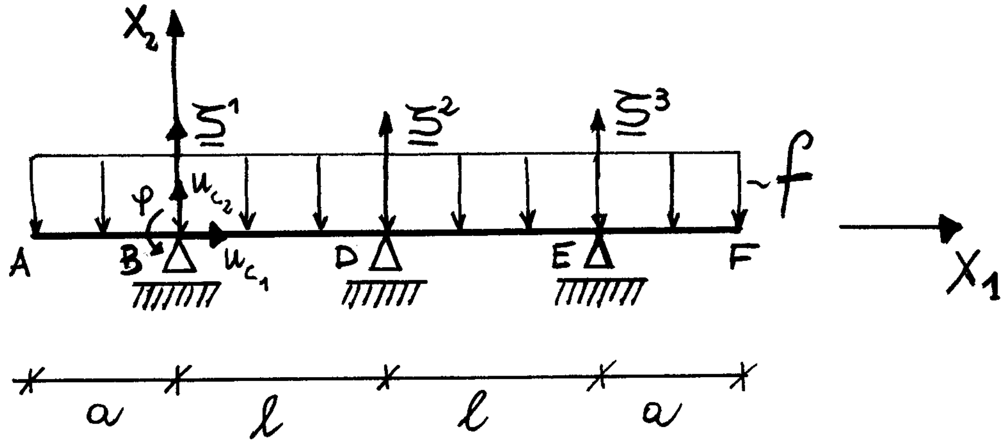
Es. 1

$B = O = C$



Analisi cinematica

- Individuazione delle direzioni efficaci dei vincoli semplici, $m = 3$:

$$\underline{\xi}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\xi}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\xi}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Individuazione dell'origine O e degli assi coordinati (X_1, X_2), $O = B$
- Scelta del punto cui si riferisce il moto, $C = B$, e attribuzione dei gradi di libertà della trave piana:

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

. Equazioni di vincolo semplice

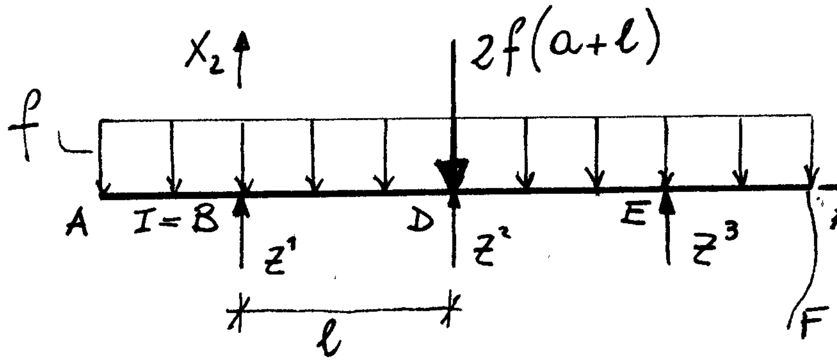
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 1 & 2\ell \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ \varphi \end{Bmatrix}}_{\underline{d}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} u_{\zeta^1} = u_{c_2} = 0 \\ u_{\zeta^2} = u_{c_2} + \varphi\ell = 0 \\ u_{\zeta^3} = u_{c_2} + 2\varphi\ell = 0 \end{cases}$$

$\rho(\underline{A}) = 2 < n = 3 \Rightarrow$ trave cinematicamente indeterminata labile

$\Rightarrow \underline{d} \neq \underline{0}$; $3 - \rho(\underline{A}) = 1$ grado di libertà

Analisi statica

. Sostituzione delle reazioni vincolari ai vincoli



Si assume quale polo: $I = O = B$

. Equazioni di equilibrio

$X_1)\ 0 = 0$

$X_2)\ z^1 + z^2 + z^3 - f(2a + 2\ell) = 0$

$\varphi)\ z^2 \cdot \ell + z^3 \cdot 2\ell - 2f(a + \ell) \cdot \ell = 0$

Es.1/2

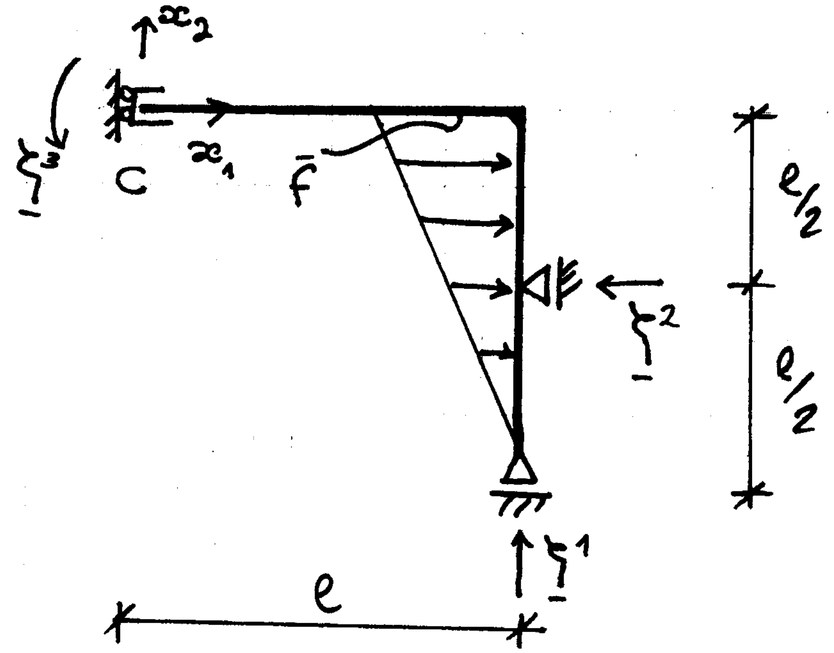
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & l & 2l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2f(a+l) \\ 2f(a+l)l \end{Bmatrix}$$

$\underline{B} = \underline{A}^T$

$\rho(\underline{B}) = 2 < n = 3$ <u>Sistema staticamente impossibile</u> per condizioni di carico arbitrarie

Poichè $\rho(\underline{B}) = \rho([\underline{B} \; \underline{r}^c]) = 2 < 3$, il sistema è <u>staticamente indeterminato</u> per la particolare condizione di carico. $n - \rho(\underline{B}) = 1$ volta iperstatico

(2)



Direzioni efficaci dei vincoli:

$$\underline{\xi}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{\xi}^2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{\xi}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$m = 3$

Scelgo il punto C, cui si riferisce il moto, $C \equiv O$ (origine).

<u>Analisi cinematica</u>

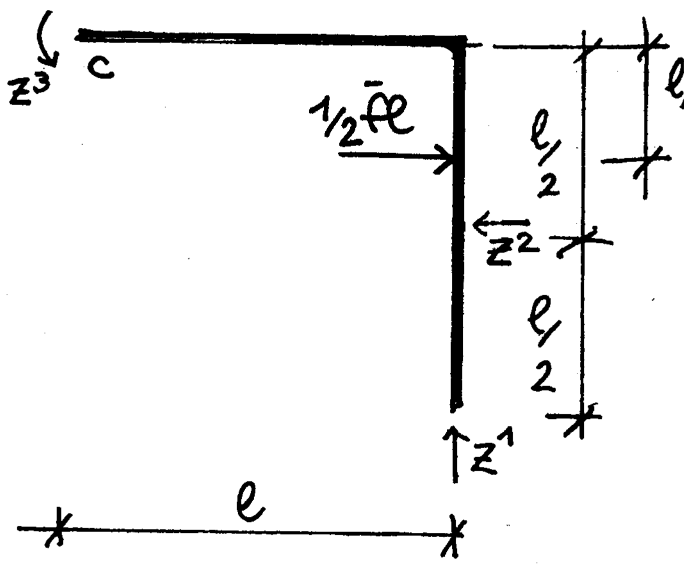
$$\begin{array}{c} \nu=1 \\ \nu=2 \\ \nu=3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ell \\ -1 & 0 & -\ell/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{d} = 0$$

$\rho(\underline{A}) = 3 = m \Rightarrow$ Trave cinematicamente determinata ($\underline{d} = \underline{0}$).

<u>Analisi statica</u>

Pongo $I \equiv C \equiv O$. Sostituisco alle forze distribuite un sistema di forze concentrate equivalente, e sostituisco i vincoli con le reaz. vincolari corrispondenti.



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \ell & -\ell/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/2\,\bar{f}\ell \\ 0 \\ -1/6\,\bar{f}\ell^2 \end{Bmatrix}$$

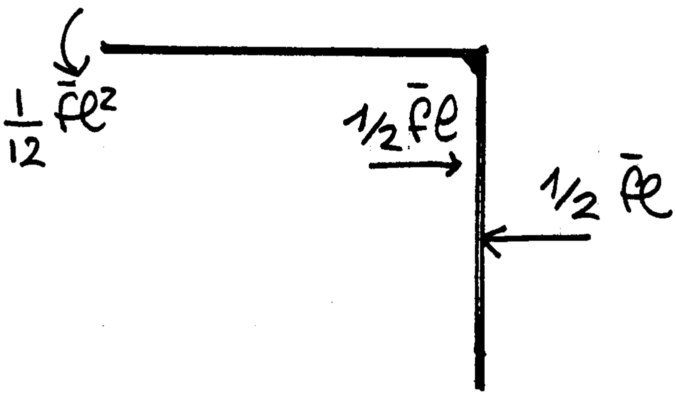
$$\underline{B}\,\underline{z} = -\underline{r}_e$$

$\varrho(\underline{B}) = 3 = m \Rightarrow$ Trave staticamente determinata -
Posso trovare le reazioni vincolari, infatti:

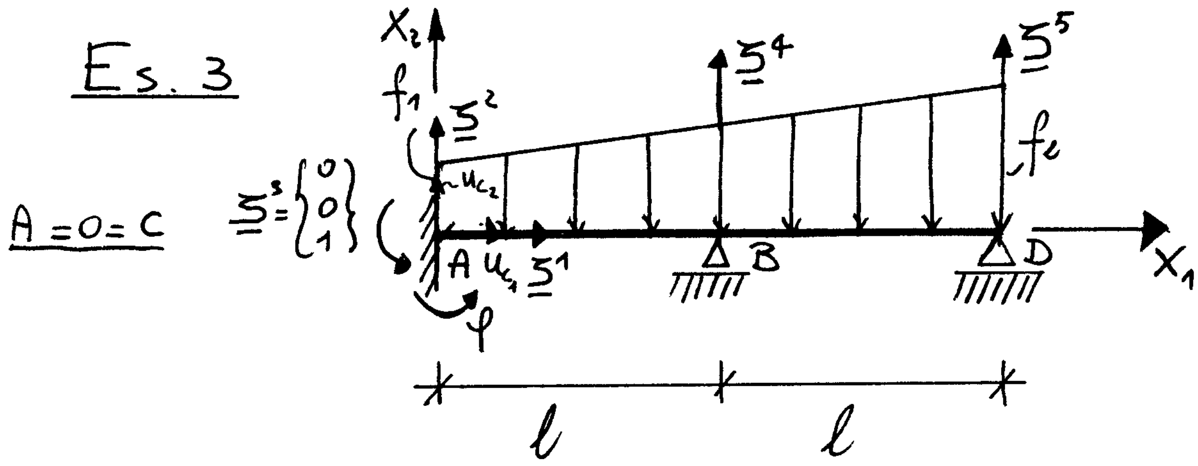
<u>scrittura diretta</u>

$$\begin{cases} -z^2 + 1/2\,\bar{f}\ell = 0 \\ z^1 = 0 \\ z^1 \ell - z^2\,\ell/2 + z^3 + 1/2\,\bar{f}\ell \cdot \ell/3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^1 = 0 \\ z^2 = 1/2\,\bar{f}\ell \\ z^3 = 1/12\,\bar{f}\ell^2 \end{cases}$$

<u>Assetto statico</u>



Es. 3



Analisi cinematica

. Individuazione delle direzioni efficaci dei vincoli semplici, $m = 5$:

$$\underline{\underline{\xi}}^1=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix};\ \underline{\underline{\xi}}^2=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix};\ \underline{\underline{\xi}}^3=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix};\ \underline{\underline{\xi}}^4=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix};\ \underline{\underline{\xi}}^5=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}$$

. Individuazione dell'origine O e degli assi coordinati (X_1, X_2), $O = A$

. Scelta del punto cui si riferisce il moto, $C = A$, e attribuzione dei gradi di libertà della trave piena:

$$\underline{d}=\begin{Bmatrix}u_{c_1}\\u_{c_2}\\\varphi\end{Bmatrix}$$

- Equazioni di vincolo semplice:

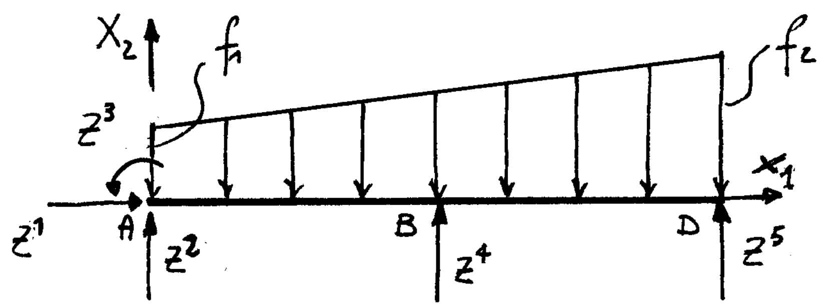
$$\begin{cases} u_{\zeta^1} = u_{c_1} = 0 \\ u_{\zeta^2} = u_{c_2} = 0 \\ u_{\zeta^3} = \varphi = 0 \\ u_{\zeta^4} = u_{c_2} + \varphi \cdot l = 0 \\ u_{\zeta^5} = u_{c_2} + 2\varphi l = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \underset{\underline{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 1 & 2l \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

$\rho(\underline{A}) = 3 < m = 5 \Rightarrow$ <u>il sistema è cinematicamente iperdeterminato</u>

$\underline{d} = \underline{0}$ grado di iperdeterminazione $m - 3 = 2$

Analisi statica

- Sostituzione delle reazioni vincolari ai vincoli



Si assume come polo $I = A$

- Equazioni di equilibrio

X_1) $z^1 = 0$

X_2) $z^2 + z^4 + z^5 - (f_1 + f_2) l = 0$

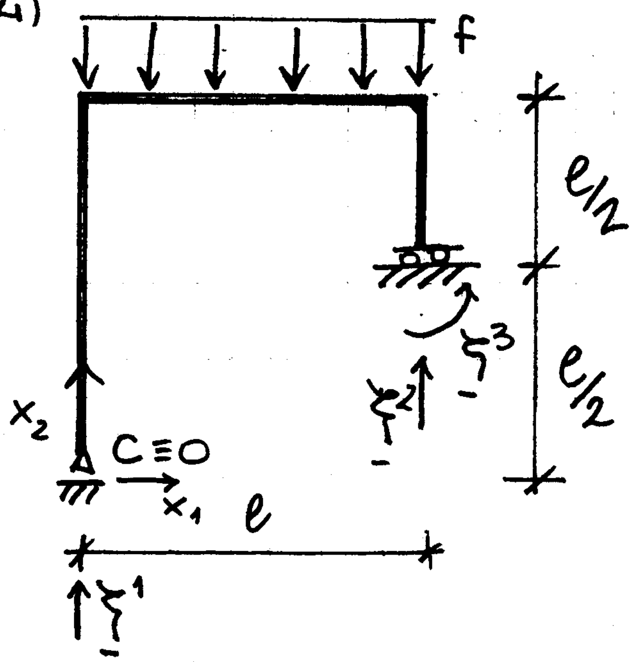
φ) $z^3 + z^4 \cdot l + z^5 2l - \frac{2}{3}(f_1 + 2f_2) l^2 = 0$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ell & 2\ell \end{array}\right]}_{\underline{B} = \underline{A}^T} \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (f_1 + f_2)\ell \\ \frac{2}{3}(f_1 + 2f_2)\ell^2 \end{Bmatrix}$$

$\rho(\underline{B}) = 3 < m = 5 \Rightarrow$ <u>Il sistema è iperstatico</u>

grado di iperstaticità $m - 3 = 2$

(4)



Direzione efficace dei vincoli:

$$\underline{\xi}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\xi}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\xi}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pongo $C \equiv O$

$m = 3$

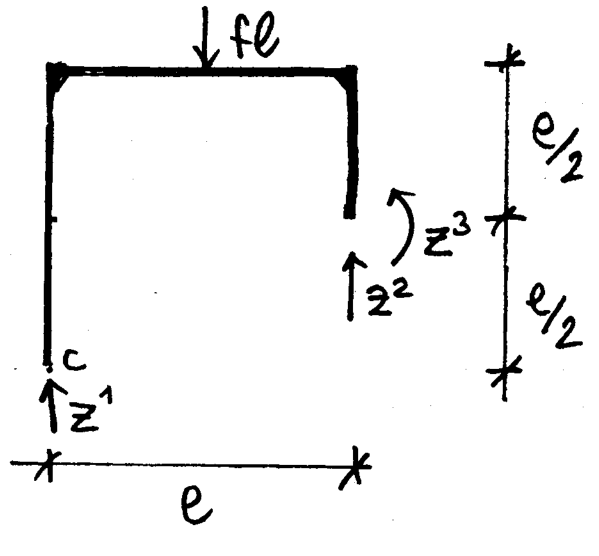
Analisi cinematica

$$\begin{array}{c} \nu=1 \\ \nu=2 \\ \nu=3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \underline{A}\,\underline{d} = \underline{0}$$

$\rho(\underline{A}) = 2 < 3 = m \Rightarrow$ Trave cinematicamente indeterminata (labile) ($\underline{d} \neq \underline{0}$).
Il grado di indeterminazione è $m - \rho(\underline{A}) = 1$.

Analisi statica

Pongo $C \equiv O \equiv I$. Sostituisco le forze distribuite con un sistema di forze concentrate equivalente, e sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari corrispondenti.



$$\underline{B} = \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{B} \,\vdots\, -\underline{r}_e\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & fl \\ 0 & l & 1 & \frac{1}{2}fl^2 \end{bmatrix}$$

$\rho(\underline{B}) = 2 < 3 = m$

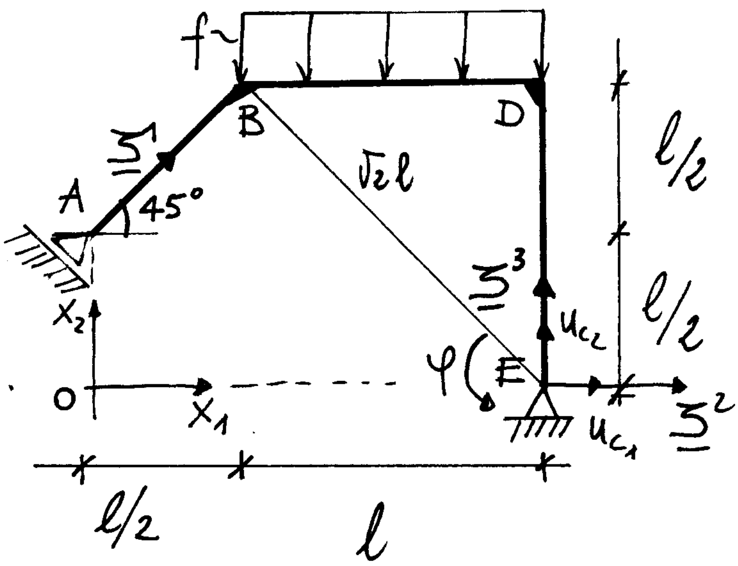
ma $\rho(\underline{B}) = \rho(\underline{B} \,\vdots\, -\underline{r}_e)$

⇒ Trave staticamente impossibile per generiche condizioni di carico (labile), ma staticamente indeterminata (iperstatica) per questa particolare condizione di carico. Grado di indeterminazione: $m - \rho(\underline{B}) = 1$. Infatti non si riescono a determinare tutte le reazioni vincolari:

$$
\begin{cases}
0 = 0 \\
z^1 + z^2 - fl = 0 \\
z^2 l + z^3 - fl^2/2 = 0
\end{cases}
$$

Con la scrittura diretta delle equazioni, non riesco a trovare la soluzione del sistema ($\exists\ \infty$ soluzioni).

Es. 5



$C = E$

$\underline{p}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell/2 \end{Bmatrix}$; $\underline{p}^2 = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}\ell \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\underline{p}^3 = \underline{p}^2$; $\underline{c} = \begin{Bmatrix} 3/2\,\ell \\ 0 \end{Bmatrix}$

Analisi cinematica

- Individuazione delle direzioni efficaci dei vincoli semplici, $m = 3$:

$$\underline{\xi}^1 = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\xi}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\xi}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Individuazione dell'origine O e degli assi coordinati (x_1, x_2);
- Scelta del punto cui si riferisce il moto, $c = E$, e attribuzione dei gradi di libertà della trave piana:

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

- Equazioni di vincolo semplice

$$u_{\xi^1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_{c_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} u_{c_2} - \frac{\sqrt{2}}{4} l\varphi - \frac{3\sqrt{2}}{4} l\varphi = 0$$

$$\begin{cases} u_{\xi^1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_{c_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} u_{c_2} - \sqrt{2}\, l \cdot \varphi = 0 \\ u_{\xi^2} = u_{c_1} = 0 \\ u_{\xi^3} = u_{c_2} = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale il sistema omogeneo precedente assume la seguente forma:

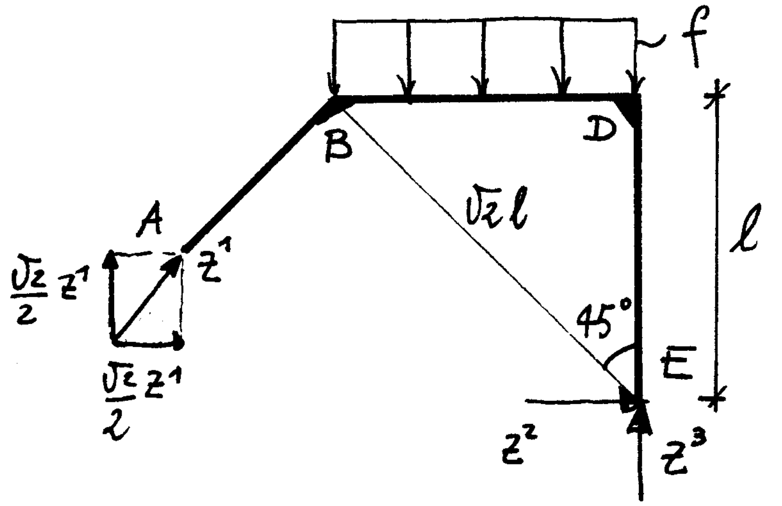
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}\cdot l \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{Bmatrix} u_{c_1} \\ u_{c_2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

$\rho(\underline{A}) = 3 = m \Rightarrow$ <u>il sistema è indeterminato</u>.

La soluzione del sistema è $\underline{d} = \underline{0}$. <u>Il sistema non è labile</u>

. Analisi statica

. Sostituzione delle reazioni vincolari ai vincoli



Si assume quale polo $I = E$

. Equazioni di equilibrio

$X_1)$ $\frac{\sqrt{2}}{2} z^1 + z^2 = 0$

$X_2)$ $\frac{\sqrt{2}}{2} z^1 + z^3 - f \cdot l = 0$

$\varphi)$ $-\sqrt{2}\, l\, z^1 + \frac{f l^2}{2} = 0$

In forma matriciale il sistema omogeneo precedente assume la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ -\sqrt{2}\, l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f l \\ -\frac{f l^2}{2} \end{Bmatrix}$$

$\underline{B} = \underline{A}^T$

Es. 5/3

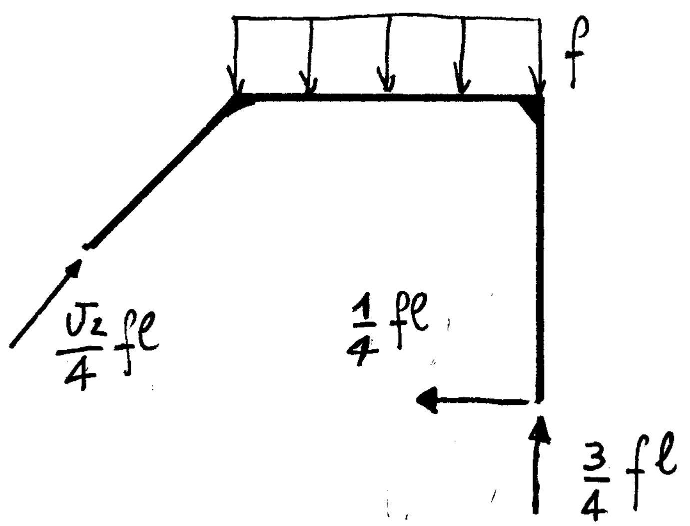
$\rho(\underline{B}) = 3 = m \Rightarrow$ <u>il sistema è isostatico</u>.

Esiste una soluzione e quindi si possono calcolare le reazioni vincolari:

$$-\sqrt{2}\,\ell z^1 + \frac{f\ell^2}{2} \Rightarrow z^1 = \frac{f\ell}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} f\ell$$

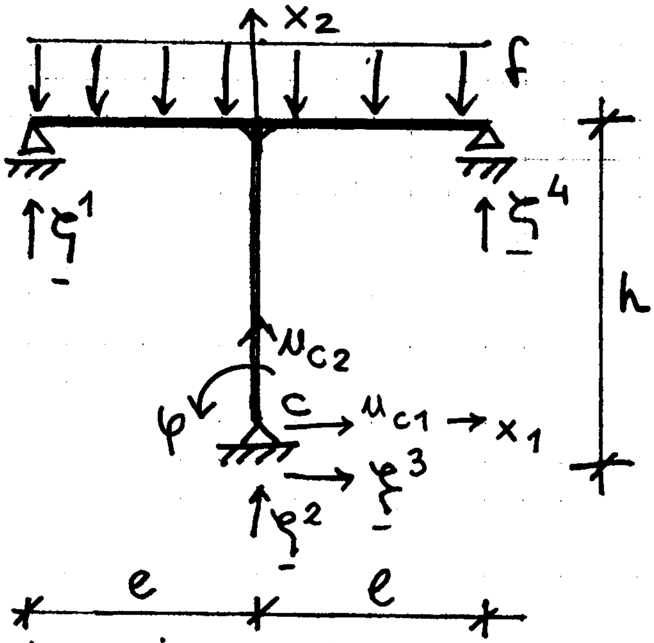
$$z^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} z^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{4} f\ell = -\frac{f\ell}{4}$$

$$z^3 = f\ell - \frac{\sqrt{2}}{2} z^1 = f\ell - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} f\ell = \frac{3}{4} f\ell$$



<u>Assetto statico</u>

(6)



Direzioni efficaci dei vincoli:

$\underline{\xi}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$; $\underline{\xi}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\underline{\xi}^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$; $\underline{\xi}^4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$m = 4$

Pongo $c \equiv 0$

<u>Analisi cinematica</u>

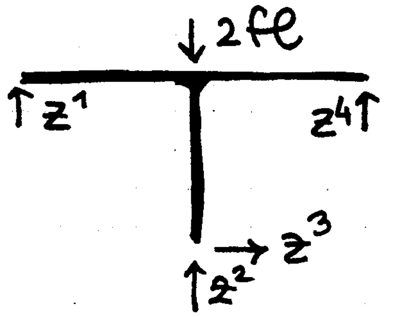
$$\begin{array}{l} \nu=1 \\ \nu=2 \\ \nu=3 \\ \nu=4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\underline{A}\,\underline{d} = \underline{0}$

$\rho(\underline{A}) = 3 < 4 = m$

$\Rightarrow$ Trave cinematicamente iperdeterminata; grado di iperdeterminazione $m - \rho(\underline{A}) = 1$.

<u>Analisi statica</u> Pongo $c \equiv 0 \equiv I$. Sostituisco le forze distribuite con forze concentrate equivalenti.



$$\underline{B} = \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\ell & 0 & 0 & \ell \end{bmatrix}$$

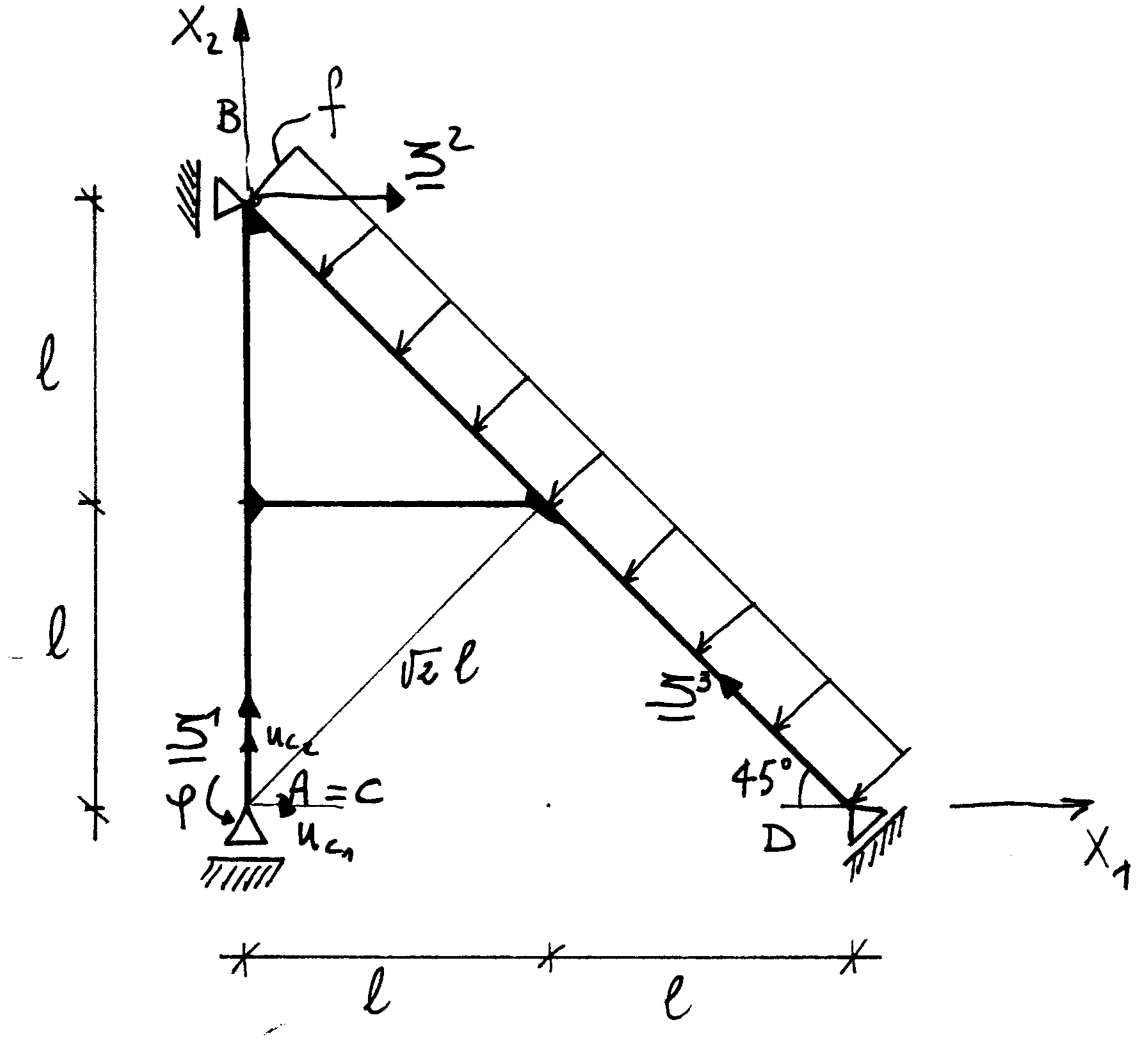
$\rho(\underline{B}) = 3 < 4 = m$

Trave staticamente indeterminata (iperstatica). Non riesco a determinare le reazioni vincolari, infatti:

$$\begin{cases} 0 = z^3 \\ z^1 + z^2 + z^4 - 2\ell f = 0 \\ -z^1 \ell + z^4 \ell = 0 \end{cases}$$

Trovo z^3, ma restano 2 equazioni in 3 incognite (grado di indeterminazione $1 = m - \rho(\underline{B})$).

Es. 7



Analisi cinematica

- Individuazione delle direzioni efficaci dei vincoli semplici, $m = 3$:

$$\underline{\underline{\xi}}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\underline{\xi}}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\underline{\xi}}^3 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

- Individuazione dell'origine O e degli assi coordinati: (X_1, X_2), $O = A$

- Scelta del punto cui si riferisce il moto, $C = B$, e attribuzione dei gradi di libertà della trave piana:

$$\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

- Equazioni di vincolo semplice

$$\begin{cases} u_{\xi^1} = u_{c_2} = 0 \\ u_{\xi^2} = u_{c_1} - 2\ell \cdot \varphi = 0 \\ u_{\xi^3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} u_{c_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} u_{c_2} + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\ell \cdot \varphi = 0 \end{cases}$$

In forma matriciale si ottiene:

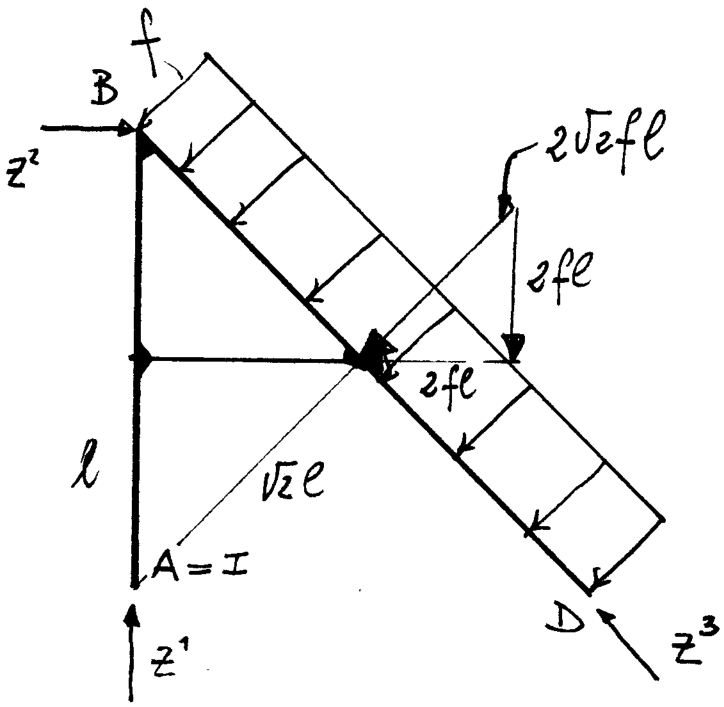
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2\ell \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}\ell \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

$\rho(\underline{A}) = 2 < m = 3 \Rightarrow$ <u>Il sistema è geometricamente indeterminato</u>

La travatura in figura può subire un'istantanea rotazione $\varphi \neq 0$ attorno al punto $C \Rightarrow$ <u>la travatura è labile</u>

Analisi statica

. Sostituzione delle reazioni vincolari ai vincoli



. Si assume quale polo

I = A

. Si sostituisce la distribuzione uniforme f con la risultante $2\sqrt{2}fl$ applicata al centro della distribuzione

. Equazioni di equilibrio:

$$X_1)\quad z^2 - 2fl - \frac{\sqrt{2}}{2} z^3 = 0$$

$$X_2)\quad z^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} z^3 - 2fl = 0$$

$$\varphi)\quad -2l z^2 + \sqrt{2} l z^3 = 0$$

Non compare il contributo delle forze attive, in quanto la retta d'azione passa per I

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -2l & \sqrt{2}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2fl \\ 2fl \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\underline{B} = \underline{A}^T$

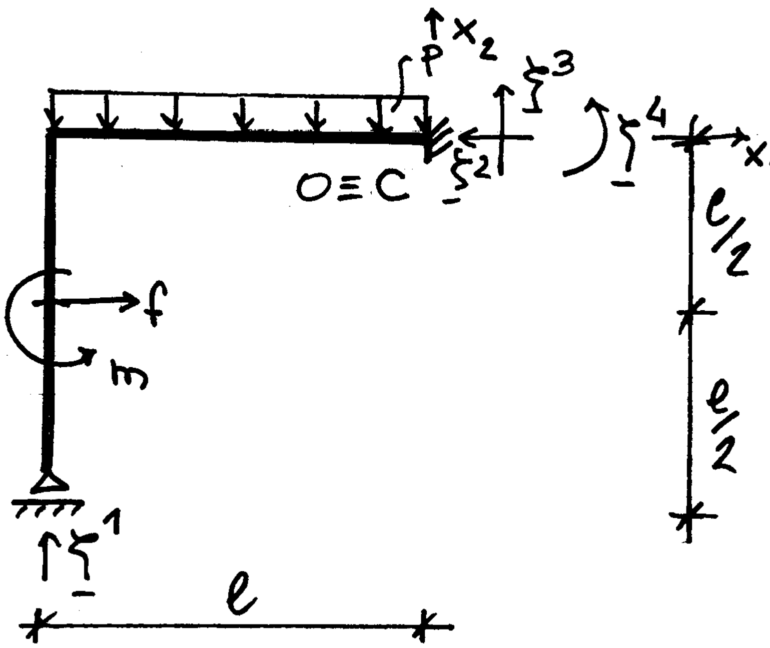
Es. 7/3

$\rho(\underline{B}) = 2 < m = 3 \Rightarrow$ il sistema è staticamente impossibile

3 incognite, 2 equazioni - la travatura è labile

Es. 7/4

(B)



Direzioni efficaci dei vincoli:

$$\underline{\xi}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\xi}^2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\xi}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\xi}^4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Pongo $C \equiv O$

$m = 4$

Analisi cinematica

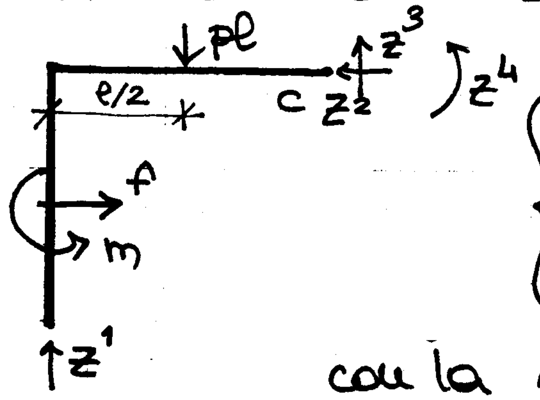
$$\begin{array}{c} \nu=1 \\ \nu=2 \\ \nu=3 \\ \nu=4 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\ell \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{A} \qquad \underline{d} = \underline{0}$$

$\rho(\underline{A}) = 3 < 4 = m$

$\Rightarrow$ Trave cinematicamente iperdeterminata. Grado di iperdeterminazione 1.

Analisi statica. Pongo $C \equiv O \equiv I$. Sostituisco le forze distribuite con forze concentrate equivalenti, ed i vincoli con le reazioni vincolari corrispondenti.



$$\begin{cases} -z^2 + f = 0 \\ z^1 + z^3 - p\ell = 0 \\ -z^1 \ell + z^4 + p\ell \cdot \ell/_2 + m + f\ell/_2 = 0 \end{cases}$$

con la scrittura diretta, ottengo un sistema che non ammette un'unica soluzione.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\ell & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti $\rho(\underline{B}) = 3 < 4 = m \Rightarrow$ Trave staticamente indeterminata (iperstatica) grado di indeterminazione:

$$m - \rho(\underline{B}) = 1.$$

$\underline{B} = \underline{A}^T$