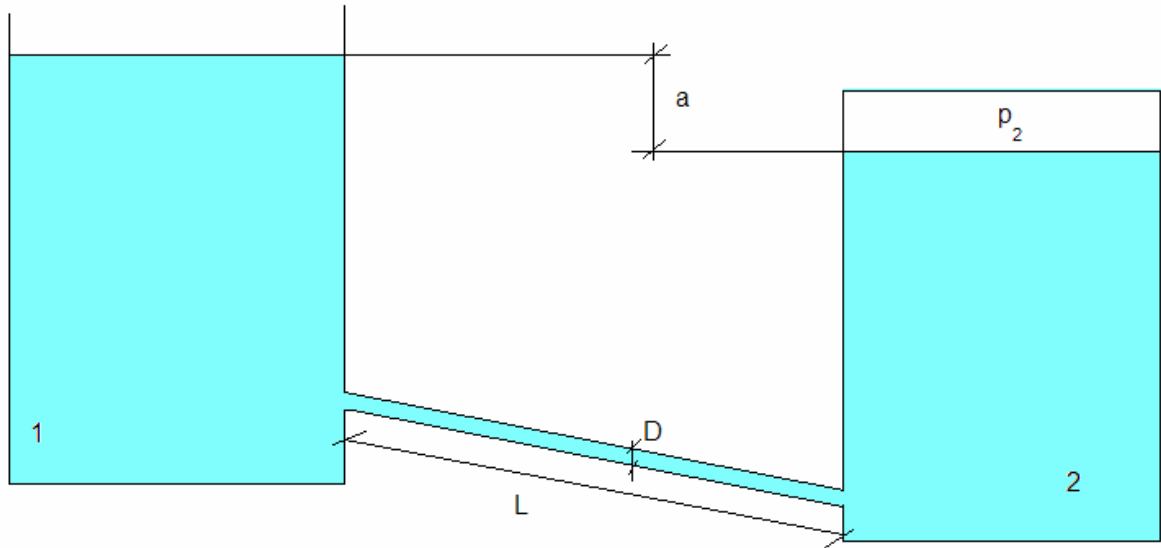


ESEMPIO 1

Due serbatoi sono collegati da una condotta (scabrezza $y_r=0.25$ mm) lunga $L=20$ m, attraverso cui defluisce dell'acqua (densità 1000 kg/m³). Il dislivello tra i due serbatoi è $a=1$ m e la pressione relativa misurata sulla superficie libera del serbatoio 2 è $p_2=21.5$ kN/m². Dopo aver stabilito se l'acqua defluisce dal serbatoio 1 in figura, a quello 2 o viceversa, calcolare con una precisione del millimetro il diametro necessario a far defluire una portata volumetrica pari a 1 l/s di acqua, attraverso la condotta in figura e tracciare le linee dei carichi totali e piezometrici.



R.: $D=0.035$ m

Soluzione.

Dati: $Q = 10^{-3}$ m³/s; $y_r=2.5 \cdot 10^{-4}$ m, $a=1$ m, $L=20$ m, $p_2=21500$ N/m²

Richiesta: D

➤ Calcolo carichi totali nelle sezioni iniziali e finali dell'impianto.

- Si prenda come sezione iniziale una sezione prossima all'imbocco della condotta dal serbatoio 1 ma ancora interna al serbatoio 1.

Il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio 1 (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta

$$H_{sl1} = H_1,$$

Il calcolo di H_{sl1} è immediato $H_{sl1} = z_{sl1} + \frac{U_{sl1}^2}{2g} + \frac{p_{sl1}}{\gamma} = a$

$U_{sl1}=0$: si noti che date le dimensioni del serbatoio (notevolmente superiori rispetto a quelle della condotta, oppure capacità del serbatoio notevolmente superiore alla portata uscente) si può ragionevolmente assumere che il livello della superficie libera nel serbatoio non cambi nel tempo.

$p_{sl1}=0$ (pressione relativa) perché superficie libera.

$z_{sl1}=a$ (scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio 2).

Per cui anche H_1 risulta definito e pari ad a .

- Si prenda come sezione finale una sezione prossima allo sbocco della condotta nel serbatoio 2 ma già interna al serbatoio 2.

Analogamente a quanto affermato per il serbatoio 1 il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio 2 (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta:

$$H_{sl2} = H_2,$$

$$\text{Il calcolo di } H_{sl} \text{ è immediato } H_{sl2} = z_{sl2} + \frac{U_{sl2}^2}{2g} + \frac{p_{sl2}}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma}$$

$U_{sl2}=0$: si noti che date le dimensioni del serbatoio (notevolmente superiori rispetto a quelle della condotta, oppure capacità del serbatoio notevolmente superiore alla portata uscente) si può ragionevolmente assumere che il livello della superficie libera nel serbatoio non cambi nel tempo.

$p_{sl2} = p_2$ (pressione relativa data).

$z_{sl1}=0$ (avendo scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio2).

Per cui anche H_2 risulta definito e pari ad $\frac{p_2}{\gamma} = 2.19 \text{ m}$

Essendo $H_1 < H_2$ il flusso avviene dal serbatoio 2 al serbatoio 1. La sezione iniziale pertanto è la sezione 2 e la sezione finale la sezione 1.

$$H_i = H_2 = \frac{p_2}{\gamma} \quad \text{e} \quad H_f = H_1 = a$$

- Esplicitazione equazione dell'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale.

$$H_f = H_i - \frac{U^2}{2g} \left(\frac{\lambda(\text{Re}, \varepsilon)}{D} L + \xi_i \right) + h_p$$

In cui $H_i = \frac{p_2}{\gamma}$, $H_f = a$, $U = Q / (\pi D^2 / 4)$, $\text{Re} = UD/\nu$, $\varepsilon = \gamma r / D$, $\zeta_{imbocco} = 0.5$, $\zeta_{sbocco} = 1$, $h_p = 0$ (no pompe)

$$\frac{p_2}{\gamma} - a = \frac{Q^2}{2g(\pi D^2 / 4)^2} \left(\frac{\lambda(\text{Re}, \varepsilon)}{D} L + 0.5 + 1 \right) \quad (*)$$

Tale equazione non è esplicita in quanto λ dipende da D attraverso Re ed ε . Si risolve in moto iterativo.

Il calcolo del diametro di una condotta, noti gli altri dati, deve essere fatto per tentativi, cercando di individuare il valore di che causa delle perdite di carico lungo la condotta pari a $\frac{p_2}{\gamma} - a$. A tal

fine è opportuno precisare che la valutazione di non deve essere fatta con troppe cifre significative, considerando che i diametri in commercio sono un numero limitato. Un valore di primo tentativo per può essere individuato imponendo che la velocità media nella condotta sia pari a 1 m/s.

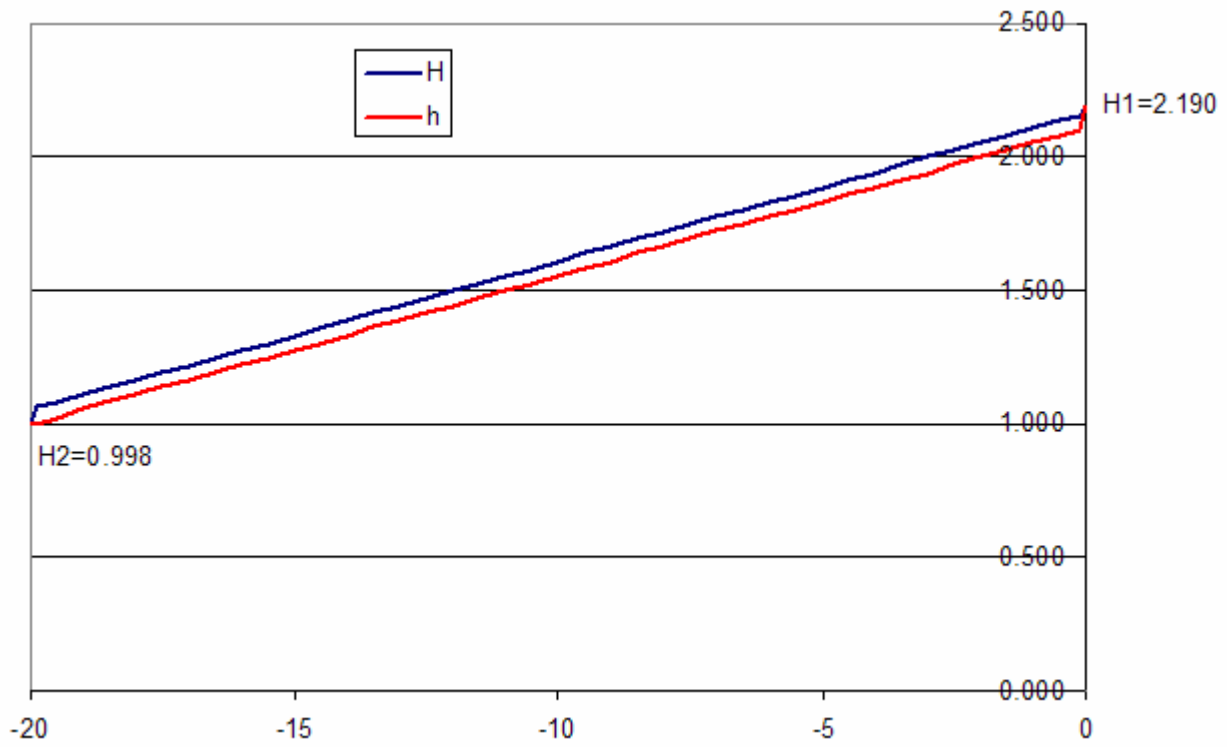
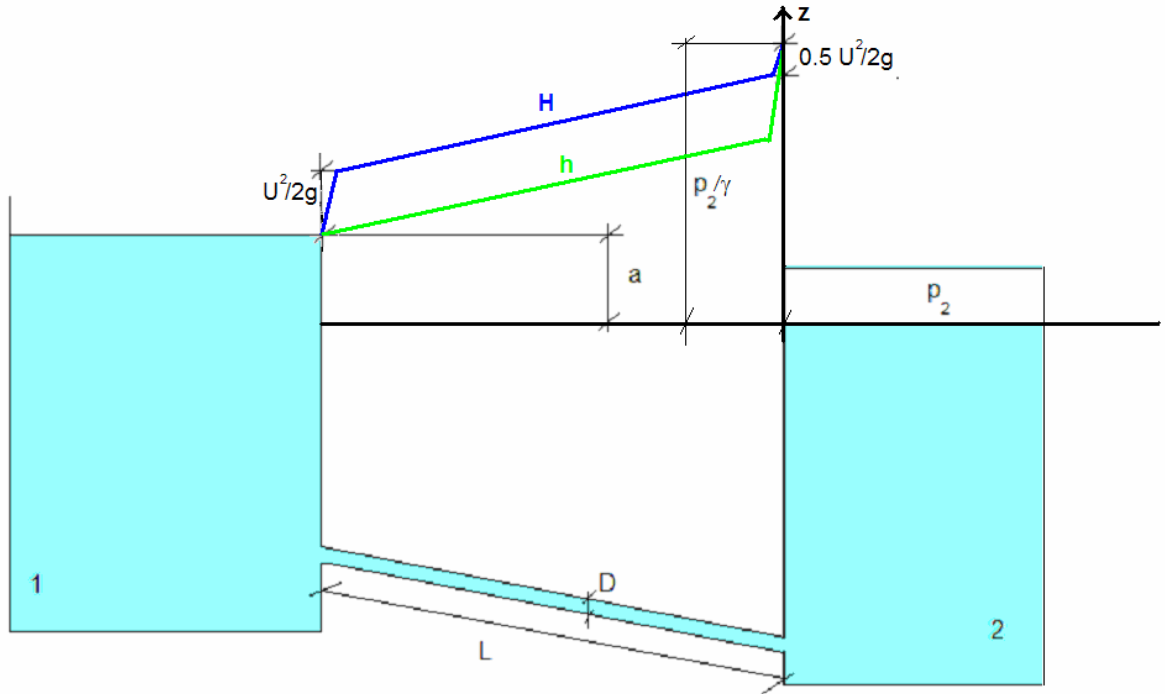
Essendo $U = Q / (\pi D^2 / 4)$, risulta $D = \sqrt{\frac{4Q}{U\pi}} = 0.036 \text{ m}$.

I valori successivi di D vanno valutati invertendo la relazione (*) ovvero come

$$D_{n+1} = \sqrt[4]{\frac{Q^2}{2g\Delta H(\pi/4)^2} \left(\frac{\lambda(\text{Re}_n, \varepsilon_n)}{D_n} L + 0.5 + 1 \right)}.$$

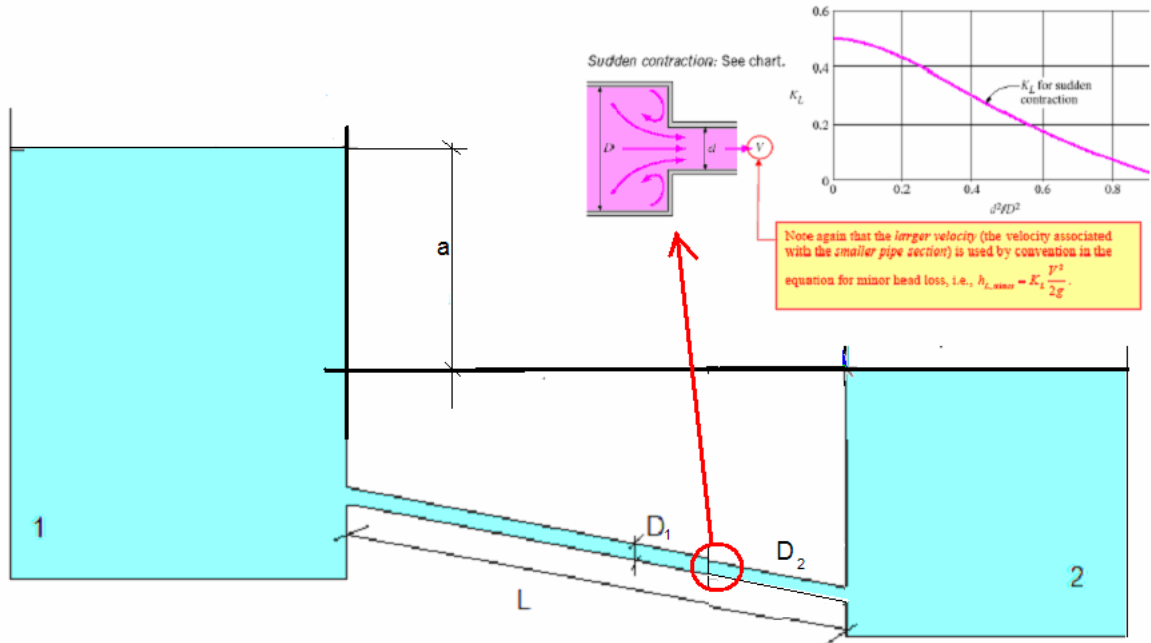
Concludo le iterazioni quando trovo il diametro con la precisione richiesta.

N iterazione	D[m]	Ω	U[m/s]	Re	ε	λ
1	0.036	0.001	1	35691.53	0.007004	0.035711
2	0.035	0.00096	1.041824	36430.27	0.007149	0.03587
3	0.035	0.000971	1.029803	36219.47	0.007108	0.035825



ESERCIZIO 1

Due serbatoi sono collegati da una condotta (scabrezza $y_r=0.1$ mm) lunga $L=3.5$ km, attraverso cui defluisce dell'acqua (densità 1000 kg/m³). Il dislivello tra i due serbatoi è $a=2$ m, inoltre la condotta è caratterizzata da un primo tratto di diametro è pari a 0.8 m ed un secondo tratto di diametro 0.6 m. Calcolare la lunghezza di ciascun tratto, sapendo che attraverso la condotta defluisce una portata volumetrica pari a 250 l/s di acqua. Tracciare le linee dei carichi totali e piezometrici.



R.: $L_1=2000$ m, $L_2=1500$ m,

Soluzione.

Dati: $Q = 250 \cdot 10^{-3}$ m³/s; $y_r = 10^{-4}$ m, $a=2$ m, $L_1+L_2=3500$ m, $D_1=0.8$ m, $D_2=0.6$ m

Richiesta: L_1 e L_2

- Calcolo carichi totali nelle sezioni iniziali e finali dell'impianto.

Si prenda come sezione iniziale una sezione prossima all'imbocco della condotta dal serbatoio 1 ma ancora interna al serbatoio 1. Il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio 1 (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta:

$$H_{sl1} = H_1,$$

Il calcolo di H_{sl1} è immediato $H_{sl1} = z_{sl1} + \frac{U_{sl1}^2}{2g} + \frac{p_{sl1}}{\gamma} = a$

$U_{sl1}=0$: si noti che date le dimensioni del serbatoio (notevolmente superiori rispetto a quelle della condotta, oppure capacità del serbatoio notevolmente superiore alla portata uscente) si può ragionevolmente assumere che il livello della superficie libera nel serbatoio non cambi nel tempo.

$p_{sl1}=0$ (pressione relativa) perché superficie libera.

$z_{s11}=a$ (scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio2).

Per cui anche H_1 risulta definito e pari ad a .

- Si prenda come sezione finale una sezione prossima allo sbocco della condotta nel serbatoio 2 ma già interna al serbatoio 2. Il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio 2 (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta:

$$H_{sl\ 2} = H_2,$$

$$\text{Il calcolo di } H_{sl} \text{ è immediato } H_{sl\ 2} = z_{sl2} + \frac{U_{sl2}^2}{2g} + \frac{p_{sl2}}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma}$$

$U_{sl2}=0$: si noti che date le dimensioni del serbatoio (notevolmente superiori rispetto a quelle della condotta, oppure capacità del serbatoio notevolmente superiore alla portata uscente) si può ragionevolmente assumere che il livello della superficie libera nel serbatoio non cambi nel tempo.

$p_{sl2}=0$ (pressione relativa sulla superficie libera).

$z_{s11}=0$ (avendo scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio2).

Per cui anche H_2 risulta definito e pari a 0.

$$H_i = H_1 = a \text{ e } H_f = H_2 = 0$$

- Esplicitazione equazione dell'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale.

$$H_f = H_i - \frac{U_1^2}{2g} \left(\frac{\lambda(\text{Re}_1, \varepsilon_1)}{D_1} L_1 + 0.5 \right) - \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\lambda(\text{Re}_2, \varepsilon_2)}{D_2} (L - L_1) + 1 + 0.1 \right) + h_p$$

In cui $H_i - H_f = a = 2 \text{ m}$, $U_1 = Q / (\pi D_1^2 / 4) = 0.5 \text{ m/s}$, $\text{Re}_1 = U_1 D_1 / \nu = 4 \cdot 10^5$, $\varepsilon_1 = \nu_r / D_1 = 1.25 \cdot 10^{-4}$, $\zeta_{imbocco} = 0.5$, $U_2 = Q / (\pi D_2^2 / 4) = 0.88 \text{ m/s}$, $\text{Re}_2 = U_2 D_2 / \nu = 5.3 \cdot 10^5$, $\varepsilon_2 = \nu_r / D_2 = 1.67 \cdot 10^{-4}$, $\zeta_{sbocco} = 1$, $\zeta_{restringimento} = 0.1$, $h_p = 0$ (no pompe)

Inoltre dal diagramma di Moody risulta

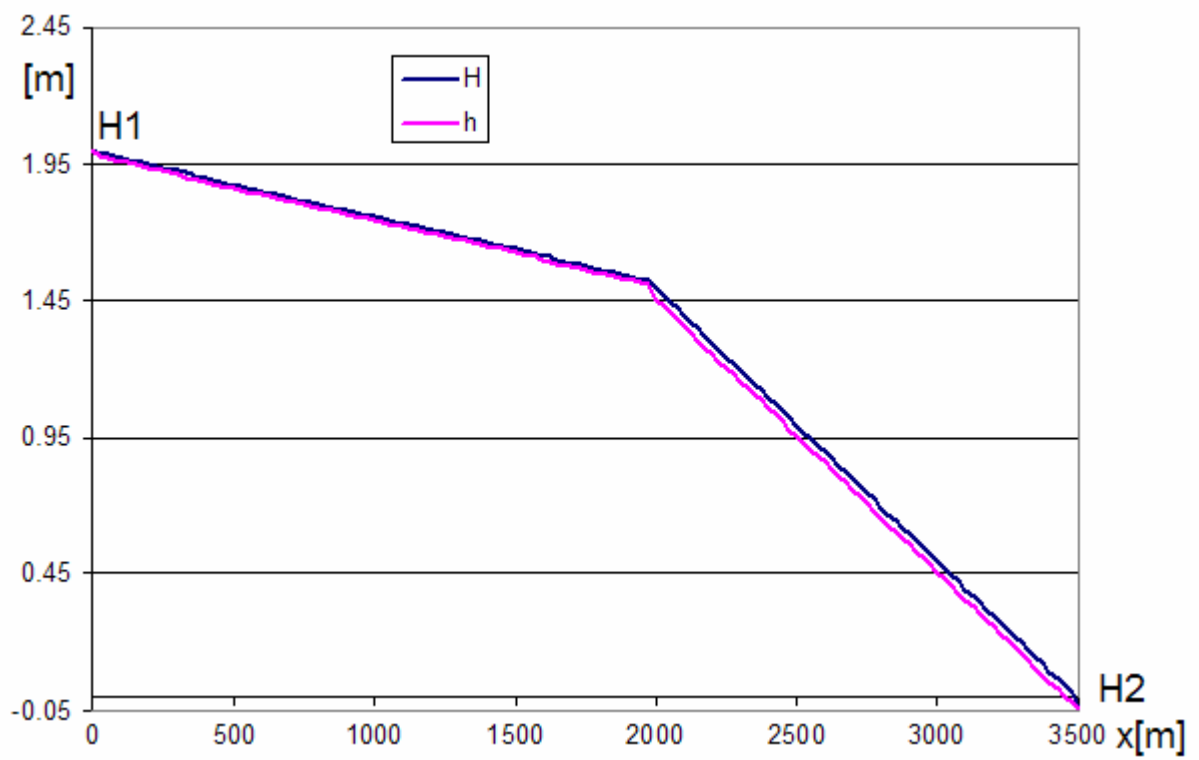
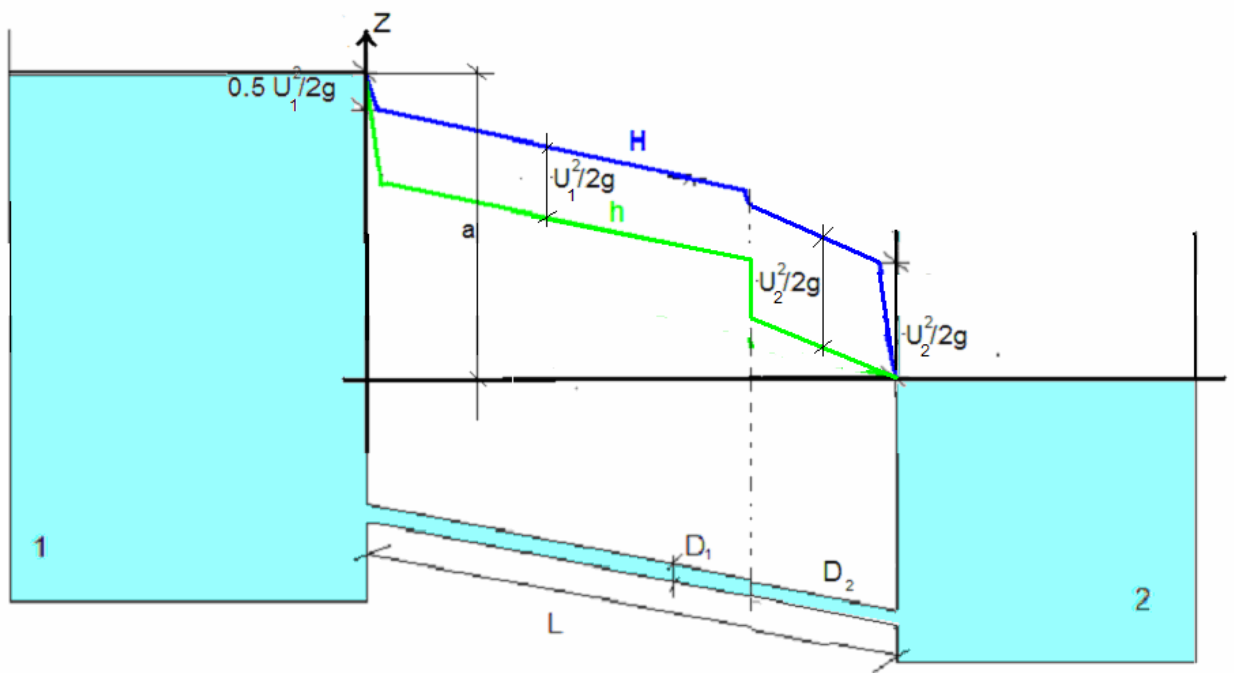
$$\lambda(\text{Re}_1, \varepsilon_1) = \lambda(4 \cdot 10^5, 1.25 \cdot 10^{-4}) = 0.015$$

$$\lambda(\text{Re}_2, \varepsilon_2) = \lambda(5.3 \cdot 10^5, 1.67 \cdot 10^{-4}) = 0.015$$

$$a = \frac{U_1^2}{2g} 0.5 + L_1 \left(\frac{U_1^2}{2g} \frac{\lambda(\text{Re}_1, \varepsilon_1)}{D_1} - \frac{U_2^2}{2g} \frac{\lambda(\text{Re}_2, \varepsilon_2)}{D_2} \right) + \frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\lambda(\text{Re}_2, \varepsilon_2)}{D_2} L + 1 + 0.1 \right)$$

da cui

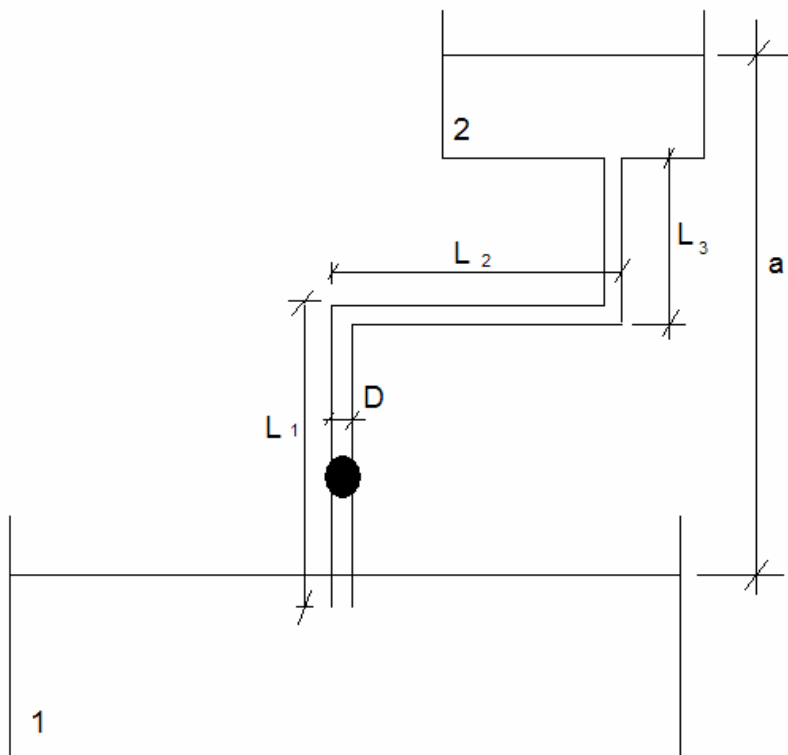
$$L_1 = \left(\frac{U_2^2}{2g} \left(\frac{\lambda(\text{Re}_2, \varepsilon_2)}{D_2} L + 1 + 0.1 \right) + \frac{U_1^2}{2g} 0.5 - a \right) / \left(\frac{U_2^2}{2g} \frac{\lambda(\text{Re}_2, \varepsilon_2)}{D_2} - \frac{U_1^2}{2g} \frac{\lambda(\text{Re}_1, \varepsilon_1)}{D_1} \right) \cong 2000 \text{ m}$$



ESERCIZIO 2

Due serbatoi sono collegati da una condotta (scabrezza $y_r=0.2$ mm) attraverso cui defluisce dell'acqua (densità 1000 kg/m³). Il dislivello tra le superfici libere nei due serbatoi è $a=3$ m, inoltre la prevalenza della pompa è 4.16 m mentre il diametro della condotta è costante e pari a 4 cm. Valutare la portata defluente nell'impianto di figura, sapendo che $L_1=2$ m, $L_2=4$ m e $L_3=0.5$ m.

Tracciare le linee dei carichi totali e piezometrici.



R.: $Q=2$ l/s

Soluzione.

Dati: $h_p = 4.16$ m; $y_r = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $a=3$ m, $L_1=2$ m, $L_2=4$ m, $L_3=0.5$ m, $D=4$ cm

Richiesta: Q

- Calcolo carichi totali nelle sezioni iniziali e finali dell'impianto.

Si prenda come sezione iniziale una sezione prossima all'imbocco della condotta dal serbatoio 1 ma ancora interna al serbatoio 1. Il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio 1 (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta:

$$H_{sl1} = H_1,$$

Il calcolo di H_{sl1} è immediato $H_{sl1} = z_{sl1} + \frac{U_{sl1}^2}{2g} + \frac{p_{sl1}}{\gamma} = 0$

$U_{sl1}=0$: si noti che date le dimensioni del serbatoio (notevolmente superiori rispetto a quelle della condotta, oppure capacità del serbatoio notevolmente superiore alla portata

uscite) si può ragionevolmente assumere che il livello della superficie libera nel serbatoio non cambi nel tempo.

$p_{sl1}=0$ (pressione relativa) perché superficie libera.

$z_{sl1}=0$ (scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio 1).

Per cui anche H_1 risulta definito e pari ad 0.

- Si prenda come sezione finale una sezione prossima allo sbocco della condotta nel serbatoio 2 ma già interna al serbatoio 2. Il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio 2 (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta:

$$H_{sl\ 2} = H_2,$$

$$\text{Il calcolo di } H_{sl\ 2} \text{ è immediato } H_{sl\ 2} = z_{sl2} + \frac{U_{sl2}^2}{2g} + \frac{p_{sl2}}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma}$$

$U_{sl2}=0$: si noti che date le dimensioni del serbatoio (notevolmente superiori rispetto a quelle della condotta, oppure capacità del serbatoio notevolmente superiore alla portata uscente) si può ragionevolmente assumere che il livello della superficie libera nel serbatoio non cambi nel tempo.

$p_{sl2}=0$ (pressione relativa sulla superficie libera).

$z_{sl1}=a$ (avendo scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio 1).

Per cui anche H_2 risulta definito e pari ad $a=3$ m

$$H_i=H_1=0 \text{ e } H_f=H_2=a$$

- Esplicitazione equazione dell'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale.

$$H_f = H_i - \frac{U^2}{2g} \left(\frac{\lambda(Re, \varepsilon)}{D} (L_1 + L_2 + L_3) + 1 + 1 + 1 + 1 \right) + h_p$$

In cui $H_f - H_i = a = 3$ m, $U = Q / (\pi D^2 / 4)$, $Re_1 = UD/\nu = Q / (\pi D \nu / 4)$, $\varepsilon = \nu / D = 5 \cdot 10^{-3}$, $\zeta_{imbocco} = 1$, $\zeta_{gomito} = 1$, $\zeta_{sbocco} = 1$, $h_p = 4.16$ m, $L_1 + L_2 + L_3 = L = 6.5$ m

$$h_p - a = \frac{Q^2}{2g(\pi D^2 / 4)^2} \left(\frac{\lambda(Re, \varepsilon)}{D} L + 4 \right) \quad (*)$$

Tale equazione non consente tuttavia il calcolo diretto di Q in quanto λ dipende da Q attraverso Re . Si risolve in moto iterativo.

Dalla conoscenza del materiale della scabrezza della condotta deriva il valore di ε . Se si suppone che il regime di moto sia quello di parete assolutamente scabra (alti valori del numero di Reynolds) si ottiene un valore di primo tentativo di λ .

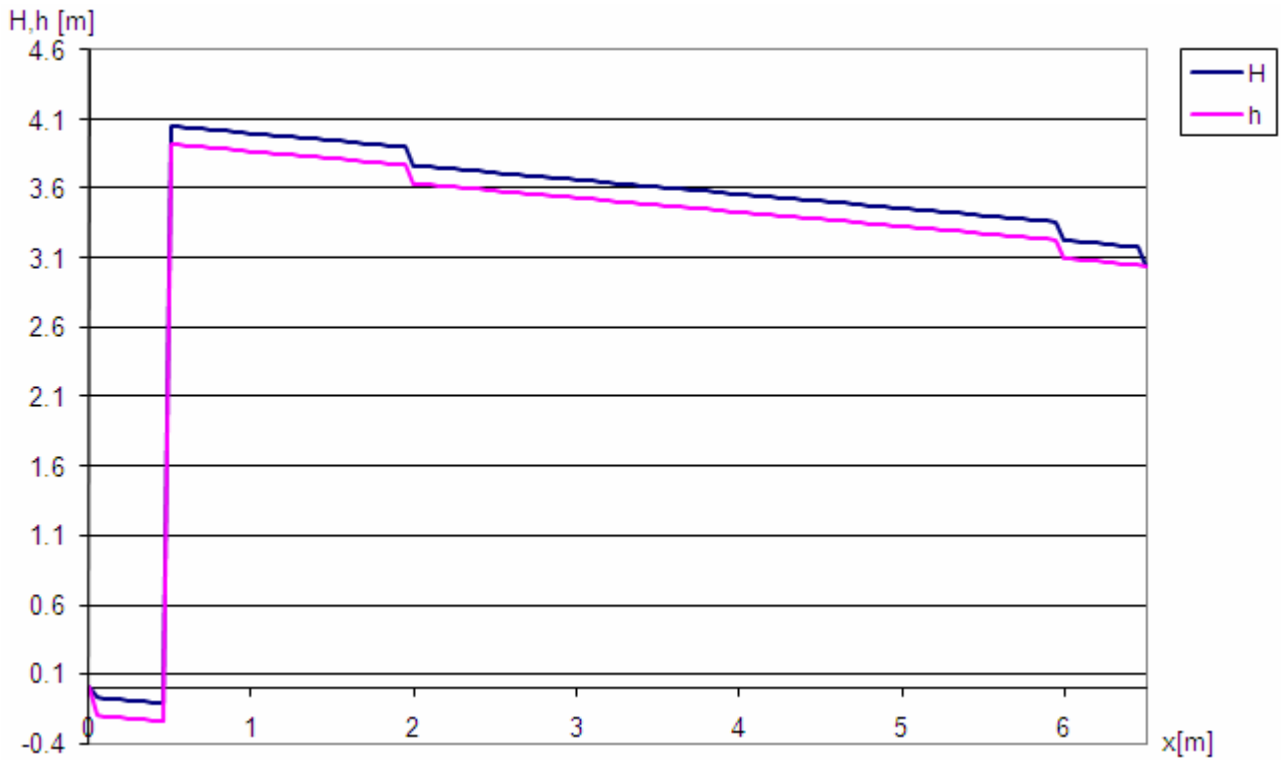
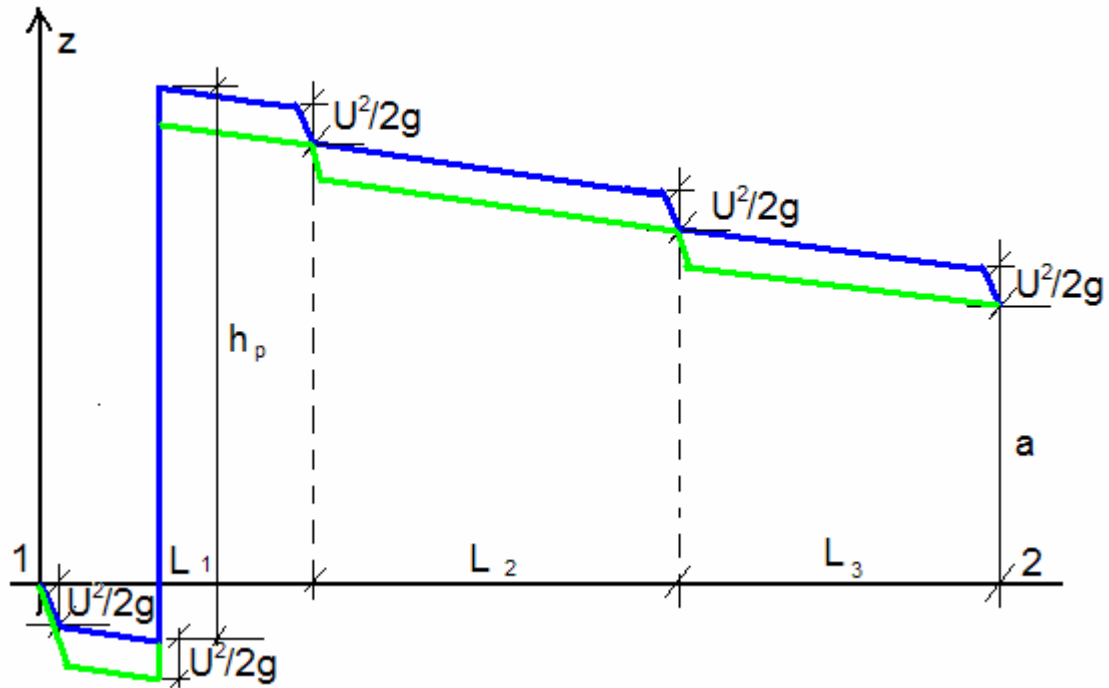
Con esso è possibile ricavare un valore di primo tentativo di Q .

I valori successivi di Q vanno valutati invertendo la relazione (*) ovvero come

$$Q_{n+1} = \sqrt[2]{2g(h_p - a)(\pi D^2 / 4)^2 / \left(\frac{\lambda(Re_n, \varepsilon)}{D} L + 4 \right)}.$$

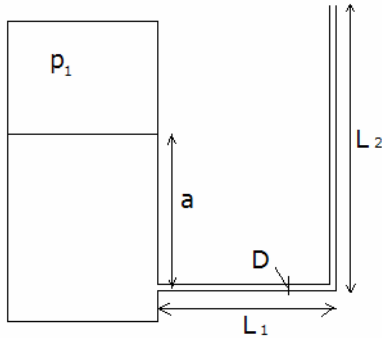
Si concludono le iterazioni quando trovo la portata con la precisione richiesta.

n iterazione	Q	U[m/s]	Re	λ
1			10000000000	0.0303
2	0.002005	1.596289	63851.55225	0.0318
3	0.001979	1.575869	63034.76779	0.0318
4	0.001979	1.575612	63024.48551	0.0318



ESERCIZIO 3

Valutare la pressione relativa p_1 necessaria a far defluire un'assegnata portata volumetrica Q di acqua nella condotta di figura. Dati: $Q=0.5$ l/s; $a=0.5$ m; $L_1=5$ m; $L_2=1.5$ m; $D=3$ cm, y_r (scabrezza)= 0.2 mm, ρ (densità acqua)= 1000 kg/m³, ν (viscosità cinematica acqua) = 10^{-6} m²/s.



R.: $p_1 \cong 12.3$ kN/m²

Soluzione.

Dati: $Q = 0.5 \cdot 10^{-3}$ m³/s; $y_r = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $a=0.5$ m; $L_1=5$ m; $L_2=1.5$ m; $D=0.03$ m,
Richiesta: p_1

➤ Calcolo carichi totali nelle sezioni iniziali e finali dell'impianto.

- $H_1 = H_{sl1} = z_{sl1} + \frac{U_{sl1}^2}{2g} + \frac{p_{sl1}}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma}$

$U_{sl1} = 0$

$p_{sl1} = p_1$ (pressione relativa).

$z_{sl1} = 0$ (scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio1).

- $H_2 = H_{sl2} = z_{sl2} + \frac{U_{sl2}^2}{2g} + \frac{p_{sl2}}{\gamma} = L_2 - a + \frac{U^2}{2g}$

$U_{sl2} = U$: allo sbocco la velocità della corrente è ancora quella all'interno della condotta.

$p_{sl2} = 0$ pressione relativa allo sbocco (superficie libera).

$z_{sl2} = L_2 - a$ (avendo scelto un sistema di riferimento con il piano $z=0$ in prossimità della superficie libera del serbatoio1).

Per cui anche H_2 risulta definito e pari a $a+L_2$.

$$H_i = H_1 = \frac{p_1}{\gamma} \quad \text{e} \quad H_f = H_2 = L_2 - a + \frac{U^2}{2g}$$

➤ Esplicitazione equazione dell'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale.

$$H_f = H_i - \frac{U^2}{2g} \left(\frac{\lambda(Re, \varepsilon)}{D} L + 0.5 + 1 \right) + h_p$$

In cui $H_i - H_f = \frac{p_1}{\gamma} - L_2 + a - \frac{U^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - 1.02$ m, $U = Q / (\pi D^2 / 4) = 0.7$ m/s, $Re = UD/\nu = 21230$,

$\varepsilon_1 = y_r/D = 6.67 \cdot 10^{-3}$, $L = L_1 + L_2 = 6.5$ m, coefficienti perdite localizzate: $\zeta_{sbocco} = 0$, $\zeta_{imbocco} = 0.5$,

$\zeta_{gomito} = 1$, $h_p = 0$ (no pompe)

Inoltre dal diagramma di Moody risulta

$\lambda(Re, \varepsilon) = 0.0365$

$$\frac{p_1}{\gamma} = L_2 - a + \frac{U^2}{2g} \left(\frac{\lambda(\text{Re}, \varepsilon)}{D} L + 2.5 \right) = 1.26 \text{ m} \quad \text{da cui} \quad p_1 \cong 12333 \text{ N/m}^2$$

