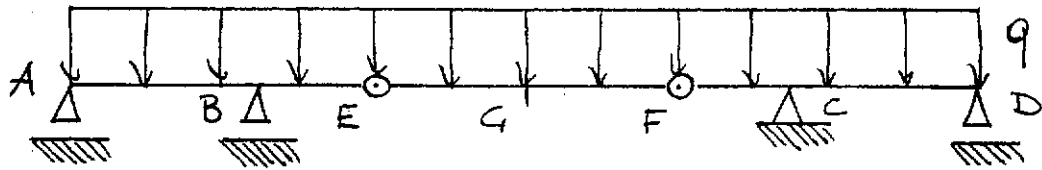


ESERCIZIO 1



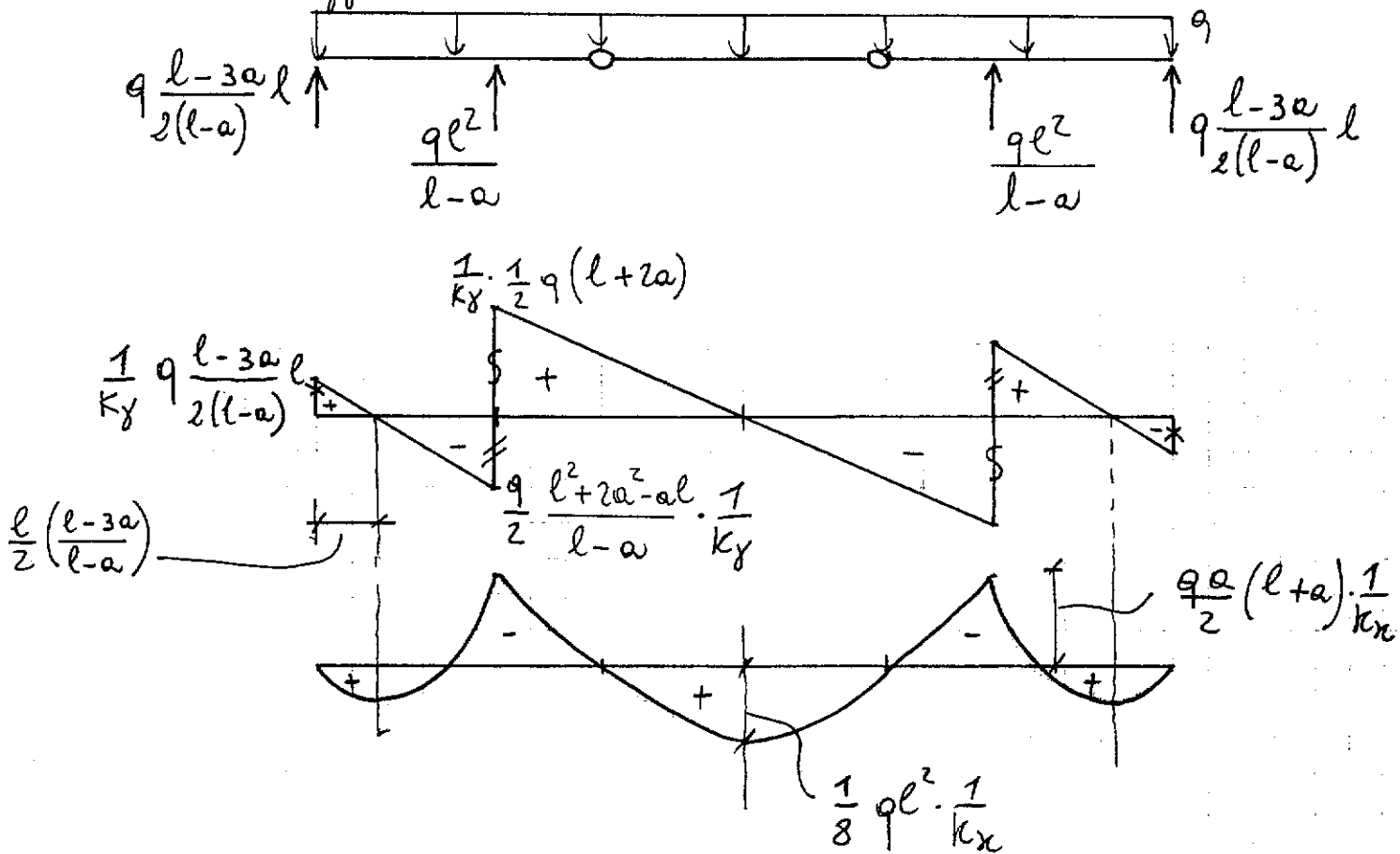
(a)

L'applicazione del teorema dei lavori virtuali per il calcolo dell'inflexione \bar{u} in E richiede la conoscenza delle caratteristiche di deformazione del sistema in esame (sistema effettivo) e delle caratteristiche di sollecitazione di un sistema ausiliario caratterizzato dallo stesso dominio del sistema effettivo e caricato con una forza unitaria nella direzione dello spostamento incognito \bar{u} applicata in E . In tal modo il T.L.V. assume la seguente forma:

$$L_{ve} = 1 \cdot \bar{u} = L_{vi} = \int_S (T^* \gamma + M^* \alpha) dS.$$

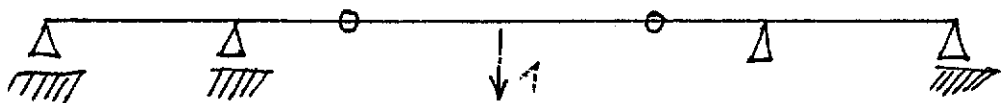
La travatura in esame è una trave Gerber la cui reazione vincolare e i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione sono già state calcolate nel cap. 8 pag. 16 (Esercizio 3). Di seguito si riportano l'assetto statico e le ϵ di defor. Come si può notare $N=0 \forall s$

Sistema effettivo

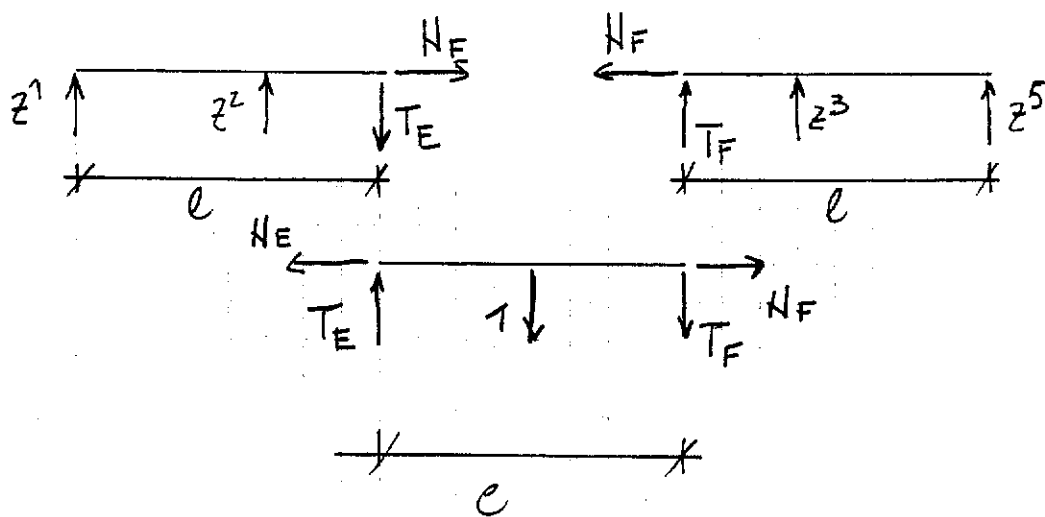


• Determinazione delle c. di S. del sistema ausiliario

Come per il sistema effettivo, si considerano separatamente le travi AE, EF e FD, applicando alle estremità E ed F le sollecitazioni incognite. Si noti che in E ed F sono presenti delle cerniere che impongono $M_E = M_F = 0$.
 Ne risulta che il sistema ausiliario seguente



può essere scomposto nelle 3 travi:



Trave AE:

$$-z^1 - z^2 + T_E = 0 \quad \rightarrow \quad z^1 = -\frac{a}{2(l-a)}$$

$$H_E = 0 \quad \Rightarrow \quad H_F = 0$$

$$M_A) \quad z^2 \cdot (l-a) - T_E \cdot l = 0 \quad z^2 = \frac{T_E \cdot l}{l-a} \quad \rightarrow \quad z^2 = \frac{l}{2(l-a)}$$

Trave EF:

$$-T_E + T_F + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad T_E = \frac{1}{2}$$

$$M_E) \quad -\frac{l}{2} - T_F \cdot l = 0 \quad \rightarrow \quad T_F = -\frac{1}{2}$$

$$z^1 = z^5 = -\frac{a}{2(l-a)}; \quad z^2 = z^3 = \frac{l}{2(l-a)}$$

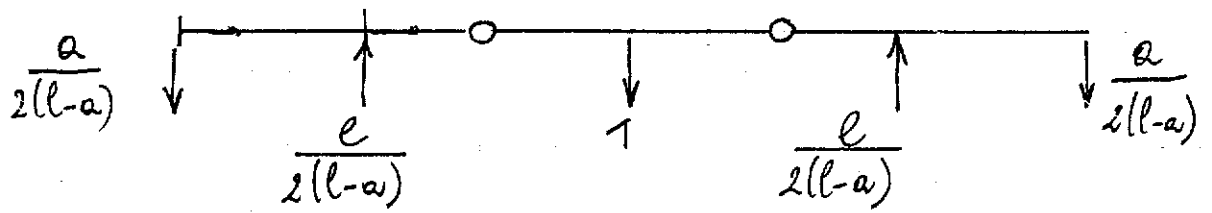
Verifica dell'equil. verticale: $z \frac{a}{2(l-a)} - z \frac{l}{2(l-a)} + 1 = 0$ c.v.d

Verifica dell'equil. alle rotazioni i C_i : è inf. osservare che

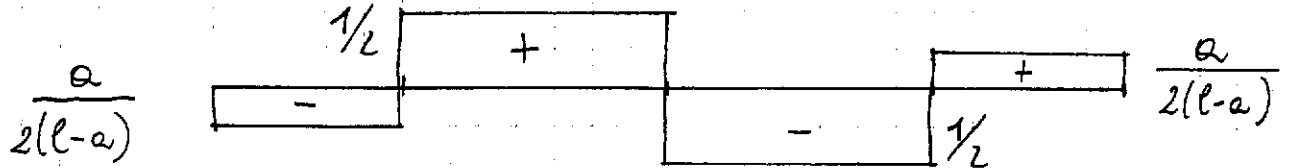
z^1 e z^5 hanno uguale intensità e verso opposto e distano

da uguale misura da C_i . Stesse osservazioni per z^2 e z^3 .

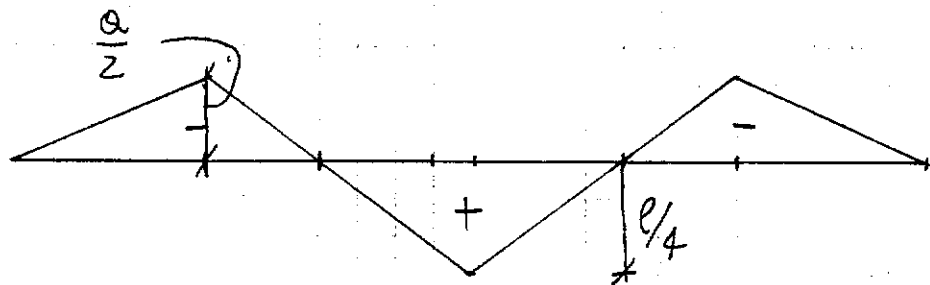
. Ammetto statico e l. di S.



(T*)

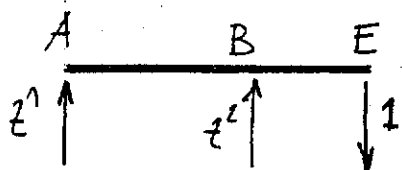


(M*)



Osservazioni: i calcoli necessari per determinare l'influenza \bar{u} ^{considerando l'intera travatura} sono piuttosto complessi. Un approccio alternativo è quello di eseguire una composizione di spostamenti di travi semplici. Di seguito vengono indicate le travi semplici che possono fornire l'influenza \bar{u} come composizione di semplici contributi:

- Si considera la trave AE; imponendo una forza unitaria nel nodo E si calcola l'inflexione (\bar{u}_1) di tale punto, primo contributo della composizione di spostamenti

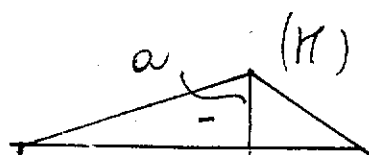
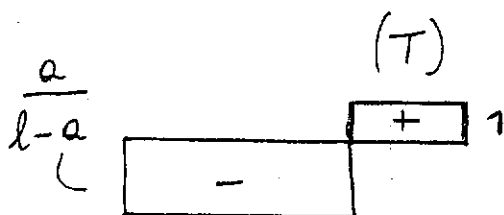
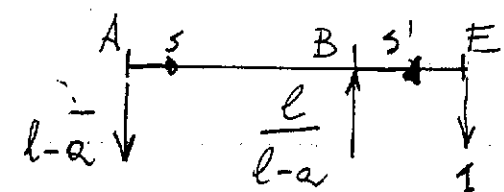


- Reazioni vincolari:

$$-z^1 - z^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z^1 = -\frac{a}{l-a}$$

$$H_A) \quad z^2(l-a) - l = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 = \frac{l}{l-a}$$

- Aspetto statico e c. di S.



per $0 \leq s < l-a$ $T(s) = -\frac{a}{l-a}$

per $-a \leq s' < 0$ $T(s') = 1$

per $0 \leq s < l-a$ $H(s) = -\frac{a}{l-a} \cdot s$

per $-a \leq s' < 0$ $H(s') = s$

. Determinazione dell'inflessione \bar{u}_1

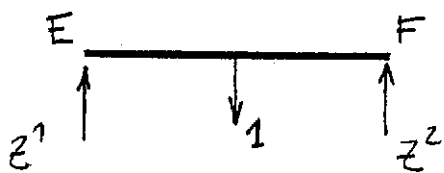
$$L_{Ve} = 1 \cdot \bar{u}_1 = L_{Vi} =$$

$$= \frac{1}{k_y} \int_0^{l-a} \left(q \frac{l-3a}{2(l-a)} l - qs \right) \frac{a}{l-a} ds + \frac{1}{k_y} \int_{-a}^0 q \left(\frac{l}{2} - s' \right) ds' -$$

$$- \frac{1}{k_x} \int_0^{l-a} \left[q \frac{l-3a}{2(l-a)} ls - \frac{qs^2}{2} \right] \cdot \frac{a}{l-a} s ds + \frac{1}{k_x} \int_{-a}^0 \left(\frac{qls'}{2} - \frac{qs'^2}{2} \right) s ds$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q}{k_y} \frac{a(l+a)(l-2a)}{(l-a)} - \frac{1}{24} \frac{q}{k_x} (l^2 - 7la - a^2) la$$

. Si considera la trave EF; imponendo una forza unitaria nella metzeria della trave si calcola l'inflessione \bar{u}_2 di tale punto, secondo contributo della composizione di spostamenti:



Le reazioni vincolari e le C. di S. sono già state determinate a pg. 3

. Determinazione dell'inflessione \bar{u}_2 :

$$L_{Ve} = 1 \cdot \bar{u}_2 = L_{Vi} =$$

$$= 2 \frac{1}{k_y} \int_0^{l/2} q \left(\frac{l}{2} - s \right) \cdot \frac{1}{2} ds + 2 \frac{1}{k_x} \int_0^{l/2} \left(\frac{qls}{2} - \frac{qs^2}{2} \right) \frac{s}{2} ds =$$

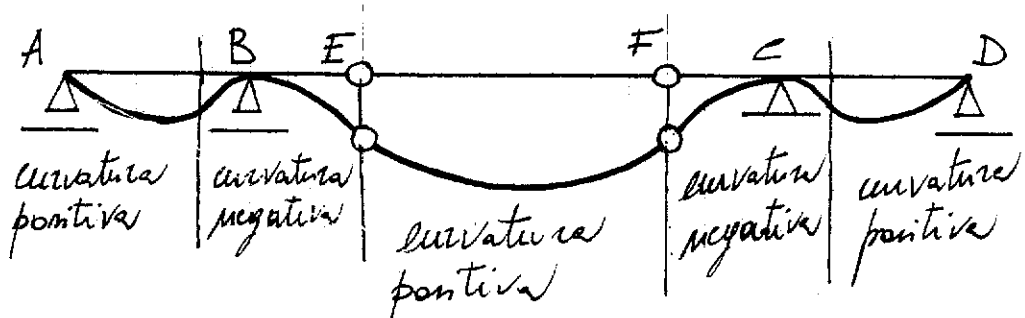
$$= \frac{1}{8} \frac{ql^2}{k_y} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{k_x}$$

È ora possibile determinare \bar{u} :

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \frac{1}{8} \frac{q}{k_y} \frac{-4la^2 - 8a^3 + 3l^2a + l^3}{l-a} +$$

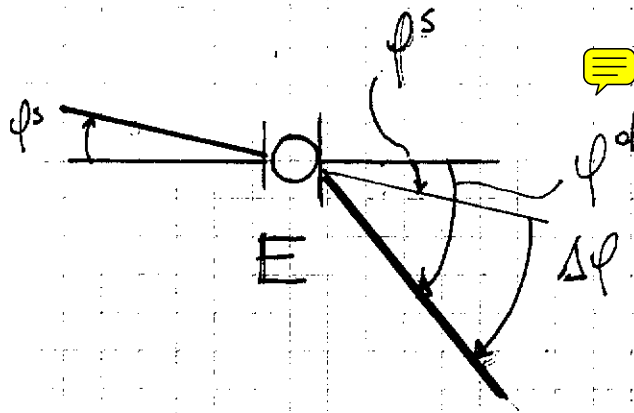
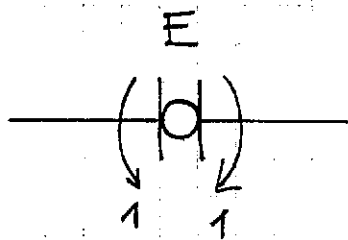
$$(b) \quad + \frac{1}{384} \frac{ql}{k_x} (-16l^2a + 112la^2 + 16a^3 + 5l^3)$$

Per determinare la rotazione relativa nella sezione E viene seguito lo stesso metodo del punto (a), ossia si considerano separatamente le travi AE ed EF. Nella figura seguente si ripete il disegno delle deformate qualitative deducibile dalle caratteristiche di deformazione del sistema effettivo



Si impone che la rotazione relativa in E sia

$$\Delta\varphi = \varphi^d - \varphi^s$$



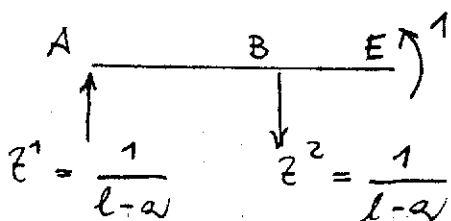
Nel sistema ausiliario devono essere applicate due coppie unitarie come indicate in figura, la prima (quella di destra) concorde con φ^d e la seconda discorde con φ^s . Nel caso l'ipotesi fatta sui versi delle rotazioni non fosse coincidente con le rotazioni reali, le rotazioni ipotizzate risulteranno di segno negativo.

- le caratteristiche di deformazione del sistema effettivo sono già state diagrammate per lo spostamento del punto (a)
- Determinazione delle carat. di sollecitazione del sistema ausiliario della trave AE

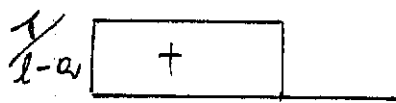
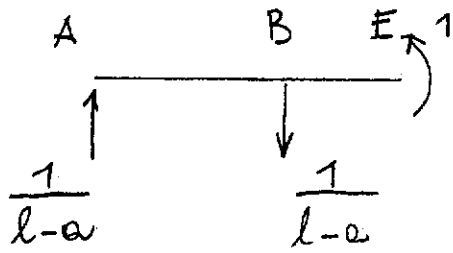
Reazioni vincolari:

$$-Z^1 + Z^2 = 0$$

$$-Z^2(l-a) + 1 = 0 \quad Z^2 = \frac{1}{l-a} = Z^1$$



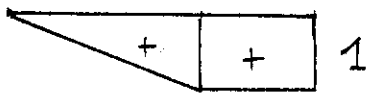
• Ametto statico e l. di S.



T^*

per $0 \leq s < l-a$ $T^*(s) = \frac{1}{l-a}$

" $0 < s' \leq a$ $T^*(s') = 0$



H^*

per $0 \leq s < l-a$ $H^*(s) = \frac{1}{l-a} s$

per $-a \leq s' \leq 0$ $H^*(s) = 1$

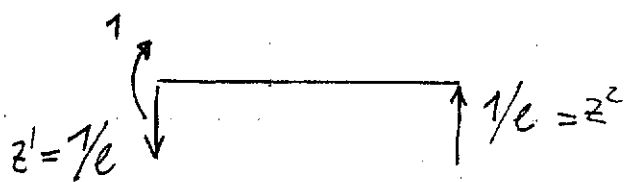
• Determinazione di φ^S :

$$L v_e = 1 \cdot \varphi^S = L v_i = \frac{1}{k_y} \int_0^{l-a} \left(q \frac{l-3a}{2(l-a)} l - qs \right) \frac{1}{l-a} ds +$$

$$+ \frac{1}{k_y} \int_0^{l-a} \left(q \frac{l-3a}{2(l-a)} ls - \frac{qs^2}{2} \right) \frac{s}{l-a} ds + \frac{1}{k_x} \int_{-a}^0 \left(\frac{qls'}{2} - \frac{qs'^2}{2} \right) \cdot 1 ds' =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q}{k_y} \left[\frac{l-3a}{l-a} l - (l-a) \right] + \frac{1}{24} \frac{q}{k_y} (l^3 - 7l^2a - 3la^2 - a^3)$$

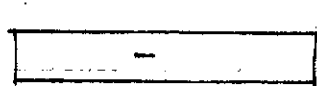
- Caratteristiche di sollecitazione del sistema ausiliario delle trave EF



• Reazioni vincolari

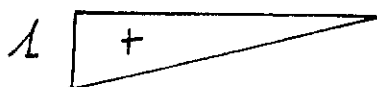
$$z^1 - z^2 = 0$$

$$z^2 \cdot l - 1 = 0 \quad z^2 = \frac{1}{e} = z^1$$



$1/e$ T^*

$$T^*(s) = -\frac{1}{e}$$



H^*

$$H^*(s) = \left(1 - \frac{s}{e}\right)$$

- Determinazione di φ^d

$$L_{ve} = 1 \cdot \varphi^d = L_{vi} = \frac{1}{k_x} \int_0^l q \left(\frac{l}{2} - s\right) \left(-\frac{1}{e}\right) ds + \frac{1}{k_x} \int_0^l \left(\frac{q s}{2} - \frac{q s^2}{2}\right) \left(1 - \frac{s}{e}\right) ds$$

$$= \frac{1}{24} \frac{q l^3}{k_x}$$

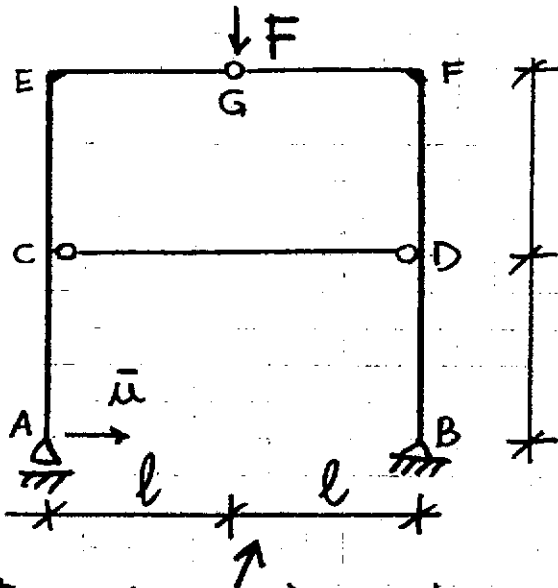
Si noti che φ^d risulta dipendente solo dalla curvatura della trave effettiva

- Determinazione di $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi^d - \varphi^s = \frac{1}{2} \frac{q}{k_x} \frac{a(l+a)}{l-a} + \frac{1}{24} \frac{q}{k_x} a (7l^2 + 3la + a^2)$$

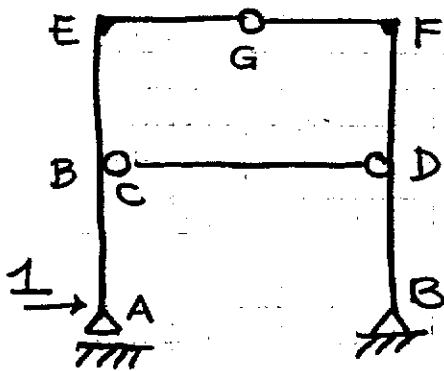


(2)



Determinare lo spostamento orizzontale del punto A.
 ⇒ tramite l'applicazione del teorema dei lavori virtuali al sistema

effettivo (sopra) e ad un opportuno sistema ausiliario (con una forza applicata in direzione e verso dello spostamento da calcolare, nel punto A).



← SISTEMA AUSILIARIO

$$L_{ve} = 1 \cdot \bar{u} = L_{vi} = \int_S (N^* \epsilon + T^* \gamma + M^* \kappa) ds$$

\rightarrow sulla struttura

Troviamo le caratteristiche di sollecitazione nei due sistemi:

SISTEMA EFFETTIVO

Sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari e scrivo le equazioni di equilibrio;

$$m = 3 \quad \sigma = 3 \quad \Rightarrow \quad m + 3(n_c - 1) = 3 + 3 \quad 6 = 6$$

$$n_c = 2$$

Reudo il sistema semplicemente connesso aprendo nell'asta CD, che è Es 2.1

~~se $[0, l]$ $\Rightarrow M_F = -F/2 \cdot l$~~

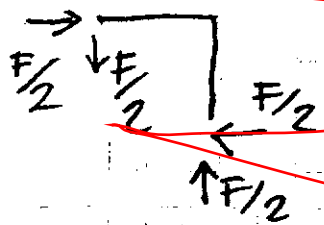
~~TRAVE FD~~

~~N costante $N(s) = -F/2$~~

~~T costante $T(s) = +F/2$~~

~~M lineare $M(s) = -F/2 \cdot s + F/2 \cdot l$~~

~~se $[0, l]$ $\Rightarrow M_D = 0$~~

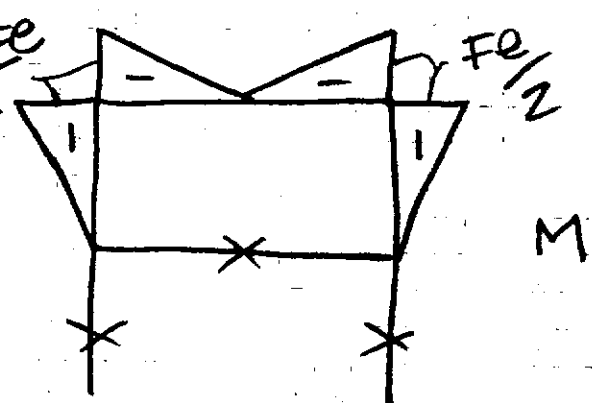
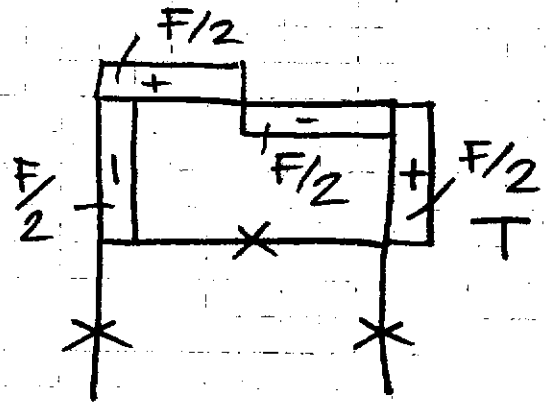
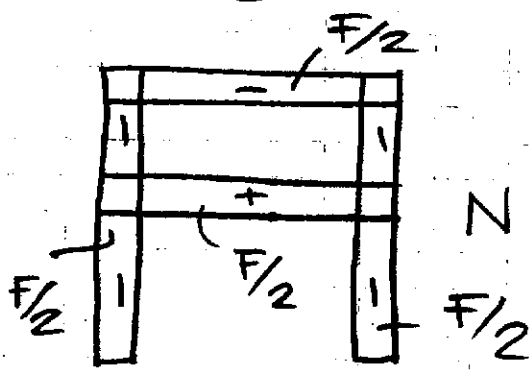
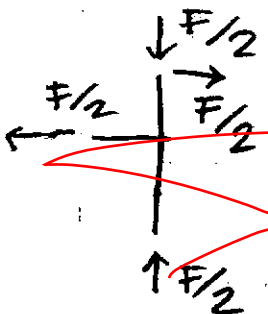


~~TRAVE DB~~

~~N costante $N(s) = -F/2$~~

~~T costante $T(s) = 0$ (nullo)~~

~~M costante $M(s) = 0$ ($M_0 = 0$)~~

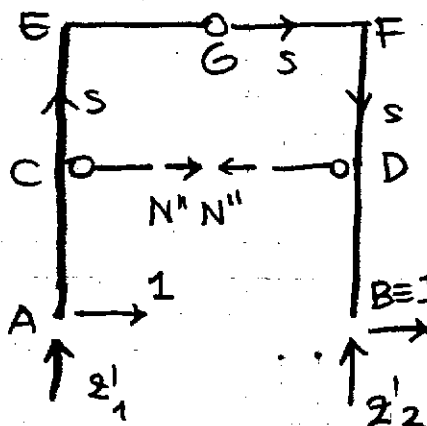


Ora trovo la deformazione assiale $\epsilon = N/K_\epsilon$; lo scorrimento angolare $\gamma = T/K_\gamma$ e la curvatura $\chi = M/K_\chi$.
 I diagrammi sono uguali a quel ES2.3

le delle corrispondenti sollecitazioni, scala
 ti rispetto alle corrispondenti regolari
 (K_E, K_T, K_M) -

SISTEMA AUSILIARIO

Sorto usco ai vincoli le reazioni vincolari e so-
 vo le equazioni di equilibrio. Amo il sistema
 nell' asta CD (solo normale)



Eq. di equilibrio:

$x_1) z'_3 + 1 = 0$
 $x_2) z'_1 + z'_2 = 0$
 $I) -z'_1 l = 0$

Eq. ausiliaria ($M_G = 0$)

$-z'_1 l + 1 \cdot 2l + N'' l = 0$

$\Rightarrow z'_1 = 0 \quad z'_2 = 0 \quad z'_3 = -1 \quad N'' = -2$

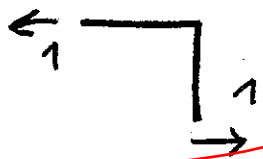
~~TRAVE AC N costante $N(s) = 0$
 T costante $T(s) = -1$
 M lineare $M(s) = -s$ ($\Rightarrow M_C^{ac} = -l$)~~

~~TRAVE CD N costante $N(s) = N'' = -2$
 T, M nulli~~

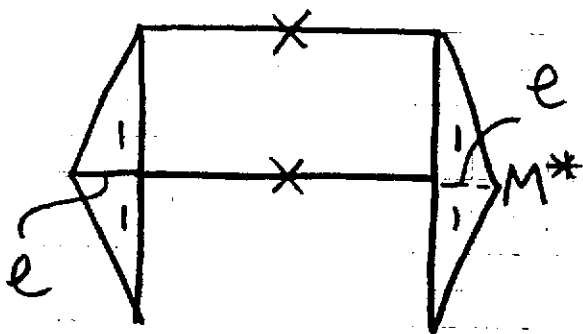
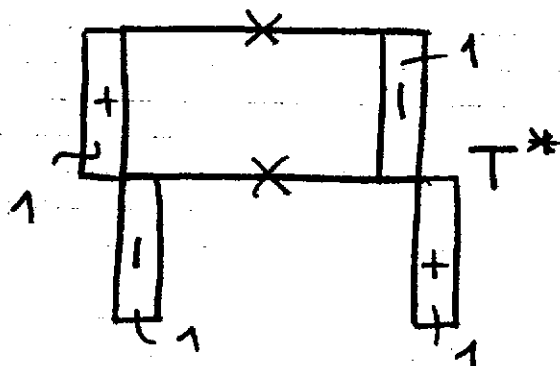
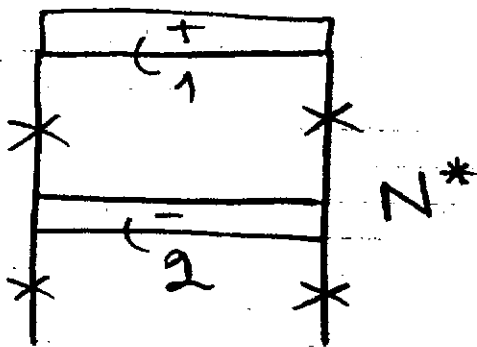
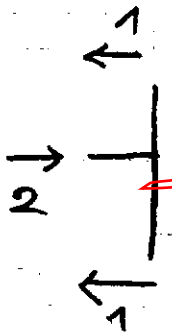
~~TRAVE CE N costante $N(s) = 0$
 T costante $T(s) = 1$
 M lineare $M(s) = -l + s$
 $s \in [0, l] \Rightarrow M_E = 0$~~

~~TRAVE EF N costante $N(s) = 1$
 T costante $T(s) = 0$
 M costante, $M_G = 0 \Rightarrow M(s) = 0$ Es2.4~~

~~TRAVE FD~~ ~~N costante~~ ~~$N(s)=0$~~
~~T costante~~ ~~$T(s)=-1$~~
~~M lineare~~ ~~$M(s)=-s$~~
 $\Rightarrow s \in [0, e]$ $M_D = -e$



~~TRAVE DB~~ ~~N costante~~ ~~$N(s)=0$~~
~~T costante~~ ~~$T(s)=1$~~
~~M lineare~~ ~~$M(s)=-e+s$~~
 ~~$s \in [0, e]$~~ ~~$M_B = 0$~~



Applico il Teorema dei lavori virtuali:

$$L_{ve} = 1 \cdot \bar{u} = L_{vi} = \int_{\text{Struttura}} (N^* \varepsilon + T^* \gamma + M^* \kappa) ds$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \int_{CD} N^* \frac{N}{K_e} ds + \int_{EF} N^* \frac{N}{K_e} ds + \int_{CE} T^* \frac{T}{K_y} ds + \int_{FD} T^* \frac{T}{K_y} ds + \int_{CE} M^* \frac{M}{K_x} ds + \int_{DF} M^* \frac{M}{K_x} ds$$

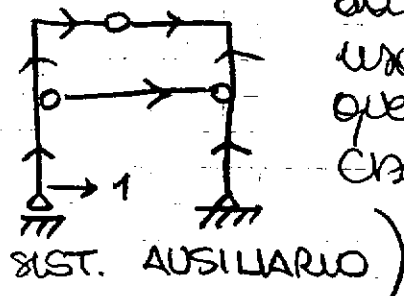
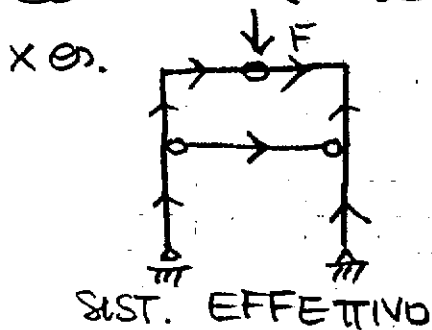
ES 2.5

$$\bar{u} = \int_0^{2l} -2 \cdot \left(\frac{F}{2K_E} \right) ds + \int_0^{2l} 1 \cdot \left(-\frac{F}{2K_E} \right) ds + \int_0^l 1 \cdot \left(-\frac{F}{2K_X} \right) ds + \int_0^l -1 \cdot \left(\frac{F}{2K_X} \right) ds + 2 \int_0^l (s-l) \left(-\frac{F}{2K_X} s \right) ds =$$

$$\Rightarrow \bar{u} = -3 \frac{Fl}{K_E} - \frac{Fl}{K_X} + \frac{Fl^3}{6K_X}$$

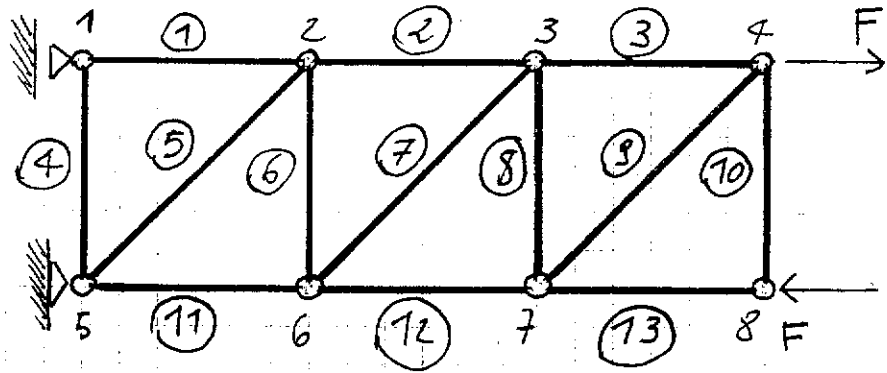
P.S. Se per il momento percorso la trave CE (da C a E) e DF (da D a F), le equazioni che descrivono i diagrammi sono le stesse $\Rightarrow \int_{CE} + \int_{DF} = 2 \int_{CE}$ (per l'integrazione)

N.B. E' necessario che i diagrammi del sistema effettivo e di quello ausiliario siano tracciati con lo stesso senso di percorrenza. (Ero poteva anche essere differente da quello usato in questo esercizio)



N.B.2 \bar{u} dipende da tutte e 3 le rigidezze; in quanto dipende dalla def. assiale dei due travi e dalla def. a taglio e dalla wz = $\frac{wz}{E_s 2.6}$ =
 valore dei retti.

ESERCIZIO 3

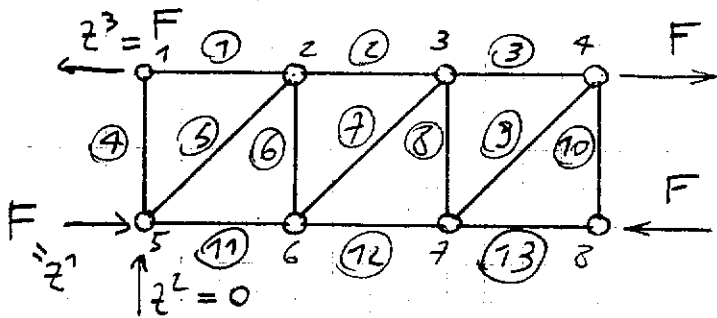


L'applicazione del teorema di lavori virtuali per il calcolo dello spostamento verticale \bar{u} nel nodo 8 richiede la determinazione delle caratteristiche di deformazione del sistema in esame (sistema effettivo) e delle caratteristiche di sollecitazione di un sistema ausiliario caratterizzato dallo stesso dominio del sist. effettivo e caricato da una forza unitaria nella direzione dello spostamento incognito \bar{u} . In questo modo si può scrivere il T.L.V. come:

$$L_{re} = 1 \cdot \bar{u} = L_{vi} = \int_S (N^* \cdot \epsilon) dS;$$

infatti trattandosi di una truttura reticolare l'unica caratteristica di sollecitazione che può compiere lavoro è la forza normale N^* sulla deformazione assiale e

• Determinazione delle caratteristiche di deformazione del sistema effettivo; $m=3, a=13, n=8 \Rightarrow m+a=16=2n$



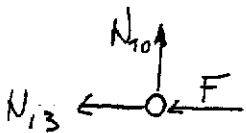
• Reazioni vincolari:

$$z^2 = 0 \quad z^1 = F$$



$$z^3 = F$$

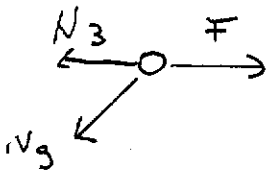
Node 8 semplice



Equaz. di equilibrio dei nodi semplici

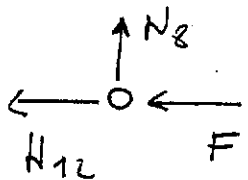
$$\begin{cases} N_{10} = 0 \\ N_{13} = -F \end{cases}$$

Node 4 semplice



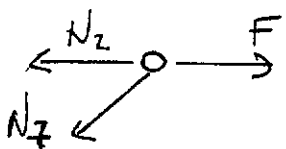
$$\begin{cases} -N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} N_9 + F = 0 & N_3 = F \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} N_9 = 0 & \rightarrow N_9 = 0 \end{cases}$$

Node 7 semplice



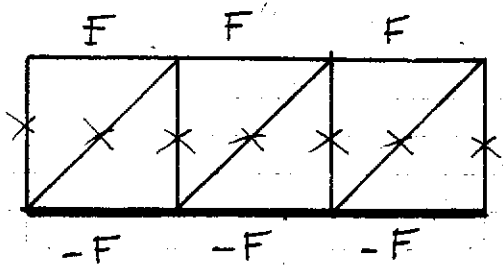
$$\begin{cases} N_8 = 0 \\ -N_{12} - F = 0 \rightarrow N_{12} = -F \end{cases}$$

Node 3 semplice



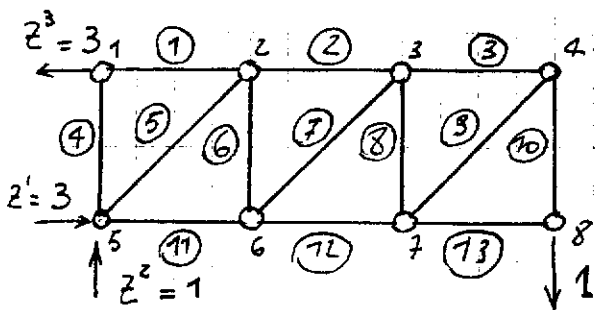
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} N_7 = 0 \rightarrow N_7 = 0 \\ N_2 = F \end{cases}$$

Da quanto calcolato sino a questo momento si può osservare che per le particolari condizioni di carico solo le aste orizzontali superiori (tiranti) ed inferiori (puntone) hanno valore diverso da zero. (vedi figura seguente).



	aste	N^e	$E^e = A^e/k_E$
1	tirante	F	F/k _E
2	u	u	u
3	u	u	u
11	puntone	-F	-F/k _E
12	u	u	u
13	u	u	u

- Determinazione delle caratteristiche di sollecitazione del sistema ausiliario

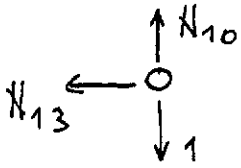


- Reazioni vincolari

$$z^2 = 1, \quad z^1 = z^3 = 3$$

Si noti che per determinare lo spostamento incognito è sufficiente conoscere N_1^* , N_2^* , N_3^* , N_{11}^* , N_{12}^* , N_{13}^*

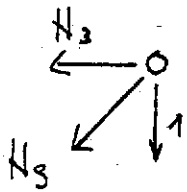
Nodo 3 semplice



Equaz. di equilibrio dei nodi semplici

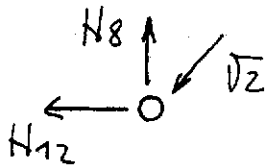
$$\begin{cases} N_{13} = 0 \\ N_{10} = 1 \end{cases}$$

Nodo 4 semplice



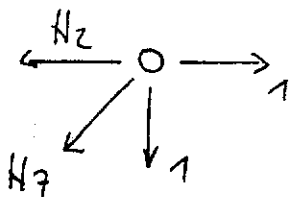
$$\begin{cases} -N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} N_3 = 1 \\ N_5 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Nodo 7 semplice



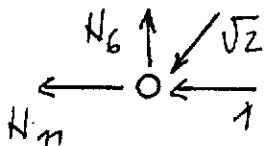
$$\begin{cases} -N_{12} - 1 = 0 \\ -N_8 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{12} = -1 \\ N_8 = 1 \end{cases}$$

Nodo 3 semplice



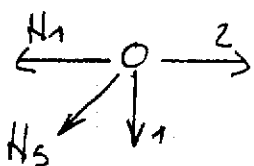
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} N_7 + 1 = 0 \\ -N_2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_7 = 0 \end{cases} \begin{cases} N_7 = -\sqrt{2} \\ N_2 = 2 \end{cases}$$

Nodo 6 semplice



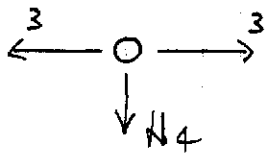
$$\begin{cases} -N_{11} - 1 - 1 = 0 \\ -N_6 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} N_{11} = -2 \\ N_6 = 1 \end{cases}$$

Nodo 2 semplice



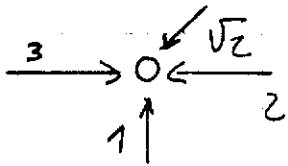
$$\begin{cases} -N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 + 2 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} N_5 + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} N_1 = 3 \\ N_5 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Nodo 4 semplice



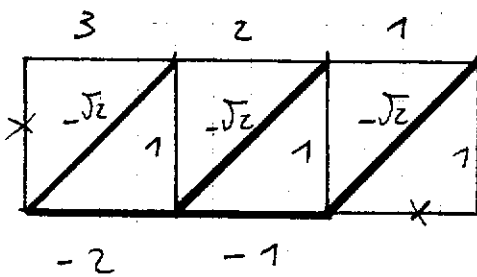
$$H_4 = 0$$

Nodo 5 semplice



Essendo note tutte le forze agenti sul nodo 5, si verifica:

$$\begin{cases} 3 - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 0 & \text{c.v.d.} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = 0 & \text{c.v.d.} \end{cases}$$



	arte	N^*
1	tirante	3
2	h	2
3	h	1
5	puntone	$-\sqrt{2}$
6	tirante	1
7	puntone	$-\sqrt{2}$
8	tirante	1
9	puntone	$-\sqrt{2}$
10	tirante	1
11	puntone	-2
12	h	-1
4-13	scariche	$N^* = 0$

• Calcolo dello spost. verticale
incognito \bar{u} :

Essendo costante in \forall arte $N \in N^*$

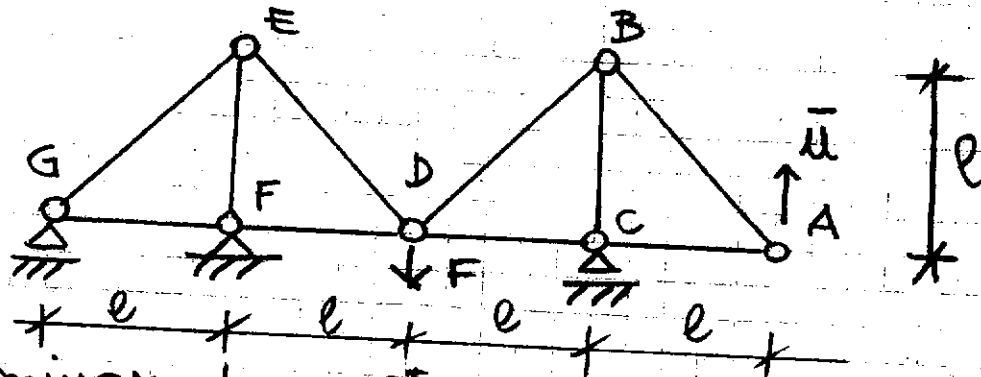
si può scrivere:

$$\frac{N^* N}{k_E} \int_0^{\bar{e}} ds = \frac{N^* N}{k_E} \bar{e} \quad (\bar{e} = \text{lunghezza arte}) \quad \text{e quindi}$$

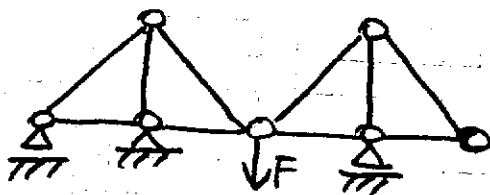
$$1 \cdot \bar{u} = \sum_{a=1}^{13} \frac{N_a^* N_a}{k_E} \bar{e}_a = \frac{9FE}{k_E}$$

$$\rightarrow \bar{u} = \frac{9FE}{k_E}$$

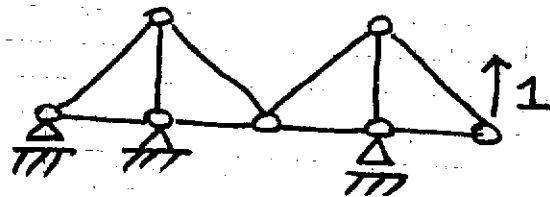
(4)



Determinare lo spostamento verticale del nodo A \Rightarrow tramite l'applicazione del teo-
 rema dei lavori virtuali al sistema ef-
 fettivo e ad un opportuno sistema ausi-
 liario (con 1 forza unitaria applicata in
 A, in direzione e verso dello spostamen-
 to da calcolare -



SISTEMA EFFETTIVO



SISTEMA AUSILIARIO

Entrambi i sistemi sono travature reticolari
 (con nodi solo nei nodi e non lungo le
 aste) \Rightarrow solo sforzo assiale N -

Quelche entrambi i sistemi sono statica-
 mente determinati -

Teorema dei lavori virtuali:

$$L_{ve} = 1 \cdot \bar{u} = L_{vi} = \int_S (N^* \epsilon + T^* \gamma + M^* \kappa) ds$$

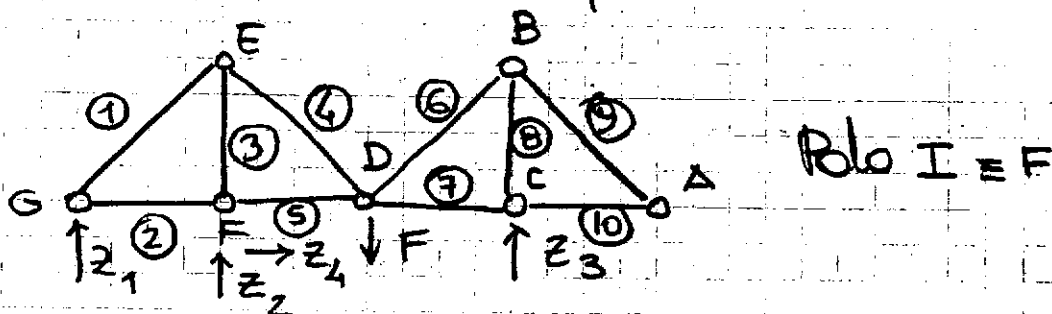
$S \rightarrow$ struttura

però $T^*, M^* = 0 \Rightarrow \bar{u} = \int_S N^* \epsilon ds$

ES4.1

SISTEMA EFFETTIVO

Sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari e scrivo le equazioni di equilibrio:



$$x_1) z_4 = 0$$

$$x_2) z_1 + z_2 + z_3 - F = 0$$

$$I) -z_1 l + z_3 l - Fl = 0$$

$$M_D = 0) z_3 l = 0 \quad (\text{eq. ausiliarie})$$

$$\Rightarrow z_1 = -F; z_2 = 2F; z_3 = z_4 = 0$$

Risolvo la travatura a nodi consecutivi, partendo dal nodo semplice G

$$\begin{array}{l} \text{G} \begin{array}{l} \nearrow N_1 \\ \rightarrow N_2 \\ \downarrow F \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 = 0 \\ -N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} N_1 = \sqrt{2}F \\ N_2 = -F \end{array}$$

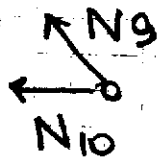
$$\text{E} \begin{array}{l} \uparrow N_3 \\ \rightarrow F \\ \uparrow 2F \\ \rightarrow N_5 \end{array} \quad \begin{array}{l} N_3 = 2F \\ N_5 = -F \end{array}$$

$$\text{D} \begin{array}{l} \swarrow \sqrt{2}F \\ \uparrow \sqrt{2}F \\ \rightarrow N_4 \end{array} \quad \begin{array}{l} N_4 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}F}{2} - 2F = 0 \\ \Rightarrow N_4 = \sqrt{2}F \end{array}$$

$$\text{B} \begin{array}{l} \swarrow \sqrt{2}F \\ \rightarrow F \\ \downarrow F \\ \rightarrow N_7 \\ \nearrow N_6 \end{array} \quad \begin{array}{l} N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_7 + F - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0 \\ N_6 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} F - F = 0 \\ \Rightarrow N_6 = N_7 = 0 \end{array}$$

ES 4.2

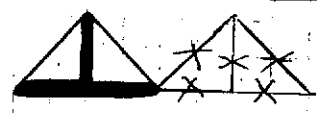
(A)



$$N_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_9 = 0$$

$$N_{10} + N_9 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_{10} = 0$$

— puntone
— tirante



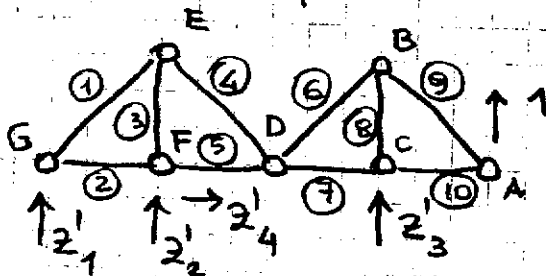
(C)



$$N_8 = 0$$

SISTEMA AUSILIARIO

Sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari e scrivo le equazioni di equilibrio:



Polo I = F

$$x_1) z'_4 = 0$$

$$x_2) z'_1 + z'_2 + z'_3 + 1 = 0$$

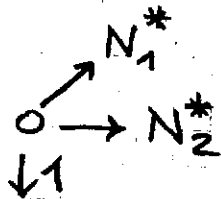
$$I) -z'_1 l + z'_3 2l + 1 \cdot 2l = 0$$

$$M_D = 0) z'_3 l + 1 \cdot 2l = 0 \text{ (eq. ausiliaria)}$$

$$\Rightarrow z'_1 = -1; z'_2 = 2; z'_3 = -2; z'_4 = 0$$

Risolvo la travatura a nodi canonici, partendo dal nodo semplice G.

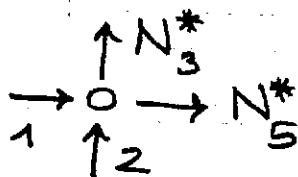
(G)



$$N_1^* \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2^* = 0 \Rightarrow N_1^* = \sqrt{2}$$

$$-N_1^* \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0 \Rightarrow N_2^* = -1$$

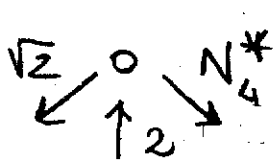
(F)



$$N_3^* = -2$$

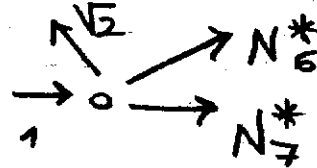
$$N_5^* = -1$$

(E)



$$N_4^* \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} - 2 = 0$$

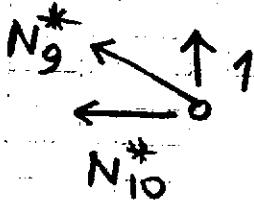
$$\Rightarrow N_4^* = \sqrt{2}$$

(D) 

$$N_6^* \frac{\sqrt{2}}{2} + N_7^* + 1 - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

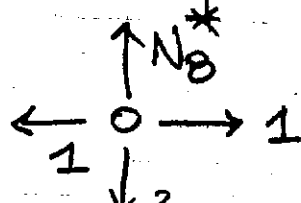
$$N_6^* \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N_6^* = -\sqrt{2} \quad N_7^* = 1$$

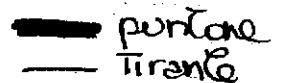
(A) 

$$\frac{\sqrt{2}}{2} N_9^* + 1 = 0 \Rightarrow N_9^* = -\sqrt{2}$$

$$N_{10}^* + \frac{\sqrt{2}}{2} N_9^* = 0 \Rightarrow N_{10}^* = 1$$

(C) 

$$N_8^* = 2$$


 — puntone
 — tirante



Poiché la travatura reticolare del sistema effettivo ha solo $N \Rightarrow$ l'unica deformazione effettiva è $\epsilon = N/K_E \Rightarrow$ posso usare così il teorema dei lavori virtuali:

$$L_{ve} = 1 \cdot \bar{u} = L_{vi} = \int_{\text{Struttura}} N^* \frac{N}{K_E} ds$$

con K_E costante

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{K_E} \int_{\mathcal{S} \rightarrow \text{struttura}} N^* N ds$$

Per semplicità di calcoli, scrivo una tabella; poiché N^* e N costanti in ogni asta l'integrazione si limita, per 1 singola asta, a:

$$a: \quad \frac{N^* N}{K_E} \int_0^L ds = \frac{N^* N}{K_E} \cdot L \quad \text{ES 4.4}$$

dove L = lunghezza della particolare asta;
 per esempio:

asta ①

$$\frac{N^* N}{K_E} \int_0^{\sqrt{2}l} ds = \frac{N^* N}{K_E} \sqrt{2}l$$

TABELLA

asta	N^*	N	L	$N^* N \cdot L$
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}l$	$2\sqrt{2}Fl$
2	-1	-F	l	Fl
3	-2	-2F	l	$4Fl$
4	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}l$	$2\sqrt{2}Fl$
5	-1	-F	l	Fl
6	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}l$	0
7	1	0	l	0
8	2	0	l	0
9	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}l$	0
10	1	0	l	0

$$\Sigma \quad (4\sqrt{2}+6)Fl$$

Facendo la somma dei contributi delle singole aste e dividendo per K_E , si ottiene lo spostamento \bar{u} richiesto:

$$\bar{u} = \frac{\Sigma N^* N}{K_E} L = \frac{(4\sqrt{2}+6)Fl}{K_E}$$

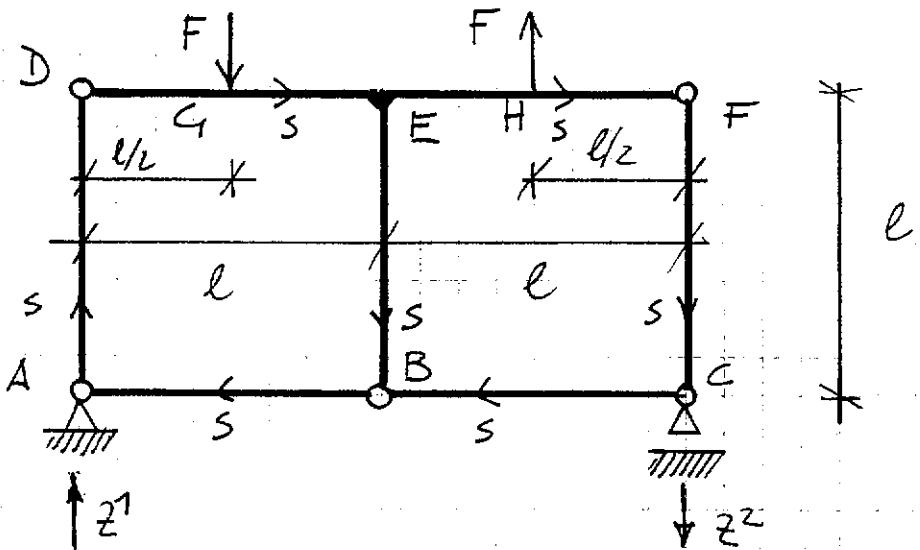
ESECUZIONE 5

$$m = 3 \quad \sigma = 6$$

$$M_c = 3$$

$$m + 3(M_c - 1) = 3 + 6$$

$$3 + 3(3 - 1) = 3 + 6 = 9$$



• Calcolo delle caratteristiche di deformazione del sistema effettivo

• Reazioni vincolari

$$z^3 = 0$$

$$-z^1 + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^1 = \frac{F}{2}$$

$$H_A \rightarrow -z^2 \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{2} l \cdot F = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{F}{2}$$

• Si apre il sistema in A e in C dove risulta:

$$T_A = H_A = 0, \quad T_C = H_C = 0, \quad \text{le uniche caratteristiche}$$

incognite sono H_A e H_C . Quindi risulta che

$$m + 1(M_c - 1) = 3 + 0$$

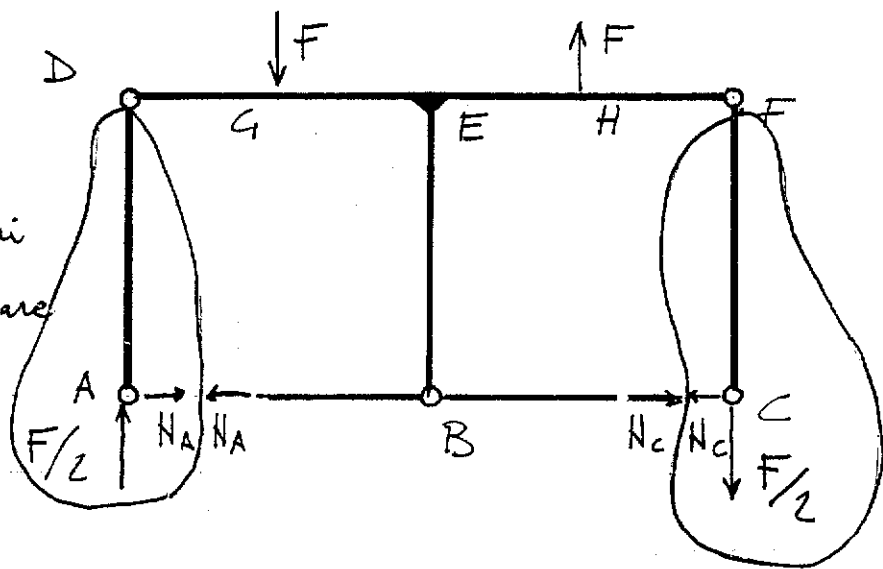
$$3 + 2$$

$$= 3 + 2$$

\Rightarrow Si noti che le equazioni da considerare per le $(M_c - 1)$ connessioni

si sono ridotte ad 1. In quanto il sistema è stato aperto in corrispondenza di A e C e quindi si è già utilizzata l'eq. $H_A = H_C = 0$. Es. 5/1
Inoltre la cerniera in B comporta $T_A = T_C = 0$.

Si noti ancora
che le scomposizioni
ancora da utilizzare
sono le
cerniere in
D ed F.



• Equazioni ausiliarie

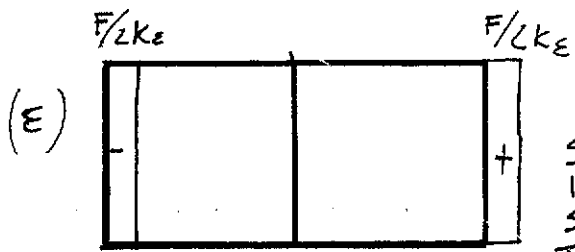
$$M_D = 0 \rightarrow N_A = 0$$

$$M_F = 0 \rightarrow N_C = 0$$

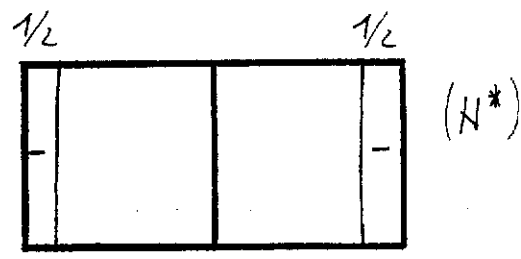
Si noti che EB è navata; inoltre le travi AD e FC
sono sollecitate solo a forze normale indolente in D e
F rispettivamente una forza verticale pari a $-F/2$ e $+F/2$.

Nel seguito . . . si riportano i diagrammi
delle caratteristiche di deformazione del sistema
effettivo ^{delle c. di S.} e del sistema ausiliario in cui si è
applicata una forza unitaria nel punto E.

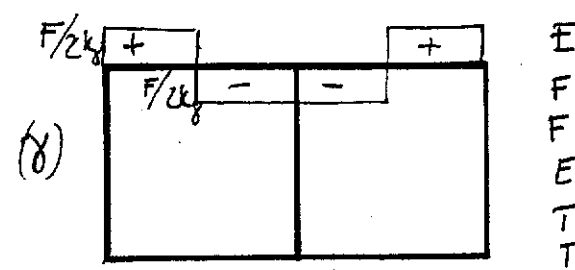
Si noti che i contributi di Lv_i sono a due a due
di uguale intensità e verso opposto, ossia $Lv_i = 0$
quindi lo spostamento \bar{u} risulta nullo. ES.5/2



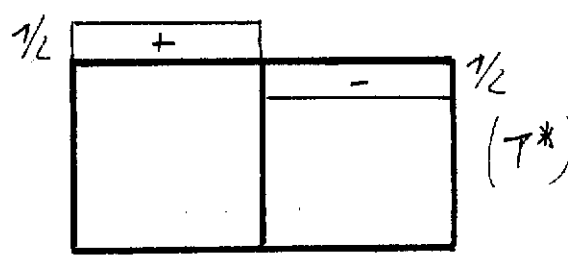
SIST.



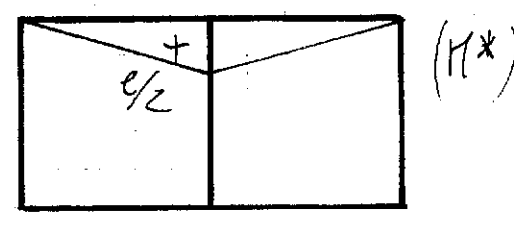
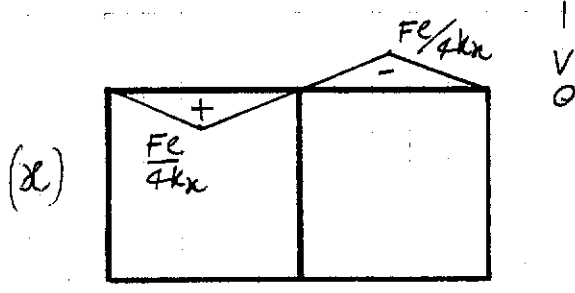
SIST.

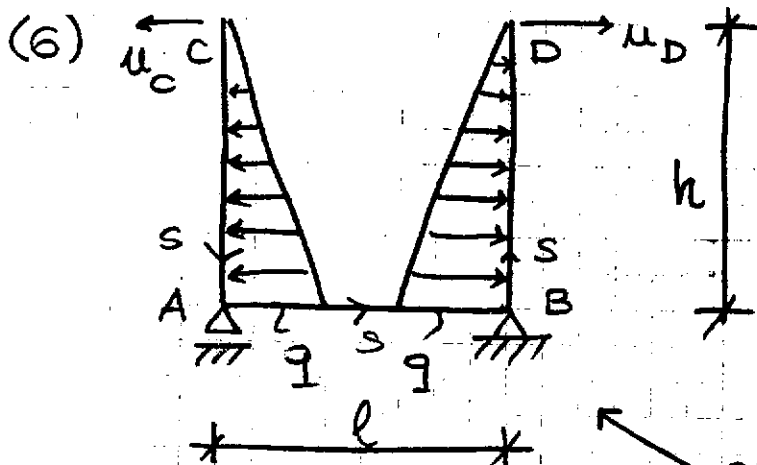


EFFETTIVO



AUSILIARIO

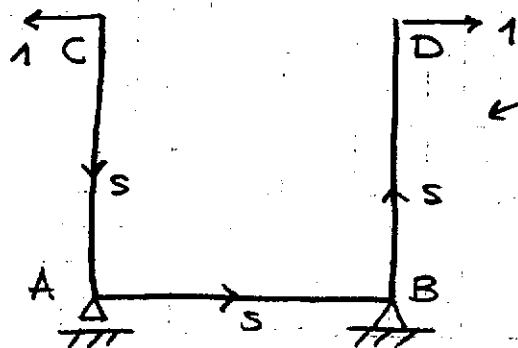




Determinare lo spostamento relativo tra i punti C, D in direzione orizzontale (Δu) .

SISTEMA EFFETTIVO

Tramite l'applicazione del Teorema dei lavori virtuali al sistema effettivo e ad un opportuno sistema ausiliario:



SISTEMA AUSILIARIO

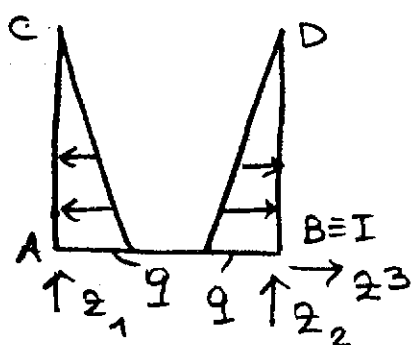
$\Delta u = u_C + u_D$
↑ spostamento relativo

$$L_{ve} = 1 \cdot u_C + 1 \cdot u_D = \Delta u = L_{vi} = \int (N^* \varepsilon + T^* \gamma + M^* \chi) ds$$

Troviamo le caratteristiche ^{Struttura} di sollecitazione nei due sistemi:

SISTEMA EFFETTIVO

Sostituendo ai vincoli le reazioni vincolari e scrivendo le equazioni di equilibrio:



$$\begin{aligned} x_1) \quad z_3 &= 0 \\ x_2) \quad z_1 + z_2 &= 0 \\ I) \quad -z_1 l &= 0 \end{aligned}$$

Sistema autoequilibrato

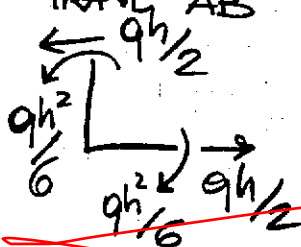
$$\Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = 0 \quad \text{ES6.1}$$

~~TRAVE CA N costante $N(s) = 0$~~

~~T parabolico (curvatura negativa, quindi concavo) $T(s) = -q \frac{s^2}{2h}$~~

~~$s \in [0, h] \Rightarrow T_A = -qh/2$~~

~~$M(s) = -q \frac{s^3}{6h}$ cubico $\Rightarrow M_A = -qh^2/6$~~



~~N costante $N(s) = qh/2$
T costante $T(s) = 0$ (nullo)
M costante $M(s) = -qh^2/6$~~

~~TRAVE BD N costante $N(s) = 0$~~

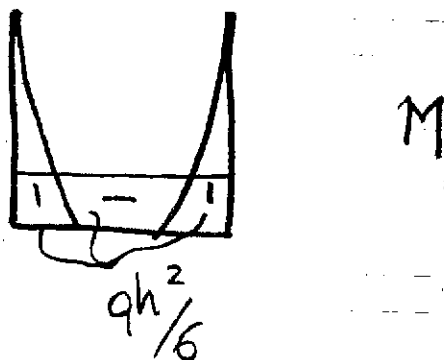
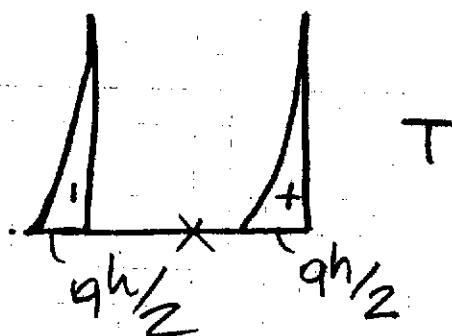
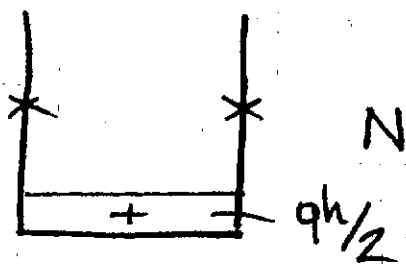
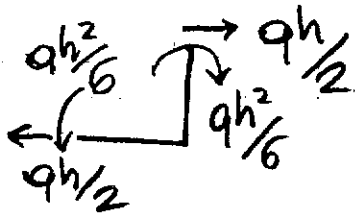
~~T parabolico (curvatura positiva, quindi concavo)~~

~~$T(s) = qh/2 + q \frac{s^2}{2h} - qs$~~

~~$s \in [0, h] \Rightarrow T_D = 0$~~

~~$M(s) = -\frac{qh^2}{6} + \frac{qhs}{2} + q \frac{s^3}{6h} - \frac{qs^2}{2}$~~

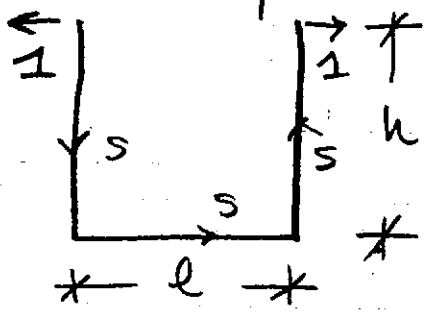
~~$\Rightarrow M_D = 0$~~



Ora trovo la deformazione assiale $\varepsilon = N/K_\varepsilon$
 lo scorrimento angolare $\gamma = T/K_\gamma$ e la
 curvatura $\chi = M/K_\chi$ -
 I diagrammi sono uguali quelli del
 le corrispondenti sollecitazioni, scattati
 rispetto alle corrispondenti rigidità
 ($K_\varepsilon, K_\gamma, K_\chi$) -

SISTEMA AUSILIARIO

Anche questo è un sistema autoequilibrato \Rightarrow reazioni vincolari
 nulle -



TRAVE CA N costante

$N(s) = 0$

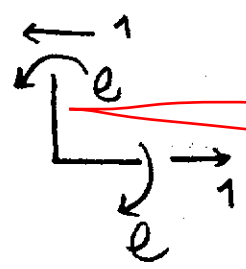
T costante $T(s) = -1$

M lineare $M(s) = -s \quad s \in [0, l] \Rightarrow M_A = -l$

TRAVE AB N costante $N(s) = 1$

T costante $T(s) = 0$ (nullo)

M costante $M(s) = -l$

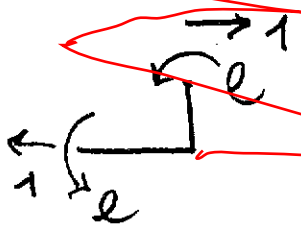


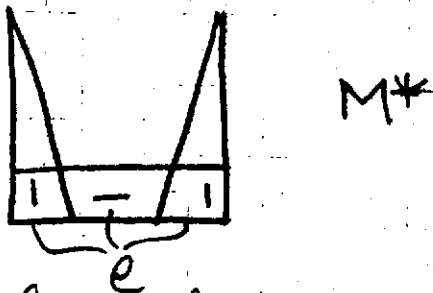
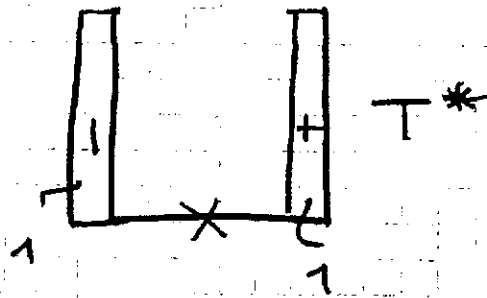
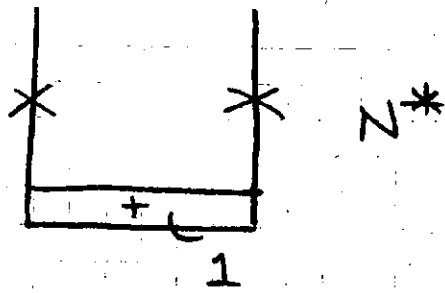
TRAVE BD N costante $N(s) = 0$

T costante $T(s) = 1$

M lineare $M(s) = -l + s$

$s \in [0, l] \Rightarrow M_D = 0$





Applico il Teorema dei Carichi Virtuali:

$$L_{ve} = \Delta u = L_{vi} = \int_{AB} \frac{N^* N}{K_E} ds + \int_{CA} \frac{T^* T}{K_Y} ds +$$

$$+ \int_{DB} \frac{T^* T}{K_Y} ds + \int_{AB} \frac{M^* M}{K_X} ds + \int_{CA} \frac{M^* M}{K_X} ds +$$

$$+ \int_{DB} \frac{M^* M}{K_X} ds \quad \left[\begin{array}{l} \text{per integrare} \\ DB = \text{percorso da D a B} \\ \text{per } M \Rightarrow \int_{CA} + \int_{DB} = 2 \int_{CA} \end{array} \right]$$

$$\Delta u = \int_0^l 1 \cdot \left(\frac{qh}{2K_E} \right) ds + \int_0^h -1 \cdot \left(\frac{-qs^2}{2hK_Y} \right) ds +$$

$$+ \int_0^h 1 \cdot \left(\frac{qs^2}{2hK_Y} \right) ds + \int_0^l -l \cdot \left(\frac{-qh^2}{6K_X} \right) ds +$$

$$+ 2 \int_0^l -s \cdot \left(\frac{-q \frac{s^3}{6hK_X}} \right) ds$$

$$\Delta u = \frac{qh^2 l}{2K_E} + \frac{qh^2}{3K_X} + \frac{qh^2 l^2}{6K_X} + \frac{qh^4}{15K_X}$$

N.B. Δu dipende da tutte e tre le rigidità; infatti dipende dalla deformazione assiale del tratto AB, e dalla deformazione a taglio e dalla curvatura dei tratti CA e DB.