accertare il valore dei singoli contributi, i coefficienti di diffusione turbolenta e dispersione vengono confusi in un unico coefficiente.

5.2 Rilievi della diffusività turbolenta trasversale in canali rettilinei a sezione rettangolare

Un gran numero di esperienze di laboratorio sono state dedicate alla misura di $\overline{\mathcal{D}_y^T}$: i risultati sono riassunti nelle Tabelle 5.1 e 5.2. Essi suggeriscono che il rapporto $(\overline{\mathcal{D}_y^T}/Yu_*)$ si aggira intorno a $0.1 \div 0.2$.

Le fluttuazioni di tale quantità nelle diverse esperienze sono presumibilmente da associare al fatto che i rilievi sperimentali includono gli effetti, pur

deboli, dei moti secondari che anche in un canale rettilineo insorgono per effetto dell'anisotropia della turbolenza. Tuttavia la quantificazione di tali effetti non è affatto semplice e ha dato luogo ad analisi talvolta apparentemente contraddittorie. Okoye (1970) ha ottenuto una dipendenza crescente di $(\overline{\mathcal{D}_y^T}/Y u_*)$ dal rapporto b/Y attraverso misure di laboratorio. Tale risultato non sembra tuttavia confermato dall'esame dei dati di campo.

b [cm]	Y [cm]	\bar{U} [cm/s]	u_* [cm/s]	$\overline{\mathcal{D}_y^T}$ [cm ² /s]
60	3.9	20	1.88	1.11
60	3.3	19	2.03	0.88
60	1.7	20	2.39	0.59
60	1.4	20	2.80	0.60
45	3.8	19	1.82	0.93
45	3.2	20	2.09	1.16
45	1.8	20	2.39	0.85
45	1.3	20	2.69	0.88
60	3.1	20	1.54	0.62
60	2.3	20	1.78	0.50
60	1.8	20	1.87	0.36
60	1.4	20	2.09	0.34
45	4.0	20	1.58	0.88
45	2.8	20	1.76	0.67
30	3.4	20	1.91	0.88
30	2.5	20	2.08	0.92
30	1.6	20	2.39	0.74
60	4.2	34	1.96	1.34
60	3.9	31	1.82	1.14
60	4.2	18	1.10	0.74
60	4.9	15	0.93	0.91
60	5.0	30	1.72	1.41
85	1.5	31	2.12	0.64
85	3.0	27	1.57	0.79
85	5.3	43	2.23	1.33
85	5.3	43	2.09	1.33
85	5.3	43	2.18	1.33
85	5.3	42	2.14	1.21
85	5.3	42	2.12	1.45
85	10.7	42	1.93	2.09
85	17.3	37	1.75	2.86
110	1.7	33	1.98	0.79
110	2.7	50	2.64	1.19
110	2.8	30	1.64	0.79
110	3.5	32	1.75	0.87
110	5.4	44	2.18	1.62
110	5.5	42	2.20	1.65
110	10.8	39	1.86	2.78

110	17.3	35	1.66	3.25
110	22.0	31	1.41	3.26
110	6.8	36	5.01	4.81
110	8.7	41	5.13	6.03
110	10.4	43	5.06	7.48
110	17.1	35	3.64	6.74
110	4.1	35	1.90	1.06
110	6.6	45	2.14	2.04
110	11.1	46	1.99	3.56
110	3.9	37	3.73	1.98
110	6.4	46	4.01	3.52
238	14.8	23	3.81	9.57
238	24.8	34	4.93	21.4
238	37.1	48	6.03	35.8
80	7.3	23	1.20	1.18
80	9.0	19	0.99	0.97
80	10.2	15	0.82	0.91
49	9.0	14	1.88	2.22
49	6.0	10	1.53	1.21
49	4.0	6.9	1.25	0.65
49	9.0	17.1	1.88	2.25
49	6.0	12.6	1.53	1.22
49	4.0	9.2	1.25	0.66
49	9.0	13.5	1.49	1.78
49	6.0	10.0	1.21	0.96
49	4.0	7.2	0.99	0.52
49	9.0	10.5	1.15	1.38
49	6.0	7.7	0.94	0.74
49	4.0	5.6	0.77	0.40
49	9.0	14.2	1.51	1.55
49	6.0	10.8	0.94	0.82
49	4.0	8.1	0.77	0.44
49	9.0	16.7	1.15	1.65
49	6.0	12.8	0.94	0.87
49	4.0	9.8	0.77	0.47
49	9.0	12.9	0.73	1.16
49	6.0	10.0	0.59	0.63
49	4.0	7.5	0.49	0.34
132	9.0	13.9	1.88	2.22
132	6.0	10.0	1.53	1.21
132	4.0	6.9	1.25	0.65
132	9.0	17.1	1.88	2.25
132	6.0	12.9	1.53	1.22
132	4.0	9.2	1.25	0.66
132	9.0	13.5	1.49	1.78
132	6.0	10.0	1.21	0.96
132	4.0	7.2	0.99	0.52

132	9.0	10.5	1.15	1.38
132	6.0	7.7	0.94	0.74
132	4.0	5.6	0.77	0.40
132	9.0	14.2	1.51	1.55
132	6.0	10.8	0.94	0.82
132	4.0	8.1	0.77	0.44
132	9.0	16.7	1.15	1.65
132	6.0	12.8	0.94	0.87
132	4.0	9.8	0.77	0.47
132	9.0	12.9	0.73	1.16
132	6.0	10.0	0.59	0.63
132	4.0	7.5	0.49	0.34
182	9.0	13.9	1.88	2.22
182	6.0	10.0	1.53	1.21
182	4.0	6.9	1.25	0.65
182	9.0	17.1	1.88	2.25
182	6.0	12.6	1.53	1.22
182	4.0	9.2	1.25	0.66
182	9.0	13.5	1.49	1.78
182	6.0	10.0	1.21	0.96
182	4.0	7.2	0.99	0.52
182	9.0	10.5	1.15	1.38
182	6.0	7.7	0.94	0.74
182	4.0	5.6	0.77	0.40
182	9.0	14.2	1.51	1.55
182	6.0	10.8	0.94	0.82
182	4.0	8.1	0.77	0.44
182	9.0	16.67	1.15	1.65
182	6.0	12.8	0.94	0.87

Tabella 5.1: Prove di laboratorio: valori sperimentali di $\overline{D_y^T}$.

	River	b [m]	Q [m ³ /s]	Y [m]	U [m/s]	u_* [cm/s]	K_y [cm ² /s]	$\frac{K_y}{u_* Y}$
	<i>Straight</i>							
1	Atrisco	18.3	7.4	0.68	0.63	6.3	102	0.24
1	Atrisco	18.3	7.4	0.67	0.66	6.1	102	0.25
1	Atrisco	18.3	7.4	0.67	0.67	6.2	93	0.22
1	Bernardo	20	17.8	0.70	1.25	6.2	130	0.30
1	South	18.3	1.6	0.37	0.24	4.0	140	0.95
1	South	18.3	1.5	0.44	0.18	4.0	47	0.26
2	Athabasca	373	766	2.20	0.95	5.6	930	0.76
	<i>Ice covered</i>							
3	Athabasca	252	240	1.9	0.49	5.2	410	0.42

	River	b [m]	Q [m ³ /s]	Y [m]	U [m/s]	u_* [cm/s]	K_y [cm ² /s]	$\frac{K_y}{u_* Y}$
3	Beaver	38.7	6.5	0.61	0.28	3.5	200	0.94
3	Athabasca	276	105	0.96	0.40	5.4	100	0.19
4	Slave	36	—	2.0	0.37	4.3	105	0.12
<i>Bends</i>								
5	Missouri	201	623	3.06	1.01	7.9	3100	1.27
5	Missouri	206	1063	4.11	1.26	9.2	4350	1.15
5	Missouri	210	1700	5.49	1.47	10.6	3420	0.59
5	Missouri	195	623	3.04	1.05	7.9	4200	1.74
5	Missouri	201	1063	4.13	1.28	9.2	2550	0.67
5	Missouri	204	1700	5.54	1.50	10.7	1650	0.28
6	Missouri	240		4.0	1.98	8.5	11110	3.40
3	Beaver	42.7	20.5	0.96	0.50	4.5	430	1.01
7	Isere	60-70	250	2.25	1.40	—	—	0.5-1.6
7	Isere	145-160	400	1.7-2.0	1.60	—	—	2-2.5
8	Mississippi	178	92-120	1.0	0.52-0.67	8.1	1000	1.2
<i>Meandering</i>								
9	Columbia	305	—	3.05	1.35	8.8	1860	0.72
2	Missouri	183	966	2.74	1.74	7.3	1010	0.50
10	Missouri	183	966	2.74	1.75	7.4	1210	0.60
5	Missouri	214	1020	2.94	1.58	7.4	1600	0.74
5	Missouri	214	992	2.94	1.58	7.4	1500	0.70
5	Missouri	214	949	2.94	1.58	7.4	870	0.40
5	Missouri	192	524	1.99	1.39	6.10	1200	0.97
11	Potomac	350	—	0.73-1.74	0.29-0.58	3.3-5.1	—	0.52-0.65
12	Grand	59.2	10.6	0.51	0.35	6.9	90	0.26
13	Grand	59.1	12.5	0.59	0.39	—	72	—
14	Waal	266	1028	4.70	0.82	5.7	770-1550	0.29-0.58
14	Waal	266	1480	5.25	1.06	7.4	1390	0.36
14	IJssel	69.5	270	4.0	0.97	7.6	1550	0.51
4	Slave	42	—	2.3	0.59	4.6	402	0.38
3	Athabasca	320	556	2.05	0.86	7.9	670	0.41
12	Saskatchewan	213	—	1.55	0.58	8.0	310	0.25
12	Bow	104	—	1.0	1.05	13.9	850	0.61
15	Danube	415	1030	2.9	0.87	5.2	380	0.25
16	Danube	418	1050	2.9	0.87	3.7	140	0.13
16	Danube	475	1900	4.2	0.95	6.0	320	0.13
16	Kris-Raba	10	8.0	1.06	0.80	6.90	110	0.16
17	Rea	5.1	0.30	0.11	0.47	6.5	14	0.16
17	Rea	6.6	0.62	0.17	0.70	7.2	32	0.22
17	Rea	6.7	0.75	0.18	0.73	7.5	38	0.24
18	Orinoco	1340	43600	1.79	1.83	—	8100	—
18	Orinoco	3580	47000	1.19	1.11	—	31000	—
18	Orinoco	2560	59600	1.65	1.41	—	15500	—

	River	b [m]	Q [m ³ /s]	Y [m]	U [m/s]	u_* [cm/s]	K_y [cm ² /s]	$\frac{K_y}{u_* Y}$
19	Waikato	85	150	2.5	0.70	5.7	640	0.45
20	Waikato	210	232	2.2	0.63	4.0	950	1.10
20	Waikato	300	232	1.7	0.63	4.6	100	0.31
11	Mackenzie	1240	—	6.7	1.77	15.2	6700	0.66

Tabella 5.2: Misure di campo: 1=Fischer(1973), 2=Yotsukura and Cobb(1972), 3=Beltaos(1980), 4=Engmann and Kellerhals(1974), 5=Sayre(1979), 6= Sayre and Yeh(1973), 7=Holly and Nerat(1984), 8=Demetracopoulos and Stefan(1983), 9=Glover(1964), 10=Yotsukura et al.(1970), 11=Fischer et al.(1979), 12=Lau and Krishnappan(1981), 13=Gowda(1983), 14=Holley and Abraham(1973), 15=Somlyody(1982), 16=Somlyody(1977), 17=Cotton and West(1980), 18=Stallard(1987), 19=Rutherford et al.(1980), 20=Rutherford and Williams(1992).

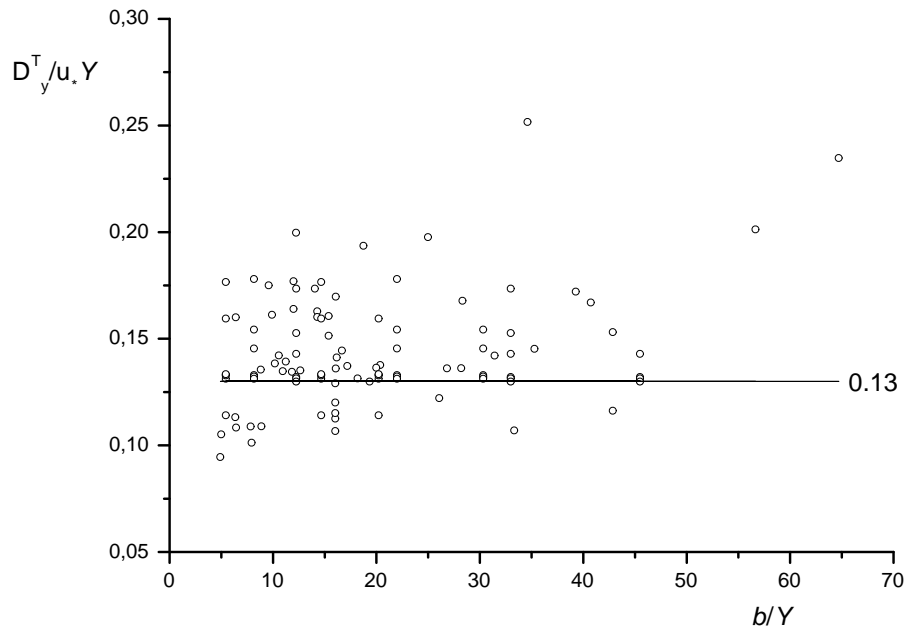


Figura 5.1: Rilievi sperimentali di $\overline{\mathcal{D}_y^T}$, coefficiente di diffusione turbolenta trasversale media in canali rettilinei a sezione rettangolare di laboratorio (vedi anche la Tabella 5.1) (da Rutherford, 1994).

Il ruolo relativo della diffusione turbolenta e dei moti secondari nel determinare il miscelamento trasversale è stato esaminato da Webel & Schatzmann (1984) attraverso esperienze di laboratorio eseguite variando il coefficiente di resistenza del moto. I risultati rivelano che $(\overline{\mathcal{D}_y^T}/Yu_*)$ risulta dipendente dal coefficiente di resistenza nel regime turbolento di parete liscia mentre la dipendenza cessa nel regime scabro in cui il rapporto precedente assume un valore

pari a 0.13. Tale risultato è interpretato come dimostrazione della prevalenza del ruolo della diffusione turbolenta. Lau & Krishnappan (1977) ritengono che, sulla base dei rilievi sperimentali esistenti, possa evidenziarsi al contrario un significativo ruolo dei moti secondari attraverso una dipendenza di $(\overline{\mathcal{D}_y^T}/bu_*)$ da b/Y . Tale conclusione sembra tuttavia fondata su un'errata adimensionalizzazione di $\overline{\mathcal{D}_y^T}$, come rilevato da Rutherford (1994), poiché b compare sia sulle ascisse che sulle ordinate della correlazione proposta da Lau & Krishnappan (1977). Tecnicamente è ragionevole assumere

$$\frac{\overline{\mathcal{D}_y^T}}{Yu_*} = 0.13 \div 0.15, \quad \frac{\overline{\mathcal{D}_y^T}}{Yu_*} \simeq (2 \div 2.2) \frac{\overline{\mathcal{D}_z^T}}{Yu_*} \quad (5.16)$$

Assai poco è noto sulla dipendenza spaziale di \mathcal{D}_y^T dalle variabili z e da y . Risultati di Okoye (1970) e Nokes (1986) suggeriscono che \mathcal{D}_y^T dipende dalla variabile verticale z secondo un andamento logaritmico analogo a quello della velocità longitudinale ma non vi è supporto teorico a tali risultati.

5.3 Stima del coefficiente di dispersione trasversale

Gli alvei naturali differiscono dai canali a sezione rettangolare per effetto di tre principali cause:

- i) la sezione presenta variazioni trasversali di profondità;
- ii) l'asse della corrente è usualmente curvilineo;
- iii) la larghezza (reale o efficace) della sezione varia in direzione longitudinale per effetto di irregolarità delle sponde o talvolta per la presenza di opere (pennelli trasversali) utilizzate per il controllo dell'erosione spondale.

Ciascuna di queste cause induce apprezzabili moti secondari che contribuiscono ad incrementare il valore del coefficiente di dispersione trasversale.

5.3.1 Effetto di variazioni di profondità nella sezione

L'effetto delle variazioni di profondità nella sezione è stato analizzato da Holley, Siemons & Abraham (1972). Tali Autori hanno risolto numericamente la (5.15) con $\partial/\partial t \equiv 0$ e $V \equiv 0$ assumendo un valore costante della diffusività. Il confronto è stato effettuato su una sezione trapezia e su una sezione rettangolare, a parità di area della sezione e larghezza della superficie libera. La velocità \bar{U} (mediata sulla profondità) è stata assunta costante nella direzione trasversale. I risultati hanno mostrato apprezzabili differenze fra le distribuzioni di concentrazione fino a distanze dalla sezione di immissione del tracciante dell'ordine di $20 \div 25$ volte la larghezza del canale. Tali differenze possono essere apprezzate osservando che, se la sezione fosse rettangolare, le distribuzioni di concentrazione \bar{C} calcolate dagli Autori si otterrebbero utilizzando valori di $\overline{\mathcal{D}_y^T}$ superiori del 200% rispetto ai valori assunti nel calcolo. Questi risultati suggeriscono l'importanza del ruolo delle variazioni di profondità nella sezione, ma non forniscono indicazioni quantitative generalizzabili. Tuttavia i dati delle misure di

campo riportati nella Tabella 5.2 mostrano che in effetti per *alvei rettilinei* è ragionevole porre

$$0.15 < \frac{\overline{\mathcal{D}_y^T} + K_y}{u_* Y} < 0.30 \quad (5.17)$$

Questo risultato è stato suggerito da Fischer & al. (1979), Cotton & West (1980), Holly (1985) e più recentemente Rutherford (1994).

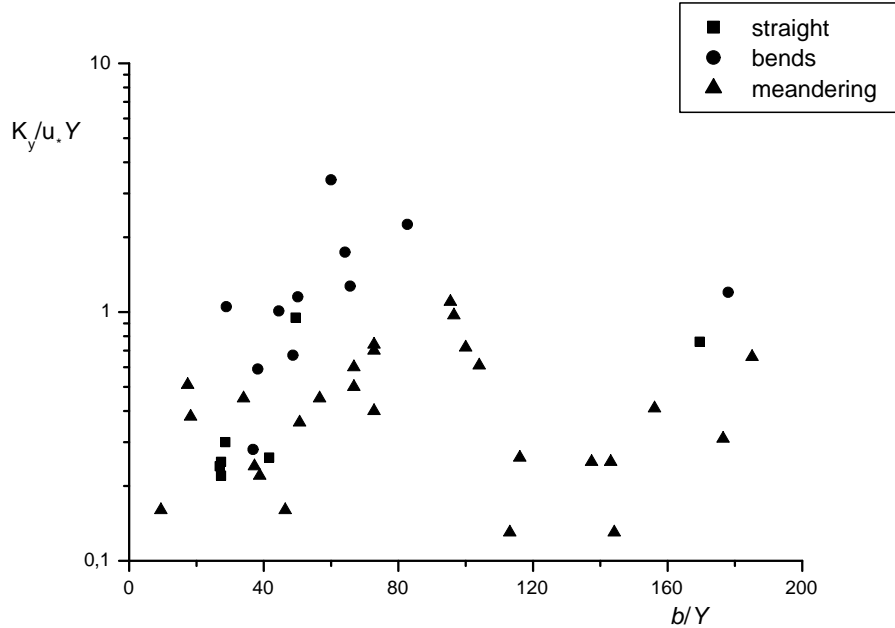


Figura 5.2: Valori del coefficiente K_y di dispersione trasversale rilevati in corsi d'acqua rettilinei e meandriiformi (da Rutherford, 1994).

5.3.2 Effetto di pennelli trasversali

L'effetto di opere trasversali è stato analizzato da Holley & Abraham (1973) per mezzo di esperienze di laboratorio. Il valore di $\overline{\mathcal{D}_y^T}/(u_* Y)$ rilevato cade nell'intervallo $0.3 \div 0.7$, valore significativamente superiori al caso di alvei rettilinei in assenza di opere trasversali. È presumibile che l'intensità di tale effetto dipenda da parametri adimensionali geometrici che caratterizzano le dimensioni e la spaziatura delle opere trasversali. Non è tuttavia disponibile una serie sistematica di esperienze che consenta di pervenire ad indicazioni generali e quantitativamente significative.

5.3.3 Effetto della curvatura della corrente

Gli effetti della curvatura sono stati indagati sperimentalmente sia su modelli di laboratorio sia attraverso misure di campo da numerosi Autori.

La curvatura dell'asse della corrente influenza il processo di miscelamento in due modi.

- i) Le azioni centrifughe cui le particelle sono soggette inducono un moto secondario diretto verso l'esterno della curva in prossimità della superficie libera e verso l'interno della curva in prossimità del fondo. Tale moto intensifica naturalmente la rapidità del processo di miscelamento trasversale.
- ii) Se l'alveo è erodibile il moto secondario induce una deformazione del letto del corso d'acqua, cioè variazioni longitudinali e trasversali di profondità cui è associata per continuità la formazione di moti secondari.

L'effetto i) ha ricevuto qualche attenzione anche dal punto di vista teorico da Fischer (1969) il quale ha applicato un procedimento alla Taylor su un canale a sezione rettangolare molto larga con curvatura costante. Il moto secondario pienamente sviluppato, cioè a valle del transitorio iniziale, in tali condizioni è stato studiato per la prima volta da Rozovskij (1957) e successivamente da Engelund (1974) e molti altri.

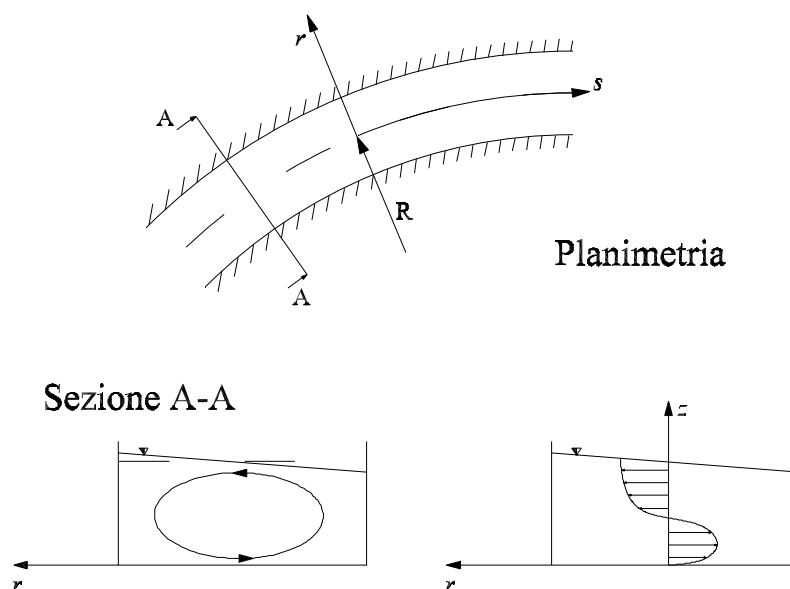


Figura 5.3: Moto secondario indotto dalla curvatura in un canale a pelo libero.

La necessità dell'insorgere di un moto secondario emerge da una semplice considerazione fisica: la forza centrifuga cui sono soggette particelle, è proporzionale a $u^2(z)$, e quindi cresce lungo la verticale dal fondo alla superficie libera, perchè il profilo di velocità, che tipicamente si realizza in una corrente a superficie libera, è logaritmico lungo la coordinata verticale (equazione 4.21). Questo effetto non può essere bilanciato solamente dal gradiente di pressione (o di carico piezometrico) trasversale che risulta uniformemente distribuito lungo la verticale. Il bilancio richiede l'esistenza di un moto secondario e di un flusso di tensioni trasversali da esso indotto. Rozovskij (1957) ed Engelund (1974) mostrano che esiste una soluzione pienamente sviluppata (tale cioè che $\partial u / \partial s = \partial v / \partial s = 0$, essendo s l'ascissa curvilinea disposta lungo l'asse della

curva e r la coordinata radiale) con v indipendente da r per la quale risulta

$$\int_0^Y v dz = 0 \quad (5.18)$$

Tale soluzione è significativa ovunque tranne che nelle immediate vicinanze delle pareti laterali dove deve soddisfare la condizione di aderenza. Utilizzando tale soluzione Fischer (1969) ha mostrato che l'effetto del moto secondario è interpretabile in termini di un *coefficiente di dispersione trasversale* che può essere posto nella forma

$$\frac{K_y}{u_* Y} = \frac{m_1}{\kappa^5} \left(\frac{U}{u_*} \right)^2 \left(\frac{Y}{R} \right)^2 \quad (5.19)$$

con R raggio di curvatura dell'asse, u_* , Y e U valori medi nella sezione, κ costante di V. Karman e m_1 costante di proporzionalità che Fischer (1969) ha stimato prossima a 0.25. Naturalmente tale stima dell'effetto della curvatura vale nel caso ideale di canale a curvatura costante. Nel caso di alvei meandriiformi si modifica anzitutto la struttura del moto secondario indotto dalla curvatura, ora variabile nella direzione longitudinale. Inoltre un ulteriore contributo alla componente trasversale di velocità nasce dalla significativa deformazione del letto del corso d'acqua che induce flussi di massa in direzione trasversale per bilanciare variazioni longitudinali indotte dalla non uniforme topografia. Ciò emerge dall'equazione di continuità nella forma mediata sulla profondità che, per un moto stazionario, assume la forma

$$\frac{\partial(\bar{U}Y)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V}Y)}{\partial y} = 0 \quad (5.20)$$

Dalla (5.20) segue:

$$\bar{V}(y) = -\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{U} Y d\zeta \quad (5.21)$$

Le conoscenze relative al campo di moto e topografia del fondo in alvei meandriiformi non sono state ancora utilizzate per una quantificazione degli effetti che essi inducono sul processo di miscelamento. Le considerazioni precedenti giustificano tuttavia la variabilità dei valori di $\overline{\mathcal{D}_y^T}$ osservati in natura rispetto ai valori di laboratorio.

5.3.4 Stime conclusive

Concludendo, è tecnicamente ragionevole operare le seguenti stime del coefficiente di dispersione trasversale:

i) Alvei rettilinei pressoché uniformi

$$(0.1 - 0.15) < \frac{\overline{\mathcal{D}_y^T} + K_y}{Y u_*} < (0.2 - 0.3) \quad (5.22)$$

Tale stima è stata proposta da Fischer (1979), Cotton & West (1980), Holly (1985), Rutherford (1994).

ii) Alvei rettilinei con opere trasversali di sponda

$$0.3 < \frac{\overline{\mathcal{D}_y^T} + K_y}{Y u_*} < 0.4 \quad (5.23)$$

come suggerito dai risultati di Holley & Abraham (1973).

iii) Alvei debolmente meandriformi

$$(0.3 - 0.4) < \frac{(\overline{\mathcal{D}_y^T} + K_y)}{Y u_*} < (0.8 - 0.9) \quad (5.24)$$

iv) Alvei fortemente meandriformi I risultati teorici di Fischer (1969) cioè la 5.19 sottostimano drasticamente il valore di K_y per i corsi d'acqua naturali. In particolare, per il Missouri, Yotsukura & Sayre (1976) e successivamente Sayre (1979) hanno ottenuto valori esprimibili nella forma:

$$\frac{K_y}{u_* Y} = (0.3 \div 0.9) \left(\frac{\bar{U}}{u_*} \right)^2 \left(\frac{b}{R} \right)^2 \quad (5.25)$$

dove il coefficiente di proporzionalità scendeva da 0.9 a 0.3 al crescere della portata da 565 a 1700 m^3/s .

Le stime (5.19) e (5.25) debbono dunque essere utilizzate con grande cautela; recenti indagini suggeriscono infatti come il processo di diluizione in alvei meandriformi sia influenzato dalla lunghezza d'onda dei meandri stessi.

5.3.5 Variazioni spaziali di K_y

In alvei rettilinei è ragionevole assumere che la relazione (5.22) valga anche localmente, donde, essendo $u_* = \sqrt{g i_f Y}$ in un moto uniforme segue

$$K_y = (0.1 \div 0.3) \sqrt{g i_f} Y^{3/2} \quad (5.26)$$

con i_f pendenza del fondo. Non esistono tuttavia significative verifiche sperimentali della (5.26). In alvei meandriformi essendo il moto longitudinale dipendente dalla coordinata trasversale, tale dipendenza è da attendersi anche per il coefficiente di dispersione longitudinale. Negli alvei naturali meandriformi ci si attende inoltre una variazione di K_y anche nella direzione longitudinale da cui dipende il moto secondario. Ciò è stato confermato dalle osservazioni di laboratorio di Chang (1971) che ha rilevato valori di K_y crescenti da 0.5 a 2 volte il valor medio lungo lo sviluppo del meandro. Per i corsi d'acqua naturali Sayre (1973, 1979) sul Missouri, Yotsukura & Cobb (1972) sul Missouri e sul South e Lau & Krishnappan (1981) sul Grand River (Ontario) hanno rilevato variazioni longitudinali di K_y da 2 a 6 volte il valor medio.

5.4 Calcolo della distribuzione di concentrazione nel campo intermedio: il modello a coefficienti costanti per canali rettilinei a sezione rettangolare

Posto che la sorgente di tracciante sia stazionaria e trascurando il termine diffusivo longitudinale per un canale rettilineo a sezione rettangolare la (5.15) diventa:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \left(K_y + \bar{D}_y^T \right) \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} \quad (5.27)$$

avendo assunto costanti sia K_y che \bar{D}_y^T . La (5.27) va risolta con le condizioni al contorno

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, b) \quad (5.28)$$

$$\bar{C}(y) = \bar{C}_0(y) \quad (x = x_0) \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (5.30)$$

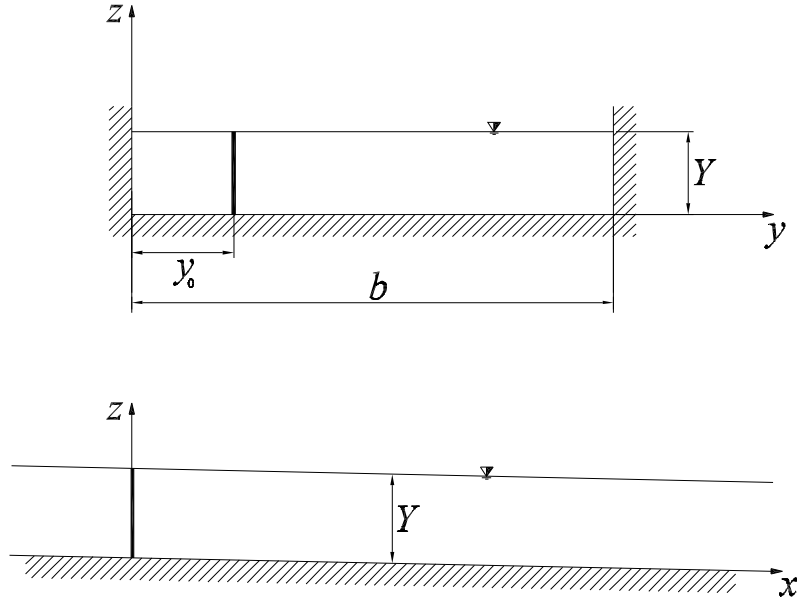


Figura 5.4: Schema di sorgente lineare in canale a sezione rettangolare.

Consideriamo ora il caso in cui la distribuzione iniziale di concentrazione possa essere considerata come dovuta ad una sorgente lineare distribuita lungo la verticale in $y = y_0$ con portata massica \dot{M} . Tale sorgente investita da un moto uniforme con velocità \bar{U} uniformemente distribuita in direzione z darebbe luogo ad una distribuzione di concentrazione del tipo

$$\bar{C} = \frac{\dot{M}}{Y \sqrt{4\pi \bar{D}_y^T \bar{U} x}} \exp \left(-\frac{(y - y_0)^2 \bar{U}}{4 \bar{D}_y^T x} \right) \quad (5.31)$$

in un canale infinitamente largo ed avendo incluso in $\overline{\mathcal{D}}_y^T$ anche il contributo di K_y . La larghezza finita del canale può essere messa in conto ancora utilizzando il metodo delle immagini e conduce alla soluzione:

$$\bar{C}^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp -\frac{(y^* - y_0^* - 2n)^2}{4x^*} + \exp -\frac{(y^* + y_0^* - 2n)^2}{4x^*} \right] \quad (5.32)$$

avendo definito le variabili adimensionali:

$$\bar{C}^* = \frac{\bar{C}}{(\dot{M}/\bar{U}Yb)} \quad x^* = \frac{x}{\bar{U}b^2/\overline{\mathcal{D}}_y^T} \quad y^* = \frac{y}{b}$$

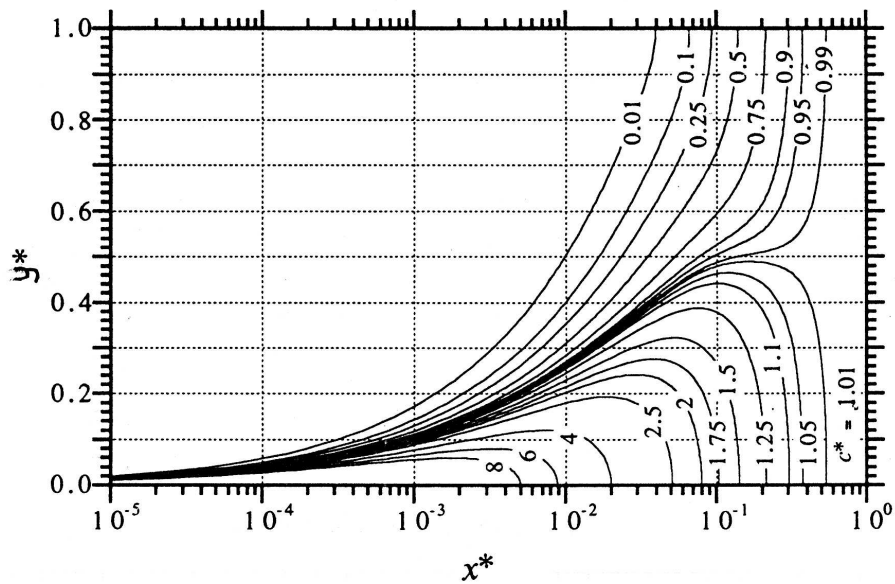


Figura 5.5: Linee isoconcentrazione adimensionale ($C^* = \text{costante}$) a valle di una sorgente lineare verticale posizionata in $y_0^* = 0$ ottenute sulla base di un modello a coefficienti costanti.

Le Figure 4.2 e 4.3 possono essere utilizzate, sostituendo z^* con y^* per stimare la distanza longitudinale necessaria per il miscelamento trasversale. Le Figure 5.5, 5.6 e 5.7 sono analoghe alle precedenti, ma x^* è in scala logaritmica. Utilizzando il criterio di miscelamento trasversale

$$P_m = \frac{\bar{C}_{\min}}{\bar{C}_{\max}} = 0.98 \quad (5.33)$$

si trova

$$L_y = \begin{pmatrix} 0.134 \\ 0.536 \end{pmatrix} \frac{\bar{U}b^2}{\overline{\mathcal{D}}_y^T} \quad \text{per } y_0^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

con L_z distanza necessaria per il mescolamento trasversale così definito. La Figura 5.8 (o analogamente la 4.4) fornisce l'andamento del parametro P_m al variare di x^* e y_0^* .

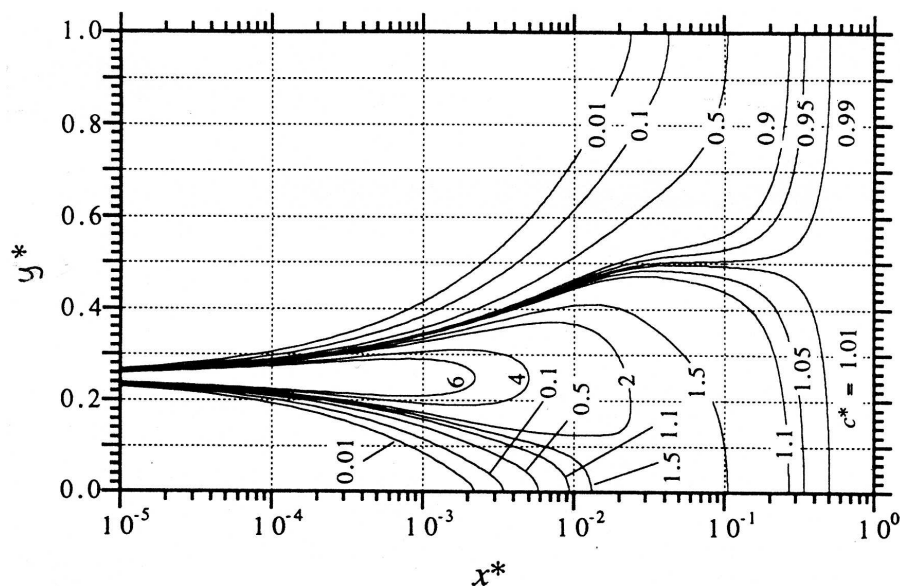


Figura 5.6: Linee isoconcentrazione adimensionale ($C^* = \text{costante}$) a valle di una sorgente lineare verticale posizionata in $y_0^* = 0.25$ ottenute sulla base di un modello a coefficienti costanti.

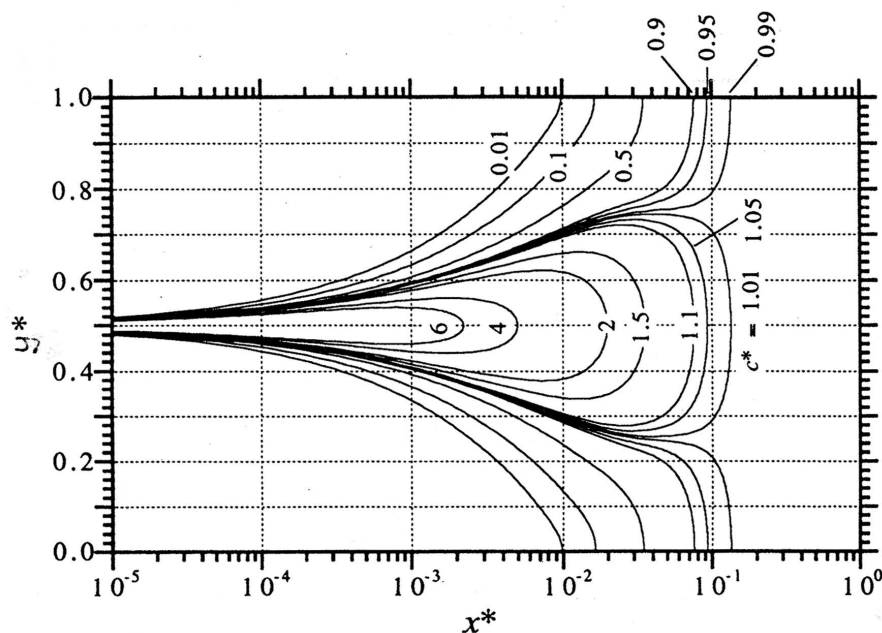


Figura 5.7: Linee isoconcentrazione adimensionale ($C^* = \text{costante}$) a valle di una sorgente lineare verticale posizionata in $y_0^* = 0.5$ ottenute sulla base di un modello a coefficienti costanti.

Il lettore osservi che la (5.32) suggerisce che la concentrazione nella regione prossima alla sorgente risulta nel caso di immissione laterale doppia rispetto al caso di immissione centrale. Si ha, infatti in prossimità della sorgente, per

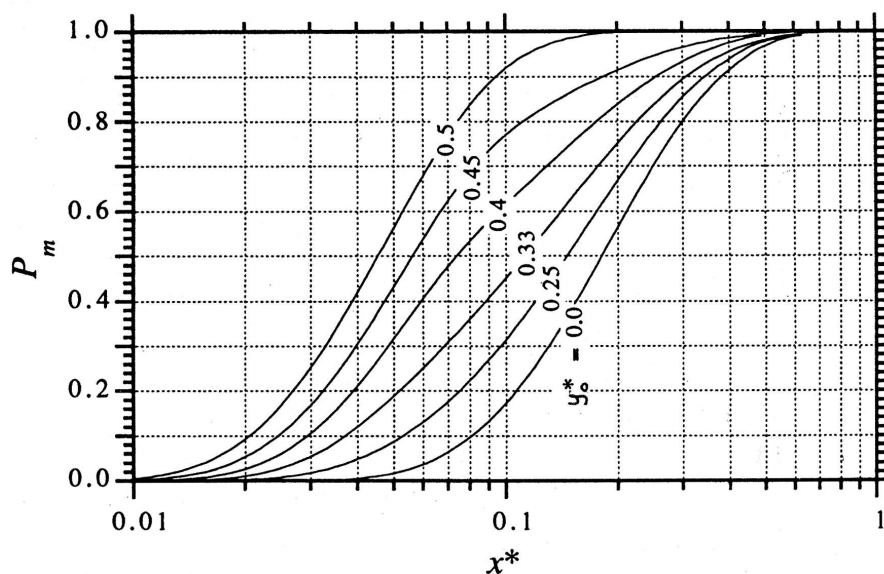


Figura 5.8: Andamento del grado di mescolamento trasversale per una sorgente lineare verticale nell'ambito del modello a coefficienti costanti al variare della posizione trasversale della sorgente (y_0^*) e della distanza (x^*).

$x^* \ll 1$:

$$\bar{C}^*|_{y^*=y_0^*=0} \sim \frac{2}{\sqrt{4\pi x^*}} \quad (5.35)$$

$$\bar{C}^*|_{y^*=y_0^*=0.5} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \left(1 + \exp\left(-\frac{1}{4x^*}\right) \right) \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \quad (5.36)$$

Naturalmente, col progredire del miscelamento trasversale, tali differenze tendono ad attenuarsi fino a scomparire.

Si noti inoltre che se si utilizzano i risultati delle misure di campo riportati nella Tabella 5.2 per la valutazione del rapporto L_y/b si trovano valori di tale rapporto variabili fra 100 e 300.

5.4.1 Qualche verifica sperimentale

La differenza di comportamento nei due casi è confermata dalle esperienze effettuate da Fischer (1967) su un canale per irrigazione presso Albuquerque (New Mexico). Il canale è a sezione pressoché rettangolare, rettilineo con profondità di circa 0.6 m. L'esperimento consiste nell'immissione di un colorante, in un primo caso in asse e in prossimità della superficie libera, in un secondo caso in prossimità della sponda laterale.

Le Figura 5.9 mostra la distribuzione di concentrazione relativa a due esperimenti; essa conferma le previsioni teoriche descritte in precedenza.

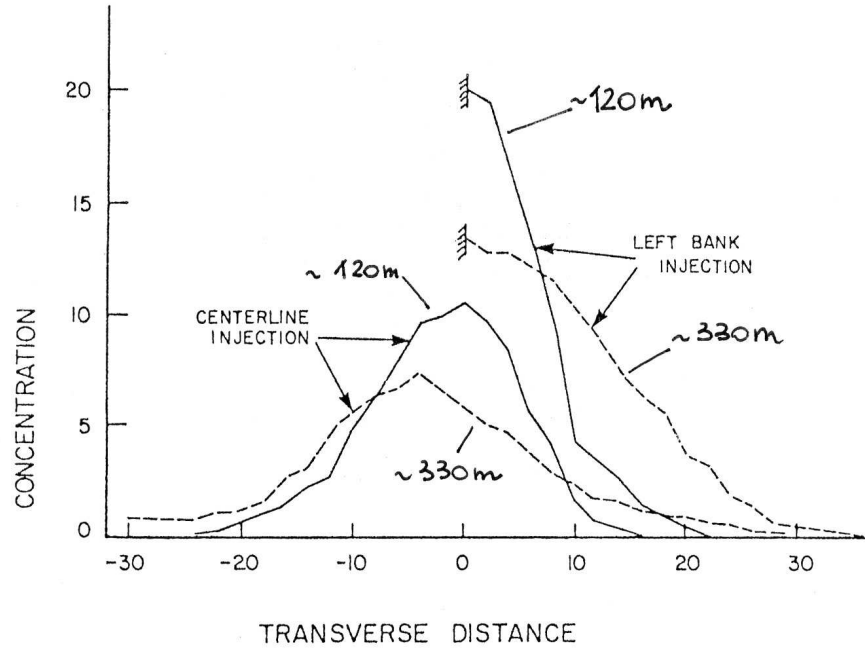


Figura 5.9: Concentrazione di tracciante rilevata da Fischer (1967) in due casi, di immissione laterale ed in asse. La linea continua rappresenta la concentrazione a 400 piedi di distanza dalla sezione di immissione del tracciante, mentre la linea tratteggiata la concentrazione a distanza di 1000 piedi.

5.5 Il caso in cui lo scarico avviene attraverso un diffusore di lunghezza finita

Il calcolo discusso in precedenza va modificato quando la distribuzione iniziale di concentrazione, che si realizza quando il mescolamento è completo sulla verticale (al termine del campo vicino) non può essere trattata come una sorgente lineare; ciò accade se la quantità di moto e l'azione di galleggiamento dello scarico sono tali da dar luogo ad un pennacchio che occupa una porzione consistente della sezione. L'estensione della trattazione precedente a questo caso è immediata. Sia $\dot{m}(y_0^*)$ la distribuzione trasversale iniziale della portata massica unitaria di effluente supposta miscelato verticalmente. È sufficiente in tal caso sovrapporre le soluzioni relative ad una distribuzione continua di sorgenti lineari. Dunque si trova:

$$\bar{C}^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi x_*}} \int_0^b \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\dot{m}(y_0^*)}{\dot{M}} \left\{ \exp \left[-\frac{(y^* - y_0^* - 2n)^2}{4x_*} \right] + \exp \left[-\frac{(y^* + y_0^* - 2n)^2}{4x_*} \right] \right\} dy_0^* \quad (5.37)$$

essendo \dot{M} la portata massica totale di effluente. Tale procedimento è indicato in particolare nel caso di scarichi di centrali termoelettriche. La (5.37) va in generale risolta attraverso procedimenti numerici.

5.6 Modello a tubi di flusso per il processo di miscelamento trasversale

5.6.1 Il procedimento

La trattazione precedente risulta fondata sullo schema di uniforme distribuzione trasversale della velocità nella sezione. Tuttavia non-uniformità esistono sempre e sono associate sia ai processi di erosione che tendono a produrre sezioni più profonde nella regione centrale e meno profonde in prossimità delle sponde, sia alla presenza di opere trasversali, sia infine all'effetto della curvatura. In generale non sono a disposizione del progettista informazioni dettagliate sull'evoluzione del fondo nel tronco esaminato. In tal caso lo schema discusso al punto precedente è l'unico utilizzabile. Ove siano disponibili adeguate informazioni è possibile far riferimento ad un procedimento proposto da Yotsukura & Cobb (1972) e Yotsukura & Sayre (1976). Il procedimento, che si riferisce al caso in cui sia la portata di traccianti immessa che il moto sono stazionari, è fondato su una semplice trasformazione operata sull'equazione di diffusione mediata sulla verticale che qui si scrive:

$$\bar{U}Y \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(Y \overline{\mathcal{D}_y^T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \quad (5.38)$$

avendo trascurato la diffusione turbolenta longitudinale e le componenti trasversali del moto medio. Si introduce la nozione di *portata cumulata* nella forma

$$q(y) = \int_0^y \bar{U}Y dz \quad (5.39)$$

Segue

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial q} \frac{dq}{dy} = \bar{U}Y \frac{\partial}{\partial q} \quad (5.40)$$

Utilizzando la (5.40) la (5.38) si trasforma nella:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\bar{U}Y^2 \overline{\mathcal{D}_y^T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial q} \right) \quad (5.41)$$

Se a questo punto si tratta la quantità $D_e = \bar{U}Y^2 \overline{\mathcal{D}_y^T}$ come una sorta di diffusività equivalente costante la (5.41) suggerisce un comportamento diffusivo della soluzione nel sistema di coordinate (x, q) . La validità dell'approssimazione

$$D_e = \bar{U}Y^2 \overline{\mathcal{D}_y^T} = \text{costante} \quad (5.42)$$

è naturalmente solo approssimata.

In generale si può considerare un valore mediato sulla sezione \widetilde{D}_e :

$$\widetilde{D}_e = \frac{1}{b} \int_0^b D_e dy = \psi \bar{U}Y^2 \widetilde{\mathcal{D}_y^T} \quad (5.43)$$

con ψ coefficiente di forma e \bar{U} , Y e $\widetilde{\mathcal{D}_y^T}$ velocità media, profondità media e diffusività media sulla sezione rispettivamente. Il coefficiente ψ dipende solamente

dalla geometria della sezione

$$\psi = \frac{1}{b} \int_o^b \frac{\bar{U}}{\bar{U}} \left(\frac{Y}{\bar{Y}} \right)^2 \frac{\bar{\mathcal{D}}_y^T}{\bar{\mathcal{D}}_y^T} dy \quad (5.44)$$

e varia nell'intervallo $1 \div 3.6$ (Sayre, 1979; Beltaos, 1980).

La (5.41) diventa:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \widetilde{D}_e \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial q^2} \quad (5.45)$$

che va risolta con le condizioni al contorno

$$\widetilde{D}_e \frac{\partial \bar{C}}{\partial q} = 0 \quad (q = 0, Q) \quad (5.46)$$

Si noti il significato fisico della trasformazione (5.39): lo stesso valore di q corrisponde a valori di y che possono variare significativamente da sezione a sezione in dipendenza della distribuzione trasversale di velocità e profondità. In particolare in un alveo meandriforme si ha una continua oscillazione trasversale della distribuzione di velocità che viene 'rettificata' attraverso la (5.39). Ciò è stato confermato dai rilievi di Yotsukura & al. (1970) sul fiume Missouri nei pressi di Blair (Nebraska). In questo caso il picco della distribuzione di concentrazione si va spostando da una sponda all'altra mentre se gli stessi dati sono rappresentati in funzione di q il picco si mantiene in corrispondenza della posizione trasversale in cui è avvenuta l'immissione e va poi decadendo nella direzione longitudinale come una gaussiana. La distribuzione relativa a un alveo meandriforme, se rappresentata in funzione di q risulta non distinguibile da quella relativa ad alvei rettilinei, in altre parole il metodo della portata cumulata consente di trattare un alveo meandriforme come se fosse un alveo rettilineo. Tale trattazione va considerata di validità solo approssimata.

5.6.2 Soluzione a valle di una sorgente lineare verticale

La soluzione relativa al caso in una sorgente distribuita lineare verticale (che descrive l'avvenuto miscelamento verticale) localizzata in $x = 0$, $q = q_0$ si può porre, assumendo la costanza dei coefficienti lungo la coordinata longitudinale x , nella forma:

$$\bar{C}^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi x^*}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(q^* - q_o^* - 2n)^2}{4x^*} \right] + \exp \left[-\frac{(q^* + q_o^* - 2n)^2}{4x^*} \right] \right\} \quad (5.47)$$

e i diagrammi delle Figure 4.2-4.3 (o 5.5-5.7) possono essere utilizzati sostituendo z^* (o y^*) con q^* e z_0^* (o y_0^*) con q_0^* e notando il nuovo significato delle variabili adimensionali:

$$x^* = \frac{x \widetilde{D}_e}{Q^2} \quad \bar{C}^* = \frac{\bar{C}}{C_m} \quad q^* = \frac{q}{Q}$$

L'applicazione del procedimento al caso di alvei naturali richiede spesso una stima di \widetilde{D}_e che tenga conto della variabilità della topografia e del coefficiente

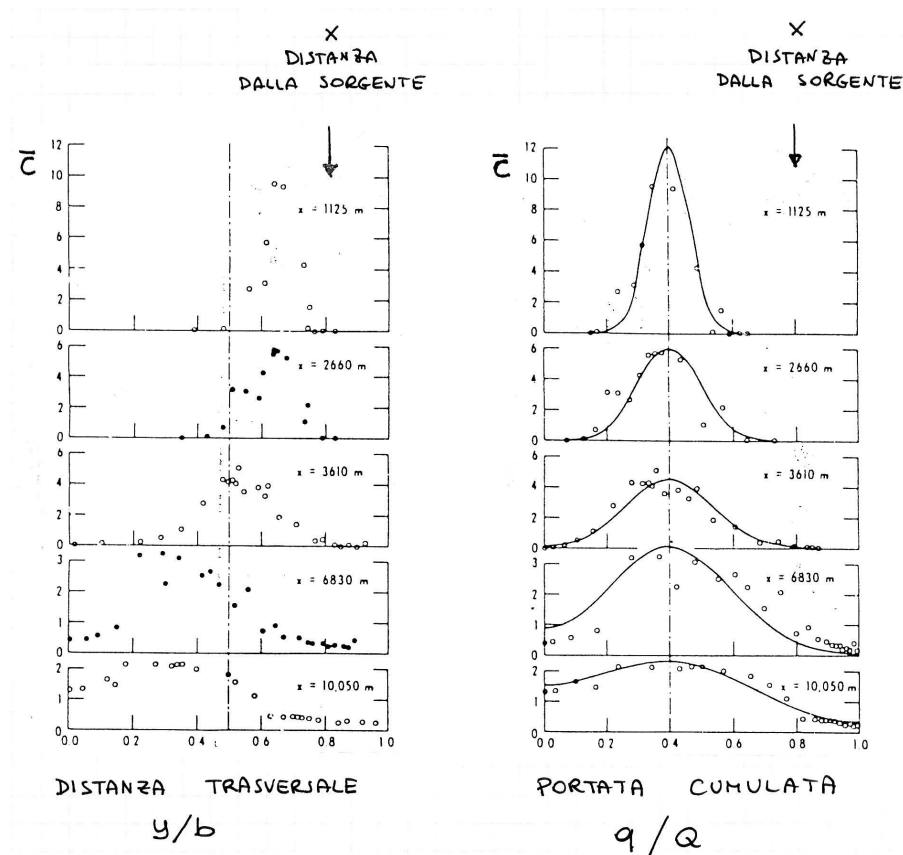


Figura 5.10: Distribuzione di concentrazione di un tracciante passivo rilevata sperimentalmente da Yotsukura & al.(1970) sul fiume Missouri. a) al variare della distanza trasversale; b) al variare della portata cumulata.

di diffusione-dispersione trasversale al variare della sezione. Si opera in tal caso una media dei valori di \widetilde{D}_e relativi alle varie sezioni, pesati sulle lunghezze dei relativi tronchi di corrente a cui si riferiscono.

Il miscelamento trasversale, definito convenzionalmente come in precedenza ($P_m = 0.98$) si realizza, nell'ambito di questo modello, a distanza L_y esprimibile nella forma

$$L_y = \begin{pmatrix} 0.134 \\ 0.536 \end{pmatrix} \frac{Q^2}{\widetilde{D}_e} \quad \text{per } q_0^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

La (5.48) conduce a stime non dissimili dalla (5.34) se non per il ruolo che il coefficiente di forma ψ svolge sulla determinazione di \widetilde{D}_e .

Capitolo 6

MISCELAMENTO LONGITUDINALE DI TRACCIANTI PASSIVI NEL CAMPO LONTANO

6.1 Introduzione

Il miscelamento nel campo lontano si realizza a partire dalla regione in cui si può ritenere completato il miscelamento trasversale del tracciante. Nel caso di una sorgente puntuale ciò avviene ad una distanza

$$\frac{L_y}{b} = \frac{(0.134 \div 0.536)}{b} \frac{Ub^2}{K_y + \overline{D_y^T}} = \frac{(0.134 \div 0.536)}{\alpha} \frac{Ub}{u^*Y}$$

ossia qualche centinaia di volte la larghezza del corso d'acqua a valle dello scarico (α può essere stimato con le considerazioni discusse al paragrafo 5.3.4). Occorre considerare due casi sostanzialmente distinti:

- scarico dell'effluente e portata del corso d'acqua risultano *stazionari*; in questo caso la concentrazione nel campo lontano è pari a C_m con:

$$C_m = \frac{\dot{M}}{Q}$$

essendo \dot{M} la portata massica di effluente e Q la portata volumetrica del corso d'acqua.

- lo scarico dell'effluente è *rapidamente variabile* (ad esempio si realizza uno scarico istantaneo): in questo caso la concentrazione, a miscelamento trasversale avvenuto, risulta variabile nella direzione longitudinale e nel tempo. Come conseguenza si ha nel campo lontano un *processo di dispersione longitudinale*.

Nella gran parte dei problemi l'immissione dell'effluente risulta sufficientemente graduale da rendere significativo il primo caso. Il secondo caso è rilevante per lo studio dell'inquinamento dei corsi d'acqua a causa di scarichi improvvisi accidentali (ad esempio dovuti al rilascio di sostanze tossiche da impianti industriali) o per analizzare il transitorio iniziale successivo all'attivazione di uno scarico.

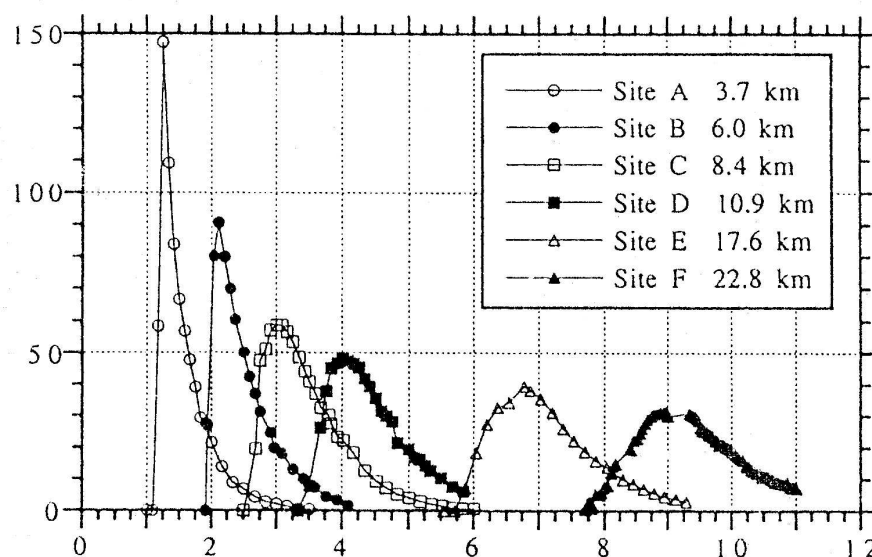


Figura 6.1: Tipico andamento temporale della concentrazione media nella sezione in sei sezioni a valle di uno scarico costituito da una sorgente distribuita trasversalmente.

6.2 Meccanismi di miscelamento longitudinale in correnti uniformi

6.2.1 Dispersione longitudinale per effetto del profilo verticale logaritmico di velocità

Questo è l'unico meccanismo che opera nel caso di una corrente turbolenta rigorosamente piana, in cui sono assenti cioè gradienti trasversali di velocità. È il caso trattato da Elder (1959) sulla scorta dell'analisi di Taylor (1954) (si veda il capitolo 3 della parte I delle dispense "Fondamenti sulla diffusione e dispersione di traccianti passivi"). Ricordiamo le conclusioni dell'analisi di Taylor: la dispersione longitudinale risulta dall'effetto combinato della continua deformazione della nuvola di inquinante per effetto della convezione longitudinale bilanciata dalla diffusione turbolenta verticale. Asintoticamente viene raggiunto un equilibrio descrivibile nella forma di un processo di tipo diffusivo per la concentrazione mediata sulla sezione, caratterizzato da coefficiente di dispersione K_x . Nel caso di correnti piane Elder (1959) trova:

$$K_x = 5.93 u_* Y \quad (6.1)$$

6.2.2 L'effetto della disuniformità nella distribuzione trasversale della velocità

Malgrado la distribuzione verticale di velocità (mediata nel tempo) non differisca molto nei corsi d'acqua naturali dalla distribuzione logaritmica adottata nella teoria di Elder (1959), i valori di K sperimentalmente osservati differiscono enormemente dal valore predetto dalla (6.1). Godfrey & Frederick (1970) furono i primi a rilevare sperimentalmente valori di $K/(u_*Y)$ che cadono nell'intervallo 140-500, confermati successivamente da molti altri Autori. La Tabella 6.1 mostra che i valori di tale rapporto osservati variano da un minimo di 8.6 ad un massimo di 7500.

		Y [m]	b [m]	U [m/s]	u_* [m/s]	Q [m ³ /s]	K [m ² /s]	$\frac{K}{u_*Y}$	$\frac{K}{u_*b}$
Canali									
1	Albert	4.40	100	0.029	0.0016	16.2	0.2	34	1.5
	Dessel-Herentals	2.5	35	0.037	0.0022	3.4	0.2	35	2.5
2	Yuma Mesa A	3.45	7.6	0.68	0.047	18	0.5	3	1.5
1	Bocholt-Dessel	2.50	35	0.107	0.0063	14.7	1.4	89	6.4
	Villemsvaart	2.50	34	0.13	0.0079	10.4	1.7	86	6.3
3	Chicago	8.07	49	0.27	0.019	106	3.0	19	3.2
4	Coachella	1.56	24	0.71	0.043	26.6	9.6	143	9.3
5	irrigation	0.19	1.4	0.38	0.11	-	9.6	469	64
		0.14	1.5	0.33	0.10	-	1.9	136	13
Fiumi europei									
6	Derwent	0.25	-	0.38	0.140	-	4.6	130	-
7	Wolf	-	-	0.03	-	0.2	0.7	-	-
		-	-	0.09	-	0.9	1.3	-	-
		-	-	0.35	-	5.7	4.3	-	-
		-	-	0.38	-	19.8	9.0	-	-
	Lyd	-	-	0.16	-	0.6	4.0	-	-
		-	-	0.24	-	1.2	4.4	-	-
		-	-	0.48	-	3.9	7.4	-	-
		-	-	0.93	-	15.7	15.5	-	-
8	Miljaka	0.29	11	0.35	0.058	1.0	2.7	161	4.4
7	Nidd	-	-	0.13	-	2.0	4.1	-	-
	Tamar	-	-	0.13	-	2.8	8.3	-	-
		-	-	0.25	-	10.7	12.4	-	-
		-	-	0.60	-	37.5	15	-	-
		-	-	1.15	-	165	30	-	-
	Upper Tame	0.83	9.9	0.46	0.090	3.8	5.5	74	6.2
		0.92	9.9	0.52	0.10	4.8	5.1	55	5.2
	Tame	-	-	0.46	-	8.5	14.6	-	-
		-	-	0.53	-	10.6	10.0	-	-
	Wye	-	-	0.37	-	8.6	54	-	-
		-	-	0.38	-	27	51	-	-

		Y [m]	b [m]	U [m/s]	u_* [m/s]	Q [m ³ /s]	K [m ² /s]	$\frac{K}{u_* Y}$	$\frac{K}{u_* b}$
	Ure	-	-	0.72	-	72	70	-	-
		-	-	0.10	-	15	3.5	-	-
Fiumi USA									
9	Comite	0.26	13	0.31	0.044	1.0	7.0	612	13
		0.43	16	0.37	0.056	2.6	13.9	577	16
10	Copper, VA	0.40	19	0.16	0.116	1.2	9.9	213	4.5
		0.49	16	0.26	0.080	2.0	9.5	242	7.4
		0.49	16	0.27	0.080	2.1	20	510	16
		0.85	18	0.60	0.100	9.2	21	247	12
9	Antietam	0.39	16	0.32	0.062	2.0	9.3	385	9.4
		0.52	20	0.43	0.071	4.4	16.3	441	12
		0.71	24	0.52	0.083	8.9	25.6	434	13
9	Monocacy	0.32	35	0.21	0.044	2.4	4.7	334	3.0
		0.45	37	0.32	0.051	5.2	13.9	606	7.4
		0.88	48	0.44	0.072	18.4	37.2	587	11
9	Anacoco	0.42	20	0.29	0.045	2.4	13.9	735	16
		0.94	26	0.34	0.068	8.2	32.5	508	19
		0.92	37	0.40	0.067	13.5	39.5	641	16
9	Muddy	0.81	13	0.37	0.081	4.0	13.9	212	13
		1.20	20	0.45	0.099	10.6	32.5	274	17
10	Powell	0.85	34	0.15	0.055	4.0	9.5	203	5.1
9	Elkhorn	0.30	33	0.43	0.046	4.3	9.3	674	6.1
		0.42	51	0.46	0.047	9.9	21	1060	8.8
10	Clinch, VA	0.58	36	0.21	0.049	6.8	8.1	285	4.6
	Duwamish	1.10	20	-	0.049	-	7.5	139	7.7
	South Platte	0.46	-	0.66	0.069	-	16.2	510	-
	Sabine, TX	0.98	35	0.21	0.042	7.4	39.4	957	27
13	Minnesota	2.74	80	0.034	0.0024	7.9	22.3	3390	120
		2.74	80	0.14	0.0097	27	34.9	1310	45
9	Amite	0.81	37	0.29	0.070	8.6	23.2	409	9.1
		0.80	42	0.42	0.069	14.2	30.2	547	10
9	White	0.55	67	0.35	0.044	12.7	30.2	1250	10
4	Clinch, TE	0.85	47	0.32	0.067	12.8	14	246	4.4
		2.10	53	0.83	0.107	92.4	47	209	8.3
		2.10	60	0.94	0.104	118	54	247	8.7
9	John Day	0.58	25	1.01	0.140	14.2	13.9	171	4.0
		2.46	34	0.82	0.181	69	65	146	11
9	Chattahoochee	1.13	66	0.39	0.076	29.0	32.5	378	6.59
9	Nooksack	0.76	64	0.67	0.27	32.6	34.8	170	2.0
		2.93	86	1.20	0.53	303	153	98	3.4
9	Wind-Bighorn	1.10	59	0.88	0.120	58	41.8	317	5.9
		2.16	69	1.55	0.166	231	163	455	14
9	Yadkin	2.33	70	0.43	0.100	71	111	476	16

		Y [m]	b [m]	U [m/s]	u_* [m/s]	Q [m ³ /s]	K [m ² /s]	$\frac{K}{u_* Y}$	$\frac{K}{u_* b}$
13	Mississippi	3.85	72	0.76	0.129	213	260	524	28
		3.05	530	0.08	0.0056	74	13.0	761	4.4
		3.05	530	0.07	0.0050	92	19.5	1280	7.4
		3.05	530	0.12	0.0082	132	16.6	664	3.9
		3.05	530	0.14	0.0097	268	35.9	1210	7.0
14	Mississippi	-	-	-	-	10310	232	-	-
		-	-	-	-	22600	700	-	-
9	Susquehanna Sabine, LA	1.35	203	0.39	0.065	106	92.9	1060	7.0
		2.04	104	0.58	0.054	119	316	2870	56
15	Missouri	4.75	128	0.64	0.084	389	670	1680	62
		2.33	183	0.89	0.066	380	465	3020	39
		2.70	200	1.55	0.074	837	1500	7510	100
		3.56	201	1.28	0.084	913	837	2800	50
		3.11	197	1.53	0.078	935	892	3700	58
Fiumi Nuova Zelanda									
16	Punehu	0.28	5	0.26	0.21	0.4	7.2	122	6.9
	Kapuni	0.30	9	0.37	0.15	1.2	8.4	187	6.2
	Kapuni	0.35	10	0.53	0.17	1.7	12.4	208	7.3
	Manganui	0.40	20	0.19	0.18	2.3	6.5	90	1.8
	Waiongana	0.60	13	0.48	0.24	2.5	6.8	47	2.2
	Stony	0.63	10	0.55	0.30	3.4	13.5	71	4.5
17	Waiotapu	0.75	11.4	0.41	0.061	3.5	8.0	175	12
	Manawatu	0.72	59	0.37	0.070	15.6	32	635	7.7
	Manawatu	1.00	63	0.32	0.094	20.0	22	234	3.7
18	Manawatu	0.95	60	0.46	0.092	26.3	47	538	8.5
17	Tarawera	1.21	25	0.73	0.084	22.1	27	266	13
		192	20	0.62	0.123	23.7	11.5	49	4.7
		1.38	25	0.77	0.091	26.6	20.5	163	9.0
		1.40	25	0.78	0.091	27.3	15.5	122	6.8
		1.57	25	0.83	0.096	32.4	18	119	7.5
19	Waikato	2.60	85	0.69	0.060	153	52	333	10
		2.00	120	0.64	0.050	153	67	670	11

Tabella 6.1: Parametri geometrici, idrodinamici e coefficiente di dispersione rilevati in corsi d'acqua da diversi autori: 1=Marviolet and Craenenbroeck(1986); 2=Schuster(1965); 3=Thomas(1958); 4=Godfrey and Frederick(1970); 5=Valentine(1978); 6=Owens et al.(1964); 7=Cole J.A., Water Research Centre, England, unpublished; 8=Dobran(1982); 9=McQuivey and Keefer(1974); 10=Fisher et al.(1968); 12=Glover(1964); 13=Stefan and Demetracopoulos(1981); 14=McQuivey and Keefer(1976); 15=Yotsukura et al.(1970); 16=Kitto and Rutherford(1982); 17=Wilkock, R.J., NIWA, New Zealand, unpublished; 18=Rutherford and Williams(1992); 19=Rutherford et al.(1980).

Fischer (1966, 1967) ha dimostrato che la discrepanza fra risultati di Elder (1959) e osservazioni di campo è dovuta principalmente alla non uniformità nella distribuzione trasversale della velocità, che si realizza in tutti i corsi d'ac-

qua naturali a causa della forma della sezione che generalmente differisce dalla geometria rettangolare. La cosa si dimostra agevolmente facendo uso della forma mediata sulla profondità dell'equazione della diffusione, che, in presenza di effetti di non stazionarietà nella distribuzione di \bar{C} e nell'ipotesi che il termine di trasporto convettivo trasversale sia significativamente inferiore a quello diffusivo-dispersivo, si scrive:

$$Y \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + Y \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Y \bar{\mathcal{D}}_x^T \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Y \bar{\mathcal{D}}_y^T \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) \quad (6.2)$$

La decomposizione di Taylor assume qui la forma

$$\bar{C} = C(\hat{x}, t) + g(y) \frac{\partial C}{\partial \hat{x}} \quad (6.3)$$

dove C è la concentrazione media nella sezione

$$C = \frac{1}{b} \int_0^b \bar{C}(y) dy$$

e viene introdotta la coordinata longitudinale solidale con l'osservatore mobile con la velocità media

$$\hat{x} = x - Ut, \quad (6.4)$$

avendo indicato con U la velocità media sulla sezione

$$U = \frac{1}{b} \int_0^b \bar{U}(y) dy.$$

Sostituendo la (6.3) nell'equazione (6.2), riscritta dopo l'introduzione della coordinata (6.4), il bilancio di Taylor caratteristico del meccanismo della dispersione si può scrivere come

$$Y (\bar{U} - U) = \frac{d}{dy} \left(Y \bar{\mathcal{D}}_y^T \frac{dg}{dy} \right) \quad (6.5)$$

dalla quale, con una doppia integrazione in y , si può ricavare la struttura di $g(y)$. Il coefficiente di dispersione ha, per il campo lontano, la forma

$$K = -\frac{1}{\Omega} \int_0^b (\bar{U}(y) - U) g(y) Y(y) dy \quad (6.6)$$

dove può essere esplicitata la funzione $g(y)$ ricavata dalla (6.5) per dare:

$$K = -\frac{1}{\Omega} \int_0^b (\bar{U}(y) - U) Y(y) \int_0^y \frac{1}{Y(\eta) \bar{\mathcal{D}}_y^T(\eta)} \int_0^\eta Y(\zeta) (\bar{U}(\zeta) - U) d\zeta d\eta dy \quad (6.7)$$

avendo indicato con $\Omega = bY$ l'area della sezione, con Y profondità media.

Possiamo trovare una relazione di semplice uso individuando le scale del problema il problema. Definiamo

$$Y^*(y) = \frac{Y(y)}{Y}, \quad U'(y) = \bar{U}(y) - U$$

e introduciamo le variabili adimensionali

$$y^* = \frac{y}{b}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{b}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{b}, \quad \varphi = \frac{\bar{U} - U}{\sqrt{\bar{U}'^2}}, \quad \delta = \frac{\bar{\mathcal{D}}_y^T}{\bar{\mathcal{D}}}, \quad (6.8)$$

dove si considerano le medie sulla sezione

$$\overline{U'^2} = \frac{1}{b} \int_0^b U'^2 dy, \quad \bar{\mathcal{D}} = \frac{1}{b} \int_0^b \bar{\mathcal{D}}_y^T dy. \quad (6.9)$$

L'integrale (6.7) può essere scritto di conseguenza come

$$K = I \frac{b^2 \overline{U'^2}}{\bar{\mathcal{D}}} \quad (6.10)$$

con

$$I = - \int_0^1 \varphi(y^*) h(y^*) \left[\int_0^{z^*} \frac{1}{h(\eta^*) \delta(\eta^*)} \left(\int_0^{\eta^*} h(\zeta^*) \varphi(\zeta^*) d\zeta^* \right) d\eta^* \right] dy^* \quad (6.11)$$

Assegnate le distribuzioni trasversali di profondità e velocità nella sezione, l'integrale (6.11) è un numero, che consente di utilizzare la formula (6.10) per il calcolo del coefficiente di dispersione negli alvei naturali.

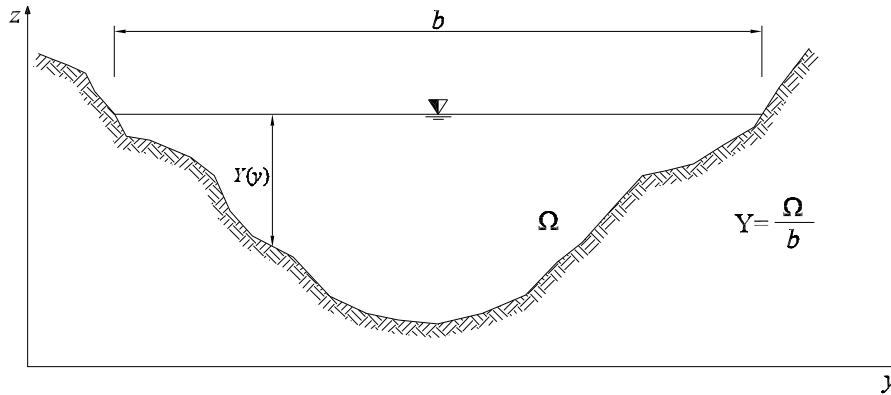


Figura 6.2: Notazioni per l'applicazione della (6.10) per la valutazione del coefficiente di dispersione negli alvei naturali.

6.2.3 Qualche formula empirica

La pretesa di stimare K con grande precisione negli alvei reali è non realistica a causa degli effetti difficilmente quantificabili discussi in precedenza. Esaminiamo le proposte più significative presenti in letteratura. Fischer (1975) propone l'utilizzo della (6.10) nella forma

$$K = I \frac{b_e^2 \overline{U'^2}}{\bar{\mathcal{D}}} \quad (6.12)$$

con

$I \simeq 0.07$	considerato valore tipico delle correnti reali
$b_e \simeq 0.7b$	valore efficace della larghezza per gli alvei naturali
$\frac{U'^2}{U^2} \simeq (0.17 \div 0.25)U^2$	stima basata su esperimenti di laboratorio e misure di campo
$\bar{D} \simeq 0.6 \bar{u}_* Y$	stima adatta agli alvei debolmente meandriformi

La (6.12) diventa quindi

$$K = 0.011 \frac{U^2 b^2}{Y \bar{u}_*} \quad (6.13)$$

La (6.13) costituisce una relazione semiempirica di utilità pratica poiché consente la stima di K sulla base di dati usualmente disponibili: profondità media, velocità media, pendenza, larghezza della superficie libera. La Figura 6.4 mostra che l'adozione della (6.13) fornisce stime di K corrette almeno come ordine di grandezza. Tale risultato è accettabile se si tiene conto che la stessa stima sperimentale di K è affetta da errori dell'ordine del 100%.

6.2.4 Soluzione per $C(\hat{x}, t)$

L'equazione che rappresenta il mescolamento in campo lontano si ottiene mediando sul piano della sezione l'equazione di diffusione-convezione, ottenendo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Omega K \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (6.14)$$

avendo indicato con Ω l'area della sezione bagnata, con U la velocità media sul piano della sezione e con K il coefficiente di dispersione, che può essere stimato utilizzando la (6.13). Posto che U e K risultino costanti lungo l'asta fluviale, la soluzione della (6.14) relativa all'immissione di una massa M di tracciante nell'origine all'istante iniziale è

$$C(x, t) = \frac{M/\Omega}{\sqrt{4\pi K t}} \exp \left[-\frac{(x - Ut)^2}{4Kt} \right] \quad (6.15)$$

La (6.15) rappresenta un andamento spaziale della distribuzione di C di tipo gaussiano ad un *istante fissato*. I rilievi sperimentali non rivelano tuttavia quasi mai un andamento gaussiano presentando fronti ripidi, code allungate e dunque valori negativi della *skewness* (asimmetria) della distribuzione. Ciò ha sostanzialmente due cause:

- i) la prima è legata al fatto che i rilievi sperimentali sono ottenuti in una sezione fissata al variare del tempo e la (6.15) non è gaussiana in t ;
- ii) la seconda è dovuta alla *non validità* della (6.15) nei campi vicino ed intermedio.

Come si può vedere dalla Figura 6.3, nella regione subito a valle dell'immissione la nuvola di tracciante risente degli effetti convettivi associati al profilo di velocità trasversale e acquista una dissimmetria (*skewness*) che va poi decadendo nel campo lontano ma in modo sufficientemente lento da rendere la struttura della soluzione sensibilmente non gaussiana ancora per un tempo piuttosto lungo anche nel campo lontano. Diverse stime sono state proposte per le distanze

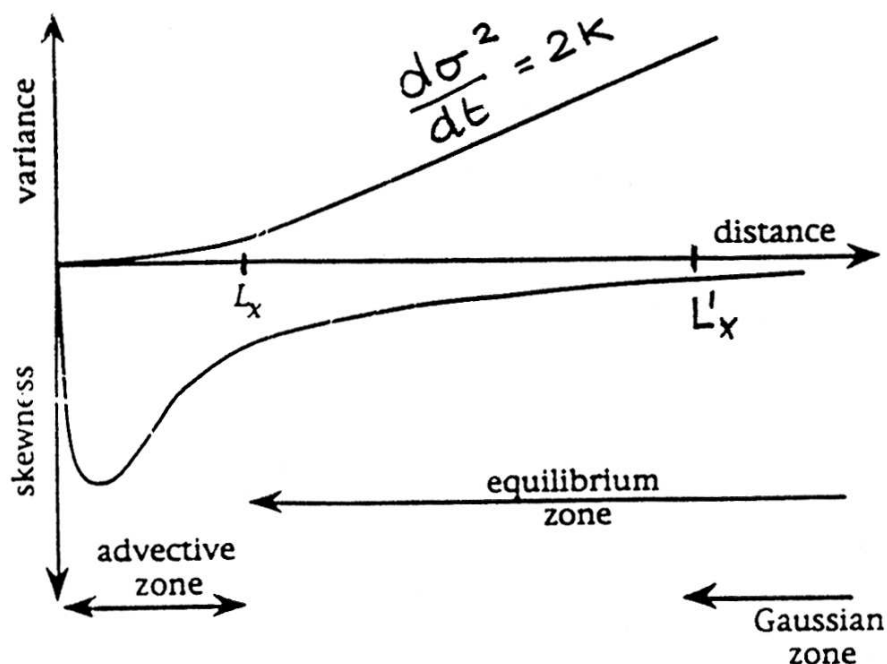


Figura 6.3: Andamento spaziale di varianza e dissimmetria (*skewness*).

L_x e L'_x , oltre le quali si possono ritenere sostanzialmente validi rispettivamente lo schema dispersivo alla Taylor, e quindi la (6.14), e la soluzione gaussiana, e quindi la (6.15).

La distanza oltre la quale è valido lo schema dispersivo è stimabile come

$$L_x = \alpha \frac{b_e^2 U}{K_y} \quad (6.16)$$

con α compreso fra circa 0.2 in canali di laboratorio con immissione di tracciante distribuita sull'intera larghezza, 0.6 per canali con immissione vicino alla sponda, fino a valori maggiori di 1 (fino a circa 10) per canali con presenza di zone golenali. La dimensione b_e è una misura della scala caratteristica trasversale del corso d'acqua, e generalmente si ipotizza essere circa $(0.5/0.7 \div 1)b$, avendo indicato con b la larghezza.

La distanza oltre la quale la soluzione è gaussiana varia fortemente secondo gli autori:

Fischer(1979)	$L'_x = 2.5L_x$
Sayre(1968)	$L'_x = 10L_x$
Liu&Cheng(1980)	$L'_x = 50L_x$
Denton(1990)	$L'_x = 4 \div 5L_x$

6.3 Stima del coefficiente di dispersione longitudinale

6.3.1 Dati sperimentali

La Tabella 6.1 contiene i risultati di un gran numero di osservazioni sperimentali. È evidente la grande variabilità dei valori osservati. Parte di tale variabilità può essere attribuita ai procedimenti utilizzati per le stime o al fatto che i rilievi sono stati effettuati nel regime transitorio iniziale in cui lo schema dispersivo non risulta ancora valido. I fattori più significativi sembrano tuttavia quelli legati al carattere non uniforme delle correnti naturali. Le irregolarità presenti negli alvei naturali, quali curve, barre di fondo, opere di difesa spondale, opere di attraversamento ecc. forniscono contributi aggiuntivi al processo di miscelamento. Il risultato di ciò è l'ampio intervallo in cui sono distribuiti i valori di K/\bar{u}_*Y , precisamente

$$3 < \frac{K}{\bar{u}_*Y} < 7510 \quad (6.17)$$

Talvolta le caratteristiche dell'alveo sono talmente irregolari da non consentire la formulazione di alcuna teoria adeguata: è il caso degli alvei montani e degli alvei intrecciati. In generale, tuttavia, è sufficientemente realistico adottare le stime discusse nel seguito.

6.3.2 Effetto della larghezza del corso d'acqua

La Figura 6.4 mostra che il coefficiente di dispersione longitudinale cresce con il rapporto larghezza-profondità. Ciò è presumibilmente dovuto al fatto che, al crescere di b/Y :

- aumenta la variazione trasversale di velocità;
- diminuisce l'intensità dei moti secondari che tendono ad accrescere il coefficiente di dispersione trasversale che figura al denominatore della (6.12).

La Figura 6.4 potrebbe suggerire l'opportunità di utilizzare b come scala spaziale per la normalizzazione di K . Se si opera in questo modo si trova che i valori di K cadono nell'intervallo

$$2 < \frac{K}{\bar{u}_*b} < 50 \quad (6.18)$$

6.3.3 Effetto della curvatura della corrente in alvei meandriformi

Il ruolo della curvatura si manifesta attraverso diversi effetti:

- un primo effetto è l'aumento della dispersione trasversale che, figurando al denominatore della (6.13) tende a ridurre il coefficiente di dispersione longitudinale;

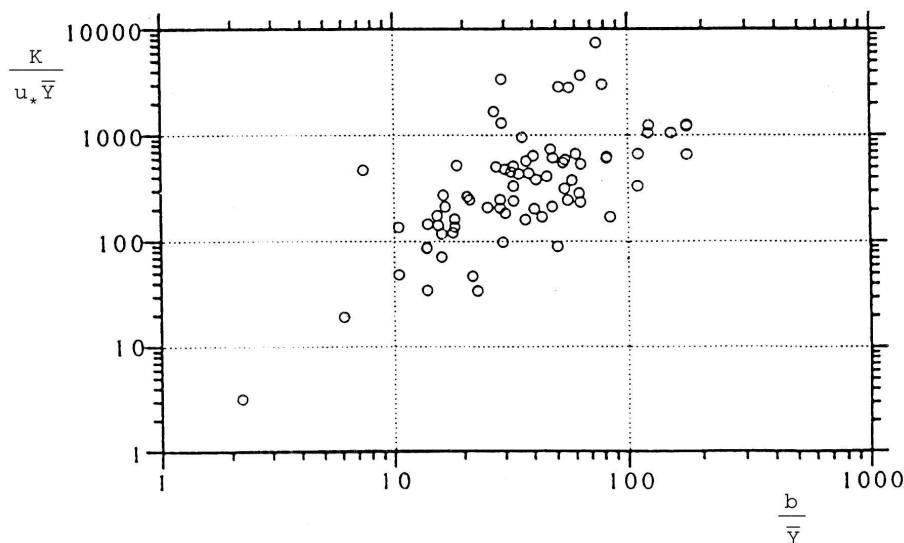


Figura 6.4: Dipendenza del coefficiente di dispersione negli alvei naturali dal rapporto larghezza-profondità della sezione.

- un secondo effetto, più importante, che implica un aumento del coefficiente di dispersione longitudinale è la tendenza del moto in curva a dar luogo a distribuzioni di velocità significativamente disuniformi in direzione trasversale, le quali generalmente presentano il massimo di velocità vicino alla sponda esterna dove la corrente presenta la profondità massima;
- un terzo effetto è legato al fatto che il coefficiente di dispersione dipende fortemente dalla distribuzione trasversale di concentrazione che, nello schema di Taylor, ha assunto nel campo lontano un assetto trasversale stabile. Le continue oscillazioni spaziali di velocità associate alla curvatura tendono ad impedire il raggiungimento di tale assetto stabile (Figura 6.5).

Fischer (1969) ha mostrato, sulla base di un procedimento numerico, che per un corso d'acqua mendriforme la (6.14) risulta significativa quando è soddisfatta la condizione

$$\gamma = \frac{Ub^2}{K_y L_m} < 25 \quad (6.19)$$

con L_m lunghezza del meandro. Si noti che γ ha il significato di rapporto fra scala temporale del miscelamento trasversale e tempo caratteristico di percorrenza del meandro (con la velocità media). In particolare sul Green-Dwamish River, corso d'acqua caratterizzato da valori di γ inferiori a 25, Fischer (1969) ha osservato un valore di K molto prossimo al valore predetto dalla 6.13, mentre sul Missouri, caratterizzato dal valore di γ prossimo a 130, K risultava ridotto di un fattore intorno ad 8 rispetto al valore fornito dalla 6.13.

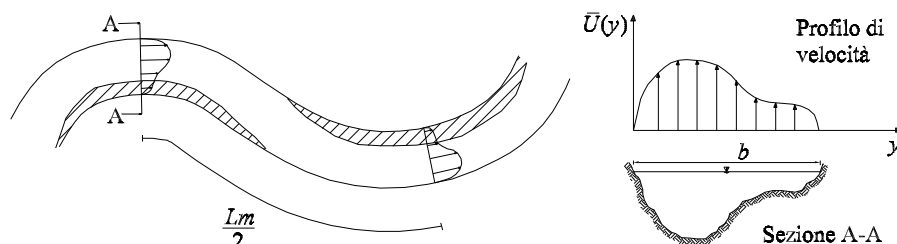


Figura 6.5: Schema della topografia del fondo e del profilo di velocità longitudinale caratteristici di un alveo meandriforme.

6.3.4 Effetto di zone stagnanti

Nei corsi d'acqua naturali le irregolarità sempre presenti sul fondo e sulle sponde determinano regioni di ristagno o caratterizzate da deboli moti secondari. Tali regioni possono spiegare la presenza di una lunga coda usualmente osservata al passaggio di una nuvola d'inquinante nei corsi d'acqua naturali (Thackston & Schnelle, 1970, Sabol & Nordin, 1970). Il tracciante intrappolato nelle regioni stagnanti viene infatti restituito molto lentamente per effetto dell'azione della diffusione turbolenta. Ulteriore conseguenza è l'accrescersi della lunghezza della regione iniziale che risulta controllata dal tempo impiegato dalla generica particella di tracciante per visitare l'intera sezione (Valentine & Wood, 1977). Infine la presenza di zone stagnanti non invalida sostanzialmente lo schema di Taylor ma influenza il coefficiente di dispersione e la velocità della nuvola. Dati di Valentine (1978) indicano che zone stagnanti che occupavano il 4% o il 25% del volume della corrente accrescevano il coefficiente di dispersione di un fattore 2 o 10 rispettivamente, mentre una riduzione del volume stagnante dal 38% al 12% riduce il coefficiente di dispersione di un fattore 5. Le misure di Valentine & Wood (1977) suggeriscono inoltre che la velocità del baricentro della nuvola U_b si riduce secondo la relazione

$$U_b = U(1 - \eta) \quad (6.20)$$

con η rapporto fra i volumi della regione stagnante e della corrente nel tronco considerato.

6.4 Soluzione di alcuni semplici problemi di dispersione longitudinale

6.4.1 Sorgente puntuale istantanea

La più semplice delle soluzioni del problema della dispersione longitudinale è quella che si ottiene assumendo che l'immissione della massa M di tracciante avvenga istantaneamente, che il miscelamento verticale e trasversale si realizzi su una distanza trascurabile rispetto alla scala spaziale del processo di dispersione longitudinale, e che la dispersione longitudinale si comporti alla Taylor a partire da un'origine virtuale che può ottenersi utilizzando il grafico in Figura 6.6 proposto da Fischer (1979).

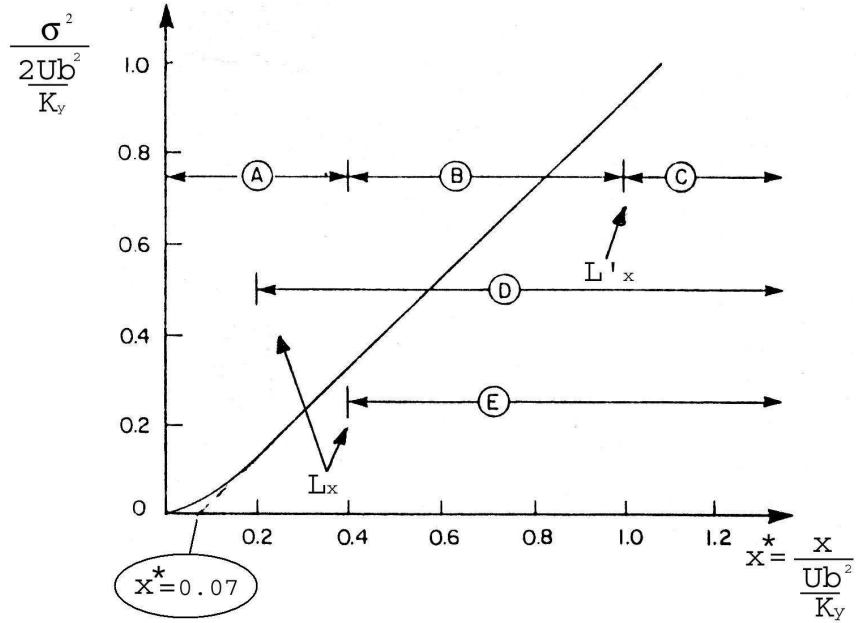


Figura 6.6: Campo di validità della formula di Taylor.

Ulteriore ipotesi semplificativa implicitamente adottata è la costanza dell'area della sezione e del coefficiente di dispersione. Questo semplice schema descrive ad esempio le conseguenze di un rilascio accidentale, per effetto di un incidente stradale o di un incidente industriale, di una grande quantità di inquinante in un tempo modesto in una sezione di un corso d'acqua. La soluzione corrispondente a questo problema è data dalla (6.15) in cui la coordinata x va misurata a partire dall'origine virtuale x_v della Figura 6.6 e il tempo dall'istante $t_v = x_v/U$:

$$\begin{aligned}
 C(x, t) &= \frac{M/\Omega}{\sqrt{4\pi K(t-t_v)}} \exp \left[-\frac{((x-x_v) - U(t-t_v))^2}{4K(t-t_v)} \right] \\
 &= \frac{M/\Omega}{\sqrt{4\pi K(t-t_v)}} \exp \left[-\frac{(x-Ut)^2}{4K(t-t_v)} \right]
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

La (6.21) consente una rapida stima dell'attenuazione del picco di concentrazione e del tempo impiegato dalla nuvola per raggiungere una sezione assegnata. La (6.14) suggerisce che, quando U e K sono costanti, il picco di concentrazione viaggia con la velocità media U , si realizza cioè per valori di x e t legati dalla relazione

$$x_{\max} = Ut, \tag{6.22}$$

assumendo valori C_{\max} che vanno decadendo secondo la legge

$$C_{\max} = \frac{M}{\Omega \sqrt{4\pi K(t-t_v)}}. \tag{6.23}$$

Il baricentro della nuvola viaggia secondo la (6.22). È facile determinare la lunghezza Δx del tronco di corso d'acqua in cui la concentrazione C eccede un

valore prefissato C_0 . La (6.21) e le (6.22)-(6.23) permettono di scrivere

$$C(x, t) = C_{\max} \exp \left[-\frac{(x - x_{\max})^2}{4K(t - t_v)} \right],$$

che consente di determinare la coordinata \tilde{x} tale che $C = C_0$:

$$|\tilde{x} - Ut| = |\tilde{x} - x_{\max}| = 2\sqrt{K(t - t_v) \ln \frac{C_{\max}}{C_0}} \quad (6.24)$$

da dove si ricava l'intervallo spaziale

$$\Delta x = 4\sqrt{K(t - t_v) \ln \frac{C_{\max}}{C_0}} \quad (6.25)$$

Le (6.24) e (6.25) forniscono utili stime quando si analizza il profilo di concentrazione in funzione della distanza ad un istante fissato. È tuttavia più frequente che si misuri l'andamento di concentrazione nel tempo in una sezione assegnata x . La (6.15) in tal caso predice che l'andamento della concentrazione nel tempo presenta un andamento asimmetrico. Derivando la (6.15) rispetto a t con x fissato si ricava facilmente l'istante t_{\max} in cui la concentrazione C assume il valore massimo nella sezione x considerata. Si trova, trascurando per semplicità t_v ,

$$t_{\max} = -\frac{K}{U^2} + \sqrt{\frac{K^2}{U^4} + \frac{x^2}{U^2}} \quad (6.26)$$

Il valore di picco della concentrazione osservata in x si ottiene sostituendo la (6.26) nella (6.15). Si trova inoltre che l'istante t_b in cui la sezione x è attraversata dal baricentro della curva $C(t)|_x$ (fissata la coordinata x) è dato dalla relazione (Thackston & al., 1967):

$$t_b = \frac{x}{U} + 2\frac{K}{U^2} \quad (6.27)$$

Si noti che, essendo

$$t_{\max} - \frac{x}{U} = -\left(\frac{K}{U^2} + \frac{x}{U}\right) + \sqrt{\frac{K^2}{U^4} + \frac{x^2}{U^2}} < -\left(\frac{K}{U^2} + \frac{x}{U}\right) + \sqrt{\frac{K^2}{U^4} + \frac{x^2}{U^2} + \frac{2Kx}{U^3}} = 0 \quad (6.28)$$

ne consegue che

$$t_{\max} < \frac{x}{U} < t_b \quad (6.29)$$

Dunque il tempo con cui si propaga il colmo della curva di distribuzione spaziale C è compreso fra i tempi corrispondenti al picco e al baricentro della curva $C(t)$ nella sezione fissata (Figura 6.7).

6.4.2 L'approssimazione della nuvola congelata

Un procedimento approssimato molto semplice per la stima della distribuzione spaziale di concentrazione intorno ad una sezione x_1 , nota la distribuzione temporale $C(t)$ in x_1 (e viceversa) è quello della nuvola congelata. Esso consiste

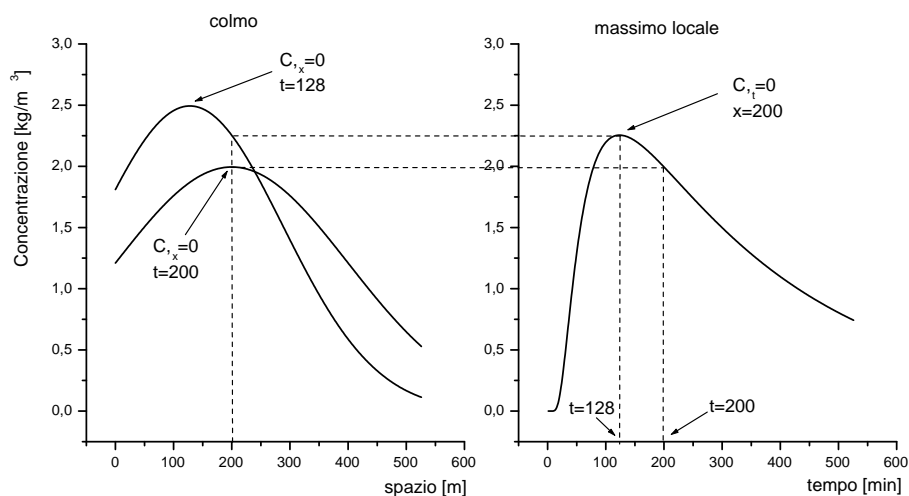


Figura 6.7: Distinzione fra colmo spaziale e picco temporale della distribuzione di concentrazione.

nell'assumere che risulti trascurabile la dispersione nell'intervallo di tempo considerato in cui la nuvola attraversa la sezione considerata. L'ipotesi è fondata sulla validità dell'approssimazione

$$\frac{x}{U} \gg \frac{K}{U^2} \quad (6.30)$$

da cui si ricava, ricordando le (6.26) e (6.27),

$$t_{\max} \simeq t_b \simeq \frac{x}{U} \quad (6.31)$$

L'approssimazione della nuvola congelata si scrive:

$$C(x_1, t) = C(x_1 + U(t - t_1), t_1) \quad (6.32)$$

$$C(x, t_1) = C\left(x_1, t_1 + \frac{x_1 - x}{U}\right) \quad (6.33)$$

essendo

$$x_1 = Ut_1 \quad (6.34)$$

L'approssimazione della nuvola congelata è spesso utilizzata per l'interpretazione di rilievi sperimentali.

6.4.3 Soluzione per sorgente variabile nel tempo

La (6.15) può essere facilmente utilizzata per calcolare, con gli stessi limiti di validità discussi al paragrafo (6.2.4), la soluzione relativa al caso di una sorgente di intensità variabile $\dot{M}(\tau)$. Si ha:

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{M}(\tau)/\Omega}{\sqrt{4\pi K(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{[x - U(t-\tau)]^2}{4K(t-\tau)}\right] d\tau \quad (6.35)$$

La (6.35) è immediatamente implementabile numericamente discretizzando la funzione $\dot{m}(\tau)$, il che equivale a sovrapporre un certo numero di soluzioni (6.15) corrispondenti all'immissione di massa $\dot{m}\Delta\tau$ ad istanti τ variabili.

6.4.4 Soluzione per assegnata distribuzione spaziale di concentrazione ad un istante fissato

È talvolta utile disporre di un procedimento che consente di trasferire nel tempo una distribuzione di concentrazione misurata in un certo intervallo spaziale. Utilizzando il procedimento di sovrapposizione degli effetti si trova immediatamente la soluzione sovrapponendo infinite soluzioni corrispondenti all'immissione istantanea di una massa $C(\xi, t_1)d\xi$ di tracciante in ξ all'istante t_1 . Segue:

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^x \frac{C(\xi, t_1)}{\sqrt{4\pi K(t-t_1)}} \exp \left[-\frac{[x - \xi - U(t-t_1)]^2}{4K(t-t_1)} \right] d\xi \quad (6.36)$$

con $C(\xi, t_1)$ distribuzione spaziale di concentrazione assegnata all'istante t_1 .

6.4.5 Soluzione per assegnata distribuzione temporale di concentrazione in una sezione fissata

La (6.36) richiede un dato difficilmente disponibile, la distribuzione spaziale di concentrazione misurata in un tronco assegnato di corso d'acqua. Assai più comune è che risulti nota la distribuzione temporale di concentrazione in una sezione assegnata del corso d'acqua. Si possono allora utilizzare due procedimenti.

Metodo fondato sul procedimento della nuvola congelata. Si trasforma il profilo di concentrazione in funzione del tempo nella sezione x_1 , $C(x_1, t)$, in un profilo di concentrazione in funzione dello spazio all'istante medio di passaggio della nuvola utilizzando la (6.33). Tale profilo viene quindi fatto evolvere nel tempo utilizzando la (6.36). Infine, utilizzando la (6.33) si esegue la trasformazione inversa su quest'ultimo profilo. Questi tre passi possono tradursi nelle relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} C(\xi, t_1) &= C(x_1, \tau)|_{\tau=t_1+(x_1-\xi)/U} \\ C(x, t_2) &= \int_{-\infty}^x \frac{C(\xi, t_1)}{\sqrt{4\pi K(t_2-t_1)}} \exp \left[-\frac{[x - \xi - U(t_2-t_1)]^2}{4K(t_2-t_1)} \right] d\xi = \\ &= - \int_{+\infty}^{(t_1+(x_1-x)/U)} \frac{C(x_1, \tau)U}{\sqrt{4\pi K(t_2-t_1)}} \exp \left[-\frac{[x - x_1 + U(\tau-t_2)]^2}{4K(t_2-t_1)} \right] d\tau \\ C(x_2, t) &= C(x, t_2)|_{x=x_2+U(t_2-t)} \\ &= \int_{[t-2(t_2-t_1)]}^{\infty} \frac{C(x_1, \tau)U}{\sqrt{4\pi K(t_2-t_1)}} \exp \left[-\frac{[x_2 - x_1 + U(\tau-t)]^2}{4K(t_2-t_1)} \right] d\tau \end{aligned}$$

Essendo $x_2 - x_1 = U(t_2 - t_1)$, segue infine

$$C(x_2, t) = + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{UC(x_1, \tau)}{\sqrt{4\pi K(t_2-t_1)}} \exp \left[-\frac{U^2[t_2-t_1+\tau-t]^2}{4K(t_2-t_1)} \right] d\tau \quad (6.37)$$

La (6.37) può anche essere utilizzata per effettuare una stima del coefficiente di dispersione K e della velocità media U posto che venga rilevata anche in x_2

la distribuzione temporale di C . È opportuno notare che per la significatività dell'approccio:

- la sezione 1 deve essere localizzata oltre la regione di transizione iniziale;
- il rilievo di C in x_1 deve comprendere l'intero profilo, tanto il fronte quanto la coda;
- devono risultare trascurabili le perdite di tracciante;
- il procedimento fornisce una stima dei valori medi di K ed U nel tronco in esame.

Si noti, inoltre, che la stima di U si ottiene imponendo la congruenza fra il valore predetto e quello osservato del tempo di passaggio del picco di concentrazione, mentre la stima di K si ottiene per confronto dei valori teorico e sperimentale del picco di concentrazione.

Metodo fondato sulla soluzione di Hayami. Il procedimento proposto in e1 è sostanzialmente fondato sull'uso della soluzione fondamentale (6.15) e richiede l'approssimazione della nuvola congelata. Barnett (1983) ha proposto un procedimento alternativo fondato sulla soluzione dell'equazione di diffusione attribuita ad Hayami che si scrive:

$$C(x, t) = \frac{Mx}{\Omega U t \sqrt{4\pi K t}} \exp \left[-\frac{(x - Ut)^2}{4Kt} \right] \quad (6.38)$$

Si noti che la (6.38) si ottiene a partire dalla (6.15) semplicemente moltiplicandola per (x/Ut) . Essa si annulla in $x = 0$ salvo che all'istante iniziale. Utilizzando la (6.38), una assegnata distribuzione temporale di concentrazione in una sezione fissata $C(x, \tau)$ può essere trasferita nello spazio e nel tempo senza dover far ricorso all'approssimazione della nuvola congelata. Infatti tale distribuzione può interpretarsi come una immissione di una sequenza di masse elementari $dM = C(x_1, \tau)d\tau$. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti la (6.38) fornisce quindi:

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(x_1, \tau)(x - x_1)}{\Omega U(t - \tau) \sqrt{4\pi K(t - \tau)}} \exp \left[-\frac{[(x - x_1) - U(t - \tau)]^2}{4K(t - \tau)} \right] d\tau \quad (6.39)$$

Al fine di valutare la significatività della (6.39) si osservi che le soluzioni di Taylor (6.15) e di Hayami (6.38) forniscono valori molto simili per valori di x e t sufficientemente grandi. Esse differiscono apprezzabilmente per valori piccoli di t quando, peraltro, l'approccio dispersivo non risulta valido. Precisamente per valori piccoli di t la (6.15) prevede valori positivi di C a monte della sorgente non osservati sperimentalmente mentre la (6.38) fornisce piccoli valori negativi fisicamente assurdi. Tali limiti risultano di modesta rilevanza pratica. In Figura 6.8 è riportato un paragone fra le due soluzioni per valori tipici di U e K : si noti la loro concordanza e la leggera maggior dissimmetria della soluzione di Hayami.

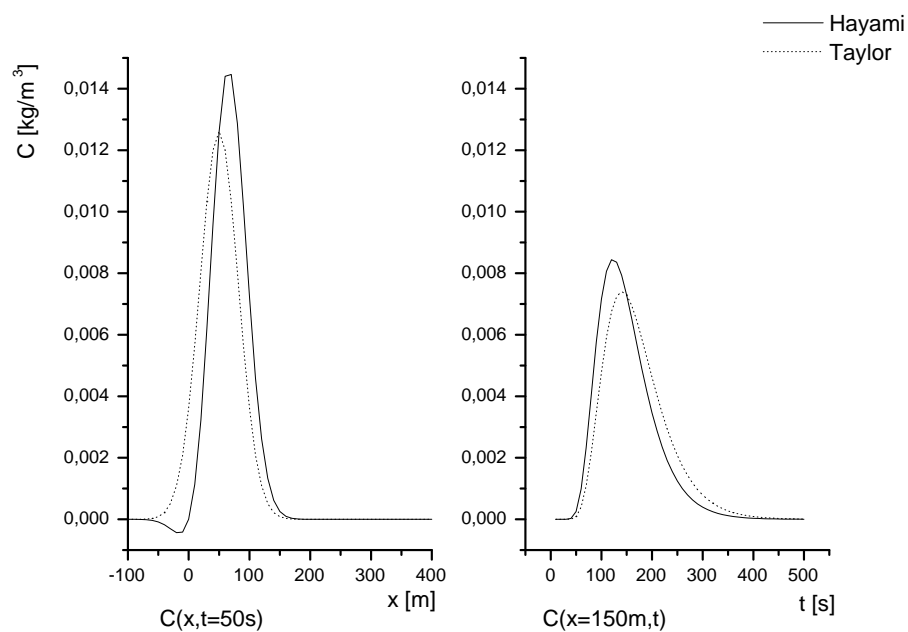


Figura 6.8: Confronto fra le soluzioni di Hayami e di Taylor per valori tipici dei parametri ($M = 10 \text{ kg}$, $\Omega = 10 \text{ m}^2$, $U = 1 \text{ m/s}$, $K = 10 \text{ m}^2/\text{s}$).

Capitolo 7

MISCELAMENTO E DECADIMENTO DI SOLUTI REATTIVI

7.1 Soluti reattivi

7.1.1 Liquami ed esigenza di ossigeno

I soluti reattivi di cui più frequentemente si ricerca lo smaltimento in corpi idrici naturali sono sostanze che influenzano il bilancio di ossigeno. Le sorgenti principali di tali soluti sono i *liquami urbani* e i *rifiuti industriali*, provenienti in particolare da industrie alimentari, distillerie, industrie per la produzione di birra, cartiere, concerie, industrie petrolchimiche e raffinerie, industrie conserviere, ecc... Oltre a sostanze minerali i liquami contengono *sostanze organiche* la cui trasformazione dipende sostanzialmente da due fattori:

- i) la presenza di ossigeno (O_2) nel liquame;
- ii) la presenza di microorganismi.

La solubilità dell'ossigeno nell'acqua può arrivare fino a 8-10 *mg/l* (o *ppm*). Finché vi è presenza di ossigeno le sostanze organiche si trasformano con *fenomeni ossidativi*. Se l'ossigeno contenuto nei liquami fosse sufficiente ad ossidare tutte le sostanze organiche non avverrebbe la putrefazione.

Il liquame, dunque, subisce *fenomeni riduttivi* che danno luogo alla putrefazione. Tali fenomeni sono di natura biochimica cioè dipendono dall'azione di microorganismi che sono presenti in grandissimo numero, dell'ordine di parecchi milioni per centimetro cubo. I microorganismi provvedono alla scomposizione delle sostanze organiche (saprofiti) ma, pur se in misura assai minore, danno anche luogo alla trasmissione di malattie all'uomo e agli animali (patogeni). I prodotti della scomposizione delle sostanze organiche non hanno tutti necessariamente odori sgradevoli: la riduzione dei carboidrati dà luogo a idrocarburi generalmente non di odore spiacevole, le sostanze azotate si riducono a nitriti, nitrati ed ammoniaca di odore non piacevole ma nemmeno intollerabile.

Viceversa sostanze azotate contenenti zolfo si riducono a idrogeno solforato e prodotti volatili contenenti zolfo, quale il solfuro di carbonio, danno luogo ad esalazioni nauseabonde.

Una misura del contenuto di sostanze organiche che necessitano di processi ossidativi cui si fa usualmente riferimento è denominata BOD dalla locuzione anglosassone *biochemical oxygen demand* (ossigeno biochimico richiesto). Un metodo utilizzato per la valutazione del BOD di un liquame, detto *per diluizione*, consiste nel diluire il liquame con acqua, non distillata ¹ e priva di sostanze organiche contenente una nota quantità di ossigeno. La miscela viene introdotta in una bottiglia che viene chiusa e lasciata a temperatura costante per un tempo fissato t dopo il quale si misura la quantità di ossigeno presente nella miscela: la differenza fra valore iniziale e valore finale della massa di ossigeno rapportata al volume iniziale di liquame (pre-diluizione) fornisce il valore del suo BOD. In generale si fa riferimento al BOD a 5 o 20 giorni, che si indica con BOD₅ e BOD₂₀ rispettivamente.

I liquami domestici sono caratterizzati mediamente da valori del BOD₅ pari a 250-350 mg/l , mentre il liquame di punta (raccolto al mattino) può raggiungere valori fino a 400 mg/l .

Si noti che il consumo di ossigeno nel liquame in decomposizione dipende sensibilmente dalla temperatura e non ha un andamento uniforme nel tempo come appare in Figura 7.1. Sono identificabili due stadi distinti corrispondenti il primo alla ossidazione delle sostanze contenenti carbonio, il secondo al processo di nitrificazione. Un secondo indice largamente utilizzato è il COD (*Chemical*

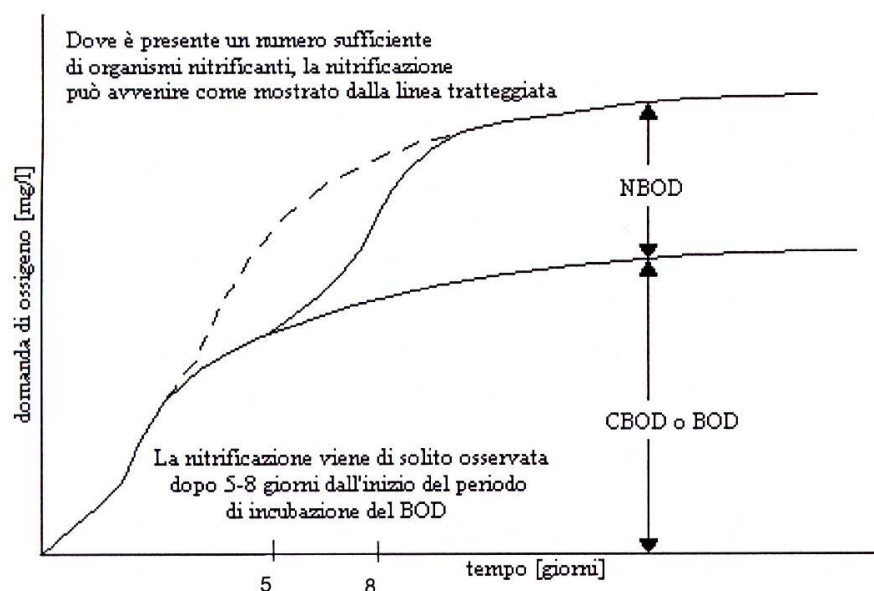


Figura 7.1: Andamento temporale qualitativo dell'ossigeno consumato per la decomposizione di un liquame.

¹L'acqua distillata non contenendo sali darebbe luogo alla distruzione delle cellule dei microorganismi per fenomeno osmotico.

Oxygen Demand), cioè l'esigenza di ossigeno necessario per l'ossidazione delle sostanze organiche. A differenza del BOD, il COD tiene conto di tutte o quasi le sostanze organiche presenti nell'acqua incluse quelle non biodegradabili, dunque risulta invariabilmente maggiore del BOD. Una misura ancora più raffinata della quantità di sostanze organiche presenti nell'effluente si può ottenere misurando l'ammontare di carbonio presente (TOC, *Total Organic Carbon*). Si tratta di un rilievo utilizzato solo quando risulta necessaria una valutazione molto precisa del contenuto di sostanze organiche.

7.2 Modellazione del bilancio di ossigeno in assenza di miscelamento

7.2.1 Ossigeno disciolto

L'ossigeno è solubile in acqua. La solubilità dipende significativamente dalla temperatura, dalla pressione, dalla salinità dell'acqua e dal suo grado di inquinamento.

La concentrazione di ossigeno in mg/l in condizioni di saturazione verrà indicata con s . Diverse espressioni sono state proposte per s in funzione della temperatura T (in $^{\circ}C$), della pressione barometrica p (espressa in $mm\ Hg$) e della salinità σ (in mg/l di cloruro di sodio). In particolare Hatfield (1941) suggerisce

$$C_s = \frac{0.678(p - p_v)(1 - 10^{-5}\sigma)}{35 + T} \quad (7.1)$$

con p_v tensione di vapore dell'acqua in $mm\ Hg$. Truesdale & al. (1955) forniscono un'espressione alternativa valida alla pressione atmosferica di 760 $mm\ Hg$:

$$C_s = 14.161 - 0.3943 T + 0.007714 T^2 - 0.0000646 T^3 + \quad (7.2) \\ - \sigma(8.41 - 0.256 T + 0.00374 T^2)10^{-5}$$

Le acque superficiali non inquinate sono in genere prossime alla saturazione. Un certo grado di soprasaturazione può risultare dalla presenza di organismi viventi quali le alghe che, attraverso l'azione clorofilliana, consumano anidride carbonica emettendo ossigeno. L'analisi del contenuto di ossigeno di un'acqua inquinata debolmente è di grande utilità poiché la presenza di ossigeno indica l'assenza di processi putrefattivi. Si definisce '*deficit di saturazione*' la differenza fra il valore di saturazione C_s alla temperatura e pressione della miscela e la concentrazione di ossigeno nella miscela C_{O_2} . Indicheremo il deficit di saturazione con

$$d = C_s - C_{O_2}$$

Il valore del deficit è spesso espresso in percentuale della saturazione. Si noti che deficit dell'ordine del 50% non pregiudicano la vita di gran parte delle specie animali.

7.2.2 Ossidazione del liquame e decadimento del BOD

Il processo di ossidazione del liquame è largamente indipendente dalla concentrazione di ossigeno presente nel liquame mentre dipende dalla quantità di sostanze organiche ancora presenti. Un'ipotesi usualmente adottata per la descrizione del processo di ossidazione è quella di proporzionalità fra la velocità del processo di ossidazione (cioè del decadimento del BOD) dC_b/dt , e il quantitativo di sostanze organiche ancora presenti di cui C_b è appunto una misura. Segue

$$\frac{dC_b}{dt} = -k_1 C_b \quad (7.3)$$

con k_1 *coefficiente di deossigenazione*, la locuzione essendo riferita all'effetto che l'ossidazione del liquame ha sul contenuto di ossigeno dell'acqua.

Il valore di k_1 risulta fortemente dipendente dalla temperatura. Un'espressione proposta per k_1 è la seguente

$$k_1 = k_{10} \cdot 1.047^{T-20} \quad (7.4)$$

con T espresso in °C e k_{10} valore di riferimento pari a

$$k_{10} = 1.16 \cdot 10^{-6} s^{-1} \quad (7.5)$$

sicché k_1 assume valori compresi fra $0.733 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ e $1.16 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ nell'intervallo 10-20 °C. Si noti tuttavia che, come osserva Streeter (1938), il valore k_{10} può variare sensibilmente in dipendenza delle caratteristiche del liquame, potendo assumere valori fino a $(0.2 \div 0.3) s^{-1}$ in acque fortemente inquinate.

7.2.3 Il processo di riareazione

Il meccanismo di riossigenazione delle acque di una corrente fluviale è controllato dal processo di scambio di ossigeno fra l'atmosfera e la corrente idrica. La legge cui soddisfa il processo di riossigenazione è facilmente interpretabile alla luce delle conoscenze relative ai processi di diffusione. Consideriamo anzitutto il caso della riareazione di una massa d'acqua in quiete. Sia V il suo volume ed A l'area della superficie libera attraverso cui avviene lo scambio di ossigeno. Quest'ultimo si attua per mezzo della diffusione fickiana attraverso la massa liquida per effetto della non uniforme distribuzione di concentrazione (Figura 7.2). Ricordando la legge di Fick, detta \mathcal{D}_{O_2} la diffusività dell'ossigeno in acqua e δ_c la scala spaziale dello strato in cui si hanno sensibili variazioni di concentrazione, il flusso di massa di ossigeno può porsi nella forma:

$$q_{O_2} \propto \mathcal{D}_{O_2} \frac{C_s - C_{O_2}}{\delta_c} = \frac{\mathcal{D}_{O_2}}{\delta_c} d \quad (7.6)$$

o, detta \dot{M}_{O_2} la massa di ossigeno scambiata:

$$\dot{M}_{O_2} \propto \frac{\mathcal{D}_{O_2} A}{\delta_c} d \quad (7.7)$$

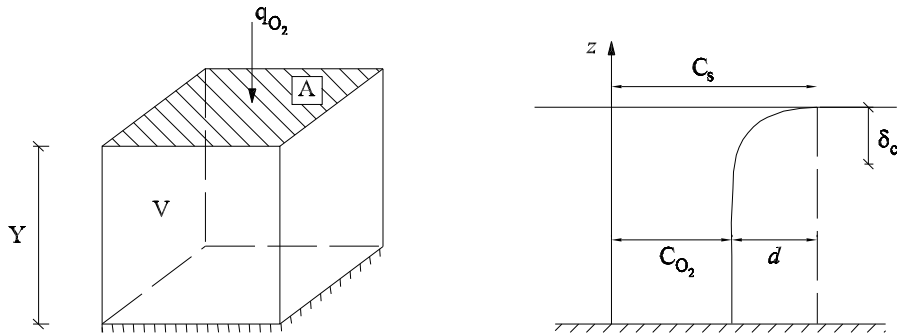


Figura 7.2: Schema del processo di riossigenazione.

Trasformando \dot{M}_{O_2} in una variazione di deficit di saturazione si ottiene la legge che descrive il processo di riossigenazione nella forma:

$$\frac{dd}{dt} = -k_2 d \quad (7.8)$$

con k_2 *coefficiente di riossigenazione* di dimensioni $[T^{-1}]$ che, per una massa liquida in quiete, ha ordine di grandezza pari a $\mathcal{D}_{O_2} A / (\delta_c V)$.

Se la massa liquida è una corrente di profondità Y in moto con velocità media U , k_2 può essere stimato sulla base di diverse relazioni disponibili in letteratura, in particolare

$$k_2 = \frac{(\mathcal{D}_{O_2} U)^{0.5}}{Y^{3/2}}$$

$$\mathcal{D}_{O_2} = 2.094 \times 10^{-9} m^2/s$$

$$U = \text{in } m/s$$

$$Y = \text{in } m$$

o

$$k_2 = 1.16 \times 10^{-5} c (1.0159^{T-20}) s^{-1}$$

$$c = 0.05 \div 0.1 \quad \text{stagni}$$

$$0.1 \div 0.15 \quad \text{grandi laghi}$$

$$0.15 \div 0.20 \quad \text{correnti molto lente}$$

$$0.20 \div 0.30 \quad \text{correnti veloci normali}$$

$$0.3 \div 0.50 \quad \text{correnti veloci}$$

$$\geq 0.5 \quad \text{rapide e cascate}$$

7.2.4 Bilancio di ossigeno in assenza di miscelamento

È d'uso nell'ambito dell'Ingegneria Sanitaria imporre il bilancio di O_2 ignorando gli effetti legati ai processi di miscelamento. Si formula così una teoria molto nota detta di Streeter-Phelps. Osserviamo che la (7.3) può risciversi in termini di d nella forma

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{dC_b}{dt} = k_1 C_b \quad (7.9)$$

tenendo conto solamente della deossigenazione. Considerando anche la riossigenazione descritta dalla 7.8 il bilancio totale di ossigeno soddisfa alla relazione

$$\frac{dd}{dt} = k_1 C_b - k_2 d \quad (7.10)$$

dove C_b è soluzione della (7.3). Dunque:

$$C_b = C_{b0} \exp(-k_1 t) \quad (7.11)$$

con C_{b0} valore iniziale del BOD del liquame. Sostituendo la (7.11) nella (7.10) segue:

$$\frac{dd}{dt} - k_2 d = k_1 C_{b0} \exp(-k_1 t) \quad (7.12)$$

La (7.12) ammette la soluzione

$$d = C_{b0} \frac{k_1}{k_2 - k_1} [\exp(-k_1 t) - \exp(-k_2 t)] + d_0 \exp(-k_2 t) \quad (7.13)$$

La (7.13) descrive un processo per cui la deossigenazione della corrente conseguente all'ossigenazione dei liquami prevale inizialmente sulla riareazione per lasciare poi posto al prevalere di quest'ultimo processo quando il BOD del liquame si è sufficientemente ridotto. L'andamento della soluzione (7.13) è rappresentato in Figura 7.3 dove è riportata la funzione C_{O_2}/C_s al variare del tempo t , cioè l'evoluzione della concentrazione di ossigeno disciolto in percentuale rispetto alla saturazione.

La curva, detta *oxigen sag curve* nella letteratura anglosassone, presenta un minimo. Essa cessa di essere valida se C_{O_2} assume valori negativi e per valori molto grandi di t quando la (7.13) cessa di essere valida con k_2 costante. Il massimo di d posto che esista, si ottiene facilmente. Esso si verifica all'istante t_m espresso dalla relazione:

$$t_m = \frac{1}{k_2 - k_1} \ln \left[\frac{k_2}{k_1} \left(1 - \frac{d_0(k_2 - k_1)}{C_{b0} k_1} \right) \right] \quad (7.14)$$

La (7.14) ha soluzioni positive solo se vige le seguente condizione

$$C_{b0} k_1 > d_0 k_2 \quad \text{ovvero} \quad \frac{C_{b0}}{d_0} > \frac{k_2}{k_1} \quad (7.15)$$

7.3 Modellazione del bilancio di ossigeno in presenza di miscelamento

7.3.1 Il decadimento del BOD

Poiché il BOD è trattabile come un qualsiasi soluto purché si tenga conto del suo carattere reattivo, la sua evoluzione in presenza di miscelamento è descritta dalla seguente equazione di diffusione-convezione modificata:

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} + U \frac{\partial C_b}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} - k_1 C_b \quad (7.16)$$

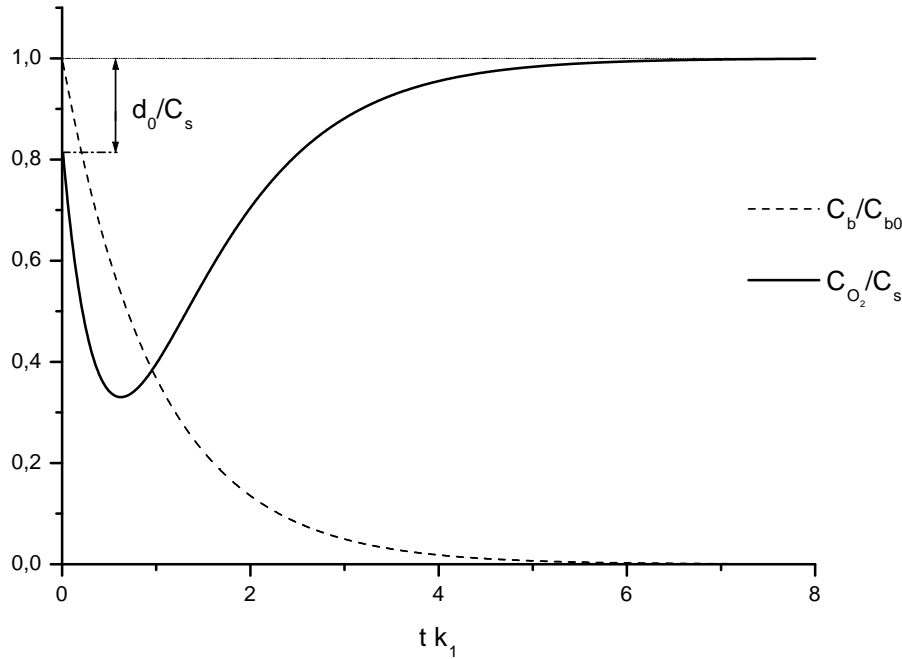


Figura 7.3: Andamento della concentrazione di ossigeno disciolto (C_{O_2}) e di BOD (C_b) in funzione del tempo in presenza di riareazione e deossigenazione. Il grafico è stato ottenuto utilizzando i seguenti valori: $k_1 = 1 \cdot 10^{-6} s^{-1}$, $k_2 = 2 \cdot 10^{-6} s^{-1}$, $C_{b0} = 30 mg/l$, $C_s = 12 mg/l$, $d_0 = 2 mg/l$.

Scarico stazionario. Nel caso stazionario vale

$$U \frac{\partial C_b}{\partial x} = k \frac{\partial^2 C_b}{\partial x^2} - k_1 C_b \quad (7.17)$$

La (7.17) va risolta con le condizioni al contorno

$$C_b \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (7.18)$$

$$\int_0^\infty k_1 C_b \Omega dx = (\Omega U) C_{b0} = \dot{M}_b \quad (7.19)$$

Naturalmente l'uso della (7.19) ipotizza che la soluzione della (7.17) risulti nota a partire dalla sezione d'immissione dell'effluente. La soluzione della (7.17) si ottiene in modo assai semplice ed ha la forma:

$$\begin{aligned} C_b &= C_{b0} \exp \left[-\frac{Ux}{2k} (\sqrt{\alpha + 1} - 1) \right] \\ &= C_{b0} \exp \left[-\frac{k_1 x}{U} \frac{2}{\alpha} (\sqrt{\alpha + 1} - 1) \right] \end{aligned} \quad (7.20)$$

dove

$$\alpha = \frac{4Kk_1}{U^2} \quad (7.21)$$

Si noti che la condizione $\alpha \ll 1$ equivale alla trascurabilità del termine dispersivo. In tal caso è facile mostrare che la (7.17) si riduce, al minimo ordine d'approssimazione, alla (7.3).

Si noti inoltre che la (7.20) non risulta valida nelle immediate vicinanze della sezione di efflusso, sicché la costante C_{b0} non risulta determinabile semplicemente imponendo la (7.19). Operando, tuttavia, in tal modo si otterrebbe:

$$C_{b0} = \frac{\dot{M}_b}{Q} \left[\frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha + 1} - 1 \right] \quad (7.22)$$

Il procedimento precedente è soggetto ad una sottile contraddizione. Si noti infatti che la distanza necessaria per il miscelamento trasversale è di ordine di grandezza:

$$x_t \simeq c_1 \frac{Ub^2}{\mathcal{D}_z^T} \quad (7.23)$$

mentre la scala del puro decadimento biochimico longitudinale è di ordine

$$x_d \sim \frac{U}{k_1} \quad (7.24)$$

Dunque, ricordando che $K \simeq c_2 U^2 b^2 / K_y$, si trova

$$\frac{x_d}{x_t} \simeq \frac{K}{k_1 c_1 B^2} = \frac{c_2 U^2}{k_1 K c_1} = \frac{4c_2}{c_1 \alpha} = \frac{c}{\alpha} \quad (7.25)$$

cioè

$$x_d > x_t \implies \alpha < c \quad (7.26)$$

Ne consegue che:

- se risulta $\alpha > c$ il materiale decade prima che si realizzi il miscelamento trasversale sicché la (7.17) non rappresenta un modello adeguato e occorre invece fare riferimento ad un modello numerico;
- se risulta $\alpha < c$ la (7.20) si riduce alla semplice soluzione relativa al caso di puro decadimento discusso al punto precedente.

Dunque, nel caso di *input stazionario* la (7.20) non sembra mai significativa.

Scarico istantaneo. Non così tuttavia nel caso non stazionario in cui gli effetti dispersivi si fanno sentire nel campo lontano. In questo caso l'equazione di evoluzione del BOD può porsi nella forma:

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C_b}{\partial \hat{x}^2} - k_1 C_b \quad (7.27)$$

con

$$\hat{x} = x - Ut \quad (7.28)$$

La soluzione della (7.27) può agevolmente determinarsi utilizzandone il carattere lineare. Si ponga infatti

$$C_b = \exp(-k_1 t) \beta(\hat{x}, t) \quad (7.29)$$

Sostituendo la (7.29) nella (7.27) si ottiene facilmente

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \beta}{\partial \hat{x}^2} \quad (7.30)$$

e la (7.30) è la classica forma dell'equazione di dispersione longitudinale di cui conosciamo numerose soluzioni. In particolare la soluzione relativa all'immissione di una massa M_b di BOD all'istante iniziale nella sezione iniziale si scrive:

$$C_b = \frac{M_b}{\Omega \sqrt{4\pi K t}} \exp \left[-\frac{\hat{x}^2}{4Kt} - k_1 t \right] \quad (7.31)$$

Nel caso generale in cui l'input segue una legge temporale arbitraria si fa riferimento a procedimenti numerici.

7.3.2 Il bilancio di ossigeno

Nota la soluzione per $C_b(\hat{x}, t)$ il bilancio di ossigeno soddisfa all'equazione di conservazione:

$$\frac{\partial C_{0_2}}{\partial t} + U \frac{\partial C_{0_2}}{\partial x} = k_2 d - k_1 C_b + K \frac{\partial^2 C_{0_2}}{\partial x^2} \quad (7.32)$$

Segue, per il deficit $d = C_s - C_{0_2}$, l'equazione:

$$\frac{\partial d}{\partial t} + U \frac{\partial d}{\partial x} = k_1 C_b - k_2 d + K \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} \quad (7.33)$$

o, con riferimento al sistema solidale con il moto medio:

$$\frac{\partial d}{\partial t} = K \frac{\partial^2 d}{\partial \hat{x}^2} - k_2 d + k_1 C_b \quad (7.34)$$

Parte III

Dispositivi di smaltimento degli inquinanti: meccanica dei getti, pennacchi e getti galleggianti

Capitolo 8

GETTI E PENNACCHI TURBOLENTI

La turbolenza si dice *libera* se evolve senza subire l'influenza di pareti che delimitano il campo di moto. Appartengono a questa classe di moti, in particolare, i getti, le scie e gli strati di miscelamento.

8.1 Turbolenza libera quasi-unidirezionale

8.1.1 Forma semplificata delle equazioni di Reynolds

La caratteristica comune a getti, scie e strati di miscelamento è la *lenta variazione del moto medio nella direzione longitudinale*. Consideriamo anzitutto il caso di moti piani. Estenderemo successivamente l'analisi al caso di moti assialsimmetrici. Siano dunque U e V le componenti cartesiane della velocità media riferite agli assi x ed y . Utilizzando il carattere lento delle variazioni in x del campo di velocità è possibile operare alcune approssimazioni atte a semplificare considerevolmente le equazioni del moto. Sia U_s la scala delle variazioni trasversali e longitudinali della velocità U , l la scala spaziale su cui avvengono le variazioni trasversali ed L la scala spaziale delle variazioni longitudinali (vedi Figura 8.1). L'equazione di continuità fornisce allora la scala V_s delle variazioni di V . Dovendo infatti sussistere il bilancio espresso nella forma:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (8.1)$$

segue

$$V_s \sim O\left(U_s \frac{l}{L}\right) \quad (8.2)$$

Esaminiamo ora l'equazione di Reynolds nella direzione y :

$$UV_{,x} + VV_{,y} + (\overline{uv})_{,x} + (\overline{v^2})_{,y} = -\frac{1}{\rho}P_{,y} + \nu(V_{,xx} + V_{,yy}) \quad (8.3)$$

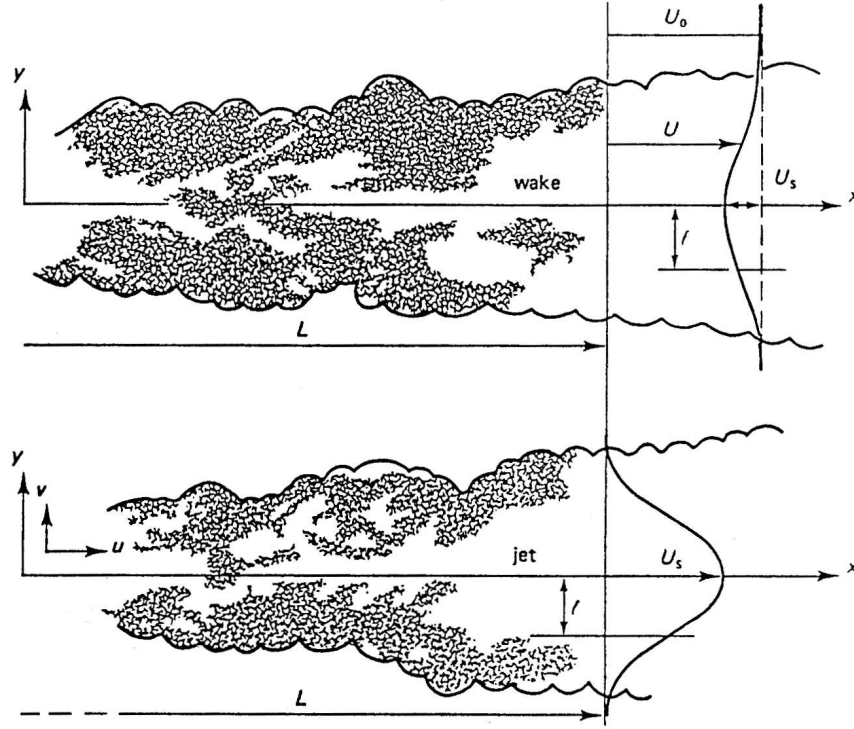


Figura 8.1: Schemi di getto e scia.

Detta \mathcal{U} la scala delle U , da non confondere con la scala U_s delle variazioni di U (si noti che $\mathcal{U} = U_s$ per getti e strati di miscelamento, mentre $\mathcal{U} \neq U_s$ nel caso delle scie), i termini della (8.3) si stimano immediatamente nella forma

$$\left(\mathcal{U} U_s \frac{l}{L^2} \right) \quad \left(U_s \frac{l}{L} \right)^2 \frac{1}{l} \quad \frac{q^2}{L} \quad \frac{q^2}{l} \quad \frac{\mathcal{P}}{\varrho l} \quad \left(\nu \frac{U_s l}{L^3} \right) \quad \left(\nu \frac{U_s}{lL} \right)$$

avendo indicato con ϱq^2 la scala delle tensioni di Reynolds e con \mathcal{P} la scala delle variazioni trasversali della pressione. Dividendo ovunque per $\mathcal{U} U_s / l$ gli ordini di grandezza relativi dei vari termini della (8.3) si ottengono nella forma:

$$\left(\frac{l}{L} \right)^2 \quad \frac{U_s}{\mathcal{U}} \left(\frac{l}{L} \right)^2 \quad \left(\frac{q^2}{\mathcal{U} U_s L} \right) \quad \left(\frac{q^2}{\mathcal{U} U_s} \right) \quad \frac{\mathcal{P}}{\varrho \mathcal{U} U_s} \quad \left(\frac{l}{L} \right)^2 \quad \frac{1}{R_L} \quad \frac{1}{R_L}$$

con

$$R_L = \frac{\mathcal{U} L}{\nu} \quad (8.4)$$

Assumiamo che $q^2 / \mathcal{U} U_s$ tenda a zero più lentamente di l/L ; essendo R_L molto grande i termini più importanti dell'equazione sono

$$\left[\left(\frac{1}{\varrho} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \quad \text{e} \quad (\overline{v^2})_{,y}$$

Vedremo nel seguito che la condizione

$$\frac{\left(\frac{l}{L}\right)^2}{\frac{q^2}{\mathcal{U}U_s}} \rightarrow 0 \quad (8.5)$$

è in realtà sempre soddisfatta. La (8.3) porge dunque

$$\frac{P}{\varrho} + \overline{v^2} = \text{cost} \quad (8.6)$$

Veniamo infine all'equazione di Reynolds nella direzione x , che può porsi nella forma:

$$UU_{,x} + VU_{,y} + \left(\overline{u^2} - \overline{v^2}\right)_{,x} + (\overline{uv})_{,y} = \nu (U_{,xx} + U_{,yy}) \quad (8.7)$$

avendo utilizzato la (8.6) per la valutazione del termine $\frac{1}{\varrho}P_{,x}$. Seguono le scale:

$$\left(\mathcal{U}\frac{U_s}{L}\right) \quad \left(U_s\frac{l}{L}\frac{U_s}{l}\right) \quad \frac{q^2}{L} \quad \frac{q^2}{L} \quad \frac{q^2}{l} \quad \nu\frac{U_s}{L^2} \quad \nu\frac{U_s}{l^2}$$

o, moltiplicando ovunque per l :

$$\left(\mathcal{U}U_s\frac{l}{L}\right) \quad \left(U_s^2\frac{l}{L}\right) \quad q^2\frac{l}{L} \quad q^2\frac{l}{L} \quad q^2 \quad \left(\frac{l}{L}\frac{U_s\mathcal{U}}{R_L}\right) \quad \left(\frac{L}{l}\frac{U_s\mathcal{U}}{R_L}\right)$$

Se R_L è sufficientemente grande i termini viscosi risultano trascurabili. Inoltre risultano trascurabili i termini nelle tensioni di Reynolds nella direzione trasversale rispetto a quello nella tensione tangenziale. Affinchè sussista un bilancio fra i termini più grandi della (8.7) deve dunque verificarsi la condizione:

$$\frac{\frac{q^2}{\mathcal{U}U_s}}{\frac{l}{L}} \sim O(1) \quad (8.8)$$

La (8.8) può essere soddisfatta in diversi modi nelle diverse possibili configurazioni di moto. È qui opportuno distinguere il caso dei getti e strati di miscelamento da quello delle scie. Nel caso dei getti si ha $\mathcal{U} = U_s$. Dunque la (8.8) impone

$$\frac{q}{U_s} \sim O\left(\frac{l}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.9)$$

Si noti che la (8.9) conferma la validità della (8.5). Nel caso dei getti (e, vedremo, degli strati di miscelamento) la (8.7) si riduce dunque alla relazione

$$UU_{,x} + VU_{,y} + (\overline{uv})_{,y} = 0 \quad (8.10)$$

La (8.10) suggerisce che la diffusione turbolenta trasversale di quantità di moto longitudinale è bilanciata dalla convezione, longitudinale e trasversale, della quantità di moto longitudinale associata al moto medio. Si noti poi che la (8.9) impone la condizione:

$$R_L^{-1} \ll \left(\frac{l}{L}\right)^2 \quad (8.11)$$

per la trascurabilità dei termini viscosi della (8.7). Vedremo nel seguito che per i getti l/L risulta pressoché costante e pari a $6 \cdot 10^{-2}$. La (8.11) dunque equivale alla disuguaglianza:

$$R_L \gg 280 \quad (8.12)$$

8.2 Getti piani e assialsimmetrici

8.2.1 Visualizzazione di getti

La Figura 8.2 mostra un getto piano turbolento. Si osserva che l'interfaccia fra il fluido del getto e il fluido ambiente ha la struttura di un'onda che ingloba parte del fluido ambiente in particelle che poi si disintegrano dando luogo al miscelamento dei due fluidi. Meccanismo analogo appare evidente nella Figura 8.3 che mostra un getto assialsimmetrico.

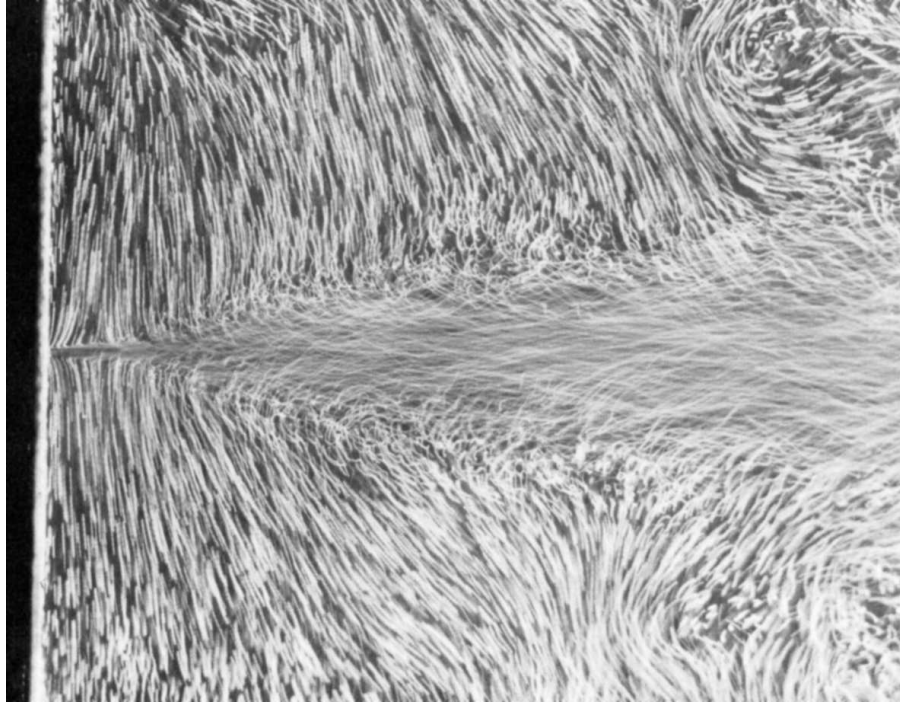


Figura 8.2: Fotografia di un getto piano turbolento da una parete alla velocità di 30 cm/s (ONERA photograph, Werlé 1974).

8.2.2 L'ipotesi di autosimilarità

Le osservazioni sperimentali suggeriscono la validità dell'*ipotesi di autosimilarità* per la quale la struttura del moto medio e le proprietà statistiche del-



Figura 8.3: Fotografia di un getto assialsimmetrico turbolento da un tubo di 9 mm di diametro alla velocità di 200 cm/s (ONERA photograph, Werlé 1974).

la turbolenza dei getti si mantengono identiche procedendo verso valle, sono cioè rappresentabili dalle stesse funzioni purché la coordinata trasversale venga normalizzata rispetto alla scala spaziale trasversale $l(x)$. Poniamo dunque

$$U = U_m(x) f(\xi) \quad \xi = \frac{y}{l(x)} \quad (8.13)$$

con U_m velocità media in asse. Segue, per l'equazione di continuità:

$$V = - \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy = -l \int_0^\xi \left(\frac{dU_m}{dx} f - \frac{U_m}{l} f' \xi \frac{dl}{dx} \right) d\xi \quad (8.14)$$

con $' \equiv \frac{d}{d\xi}$. L'ipotesi di autosimilarità e la (8.10) suggeriscono inoltre di porre

$$-\overline{uv} = U_m^2 g(\xi) \quad (8.15)$$

Dunque la (8.10) diventa:

$$\frac{l}{U_m} \frac{dU_m}{dx} f^2 - \frac{dl}{dx} \xi f f' - \frac{l}{U_m} \frac{dU_m}{dx} f' \int_0^\xi f d\xi + \frac{dl}{dx} f' \int_0^\xi \xi f' d\xi = g' \quad (8.16)$$

L'autosimilarità è possibile solo se la (8.16) si trasforma in un'equazione differenziale ordinaria nella variabile indipendente ξ . Affinché ciò si verifichi deve risultare

$$\frac{dl}{dx} = \text{cost} \quad \frac{l}{U_m} \frac{dU_m}{dx} = \text{cost} \quad (8.17)$$

Le (8.17) sono soddisfatte se risulta

$$l \propto x \quad U_m \propto x^n \quad (8.18)$$

con n intero arbitrario.

8.2.3 Soluzione autosimilare per i getti piani

Nello stadio di evoluzione iniziale un getto è in realtà costituito da due strati di miscelamento separati da una regione di moto irrotazionale. A valle della sezione dove i due strati confluiscono si vanno realizzando le condizioni di autosimilarità descritte al punto 8.2.2 (Figura 8.4).

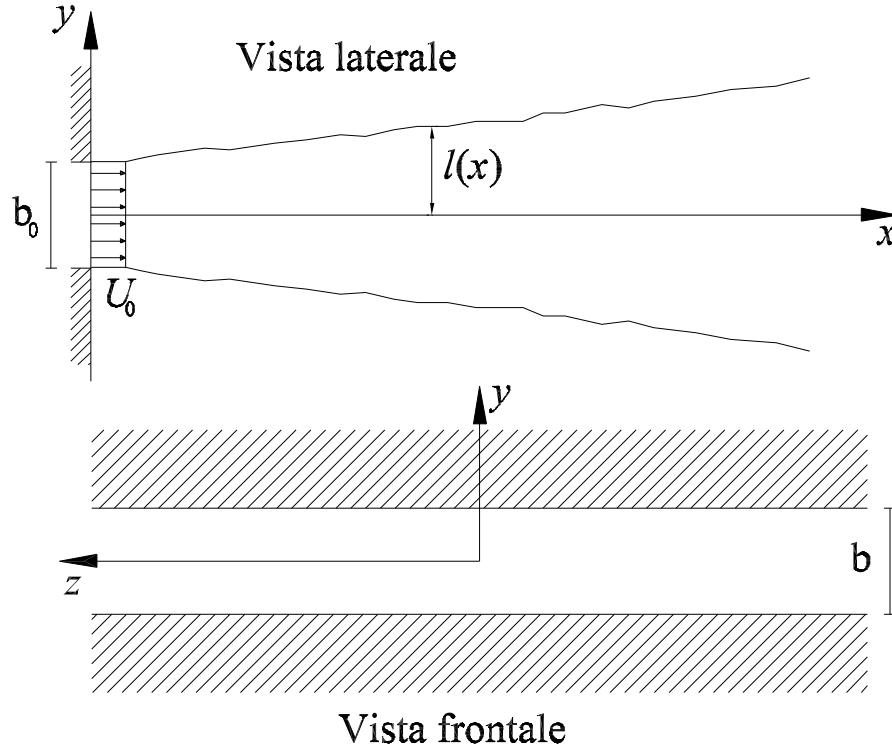


Figura 8.4: Schema di un getto piano turbolento.

Al fine di determinare le caratteristiche della soluzione autosimilare è anzitutto opportuno valutare l'invariante del moto costituito dalla quantità di moto che attraversa la generica sezione del getto nell'unità di tempo. Integrando la (8.10) fra $-\infty$ e $+\infty$ in dy e ricordando che U e \overline{uv} si annullano allontanandosi sufficientemente dal getto segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy = M = \text{cost} \quad (8.19)$$

cioè M è un invariante del moto. Ricordando le (8.13) si può porre M nella forma

$$M = U_m^2 l \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\xi) d\xi = U_0^2 b$$

essendo U_0 la velocità iniziale (posta uniforme) del getto e b la sua larghezza. Ricordando che $U_m \propto x^n$ e $l \propto x$ ne consegue che, per la costanza di M , deve risultare:

$$2n + 1 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$$

In altre parole per valori sufficientemente grandi di x deve risultare

$$\frac{U_m}{U_0} = \text{cost} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (8.20)$$

Il numero di Reynolds Re cresce invece come $x^{1/2}$: dunque un getto turbolento piano permane tale anche a grandi distanze dalla sezione iniziale. Al fine di pervenire all'integrazione della (8.16) è infine necessario formulare un'ipotesi di chiusura. Una semplice, ma sufficientemente adeguata, ipotesi è quella della costanza nella sezione della viscosità turbolenta ν_T definita nella forma

$$\nu_T = -\frac{\overline{uv}}{\frac{dU}{dy}} \quad (8.21)$$

Dunque

$$\nu_T = \frac{-U_m l g}{f'} \quad (8.22)$$

Si noti che l'ipotesi di costanza della ν_T è strettamente associata a quella della autosimilarità ed è sostanzialmente fondata sull'idea che il mixing turbolento è ovunque molto intenso nella sezione. Utilizzando la (8.22), la (8.16) si trasforma nella relazione

$$-\frac{1}{2} \frac{dl}{dx} R_T \left[f^2 + f' \int_0^\xi f d\xi \right] = f'' \quad (8.23)$$

essendo R_T il numero di Reynolds turbolento definito nella forma

$$R_T = \frac{U_m l}{\nu_T} \quad (8.24)$$

Si noti che per l'autosimilarità il valore di R_T nella (8.23) deve risultare necessariamente costante nella direzione longitudinale. Esso va determinato sperimentalmente. Essendo l definito convenzionalmente è opportuno porre

$$\frac{dl}{dx} = \frac{2}{R_T}$$

il che, vedremo, equivale a definire l come la distanza dell'asse alla quale U raggiunge il valore $U_m \exp(-1/2)$. Utilizzando tale convenzione la (8.23) si integra immediatamente nella forma

$$f = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.25)$$

Tale soluzione è in buon accordo con l'esperienza se si pone:

$$l = 0.078 x \quad R_T = 25.7 \quad U_m = 2.7 \left(\frac{b}{x} \right)^{1/2} U_0 \quad (8.26)$$

L'ipotesi di autosimilarità si rivela sperimentalmente adeguata per valori di x superiori a $5b$.

8.2.4 II caso dei getti assialsimmetrici

I getti assialsimmetrici si comportano in modo analogo ai getti piani. Anche in questo caso si presenta una zona di sviluppo del moto per una distanza pari a circa 6 diametri del getto iniziale; il getto perviene quindi ad uno stato di 'equilibrio' circa 10 diametri a valle della sezione iniziale.

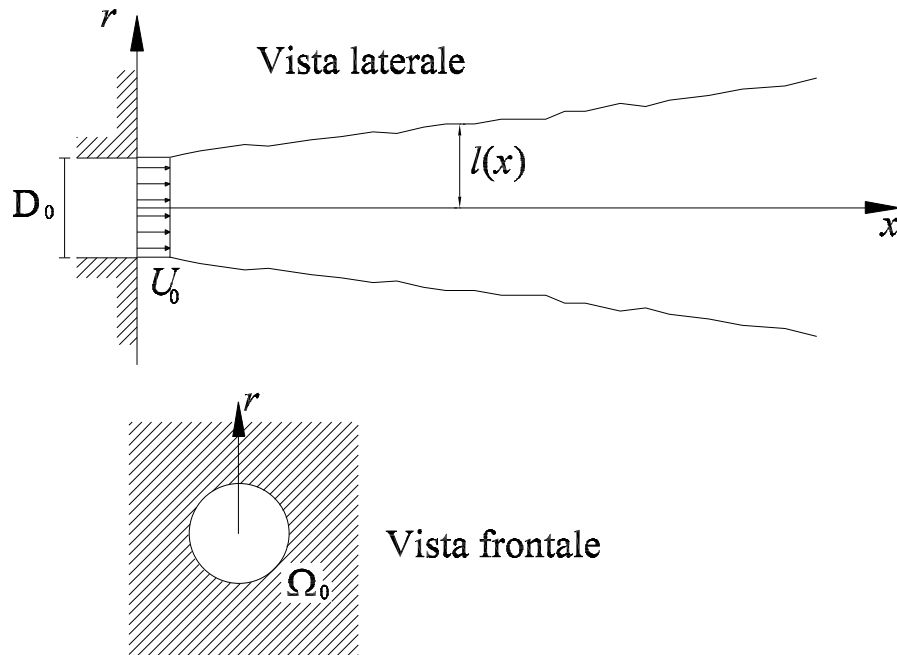


Figura 8.5: Schema di un getto assialsimmetrico turbolento.

La struttura della soluzione similare può porsi nella forma

$$U = U_m f \left(\frac{r}{l} \right) \quad (8.27)$$

con r coordinata radiale ed l distanza dall'asse alla quale U raggiunge una frazione di U_m (velocità in asse) convenzionalmente fissata. I risultati sperimentali sono bene interpretati se alla f si attribuisce la seguente struttura Gaussiana

$$f = \exp \left[- \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \quad (8.28)$$

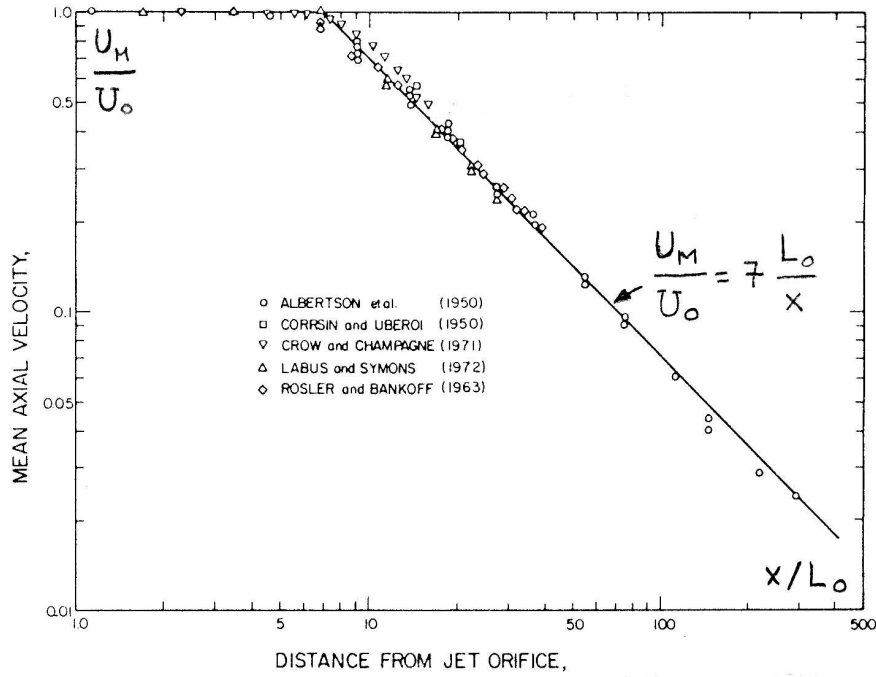


Figura 8.6: Decadimento del picco della velocità media sull'asse di un getto circolare turbolento.

La (8.28) implica che l è definita come distanza radiale alla quale $U = (1/e) U_m$. Anche per i getti assialsimmetrici U_m è funzione della distanza x dalla sezione iniziale del getto. È opportuno rendere adimensionale tale distanza normalizzandola con una misura delle dimensioni iniziali del getto, ad esempio:

$$L_0 = \frac{Q_0}{M^{1/2}} \propto \sqrt{\Omega_0} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} D_0 \quad (8.29)$$

con Ω_0 area della sezione iniziale del getto, D_0 relativo diametro e Q_0 portata volumetrica iniziale e M la quantità di moto definita in questo caso come

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 2\pi r dr = \alpha U^2 \Omega = \alpha Q U \quad (8.30)$$

Nel caso dei getti assialsimmetrici il decadimento della velocità è più rapido che nel caso dei getti piani. Si trova sperimentalmente e teoricamente:

$$U_m \frac{Q_0}{M} = a_1 \frac{L_0}{x} \quad (x \gg L_0) \quad (8.31)$$

con a_1 costante per la quale i risultati sperimentali suggeriscono un valore pari a 0.7 ± 0.1 (vedi Figura 8.6).

Si noti che tale risultato vale solo per valori del numero di Reynolds R sufficientemente grandi. Si noti che per i getti assialsimmetrici risulta

$$R = \frac{U_m l}{\nu} = \text{cost} \quad (8.32)$$

Autori	a_2	a_3
Albertson <i>et al.</i> (1950)	0.114	-
Becker <i>et al.</i> (1967)	-	0.127
Corrsin (1943)	0.100	0.132
Corrsin and Uberoi (1950)	0.114	0.140
	0.130	0.156
Forstall and Gaylord (1955)	0.107	0.115
Hinze and van der Hegge Zijnen (1949)	0.102	0.115
Keagy and Weller (1949)	0.099	0.107
	0.106	0.126
Kizer (1963)	0.099	0.125
Rosenweig <i>et al.</i> (1961)	0.108	0.120
Ruden (1933)	0.103	0.124
Sunvala <i>et al.</i> (1957)	-	0.141
Uberoi and Garby (1967)	0.090	0.101
	0.101	0.114
Wilson and Danckwerts (1964)	0.120	0.156
	0.114	0.138
Valori medi	0.107	0.127
	± 0.003	± 0.004

Tabella 8.1: Parametri relativi a getti circolari turbolenti.

Infatti si trova per l una relazione del tipo:

$$l = a_2 x \quad (8.33)$$

con a_2 costante per la quale si stima un valor medio pari a 0.107 (vedi Tabella 8.1).

Le (8.31, 8.33) implicano

$$R = (a_1 a_2) M^{1/2} \frac{1}{\nu} \quad (8.34)$$

I risultati precedenti sono validi per $R > 3000$. La distribuzione di velocità (8.27, 8.28, 8.31) implica una crescita lineare della portata volumetrica Q nella direzione longitudinale. Si ha infatti:

$$Q = \int_0^\infty U 2\pi r dr = \pi U_m l^2 \quad (8.35)$$

donde

$$Q = Q_0 \left[0.25 \frac{x}{L_0} \right] \quad (x \gg L_0) \quad (8.36)$$

La Figura 8.7 mostra un confronto della (8.36) con i risultati sperimentali. Anche per la distribuzione di concentrazione di un tracciante passivo si trova una distribuzione di tipo gaussiano della forma

$$C = C_m \exp \left[- \left(\frac{r}{l_c} \right)^2 \right] \quad (8.37)$$

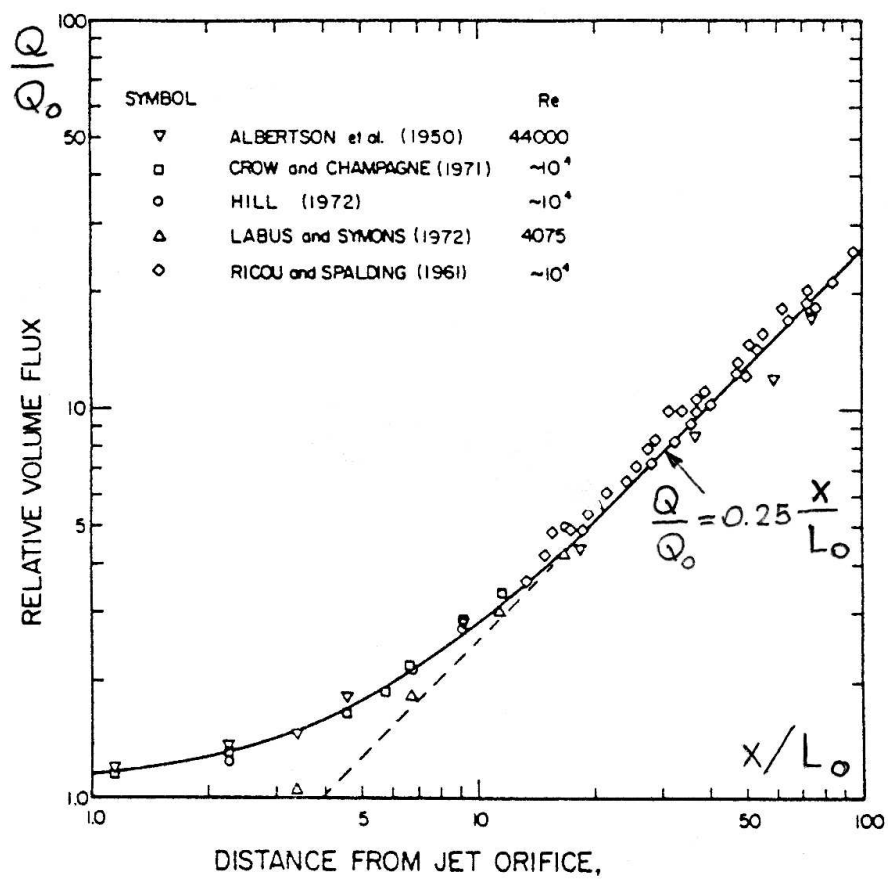


Figura 8.7: Diluizione in funzione della distanza lungo l'asse di un getto turbolento a sezione circolare.

con

$$l_c = a_3 x$$

Il valore di a_3 (vedi Tabella 8.1) si aggira intorno a 0.127. Torniamo alla distribuzione di concentrazione di traccianti passivi espressa nella forma (8.37). Anche C_m valor medio della concentrazione assiale risulta inversalmente proporzionale ad x . Si trova che:

$$\frac{C_m}{C_0} = a_4 \frac{L_0}{x} \quad (8.38)$$

con a_4 costante per la quale Chen & Rodi (1976) suggeriscono il valore di 5.64. Sia \dot{m} la massa di tracciante immessa nell'unità di tempo nella sezione iniziale, dunque

$$\dot{m} = C_0 Q_0 \quad (8.39)$$

con C_0 concentrazione massica iniziale. La concentrazione media C nella generica sezione è dunque definita dalla relazione di conservazione

$$CQ = \dot{m} = C_0 Q_0 \quad (8.40)$$

Utilizzando le (8.35, 8.37) segue:

$$\begin{aligned} CQ &= \int_0^{+\infty} 2\pi r U C dr + \text{trasporto turbolento} \\ &= \pi U_m C_m \left(\frac{l^2 l_c^2}{l^2 + l_c^2} \right) + \text{trasporto turbolento} \end{aligned} \quad (8.41)$$

La (8.41) consente una stima del rapporto fra trasporto turbolento e trasporto totale. Si trova

$$\frac{\text{trasporto turbolento}}{\text{trasporto totale}} = 1 - \frac{\pi U_m C_m}{C_0 Q_0} \left(\frac{l^2 l_c^2}{l^2 + l_c^2} \right) = 0.17 \pm 0.12 \quad (8.42)$$

dove l'incertezza è associata all'incertezza nella valutazione delle diverse costanti che intervengono nella valutazione della (8.41). Infine si ha, per le (8.36, 8.38, 8.40):

$$\frac{C_m}{C} = 1.4 \pm 0.1 \quad (8.43)$$

Riassumiamo infine nella Tabella 8.2 le caratteristiche principali di getti piani ed assialsimmetrici.

8.3 Pennacchi

8.3.1 Formulazione per pennacchi stazionari

In un mezzo che si dilata se riscaldato un corpo più caldo dell'ambiente produce un getto di fluido caldo che si muove verso l'alto per effetto delle differenze di densità. Meccanismo simile interviene se una massa di fluido meno (o più) denso

	Assialsimmetrici	Piani
Scala delle lunghezze L_0	$\sqrt{\Omega_0} = \frac{Q_0}{M^{1/2}}$	$b_0 = \frac{Q_0^2}{M}$
Velocità massima U_m	$\frac{U_m}{U_0} = 7 \frac{L_0}{x}$	$\frac{U_m}{U_0} = 2.41 \left(\frac{L_0}{x}\right)^{1/2}$
Concentrazione massima C_m	$\frac{C_m}{C_0} = 5.6 \frac{L_0}{x}$	$\frac{C_m}{C_0} = 2.38 \left(\frac{L_0}{x}\right)^{1/2}$
Diluizione	$\frac{Q}{Q_0} = 0.25 \frac{x}{L_0}$	$\frac{Q}{Q_0} = 0.5 \left(\frac{x}{L_0}\right)^{1/2}$
Scala di velocità trasversale	$\frac{dl}{dx} = 0.107$	$\frac{dl}{dx} = 0.116$
Scala di concentrazione trasversale	$\frac{dl_c}{dx} = 0.127$	$\frac{dl_c}{dx} = 0.157$
Rapporto di concentrazione C_m/C	1.4 ± 0.1	1.2 ± 0.1

Tabella 8.2: Caratteristiche dei getti piani ed assialsimmetrici.

dell'ambiente viene immesso in esso con trascurabile quantità di moto iniziale. Tali moti possono essere studiati in modo simile ai getti utilizzando il concetto di autosimilarità. Faremo riferimento nel seguito al caso di pennacchi caldi, in cui cioè l'azione motrice dipende da differenze di temperatura. Le equazioni del moto che utilizzeremo sono le equazioni di Reynolds in cui si tiene conto degli effetti di galleggiamento attraverso l'approssimazione di Boussinesq¹. Dunque, per pennacchi stazionari, si ha:

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{v_i v_j} = -\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i^2} + g \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} \delta_{j3} \quad (8.44)$$

essendo P la pressione dinamica media; la temperatura istantanea T è stata decomposta nella forma

$$T = \bar{T} + \vartheta \quad (8.45)$$

con ϑ fluttuazione turbolenta di media nulla. Alla (8.44) va associata l'equazione di continuità in cui si può trascurare il termine $d\rho/dt$ se il numero di Mach è sufficientemente piccolo, dunque

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \quad (8.46)$$

Infine l'equazione del calore, nella forma mediata idonea al moto turbolento stazionario in esame, si scrive

$$V_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\vartheta v_j} = k \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_i^2} \quad (8.47)$$

con k diffusività termica.

¹L'approssimazione di Boussinesq consiste nel confondere ϱ con ϱ_0 , densità alla temperatura di riferimento T_0 , ovunque tranne che nel termine gravitazionale in cui si fa uso dell'equazione di stato nella forma linearizzata $\varrho = \varrho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$. La (8.44) si ottiene allora dalle equazioni di Reynolds sottraendovi la componente statica $(-\varrho_0 g x_3)$, con $x_3 = z$, della pressione e osservando che per un aeriforme trattato come un gas perfetto si ha $\alpha = 1/T \simeq 1/T_0$. Nel caso dei liquidi la (8.44) vige ancora se si interpreta g come una gravità efficace definita nella forma $(g\alpha T_0)$.

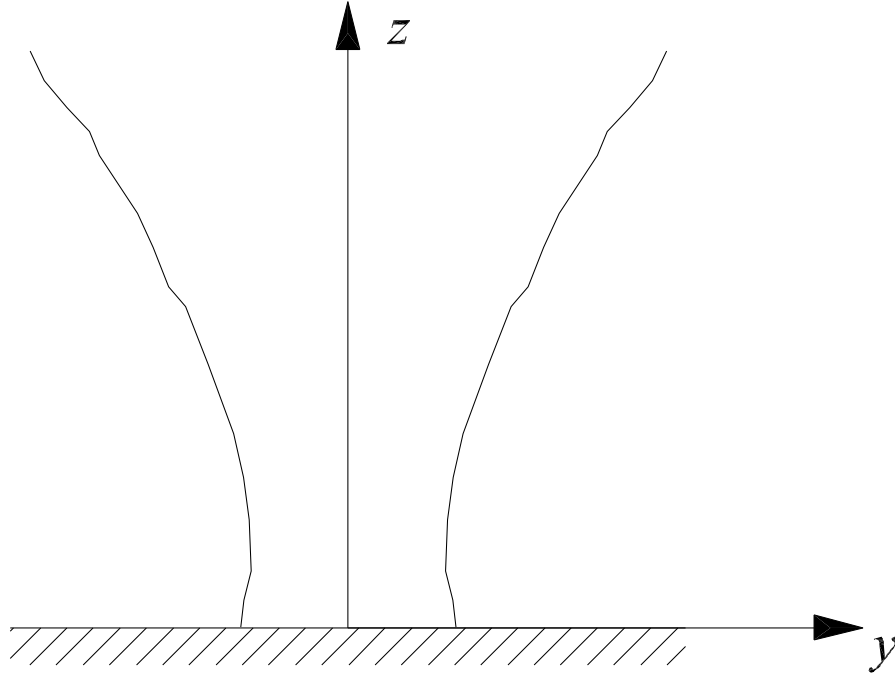


Figura 8.8: Struttura quasi unidirezionale di un pennacchio.

8.3.2 Pennacchi stazionari bidimensionali

Consideriamo ora pennacchi stazionari bidimensionali originati da una sorgente lineare di calore. Sia z l'asse verticale positivamente diretto verso l'alto, e x un asse ortogonale a z , lungo il quale si assume localizzata la sorgente. Segue:

$$\mathbf{V} \equiv (0, V, W) \quad \frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \quad (8.48)$$

Assumiamo che il pennacchio abbia una struttura quasi unidirezionale come per i getti ordinari. Dunque assumiamo (vedi Figura 8.8).

$$\frac{\partial}{\partial z} \sim O\left(\frac{1}{L}\right) \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim O\left(\frac{1}{l}\right) \quad \Delta W \sim O(W_m) \quad (8.49)$$

L'equazione di continuità impone, allora, come nel caso dei getti:

$$V \sim \left(W_m \frac{l}{L}\right) \quad (8.50)$$

L'equazione di Reynolds nella direzione y , ottenuta dalla (8.44), è identica al caso dei getti piani e fornisce, quindi, lo stesso risultato:

$$P + \varrho_0 \overline{v^2} = P_0 \quad (8.51)$$

dunque la pressione efficace P_0 risulta costante sui piani orizzontali. L'equazione

di Reynolds nella direzione z , tenendo conto della (8.51), si scrive:

$$W \frac{\partial W}{\partial z} + V \frac{W}{y} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w^2} - \overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{wv}) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} + g \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W \quad (8.52)$$

Lontano dall'asse del pennacchio il fluido è in quiete e la (8.52), detta T_a la temperatura dell'ambiente, si riduce alla relazione:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} + g \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} = 0 \quad (8.53)$$

Segue

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} + g \frac{\bar{T} - T_0}{T_0} = g \frac{\bar{T} - T_a}{T_0} \quad (8.54)$$

Nel seguito assumeremo $\bar{T}_a = \text{costante}$ (una scelta diversa renderebbe l'auto-similarità non possibile). Inoltre, senza perdita di generalità, possiamo riferire \bar{T} a \bar{T}_a , cioè porre $T_a = 0$. Una analisi degli ordini di grandezza dei termini della (8.52) simile a quella operata nel caso dei getti ordinari conduce allo stesso risultato eccetto che per la presenza del termine di galleggiamento, dunque la (8.52) si riduce alla forma

$$W \frac{\partial W}{\partial z} + V \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{wv} = g \frac{\bar{T}}{T_0} \quad (8.55)$$

Affinchè il termine di galleggiamento sia importante quanto i termini dinamici deve risultare

$$\frac{\mathcal{T}_m}{T_0} \sim \frac{q^2}{lg} \quad (8.56)$$

con \mathcal{T}_m scala delle variazioni della temperatura media e q^2 già definito nel paragrafo 8.1.1. Inoltre, come nel caso dei getti ordinari deve risultare

$$R_l^{-1} \sim \left(\frac{l}{L} \right)^{3/2}, \quad \frac{q}{W_m} \sim O \left(\frac{l}{L} \right)^{1/2} \quad (8.57)$$

Infine l'equazione della temperatura si scrive

$$W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + V \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w\vartheta} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v\vartheta} = k \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \quad (8.58)$$

Detta τ la scala delle ϑ , gli ordini di grandezza dei termini della (8.58) sono rispettivamente

$$\left(\frac{W_m \mathcal{T}_m}{L} \right) \quad \left(\frac{W_m \mathcal{T}_m}{L} \right) \quad \left(\frac{q\tau}{L} \right) \quad \left(\frac{q\tau}{l} \right) \quad \left(\frac{k \mathcal{T}_m}{L^2} \right) \quad \left(\frac{k \mathcal{T}_m}{l^2} \right)$$

La (8.58) si riduce quindi alla relazione

$$W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + V \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v\vartheta}}{\partial y} = 0 \quad (8.59)$$

se risulta

$$\frac{q\tau}{l} \sim \frac{W_m \mathcal{T}_m}{L} \Rightarrow \tau \sim \frac{T_0 q}{Lg} \Rightarrow \frac{\tau}{\mathcal{T}_m} \sim \left(\frac{l}{L}\right)^{1/2} \quad (8.60)$$

$$\frac{k\mathcal{T}_m}{l^2} \ll \frac{q\tau}{l} \Rightarrow \frac{k}{\nu} \frac{\nu}{W_m l} \ll \frac{q}{W_m} \frac{\tau}{\mathcal{T}_m} \sim \left(\frac{l}{L}\right) \quad (8.61)$$

dove sono state utilizzate le (8.56) e (8.57). La (8.60) può porsi nella forma

$$R_l^{-1} \ll \frac{\nu}{k} \left(\frac{l}{L}\right) \quad (8.62)$$

Nei gas è $\nu/k \simeq 1$ mentre nei liquidi $\nu/k \simeq 10$, dunque la (8.62) risulta meno restrittiva per i liquidi che per i gas.

8.3.3 Soluzione autosimilare

L'autosimilarità richiede che risulti

$$\frac{\tau}{\mathcal{T}_m} = \text{cost} \quad , \quad \frac{q}{W_m} = \text{cost} \quad (8.63)$$

Ricordando le (8.57) e (8.60), dalla (8.62) segue

$$l \propto z \quad (8.64)$$

essendo L identificabile con la distanza z dalla sezione iniziale del pennacchio. Essendo τ/\mathcal{T}_m e q/W_m costanti è possibile utilizzare W_m e \mathcal{T}_m quali scale di velocità e temperatura. L'autosimilarità impone quindi

$$W = W_m f(\xi) \quad , \quad \bar{T} = \mathcal{T}_m F(\xi) \quad (8.65)$$

con

$$\xi = \frac{y}{l} \quad (8.66)$$

Inoltre

$$-\overline{wv} = W_m^2 g(\xi) \quad , \quad -\overline{\vartheta v} = \mathcal{T}_m W_m h(\xi) \quad (8.67)$$

Naturalmente W_m e \mathcal{T}_m risultano funzioni di z . Sostituendo le (8.65, 8.66, 8.67) nelle (8.55) e (8.59) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{l}{W_m} \frac{dW_m}{dz}\right) f' \int_0^\xi f d\xi + \left(\frac{dl}{dz}\right) f' \int_0^\xi \xi f' d\xi + \\ & \left(\frac{l}{W_m} \frac{dW_m}{dz}\right) f^2 - \left(\frac{dl}{dz}\right) \xi f f' - g' = \frac{g}{T_0} \frac{\mathcal{T}_m l}{W_m^2} F \end{aligned} \quad (8.68)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{l}{W_m} \frac{dW_m}{dz}\right) F' \int_0^\xi \xi f d\xi + \left(\frac{dl}{dz}\right) F' \int_0^\xi \xi f' d\xi + \\ & \left(\frac{l}{\mathcal{T}_m} \frac{d\mathcal{T}_m}{dz}\right) f F - \left(\frac{dl}{dz}\right) \xi f F' = h' \end{aligned} \quad (8.69)$$

L'ipotesi di autosimilarità applicata alle (8.68, 8.69) impone che risulti:

$$\frac{l}{W_m} \frac{dW_m}{dz} = c_1 \quad , \quad \frac{dl}{dz} = c_2 \quad , \quad \frac{l}{T_m} \frac{dT_m}{dz} = c_3 \quad , \quad \frac{g}{T_0} \frac{T_m l}{W_m^2} = c_4 \quad (8.70)$$

con c_{1-4} costanti. Le (8.70) sono soddisfatte se:

$$l = c_2 z \quad , \quad W_m \propto z^n \quad , \quad T_m \propto z^{2n-1} \quad (8.71)$$

Al fine di determinare il valore di n è necessario imporre una condizione integrale simile alla costanza della quantità di moto dei getti ordinari. Nel caso dei pennacchi la quantità di moto non si conserva perchè si ha una continua conversione di energia potenziale associata agli effetti di galleggiamento in energia cinetica sicché anche la quantità di moto va continuamente crescendo. Tuttavia si realizza per i pennacchi la *costanza del flusso di calore*.

8.3.4 Costanza del flusso di calore

La (8.59) integrata sulla sezione fornisce

$$\int_{-\infty}^{\infty} W \bar{T} dy = \frac{H}{\varrho c_p} = \text{costante} \quad (8.72)$$

con H flusso di calore per unità di larghezza del pennacchio. Le (8.65) sostituite nella (8.72) forniscono

$$l T_m W_m \int_{-\infty}^{\infty} f F d\xi = \text{costante} \quad (8.73)$$

donde

$$1 + (2n - 1) + n = 0$$

cioè

$$n = 0$$

e le (8.71) diventano

$$l \propto z \quad , \quad W_m = \text{cost} \quad , \quad T_m = z^{-1} \quad (8.74)$$

8.3.5 Distribuzioni di velocità e temperatura

La (8.74) implica che la (8.68) assuma una forma semplificata che può essere ricondotta alla struttura seguente:

$$-\frac{dl}{dz} f' \int_0^\xi f d\xi - g' = \frac{g}{T_0} \frac{T_m l}{W_m^2} F \quad (8.75)$$

Analogamente la (8.69) si semplifica nella

$$h' = -\frac{dl}{dz} F' \int_0^\xi f d\xi + \frac{l}{T_m} \frac{dT_m}{dz} f F \quad (8.76)$$

La (8.76) si integra una volta immediatamente nella forma

$$h = -\frac{dl}{dz} F \int_0^\xi f d\xi \quad (8.77)$$

avendo posto

$$\frac{dl}{dz} + \frac{l}{T_m} \frac{dT_m}{dz} = 0 \quad (8.78)$$

Si noti che la (8.78) risulta identicamente soddisfatta come conseguenza delle (8.74). Al fine di integrare il sistema (8.75)-(8.77) è necessario introdurre una ipotesi di chiusura che anche in questo caso consiste nella costanza della viscosità turbolenta e inoltre della diffusività termica turbolenta. Quest'ultima ipotesi equivale ad assumere la validità dell'analogia di Reynolds che consiste nel ritenere che, essendo il calore un tracciante passivo (cioè tale da non influenzare la meccanica della turbolenza) il suo trasporto turbolento debba essere governato da un meccanismo analogo a quello del trasporto di quantità di moto. Poniamo, come nel caso dei getti ordinari:

$$\frac{dl}{dz} = \frac{1}{R_T} = \frac{\nu_T}{W_m l} \quad (8.79)$$

Vedremo che ciò equivale ad assumere che la distanza del bordo convenzionale del pennacchio dal suo asse sia tale che in corrispondenza di tale bordo si abbia $f \simeq \exp[-(1/2)]$ (vedi Rouse, Yih & Humphreys, 1952). Posto dunque:

$$-\overline{wv} = \nu_T W_{,y} = \frac{\nu_T W_m}{l} f' = \frac{W_m^2}{R_T} f' \quad (8.80)$$

e ricordando la (8.67) segue:

$$g = \frac{f'}{R_T} \quad (8.81)$$

Inoltre, posto:

$$-\overline{\vartheta v} = \nu_T \bar{T}_{,y} = \frac{\nu_T T_m}{l} F' = \frac{1}{R_T} W_m T_m F' \quad (8.82)$$

e ricordando la (8.67) segue:

$$h = \frac{F'}{R_T} \quad (8.83)$$

Le (8.75) e (8.77) diventano allora

$$-f' \int_0^\xi f d\xi - f'' = \frac{g}{T_0} \frac{T_m l}{W_m^2} R_T F \quad (8.84)$$

$$F' = -F \int_0^\xi f d\xi \quad (8.85)$$

con $F = f = 1$ in $\xi = 0$ per definizione. La soluzione delle (8.84)-(8.85) viene approssimata con

$$f \simeq F \simeq \exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\right] \quad (8.86)$$

La (8.84) particolarizzata in $\xi = 0$ pone dunque:

$$\frac{g}{T_0} \frac{\mathcal{T}_m l}{W_m^2} R_T = 1 \quad (8.87)$$

essendo $f''|_{\xi=0} = -1$. Inoltre dalle (8.72, 8.73) segue:

$$\frac{H}{\varrho c_p} = l \mathcal{T}_m W_m \quad (8.88)$$

Le (8.87, 8.88) pongono:

$$W_m^3 \simeq \frac{g R_T H}{T_0 \varrho c_p}, \quad \mathcal{T}_m \simeq \frac{R_T H}{\varrho c_p W_m} \frac{1}{z} = \frac{T_0}{g} \frac{W_m^2}{z} \quad (8.89)$$

Nel caso dei pennacchi assialsimmetrici si ha $R_T = 14$ (simile risultato non è noto per il caso di pennacchi piani). Posto dunque $R_T = 14$ e noto H si determinano i valori di W_m e \mathcal{T}_m attraverso le (8.89) in ciascuna configurazione.

8.3.6 Pennacchi assialsimmetrici

Mostriamo ora come risultati analoghi a quelli ottenuti per i pennacchi piani possono ottenersi in modo più semplice sulla base di pure considerazioni dimensionali e risultati sperimentali, con riferimento al caso di pennacchi assialsimmetrici. Assumeremo nel seguito che l'origine del pennacchio non sia necessariamente una sorgente di flusso di calore bensì una sorgente di flusso di galleggiamento specifico B .

$$\varrho B = \int_{\Omega} g W \Delta \varrho(z) d\Omega \quad (8.90)$$

con $\Delta \varrho$ differenza fra la densità nel generico punto della sezione Ω del pennacchio e la densità ϱ del fluido ambiente. La nozione di *flusso di galleggiamento* generalizza quella di flusso di calore H . Posto, infatti, $\Delta \varrho = \varrho_a \alpha (\bar{T} - \bar{T}_a)$ la (8.90) diventa:

$$B = \int_{\Omega} g \alpha (\bar{T} - \bar{T}_a) W d\Omega \quad (8.91)$$

donde, utilizzando \bar{T}_a come riferimento per le temperature, il confronto con la (8.72) porge:

$$B = \frac{H}{\varrho c_p} g \alpha \quad (8.92)$$

la cui dimensione è

$$[B] = \frac{L T^{-2} \mathcal{T}_m^{-1} Q T^{-1}}{Q L^{-3} \mathcal{T}_m^{-1}} = L^4 T^{-3} \quad (8.93)$$

Il valore iniziale di B è nel seguito indicato con B_0 . Indicata con z la distanza verticale dalla sezione iniziale e con ν la viscosità cinematica, sembra ragionevole assumere che la velocità del pennacchio dipenda dalla causa forzante

identificata col flusso di galleggiamento iniziale, dalla distanza dalla sorgente z e dalle proprietà del fluido ν ; dunque:

$$W_m = W_m(B_0, z, \nu) \quad (8.94)$$

Applicando il teorema π segue:

$$W_m = \left(\frac{B_0}{z}\right)^{1/3} f\left(\frac{B_0^{1/3} z^{2/3}}{\nu}\right) \quad (8.95)$$

con

$$R = \frac{B_0^{1/3} z^{2/3}}{\nu} = \frac{(B_0^{1/3} z^{-1/3}) z}{\nu}$$

numero di Reynolds caratteristico del pennacchio. Se $z \gg \nu^{3/2}/B_0^{1/2}$ il numero di Reynolds è sufficientemente grande affinché il moto nel pennacchio sia turbolento pienamente sviluppato sicché la dipendenza da ν nella (8.95) scompare e si trova

$$W_m = b_1 \left(\frac{B_0}{z}\right)^{1/3} \quad (8.96)$$

I risultati sperimentali di Rouse & al. (1952) suggeriscono per b_1 il valore 4.7. Come nel caso dei pennacchi piani il flusso di quantità di moto del pennacchio va crescendo con z per effetto della continua trasformazione di energia potenziale in energia cinetica. Procedendo come sopra si ottiene facilmente

$$M = b_2 B_0^{2/3} z^{4/3} \quad (8.97)$$

Il valore sperimentalmente ottenuto per b_2 è pari a 0.35. Analogamente per la portata volumetrica del pennacchio si trova

$$Q = b_3 B_0^{1/3} z^{5/3} \quad (8.98)$$

con $b_3 \simeq 0.15$. Dunque, a sufficiente distanza dalla sezione iniziale la portata volumetrica, e, quindi, la diluizione del pennacchio, crescono con la potenza $5/3$ di z anziché linearmente come nel caso del getto (in cui M è costante). Si noti che dalle (8.97, 8.98) segue

$$R_p = Q \frac{B_0^{1/2}}{M^{5/4}} = b_3 b_2^{-5/4} = 0.557 \quad (8.99)$$

con R_p *numero di Richardson* del pennacchio che risulta dunque costante. Si noti poi che una forma alternativa per Q è la seguente

$$Q = c_p M^{1/2} z \quad (8.100)$$

con

$$c_p = \frac{b_3}{\sqrt{b_2}} \simeq 0.254$$

Posto

$$W = W_m \exp \left[- \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right] \quad (8.101)$$

Grandezza	Pennacchio piano	Pennacchio assialsimmetrico
Flusso di galleggiamento (iniziale) B_0	$B_0 = g \frac{\Delta \rho}{\rho_a} U_0 b_0$	$B_0 = g \frac{\Delta \rho}{\rho_a} U_0 \Omega_0$
Valore massimo di velocità (media) W_m	$W_m = 1.66 B_0^{1/3}$	$W_m = (4.7 \pm 0.2) B_0^{1/3} z^{-1/3}$
Valore massimo di temperatura (media) \mathcal{T}_m	$\mathcal{T}_m = 2.38 \frac{H}{\rho c_p} B_0^{-1/3} z^{-1}$	$\mathcal{T}_m = (9.1 \pm 0.5) \frac{H}{\rho c_p} B_0^{-1/3} z^{-5/3}$
Portata volumetrica Q	$q = 0.34 B_0^{1/3} z$	$Q = (0.15 \pm 0.015) B_0^{1/3} z^{5/3}$
Valore massimo di concentrazione (media) C_m	$C_m = 2.38 B_0^{-1/3} z^{-1} \dot{m}$	$C_m = 9.1 B_0^{-1/3} z^{-5/3} \dot{M}$
Scala trasversale della distribuzione di velocità $\frac{l}{z}$	0.116 ± 0.002	0.1 ± 0.005
Scala trasversale della distribuzione di temperatura $\frac{l_T}{z}$	0.157 ± 0.003	0.12 ± 0.005
Rapporto $\frac{\mathcal{T}_m}{\mathcal{T}}$	0.81 ± 0.1	1.4 ± 0.2

Tabella 8.3: Caratteristiche dei pennacchi piani e assialsimmetrici.

definita cioè la scala trasversale l tale che per $y = l$ sia $W = W_m/e$ i risultati precedenti suggeriscono che deve risultare:

$$l = b_4 \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \quad (8.102)$$

con

$$b_4 = 0.25 \quad (8.103)$$

Sia H il flusso di calore (o in generale B il flusso di galleggiamento del tracciante passivo) e \mathcal{T}_m il massimo di temperatura (o in generale della concentrazione del tracciante). Segue

$$\left[\frac{\rho c_p \mathcal{T}_m}{H} \right] = T L^{-3} \quad (8.104)$$

donde

$$\mathcal{T}_m = b_5 B_0^{-1/3} z^{-5/3} \frac{H}{\rho c_p} \quad (8.105)$$

con $b_5 \simeq 9.1$ (Chen & Rodi, 1976). Infine dai risultati precedenti, segue:

$$\mathcal{T}_m = b_3 b_5 \mathcal{T} \simeq 1.4 \mathcal{T} \quad (8.106)$$

con \mathcal{T} temperatura media nella sezione del pennacchio. Riassumiamo nella Tabella 8.3 i risultati relativi a pennacchi piani e assialsimmetrici espressi nelle stesse variabili. I risultati relativi a pennacchi piani sono fondati su esperienze dettagliate di Kotsovinos (1975).

8.4 Getti galleggianti

8.4.1 Nozione

Un *getto galleggiante* è un getto la cui densità iniziale differisce dalla densità del corpo fluido ricettore di una quantità $\Delta\rho$ (che può risultare sia positiva sia negativa). Per i getti galleggianti svolge un ruolo importante l'inclinazione (rispetto alla verticale) dell'asse del getto che supporremo per il momento allineato verticalmente. Risulta evidente che le proprietà dei getti galleggianti debbono dipendere dalle grandezze M_0, Q_0, B_0 oltre che dalla distanza z dalla sezione d'ingresso.

8.4.2 Getti galleggianti assialsimmetrici

Iniziamo l'analisi, operando per approssimazioni successive ignorando il ruolo della portata volumetrica Q_0 . Poiché in un getto galleggiante risultano importanti come azioni motrici sia la quantità di moto iniziale M_0 sia il flusso di galleggiamento iniziale B_0 , è opportuno definire una scala longitudinale L_B significativa appunto per i getti galleggianti, nella forma

$$L_B = \frac{M_0^{3/4}}{B_0^{1/2}} \quad (8.107)$$

Con l'ausilio del teorema π si ricava quindi facilmente la relazione

$$\frac{W_m}{B_0^{1/2} M_0^{-1/4}} = f\left(\frac{z B_0^{1/2}}{M_0^{3/4}}\right) = f\left(\frac{z}{L_B}\right) \quad (8.108)$$

Ma, per $B_0 \rightarrow 0$, deve risultare W_m indipendente da B_0 e, dato il carattere adimensionale della relazione precedente, lo stesso risultato deve ottenersi anche se $z \rightarrow 0$ o $M_0 \rightarrow \infty$. Segue che la (8.108) deve tendere alla struttura

$$W_m \frac{M_0^{1/4}}{B_0^{1/2}} = c_1 \left(\frac{M_0^{3/4}}{z B_0^{1/2}} \right) \quad z \ll L_B \quad (8.109)$$

Analogamente, per $M_0 \rightarrow 0$ la (8.108) deve risultare tale che W_m non dipenda da M_0 . Segue:

$$W_m \frac{M_0^{1/4}}{B_0^{1/2}} = c_2 \left(\frac{M_0^{3/4}}{z B_0^{1/2}} \right)^{1/3} \quad z \gg L_B \quad (8.110)$$

Le c_1 e c_2 sono costanti empiriche. Le relazioni (8.109) e (8.110) rivelano che il comportamento di un getto galleggiante è del tipo *getto ordinario* (o *pennacchio*) in dipendenza dalla condizione

$$z \ll \frac{M_0^{3/4}}{B_0^{1/2}} \quad \left(\text{o} \quad z \gg \frac{M_0^{3/4}}{B_0^{1/2}} \right)$$

In altre parole, *a sufficiente distanza dalla sezione iniziale prevale sempre la struttura a pennacchio*. Per comprendere quando tale struttura si realizza fin

dall'inizio torniamo all'influenza della portata volumetrica iniziale finora trascurata. Ricordiamo che nel caso dei getti ordinari si definisce una scala spaziale L_0 nella forma

$$L_0 = \frac{Q_0}{M_0^{1/2}} \quad (8.111)$$

tale che il moto può considerarsi pienamente sviluppato e influenzato dalla geometria iniziale per valori di z tali che $z \gg L_0$ (Figura 8.9). Se dunque

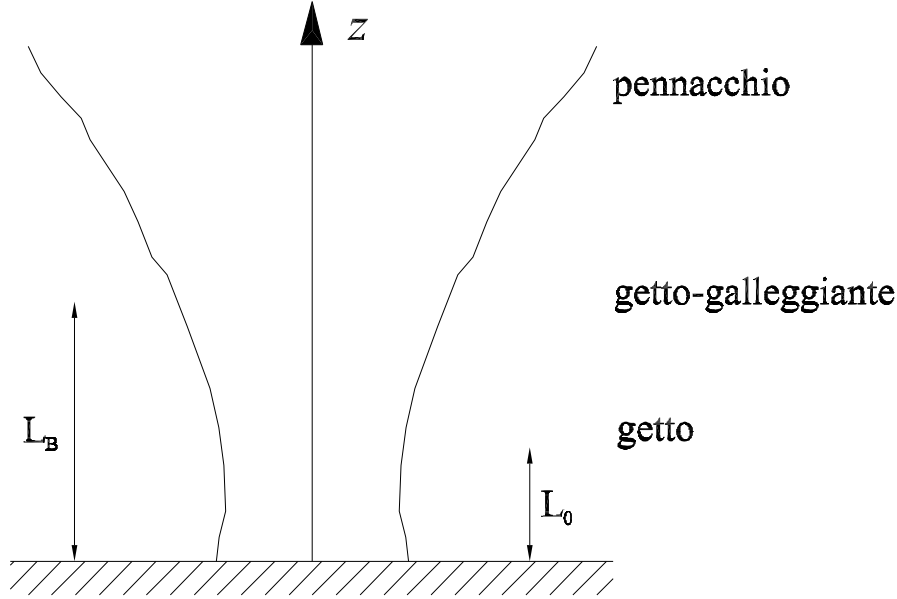


Figura 8.9: Sviluppo del getto iniziale in pennacchio.

risulta:

$$\frac{Q_0}{M_0^{1/2}} = L_0 \sim \frac{M_0^{3/4}}{B_0^{1/2}} = L_B \quad (8.112)$$

allora il getto si comporta come un pennacchio fin dall'inizio. Definiamo *numero di Richardson* del getto galleggiante R_g la quantità

$$R_g = \frac{L_0}{L_B} = \frac{Q_0 B_0^{1/2}}{M_0^{5/4}} \quad (8.113)$$

Ricordando le definizioni di Q_0 , B_0 e M_0 non è difficile mostrare che R_g può anche porsi nella forma

$$R_g = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4} \frac{1}{F_D} \quad F_D = \frac{U}{\sqrt{g'_0 D}} \quad (8.114)$$

con F_D numero di Froude densimetrico, D diametro iniziale del getto e g'_0 accelerazione di gravità apparente iniziale, definita come

$$g'_0 = g \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_0}$$

Segue:

$$L_B = \frac{L_0}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4}} F_D = 1.062 F_D L_0 \quad (8.115)$$

I risultati precedenti precedenti possono essere posti in una semplice for-

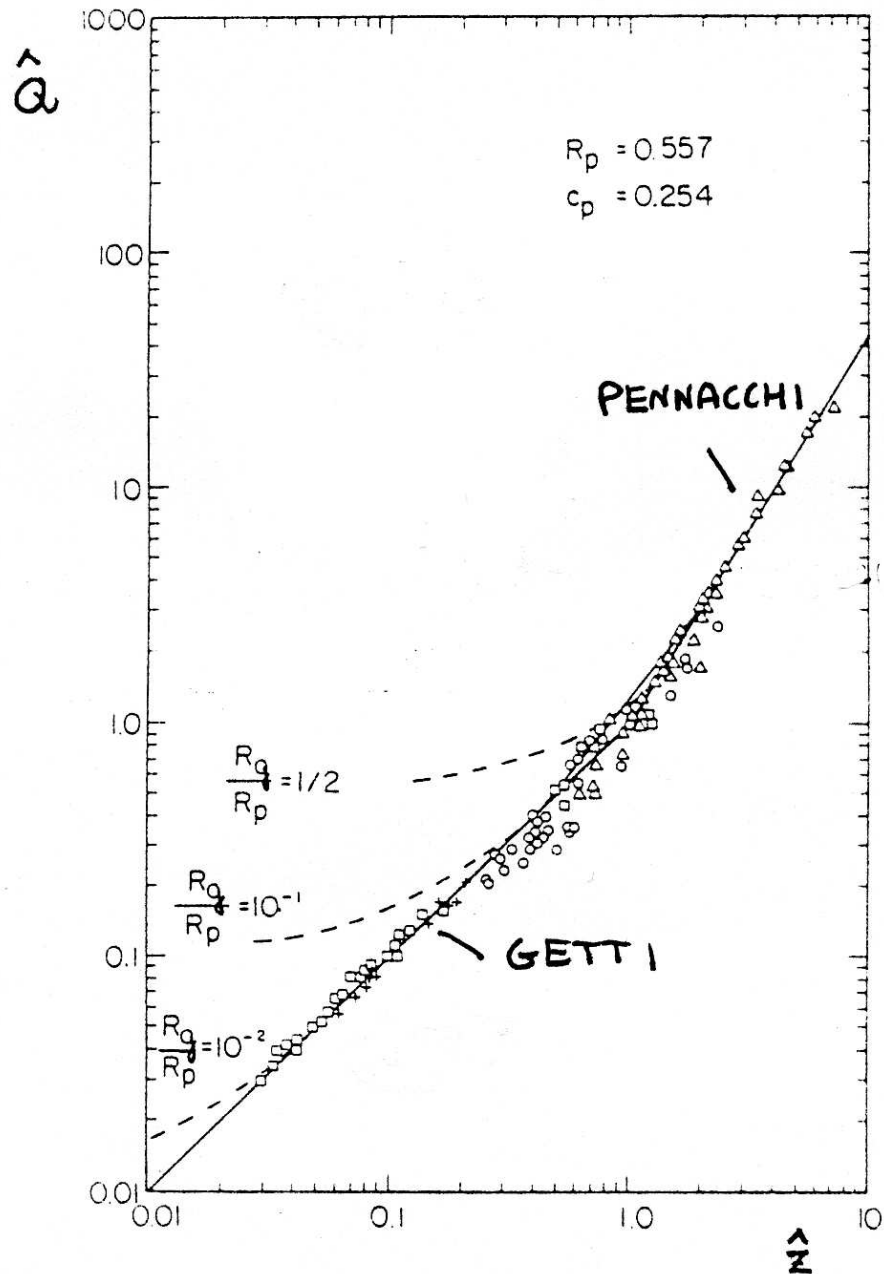


Figura 8.10: Dati relativi alla portata volumetrica dei getti ordinari e dei pennacchi (Ricou & Spalding, 1961).

ma adimensionale normalizzando la portata volumetrica Q rispetto al valore

caratteristico dei pennacchi (vedi le 8.98, 8.99), dunque:

$$Q^* = \frac{Q}{\frac{R_p M^{5/4}}{B^{1/2}}} = \frac{Q}{Q_0} \left(\frac{R_g}{R_p} \right) = \frac{1.59}{F_D} \frac{Q}{Q_0} \quad (8.116)$$

Analogamente definiamo una variabile adimensionale z^* nella forma:

$$z^* = \frac{c_p}{R_p} \frac{z}{L_B} = \frac{0.4}{F_D} \frac{z}{D} \quad (8.117)$$

Utilizzando le (8.116)(8.117) le relazioni per la portata volumetrica dei getti ordinari e dei pennacchi diventano rispettivamente

$$Q^* = z^* \quad z^* \ll 1 \quad (8.118)$$

$$Q^* = z^{*5/3} \quad z^* \gg 1 \quad (8.119)$$

Le (8.118)(8.119) forniscono un elegante e semplice risultato riportato nella Figura 8.10 in cui sono forniti anche dati di Ricou & Spalding relativi a valori di z^* nell'intervallo intermedio.

8.4.3 Getti galleggianti piani

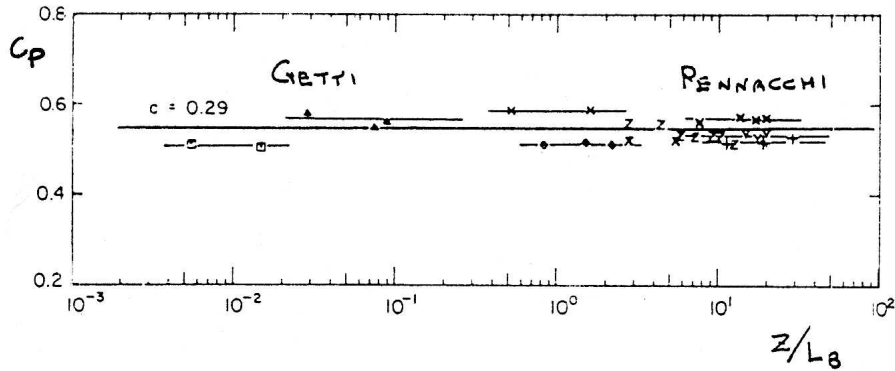


Figura 8.11: Valori di c osservati sperimentalmente da Kotsovinos (1975).

Risultati analoghi a quelli ottenuti per i getti assialsimmetrici si ottengono per i getti galleggianti piani. È opportuno qui definire

$$Q^* = \frac{Q}{R_p^{1/2} \frac{M_0}{B_0^{1/2}}} = \frac{Q}{Q_0} \left(\frac{R_g}{R_p} \right)^{1/2} \quad (8.120)$$

$$z^* = \frac{c_p}{R_p} \frac{z}{\frac{M_0}{B_0^{2/3}}} = c_p \left(\frac{z}{L_0} \right) \frac{R_g}{R_p} \quad (8.121)$$

dove R_p è il numero di Richardson del pennacchio, definito come valore asintotico del numero di Richardson locale R di un getto galleggiante piano

$$R = \frac{Q^2 B^{2/3}}{M^2} \quad (8.122)$$

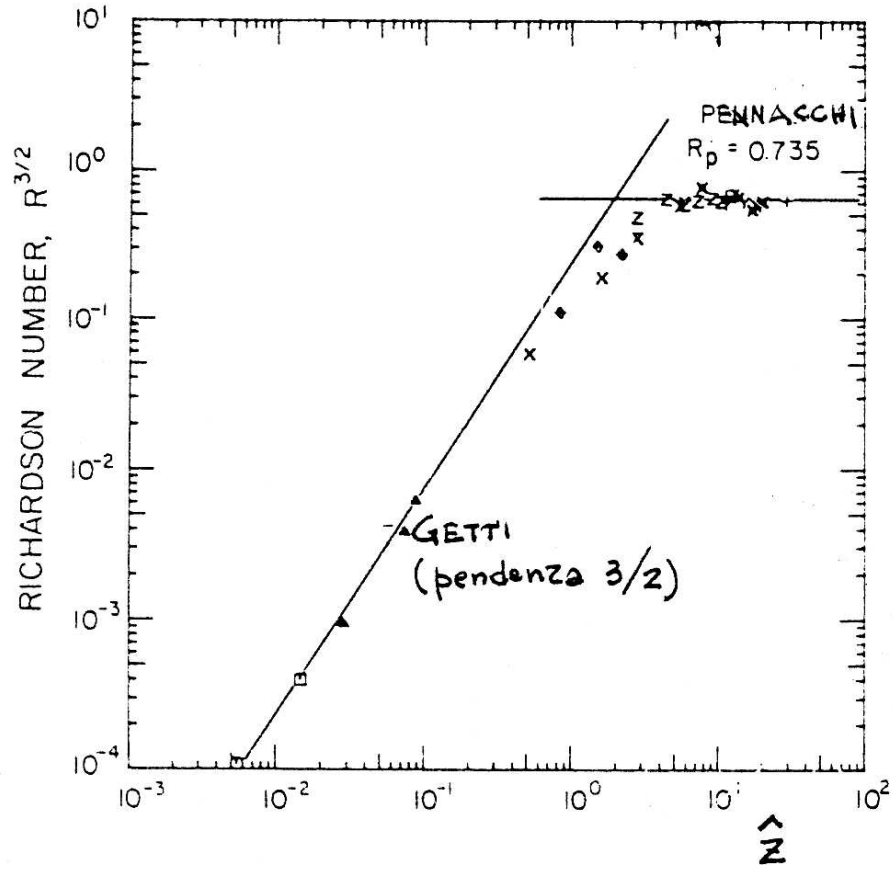


Figura 8.12: Valori di R_z osservati sperimentalmente da Kotsovinos (1975).

donde

$$R_g = \frac{Q_0^2 B_0^{2/3}}{M_0^2} \quad (8.123)$$

Analogamente c_p è il valore asintotico del parametro c che definisce la larghezza del getto nella forma

$$c = \frac{Q^2}{Mz} \quad (8.124)$$

Le Figure 8.11 e 8.12 forniscono i valori di R e c osservati sperimentalmente da Kotsovinos (1975) al variare di z^* . I valori di R_p e c_p ottenuti sono

$$R_p = 0.735 \quad , \quad c_p = 0.29 \quad (8.125)$$

I rilievi della diluizione in asse hanno inoltre mostrato un rilevante accordo con le predizioni

$$Q^* = z^{*1/2} \quad z^* \ll 1 \quad (8.126)$$

$$Q^* = z^* \quad z^* \gg 1 \quad (8.127)$$

come appare nella Figura 8.13. Infine la Figura 8.14 contiene alcuni dati relativi

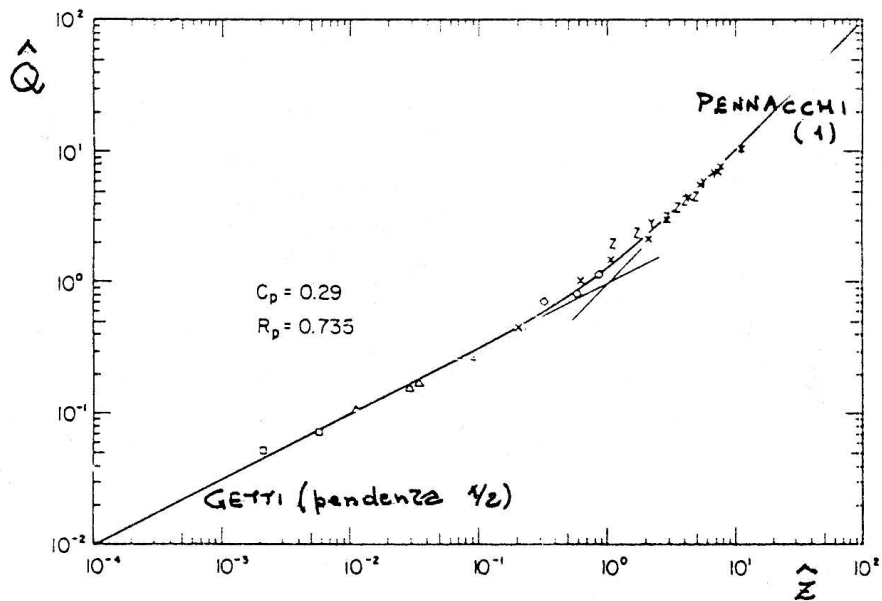
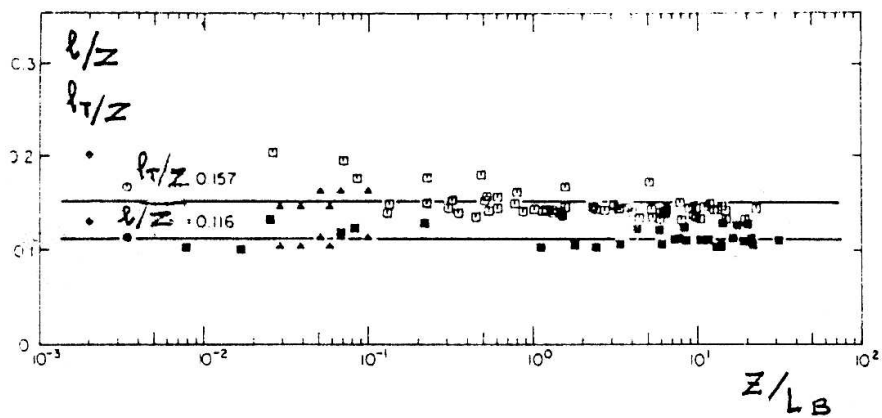


Figura 8.13: Rilievi della diluizione in asse.

a una questione dibattuta, quella del rapporto fra le scale trasversali per U e per \bar{T} , l ed l_T rispettivamente. La figura suggerisce che

$$\frac{l}{z} \sim 0.116 < \frac{l_T}{z} \simeq 0.157 \quad (8.128)$$

Figura 8.14: Rapporto fra le scale trasversali per U e \bar{T} .

Appendice A

Lista dei simboli

x	[L]	coordinata longitudinale
y	[L]	coordinata trasversale
z	[L]	coordinata verticale
\hat{x}	[L]	coordinata longitudinale nel sistema di riferimento mobile
x^*	[-]	coordinata longitudinale normalizzata
y^*	[-]	coordinata trasversale normalizzata
z^*	[-]	coordinata verticale normalizzata
x_0	[L]	coordinata longitudinale della sorgente
y_0	[L]	coordinata trasversale della sorgente
z_0	[L]	coordinata verticale della sorgente
y_0^*	[-]	coordinata trasversale della sorgente normalizzata
z_0^*	[-]	coordinata verticale della sorgente normalizzata
t	[T]	coordinata temporale
τ	[T]	coordinata temporale della sorgente non stazionaria
t_v	[T]	origine virtuale dei tempi
x_v	[L]	coordinata longitudinale dell'origine virtuale
Y	[L]	profondità locale
\bar{Y}	[L]	profondità media
b	[L]	larghezza
b_e	[L]	larghezza efficace
Ω	[L ²]	area della sezione
i_f	[-]	pendenza del fondo
h	[L]	quota del pelo libero
η	[L]	quota del fondo
R	[L]	raggio di curvatura
\mathbf{n}_s	[-]	versore normale uscente alla superficie
u	[LT ⁻¹]	componente longitudinale di velocità
v	[LT ⁻¹]	componente trasversale di velocità
w	[LT ⁻¹]	componente verticale di velocità
U	[LT ⁻¹]	velocità locale
\bar{U}	[LT ⁻¹]	velocità mediata sulla verticale

\bar{V}	[LT ⁻¹]	velocità trasversale mediata sulla verticale
U	[LT ⁻¹]	velocità mediata sulla sezione
u_*	[LT ⁻¹]	velocità d'attrito locale
\bar{u}_*	[LT ⁻¹]	velocità d'attrito mediata sulla sezione
T_y	[T]	scala temporale di mescolamento trasversale
T_z	[T]	scala temporale di mescolamento verticale
L	[L]	scala spaziale
L_x	[L]	distanza oltre la quale è valido lo schema dispersivo
L'_x	[L]	distanza oltre la quale è valida la soluzione gaussiana
L_y	[L]	distanza di mescolamento trasversale
L_z	[L]	distanza di mescolamento verticale
\mathcal{D}_x^T	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione turbolenta longitudinale
\mathcal{D}_y^T	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione turbolenta trasversale
\mathcal{D}_z^T	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione turbolenta verticale
$\overline{\mathcal{D}_x^T}$	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione turbolenta longitudinale medio
$\overline{\mathcal{D}_y^T}$	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione turbolenta trasversale medio
$\overline{\mathcal{D}_z^T}$	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione turbolenta verticale medio
$\bar{\mathcal{D}}$	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di diffusione trasversale mediato sulla sezione
D_e	[L ⁵ T ⁻²]	diffusività equivalente
\bar{D}_e	[L ⁵ T ⁻²]	diffusività equivalente media
K_x	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di dispersione turbolenta longitudinale
K_y	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di dispersione turbolenta trasversale
K	[L ² T ⁻¹]	coefficiente di dispersione in campo lontano
ν_T	[L ² T ⁻¹]	viscosità cinematica turbolenta
Sc^{turb}	[-]	numero adimensionale di Schmidt
κ	[-]	costante di Von Karman
k_1	[T ⁻¹]	coefficiente di deossigenazione
k_2	[T ⁻¹]	coefficiente di riossigenazione
C_f	[-]	coefficiente di resistenza
g	[LT ⁻²]	accelerazione di gravità
Q	[L ³ T ⁻¹]	portata volumetrica
q	[L ³ T ⁻¹]	portata volumetrica cumulata
q_0	[L ³ T ⁻¹]	portata cumulata nella posizione della sorgente
q^*	[-]	portata cumulata normalizzata
q_0^*	[-]	portata cumulata normalizzata nella posizione della sorgente
M	[M]	massa
\dot{M}	[MT ⁻¹]	portata massica
\mathbf{q}^T	[MT ⁻¹ L ⁻²]	flusso di massa turbolento
C	[ML ⁻³]	concentrazione locale
\bar{C}	[ML ⁻³]	concentrazione mediata sulla verticale

C	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione mediata sulla sezione
C^*	$[-]$	concentrazione locale normalizzata
\bar{C}^*	$[-]$	concentrazione mediata sulla verticale normalizzata
C_m	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione asintotica
C_{\min}	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione minima locale
C_{\max}	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione massima locale
\bar{C}_{\min}	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione minima mediata sulla verticale
\bar{C}_{\max}	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione massima mediata sulle verticale
C_u	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione a seguito di una sorgente unitaria
P_m	$[-]$	grado di mescolamento
C_s	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione di ossigeno in condizioni di saturazione
C_{0_2}	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione di ossigeno
C_b	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione di sostanze organiche (BOD)
C_{b0}	$[\text{ML}^{-3}]$	concentrazione iniziale di sostanze organiche (BOD)
d	$[\text{ML}^{-3}]$	deficit di saturazione
d_0	$[\text{ML}^{-3}]$	deficit iniziale di saturazione

Appendice B

Lista dei simboli Capitolo 8

x	[L]	coordinata longitudinale
y	[L]	coordinata trasversale
z	[L]	coordinata verticale
z^*	[L]	coordinata verticale normalizzata
r	[L]	coordinata radiale
b	[L]	larghezza iniziale
Ω	[L ²]	area della sezione
Ω_0	[L ²]	area della sezione iniziale
D_0	[L]	diametro iniziale
U	[LT ⁻¹]	componente longitudinale di velocità media
V	[LT ⁻¹]	componente trasversale di velocità media
W	[LT ⁻¹]	componente verticale di velocità media
u	[LT ⁻¹]	fluttuazione turbolenta di velocità longitudinale
v	[LT ⁻¹]	fluttuazione turbolenta di velocità trasversale
w	[LT ⁻¹]	fluttuazione turbolenta di velocità verticale
U_m	[LT ⁻¹]	velocità longitudinale media in asse
W_m	[LT ⁻¹]	velocità verticale media in asse
U_0	[LT ⁻¹]	velocità iniziale del getto
U_s	[LT ⁻¹]	scala delle variazioni longitudinali e trasversali della velocità U
V_s	[LT ⁻¹]	scala delle variazioni della velocità V
\mathcal{U}	[LT ⁻¹]	scala della velocità U
l	[L]	scala spaziale delle variazioni trasversali
L	[L]	scala spaziale delle variazioni longitudinali
L_B	[L]	scala longitudinale dei getti galleggianti
\mathcal{P}	[ML ⁻¹ T ⁻²]	scala delle variazioni trasversali di pressione
q^2	[LT ⁻¹]	scala delle tensioni di Reynolds
\mathcal{T}_m	[K]	scala delle variazioni di temperatura media
τ	[K]	scala delle fluttuazioni di temperatura
Q_0	[L ³ T ⁻¹]	portata volumetrica iniziale

Q	$[L^3T^{-1}]$	portata volumetrica
Q^*	$[L^3T^{-1}]$	portata volumetrica normalizzata
\dot{m}	$[MT^{-1}]$	portata massica
R_T	$[-]$	numero di Reynolds turbolento
R	$[-]$	numero di Reynolds
R_p	$[-]$	numero di Richardson del pennacchio
R_g	$[-]$	numero di Richardson del getto galleggiante
F_D	$[-]$	numero di Froude densimetrico
C	$[ML^{-3}]$	concentrazione locale
C_0	$[ML^{-3}]$	concentrazione iniziale
C_m	$[ML^{-3}]$	concentrazione media in asse
C	$[ML^{-3}]$	concentrazione media sulla sezione
M	$[L^3T^{-2}]$	quantità di moto
M_0	$[L^3T^{-2}]$	quantità di moto iniziale
H	$[JT^{-1}]$	flusso di calore
B	$[L^4T^{-3}]$	flusso di galleggiamento specifico
B_0	$[L^4T^{-3}]$	flusso di galleggiamento specifico iniziale
ϱ	$[ML^{-3}]$	densità
ϱ_0	$[ML^{-3}]$	densità alla temperatura di riferimento T_0
g	$[LT^{-2}]$	accelerazione di gravità
ν	$[L^2T^{-1}]$	viscosità cinematica
ν_T	$[L^2T^{-1}]$	viscosità cinematica turbolenta
T	$[K]$	temperatura istantanea
\bar{T}	$[K]$	temperatura media
ϑ	$[K]$	fluttuazione turbolenta di temperatura
T_a	$[K]$	temperatura ambiente istantanea
\bar{T}_a	$[K]$	temperatura ambiente media
T_0	$[K]$	temperatura di riferimento
c_p	$[JM^{-1}K^{-1}]$	calore specifico
k	$[L^2T^{-1}]$	diffusività termica
P	$[ML^{-1}T^{-2}]$	pressione dinamica media

Elenco delle tabelle

4.1	Risultati sperimentali per $\overline{\mathcal{D}}_z^T$	11
5.1	Prove di laboratorio: valori sperimentali di \overline{D}_y^T	30
5.2	Misure di campo di K_y	32
6.1	Dati sperimentali relativi a K	51
8.1	Parametri relativi a getti circolari turbolenti.	86
8.2	Caratteristiche dei getti piani ed assialsimmetrici.	89
8.3	Caratteristiche dei pennacchi piani e assialsimmetrici.	97

Elenco delle figure

4.1	Schematizzazione di sorgente lineare distribuita.	12
4.2	Linee a C^* costante relative all'efflusso da una sorgente distribuita lineare (modello a coefficienti costanti).	13
4.3	Linee a C^* costante relative all'efflusso da una sorgente distribuita lineare (modello a coefficienti costanti).	14
4.4	Grado di miscelamento in funzione della distanza a valle di una sorgente (lineare) distribuita nel modello a coefficienti costanti. .	15
4.5	Confronto fra i profili di concentrazione nei modelli a U e \mathcal{D}_z^T costanti.	17
4.6	Andamento della profondità ottimale di scarico nei modelli a coefficienti costanti e variabili, in funzione di $f = 8C_f$	18
4.7	Linee isoconcentrazione nel caso del modello a coefficienti variabili e confronto fra le distanze di mescolamento nei modelli a coefficienti costanti e variabili.	19
4.8	Linee isoconcentrazione nel caso del modello a coefficienti variabili	20
4.9	Schematizzazione di sorgente puntuale.	21
4.10	Distribuzione delle linee isoconcentrazione nel piano per una sorgente puntuale localizzata.	22
5.1	Rilievi sperimentali di $\overline{\mathcal{D}_y^T}$ in canali rettilinei a sezione rettangolare di laboratorio.	32
5.2	Valori del coefficiente K_y di dispersione trasversale rilevati in corsi d'acqua rettilinei e meandriformi.	34
5.3	Moto secondario indotto dalla curvatura in un canale a pelo libero.	35
5.4	Schema di sorgente lineare in canale a sezione rettangolare. . . .	38
5.5	Linee isoconcentrazione adimensionale a valle di una sorgente lineare verticale posizionata in $y_0^* = 0$ ottenute sulla base di un modello a coefficienti costanti.	39
5.6	Linee isoconcentrazione adimensionale a valle di una sorgente lineare verticale posizionata in $y_0^* = 0.25$ ottenute sulla base di un modello a coefficienti costanti.	40
5.7	Linee isoconcentrazione adimensionale a valle di una sorgente lineare verticale posizionata in $y_0^* = 0.5$ ottenute sulla base di un modello a coefficienti costanti.	40
5.8	Grado di mescolamento trasversale per una sorgente lineare verticale nell'ambito del modello a coefficienti costanti.	41

5.9	Rilievo di concentrazione presso Albuquerque effettuato da Fischer	42
5.10	Rilievi di concentrazione effettuati da Yotsukura al variare della distanza trasversale e della portata cumulata	45
6.1	Andamento temporale della concentrazione media a valle di una sorgente distribuita trasversalmente	48
6.2	Notazioni per l'applicazione della (6.10) per la valutazione del coefficiente di dispersione negli alvei naturali.	53
6.3	Andamento spaziale di varianza e dissimmetria (<i>skewness</i>).	55
6.4	Dipendenza del coefficiente di dispersione negli alvei naturali dal rapporto larghezza-profondità della sezione.	57
6.5	Schema della topografia del fondo e del profilo di velocità longi- tudinale caratteristici di un alveo meandriforme.	58
6.6	Campo di validità della formula di Taylor.	59
6.7	Distinzione fra colmo spaziale e picco temporale della distribu- zione di concentrazione.	61
6.8	Confronto fra le soluzioni di Hayami e di Taylor per valori tipici dei parametri.	64
7.1	Andamento temporale qualitativo dell'ossigeno consumato per la decomposizione di un liquame.	66
7.2	Schema del processo di riossigenazione.	69
7.3	Andamento della concentrazione di ossigeno disciolto e di BOD in funzione del tempo in presenza di riareazione e deossigenazione.	71
8.1	Schemi di getto e scia.	78
8.2	Fotografia di un getto piano turbolento da una parete alla velo- cità di 30 cm/s	80
8.3	Fotografia di un getto assialsimmetrico turbolento da un tubo di 9 mm di diametro alla velocità di 200 cm/s	81
8.4	Schema di un getto piano turbolento.	82
8.5	Schema di un getto assialsimmetrico turbolento.	84
8.6	Decadimento del picco della velocità media sull'asse di un getto circolare turbolento.	85
8.7	Diluizione in funzione della distanza lungo l'asse di un getto turbolento a sezione circolare.	87
8.8	Struttura quasi unidirezionale di un pennacchio.	90
8.9	Sviluppo del getto iniziale in pennacchio.	99
8.10	Dati relativi alla portata volumetrica dei getti ordinari e dei pennacchi.	100
8.11	Valori di c osservati sperimentalmente da Kotsovinos.	101
8.12	Valori di R_z osservati sperimentalmente da Kotsovinos.	102
8.13	Rilievi della diluizione in asse.	103
8.14	Rapporto fra le scale trasversali per U e \bar{T}	103

Bibliografia

H.B. Fischer, E.J. List, R.C.Y. Koh, J. Imberger, N.H. Brooks, *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, New York, 1979.

J.C. Rutherford, *River Mixing*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.