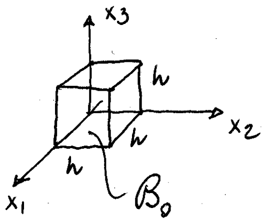
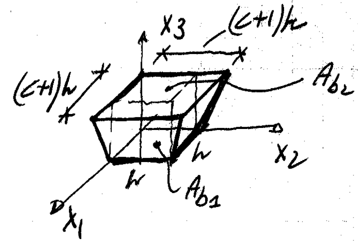
Problema 3



$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} \frac{c}{h^2} x_3 x_1^2 \\ \frac{c}{h^2} x_3 x_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$



a) 1) Volume della configurazione deformata (tronco di piramide):

$$\boxed{V_f} = \frac{h}{3}\left(A_{b1} + A_{b2} + \sqrt{A_{b1} A_{b2}}\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(h^2 + h^2(c+1)^2 + \sqrt{h^4(c+1)^2}\right) = \boxed{h^3(c+1) + \frac{h^3 c^2}{3}}$$

2) Verifichiamo usando il coefficiente di dilatazione lineare $c =$ $= \mathrm{tr}\,\mathbb{E} =$ variazione relativa di volume.

• Calcolo $\mathbb{E}$: $\quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{2c}{h^2} x_3 x_1 \quad \varepsilon_{22} = \frac{2c}{h^2} x_3 x_2 \quad \varepsilon_{33} = 0$

$$\varepsilon_{12} = 0 = \varepsilon_{21} \;;\; \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\frac{c}{h^2} x_1^2 = \varepsilon_{31} \;;\; \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\frac{c}{h^2} x_2^2 = \varepsilon_{32}$$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} \frac{2c}{h^2} x_3 x_1 & 0 & \frac{c}{2h^2} x_1^2 \\ 0 & \frac{2c}{h^2} x_3 x_2 & \frac{c}{2h^2} x_2^2 \\ \frac{c}{2h^2} x_1^2 & \frac{c}{2h^2} x_2^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\mathrm{tr}\,\mathbb{E} = c = \frac{2c}{h^2} x_3 (x_1 + x_2)}$$

• Notiamo che c non è costante nel corpo (infatti $\mathbb{E}$ non è omogeneo); c quindi definisce la variazione volumetrica locale di un elementino infinitesimo dV_0 nel punto (x_1, x_2, x_3) - $c = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$. Per ottenere V_f occorre integrare dV sul volume del corpo

$$\int_{\mathcal{B}} dV - \int_{\mathcal{B}_0} dV_0 = \int_{\mathcal{B}_0} c\, dV_0 \Rightarrow V_f - V_0 = \int_{\mathcal{B}_0} c\, dV_0 = \int_0^h\!\!\int_0^h\!\!\int_0^h \frac{2c}{h^2} x_3 (x_1 + x_2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$V_f - V_0 = c h^3$$

$$\Rightarrow \boxed{V_f = c h^3 + h^3 = h^3(c+1)}$$ $\equiv$ con V_f determinato in 1) se le def. sono infinitesime ($\Rightarrow c \cong 0 \Rightarrow \frac{h^3 c^2}{3}$ trascurabile)

b) 1) Determino l'area superficiale nei piani // al piano x_1-x_2 nella configurazione deformata B con considerazioni geometriche (vedi figura iniziale)

$$A_f(x_3=0) = h^2 \equiv A_0$$

$$A_f(x_3=h) = (c+1)^2h^2 = c^2h^2 + h^2 + 2ch^2 \cong h^2(2c+1)$$

trascurabile se E infinitesimo

$$A_f(x_3 \text{ generico}) = (cx_3+h)^2 = c^2x_3^2 + h^2 + 2cx_3h \simeq h(h+2cx_3) \quad (*)$$

2) Determino la variazione della superficie nel piano x_1-x_2 usando il coefficiente di dilatazione superficiale

$$c_s = \varepsilon_{11}+\varepsilon_{22} = \frac{2c}{h^2}x_3(x_1+x_2) = \frac{dA-dA_0}{dA_0}$$

$$\Rightarrow A_f - A_0 = \int_0^h\int_0^h \frac{2c}{h^2}x_3(x_1+x_2)\,dx_1\,dx_2 = \frac{2c}{h^2}x_3\left(\frac{h^3}{2}+\frac{h^3}{2}\right) = 2cx_3h$$

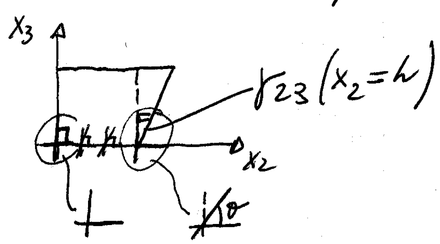
$$A_f = 2cx_3h - h^2 = h(h+2cx_3) \equiv \text{con } (*)$$

c) $\varepsilon_3=\varepsilon_{33}=0 \Rightarrow$ gli elementi inizialmente // a x_3 non modificano la loro lunghezza

d) $\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = \frac{c}{\cancel{2}h^2}x_2^2$

$\gamma_{23}=0$ per $x_2=0$

$\gamma_{23} = \frac{c}{2}$ per $x_2=h$



errata corrige

Problema 5

a) Si atto di moto rigido $\mathbb{E}=0$. Verifichiamo:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0 \qquad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0 \qquad \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{2}(-c+c)=0 \quad \text{analogamente } \varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0 \quad \text{OK}$$

b) $\Rightarrow \mathbb{H}\equiv\mathbb{W} = \begin{bmatrix} 0 & -c & c \\ c & 0 & -c \\ -c & c & 0 \end{bmatrix}$

antisimmetrico

si tratta di un atto di moto rigido con traslazione rigida nulla e rotazione attorno agli assi x_1, x_2 e x_3.

Problema 6

a) Verifico che $\mathbb{E}$ sia compatibile:

$$2\varepsilon_{12,12}=\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11} \qquad 0=0+0 \quad \text{ok}$$

$$2\varepsilon_{23,23}=\varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22} \qquad 0=0+0 \quad \text{ok}$$

$$2\varepsilon_{13,13}=\varepsilon_{11,33}+\varepsilon_{33,11} \qquad 0=0+0 \quad \text{ok}$$

$$\varepsilon_{11,23}=2\varepsilon_{12,13}+2\varepsilon_{13,12}-2\varepsilon_{23,11} \qquad 0=0+0-0 \quad \text{ok}$$

$$\varepsilon_{22,13}=2\varepsilon_{12,23}+2\varepsilon_{23,12}-2\varepsilon_{13,22} \qquad 0=0+0-0 \quad \text{ok}$$

$$\varepsilon_{33,12}=2\varepsilon_{13,23}+2\varepsilon_{23,13}-2\varepsilon_{12,33} \qquad 0=0+\cancel{0}+0 \quad \text{ok}$$

COMPATIBILE

b)

$$u_1 = ca\sin\frac{x_1}{a}+\left[c_1-c_2x_3-c_3x_2\right]$$

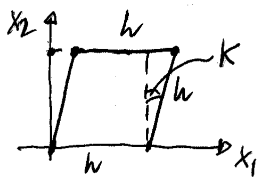
$$u_2 = 2ca\cos\frac{x_1}{a}+\left[c_4+c_3x_1-c_5x_3\right]$$

$$u_3 = ca\cos\frac{x_3}{a}+2ac\sin\frac{x_2}{a}+\left[c_2x_1+c_5x_2+c_6\right]$$

Tra parentesi le componenti di moto rigido

Problema 7

a)



$$u_1 = y_1 - x_1 = k\, x_2$$
$$u_2 = y_2 - x_2 = 0 \quad \rightarrow \text{Taglio semplice}$$
$$u_3 = y_3 - x_3 = 0$$

b)

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) spigolo lungo x_1 $\quad l_0 = h \quad l_f = h \quad$ poiché $\varepsilon_{11} = 0$

spigolo lungo x_2 $\quad l_0 = h \quad l_f = h \quad$ poiché $\varepsilon_{22} = 0$

movimento angolare $\gamma_{12} = k$