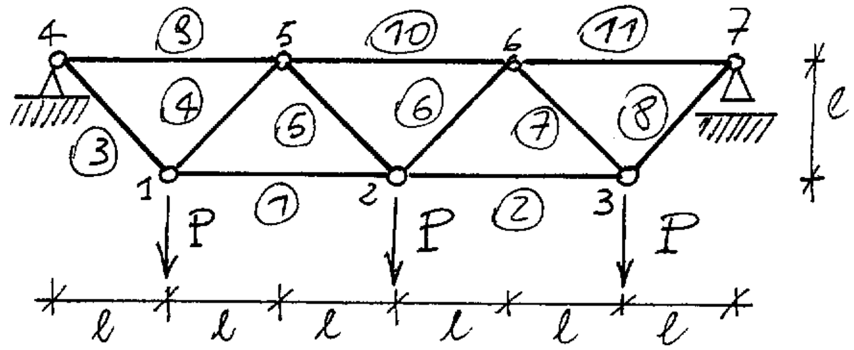
ESERCIZI : TRAVATURE RETICOLARI

ESERCIZIO 1



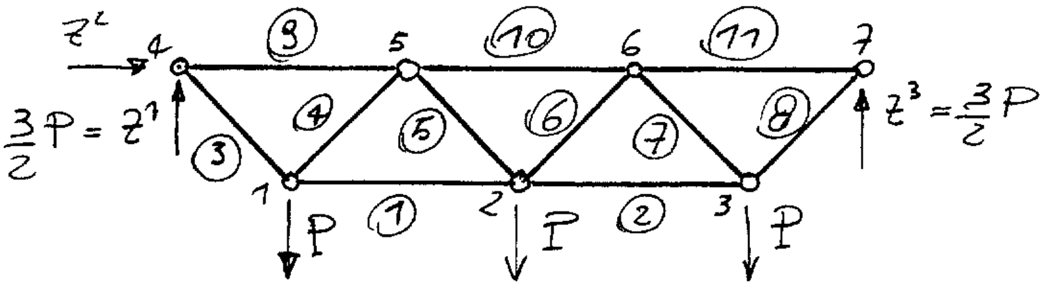
- Numero di vincoli : $m = 3$
- Numero di aste : $a = 11$
- Numero di nodi : $n = 7$

$\Rightarrow m + a \geq 2n$

$3 + 11 = 14 = 2(7)$

- La travatura è composta da maglie triangolari $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistema staticamente determinato - ISOSTATICO



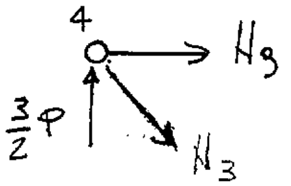
- Reazioni vincolari

$z^2 = 0$

$z^1 = z^3 = \frac{3}{2} P$

La travatura è simmetrica rispetto alla retta verticale passante per il nodo 2; anche i carichi esterni sono applicati in modo simmetrico, quindi la caratteristica di sollecitazione forza normale è simmetrica.
La travatura in esame è una travatura a nodi canonici. È sufficiente analizzare l'equilibrio di un numero ridotto di nodi per le condizioni di simmetria sopra indicate.

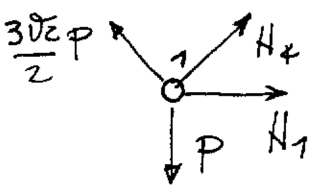
Nodo 4 semplice



Eq. di equil. orizzontale e verticale dei nodi semplici:

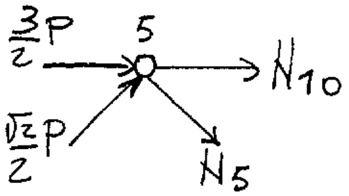
$$\begin{cases} N_8 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 = 0 & \rightarrow N_8 = -\frac{3}{2}P \\ \frac{\sqrt{2}}{2} N_3 - \frac{3}{2}P = 0 & \rightarrow N_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}P \end{cases}$$

Nodo 1 semplice



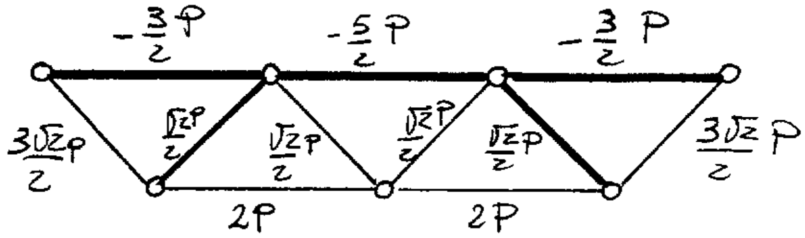
$$\begin{cases} N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & \Rightarrow N_1 = 2P \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} N_4 - \frac{3}{2}P + P = 0 & \rightarrow N_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \end{cases}$$

Nodo 5 semplice



$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 + N_{10} + \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}P = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 - \frac{1}{2}P = 0 \rightarrow N_5 = \frac{\sqrt{2}}{2}P \end{cases}$$

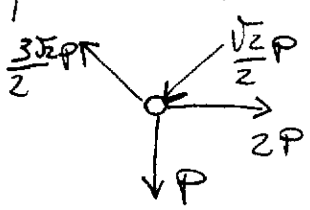
$$N_{10} = -\frac{5}{2}P$$



asta	N^e
1 tirante	$2P$
2 tirante	$2P$
3 tirante	$\frac{3\sqrt{2}}{2}P$
4 puntone	$-\frac{\sqrt{2}}{2}P$
5 tirante	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$
6 tirante	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$
7 puntone	$-\frac{\sqrt{2}}{2}P$
8 tirante	$\frac{3\sqrt{2}}{2}P$
9 puntone	$-\frac{3}{2}P$
10 puntone	$-\frac{5}{2}P$
11 puntone	$-\frac{3}{2}P$

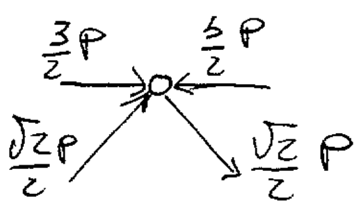
- Verifica equilibrio nodi

nodo 1



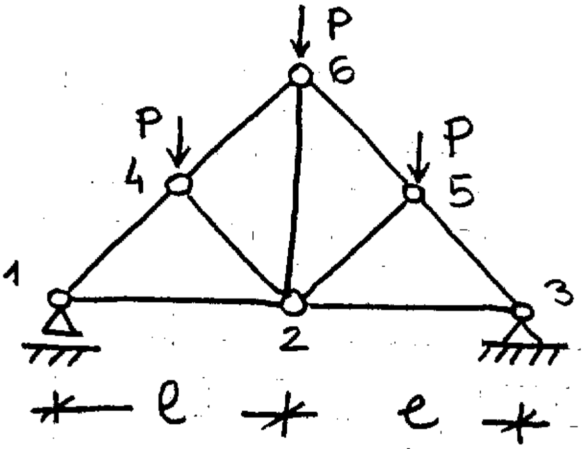
$$\begin{cases} -\frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P + 2P = 0 & \text{c.v.d.} \\ -\frac{3}{2}P + \frac{1}{2}P + P = 0 & \text{"} \end{cases}$$

nodo 5



$$\begin{cases} \frac{3}{2}P - \frac{5}{2}P + \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = 0 & \text{c.v.d.} \\ -\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P = 0 & \text{"} \end{cases}$$

(2)



nodi $n=6$

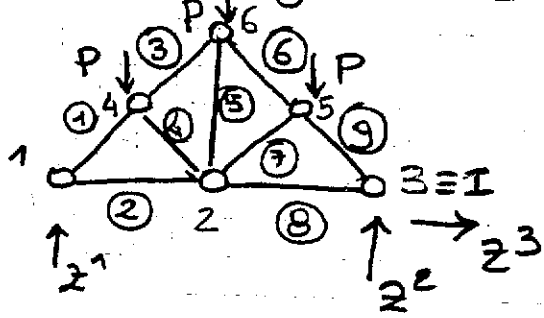
aste $a=9$

vincoli $m=3$

Condizione necessaria affinchè sia isostatica

$a+m=2n$ $12=12$ ok! Poichè la travatura è costituita da maglie triangolari la condizione è anche sufficiente. Nella travatura saranno presenti solo sollecitazioni normali, perchè $\nexists$ carichi lungo l'asta, ma solo nei nodi.

Per risolvere la struttura a nodi canonici, devo trovare (in questo caso) le reazioni vincolari, affinchè il nodo A diventi un nodo semplice. Pongo $3 \equiv I$ (polo).



Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} z^3 = 0 \\ z^1 + z^2 - 3P = 0 \\ -z^1 2l + P\left(\frac{l}{2} + l + \frac{3}{2}l\right) = 0 \end{cases}$$

$z^1 = \frac{3}{2}P$ $z^2 = \frac{3}{2}P$ $z^3 = 0$

NODO 1 (semplice)

$$A \quad \nearrow N_1 \quad \circ \longrightarrow N_2 \quad \uparrow \tfrac{3}{2}P$$

$$\begin{cases} N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}P = 0 \\ N_2 + N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \qquad N_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}P \qquad N_2 = \frac{3}{2}P$$

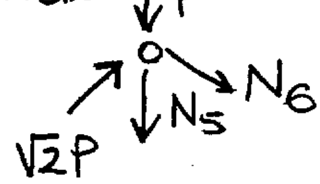
NODO 4

$$P\downarrow \quad \nearrow N_3 \quad \circ \quad \searrow N_4 \quad \nearrow \tfrac{3\sqrt{2}}{2}P$$

$$\begin{cases} N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - P + \frac{3}{2}P = 0 \\ N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}P = 0 \end{cases} \qquad N_3 = -\sqrt{2}P \qquad N_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

ES 2.1

NODO 6

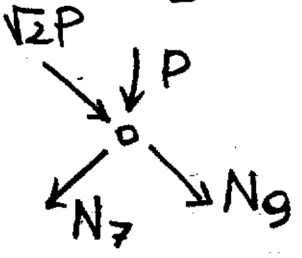


$$\begin{cases} N_6\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -N_5 - N_6\frac{\sqrt{2}}{2} - P + \sqrt{2}P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

$N_5 = P$

$N_6 = -\sqrt{2}P$

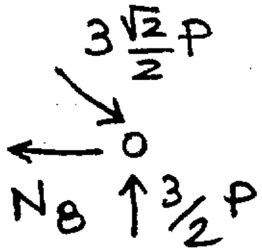
NODO 5



$$\begin{cases} -N_7\frac{\sqrt{2}}{2} + N_9\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -N_7\frac{\sqrt{2}}{2} - N_9\frac{\sqrt{2}}{2} - P - \sqrt{2}P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

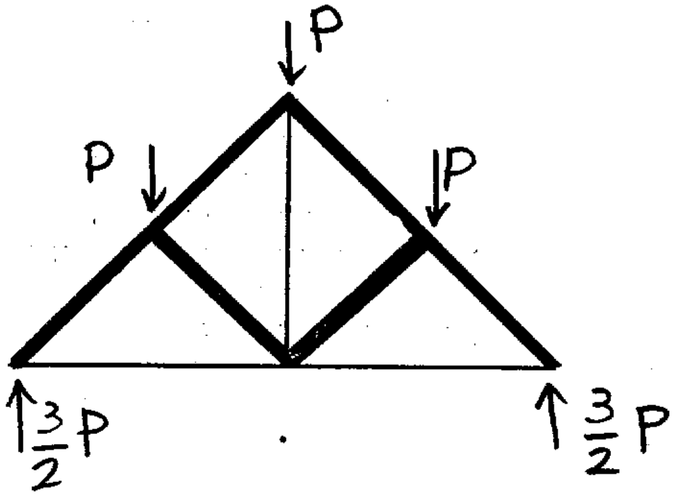
$N_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P \qquad N_9 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}P$

NODO 3



$-N_8 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}P = 0 \qquad N_8 = \frac{3}{2}P$

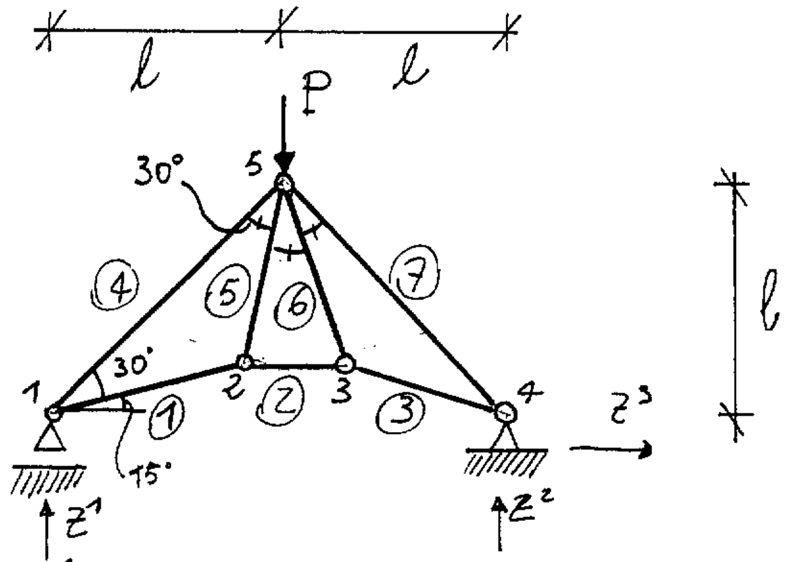
ASTA	N
1	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}P$
2	$3/2\,P$
3	$-\sqrt{2}P$
4	$-\sqrt{2}/2\,P$
5	P
6	$-\sqrt{2}P$
7	$-\sqrt{2}/2\,P$
8	$3/2\,P$
9	$-3\sqrt{2}/2\,P$



Tratto spesso: COMPRESSO (puntone)

Tratto sottile: TESO (Tirante)

Esercizio 3



- Numero di vincoli : $m = 3$
- Numero di aste : $a = 7$
- Numero di nodi : $n = 5$

$$m + a \geq 2n$$

$$3 + 7 = 10 = 2(5)$$

- La travatura è composta da maglie triangolari $\Rightarrow$

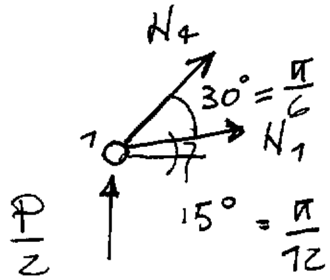
$\Rightarrow$ sistema staticamente ISOSTATICO

- Reazioni vincolari : $Z^3 = 0$; $Z^1 = Z^2 = \dfrac{P}{2}$

- Struttura simmetrica, carico simmetrico $\Rightarrow$ N simmetrico

- Calcolo della forza normale

__Nodo 1 semplice__



Equazioni di equilibrio orizzontale e verticale dei nodi semplici

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} \cdot N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 = 0 \\ -\sin\frac{\pi}{12} N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 - \frac{P}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

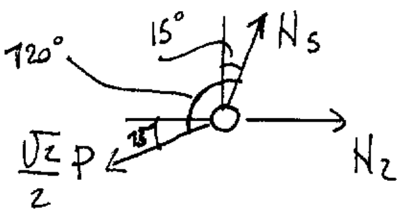
$$\begin{cases} \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 = 0 \\ -\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_4 - \frac{P}{2} = 0 \end{cases}$$

(somma membro a membro) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2}\right) N_1 = \frac{P}{2}$

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} P$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) P$$

Nodo 2 semplice



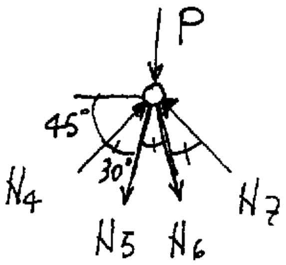
$$\text{①}\begin{cases} -\cos\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}P + \sin\frac{\pi}{12}N_5 + N_2 = 0 \\ \sin\frac{\pi}{12}\frac{\sqrt{2}}{2}P - \cos\frac{\pi}{12}N_5 = 0 \end{cases}$$

$$N_5 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$\text{①}\quad N_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}P - \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}P$$

. Verifica equilibrio verticale nodo 5

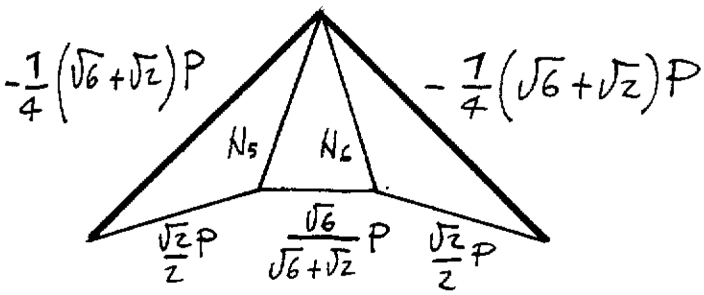


$$N_4 = N_7 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)P$$

$$N_5 = N_6 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P$$

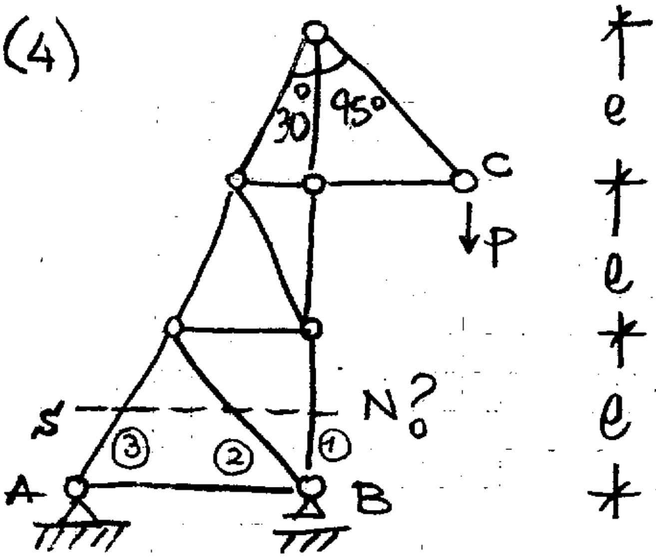
$$P - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)P + 2\cos\frac{\pi}{12}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}P =$$

$$= P\left(1 - \frac{\sqrt{12}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{12}}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{c.v.d}$$



	asta	N^e
1	tirante	$\frac{\sqrt{2}}{2}P$
2	tirante	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}P$
3	tirante	$\frac{\sqrt{2}}{2}P = N_3$
4	puntone	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})P$
5	tirante	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}P$
6	tirante	$N_6 = N_5$
7	puntone	$N_7 = N_4$

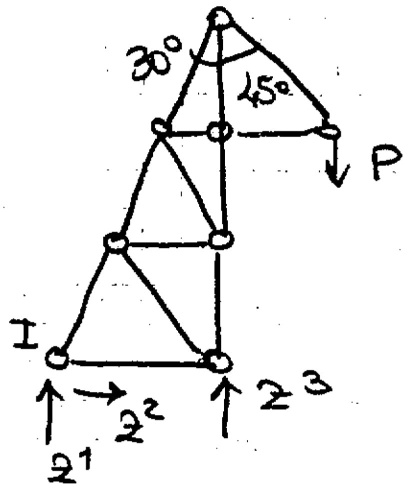
(4)



Per trovare le sollecitazioni normali nella sezione S (N_1, N_2, N_3), si può risolvere la struttura (isostatica) a nodi canonica, partendo dal nodo semplice C, oppure (trovando, anche se non necessario, le reazioni vincolari) procedere col metodo delle sezioni di Ritter (nella sezione S convergono 3 aste non convergenti in un unico nodo ⇒ sezione canonica).

Equazioni di equilibrio:

Sostituisco i vincoli con le reazioni vincolari corrispondenti:



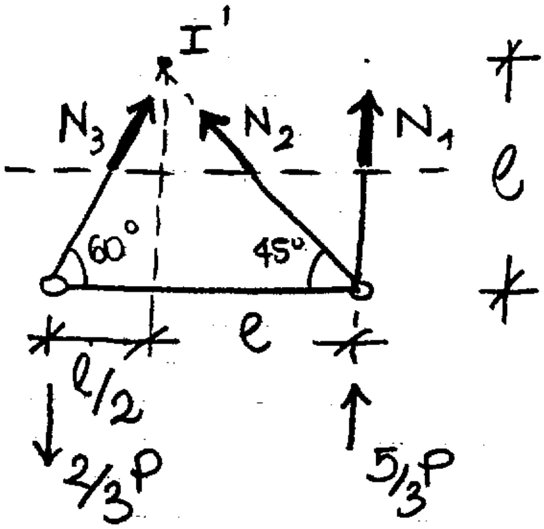
$$\begin{cases} x_1) & z^2 = 0 \\ x_2) & z^1 + z^3 = P \\ I) & z^3 \frac{3l}{2} - P\frac{5}{2}l = 0 \end{cases}$$

$$z^1 = -\frac{2}{3}P \quad z^2 = 0 \quad z^3 = \frac{5}{3}P$$

Sezione canonica in S:

Effettuo una sezione in S e sostituisco le sollecitazioni nelle aste N_1, N_2, N_3 - Scrivo le equazioni di equilibrio:

ES 4.7



Equilibrio alla traslazione

x_1) $N_3 \frac{1}{2} - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

x_2) $\frac{5P}{3} - \frac{2}{3}P + N_1 + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

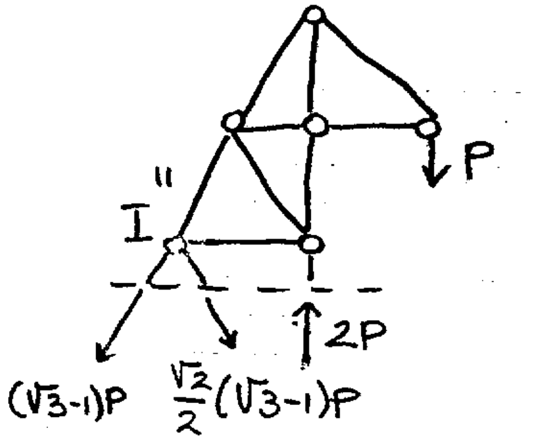
Equilibrio alla rotazione

I') $N_1 \ell + 5/3 P\ell + \frac{2}{3} P \frac{\ell}{2} = 0$

$$\Rightarrow \quad N_1 = -2P \qquad N_2 = \frac{P\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} P$$

$$N_3 = P(\sqrt{3}-1)$$

Controllo l'equilibrio dell'altra parte della struttura:



Polo I''

x_1) $(\sqrt{3}-1)P \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)\frac{\sqrt{2}}{2}P = 0$

x_2) $-2P + P + (\sqrt{3}-1)P\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)P\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

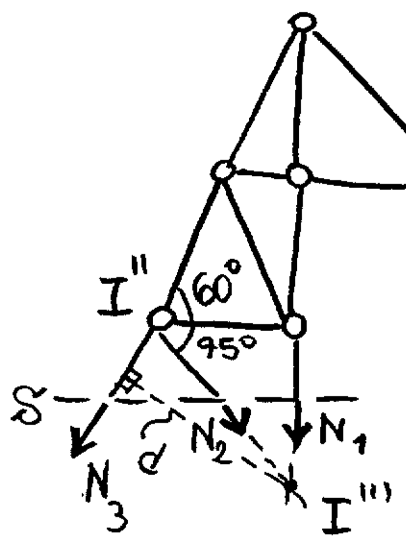
I'') $-P\ell(1+1) + 2P\ell = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3}/2 - 1/2 - \sqrt{3}/2 + 1/2)P = 0 & \text{ok} \\ (-1 + 3/2 - \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 - 1/2)P = 0 & \text{ok} \\ (-2+2)P\ell = 0 & \text{ok} \end{cases}$$

ES 4.2

OSSERVAZIONE

Col metodo delle sezioni di Ritter non è necessario determinare le reazioni vincolari - Bastava imporre in questo caso l'equilibrio del sistema sovrastante la sezione S, con polo per le rotazioni, per esempio, I'', oppure I''', rispetto al quale, però, sarebbe stato + oneroso calcolare il braccio d della forza N_3 -



Polo I''

$$N_1 \ell + P \cdot 2\ell = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = -2P$$

Eq Trasl. x_1

$$N_3 \cdot \frac{1}{2} - N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Eq. Trasl. x_2

$$N_1 + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{3}}{2} + P = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_1 = -2P \\ N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)P \\ N_3 = (\sqrt{3}-1)P \end{cases}$$

ES 4.3