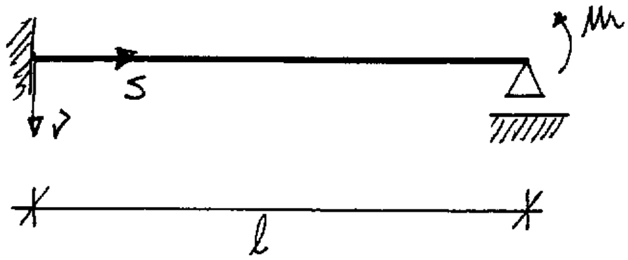
ESERCIZI: LINEA ELASTICA

ESERCIZIO 1



- Si assume K_x costante, inoltre $f_v(s) = 0$, $m(s) = 0$
- L'equazione della linea elastica diviene:

$$K_x \frac{d^4 u_v}{ds^4} = 0$$

- La soluzione generale dello spostamento verticale (inflessione) è pari a: $\tilde{u}_v(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3$ e coincide con la soluzione del problema, in quanto la soluzione particolare $\bar{u}_v(s) = 0$
- Le quattro incognite c_0, c_1, c_2, c_3 vengono determinate mediante quattro condizioni al contorno.

Condizioni agli estremi:

1) $u_v(0) = 0 \rightarrow c_0 = 0$

2) $\varphi(0) = 0 \rightarrow \varphi(s) = -\frac{du_v}{ds} = -(c_1 + 2c_2 s + 3c_3 s^2) = 0$

$\varphi(0) = 0 + c_1 = 0$

3) $u_y(\ell) = 0 \rightarrow c_2 \ell^2 + c_3 \ell^3 = 0$

4) $M(\ell) = m \rightarrow M(s) = -K_x \dfrac{d^2 u_y}{ds^2} = -K_x(2c_2 + 6c_3 s)$

$M(\ell) = -K_x(2c_2 + 6c_3\ell) = m$

Dalla condizione 3) $c_2 = -c_3\ell$ che inserita nella 4) fornisce:

- $-2\ell c_3 + 6\ell c_3 = -\dfrac{m}{K_x} \Rightarrow c_3 = -\dfrac{m}{4\ell K_x}$
- $c_2 = \dfrac{m}{4K_x}$

- Il campo di inflessione è dato quindi da:

(cubica)

$u_y = \dfrac{m}{4K_x}s^2 - \dfrac{m}{4\ell K_x}s^3$, $u_y(0) = 0$, $u_y(\ell) = \dfrac{m\ell^2}{4K_x} - \dfrac{m\ell^2}{4K_x} = 0$

$u_y(\frac{2}{3}\ell) = \dfrac{1}{27}\dfrac{m}{K_x}\ell^2$ (valore massimo di inflessione)

- Il campo di rotazione è pari a:

$\varphi(s) = -\dfrac{du_y}{ds} = -\left(\dfrac{m}{2K_x}s - \dfrac{3m}{4\ell K_x}s^2\right)$, $\varphi(0) = 0$,

(quadratica) $\varphi(\ell) = -\left(\dfrac{m\ell}{2K_x} - \dfrac{3m\ell}{4K_x}\right) = \dfrac{1}{4}\dfrac{m\ell}{K_x}$

$\varphi(s) = 0$ se $s\left(\dfrac{m}{2K_x} - \dfrac{3m}{4\ell K_x}s\right) = 0 \rightarrow$ per $s = 0$, $s = \dfrac{2}{3}\ell$

$\varphi(\frac{1}{3}\ell) = -\dfrac{1}{6}\dfrac{m}{K_x}\ell + \dfrac{1}{4}\dfrac{m}{K_x}\ell = \dfrac{1}{12}\dfrac{m}{K_x}\ell$ (dove $\chi = 0$)

Es. 1/2

. La curvatura risulta:

$$\chi(s) = -\frac{d^2 u_\nu}{ds} = -\left(\frac{m}{2K_\chi} - \frac{3}{2}\frac{m}{\ell K_\chi}s\right), \ \chi(0) = -\frac{m}{2K_\chi}, \ \chi(\ell) = \frac{m}{K_\chi}$$

(lineare) $\qquad \chi(s) = 0$ se $s = \frac{1}{3}\ell$

. Il Momento flettente,

$$M(s) = K_\chi\,\chi(s) = -\left(\frac{m}{2} - \frac{3}{2}\frac{m}{\ell}s\right), \ M(0) = -\frac{m}{2}, \ M(\ell) = m$$

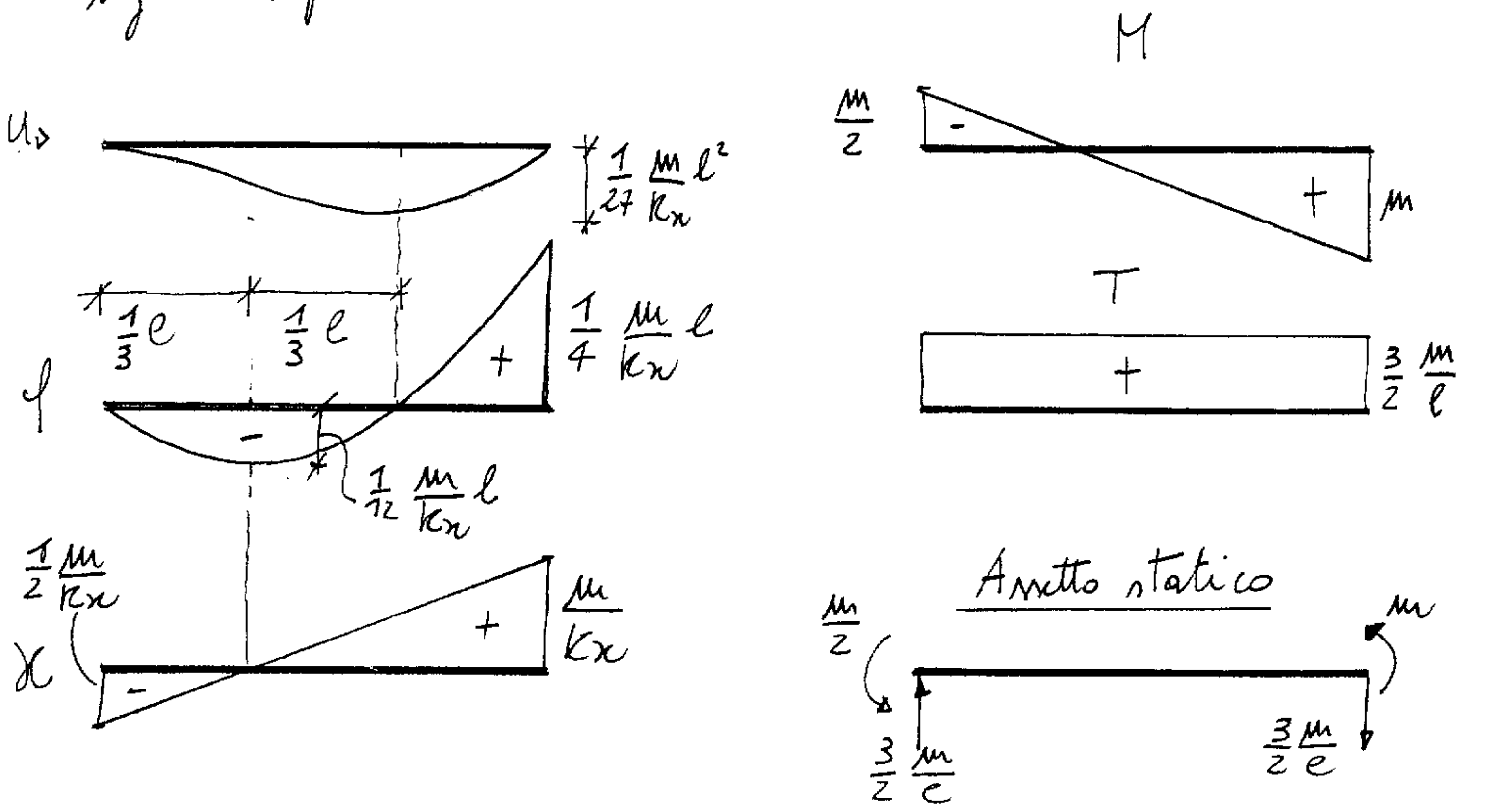
(eq. di legame) $\qquad$ (lineare)

. Il Taglio

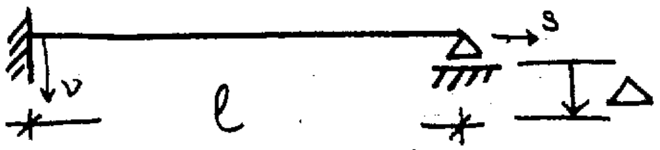
$$T(s) = \frac{dM}{ds} + m(s) \ \rightarrow \ T(s) = \frac{3}{2}\frac{m}{\ell} = \text{cost.} > 0$$

(eq. di equilibrio)

. I diagrammi delle variabili di stato determinate sono di seguito riportati.



(2)



Non ci sono carichi distribuiti, quindi:

$$m=0 \qquad f_v=0$$

Scrivo l'equazione della linea elastica:

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(K_x \frac{d^2 u_v}{ds^2}\right) = \frac{dm}{ds} + f_v = 0$$

che risulta omogenea. L'integrale risulta per K_x costante:

$$u_v(s) = \frac{c_0}{6} s^3 + \frac{c_1}{2} s^2 + c_2 s + c_3$$

Per determinare le 4 costanti incognite vado ad imporre le condizioni al contorno:

$$u_v(0)=0 \qquad\qquad u_v(\ell)=\Delta$$

$$\varphi(0) = -\left.\frac{du_v}{ds}\right|_0 = 0 \qquad\qquad M(\ell) = -k_x \left.\frac{d^2u_v}{ds^2}\right|_\ell = 0$$

Le prime tre sono condizioni cinematiche, mentre la 4° è statica.

$$\begin{cases} u_v(0)=0 \longrightarrow c_3=0 \\ \varphi(0)=0 \longrightarrow c_2=0 \\ u_v(\ell)=\Delta \longrightarrow \frac{c_0}{6}\ell^3 + \frac{c_1}{2}\ell^2 = \Delta \\ M(\ell)=0 \longrightarrow (-c_0\ell - c_1)K_x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 3\Delta/\ell^2 \qquad c_0 = -3\frac{\Delta}{\ell^3}$$

$$u_v(s) = -\frac{3}{6}\frac{\Delta}{\ell^3} s^3 + \frac{3\Delta}{\ell^2}\frac{s^2}{2} = -\frac{\Delta}{\ell^3}\frac{s^3}{2} + \frac{3}{2}\frac{\Delta}{\ell^2} s^2$$

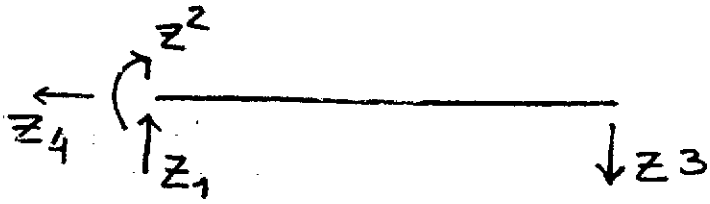
ES 2.1

$$\varphi(s) = \frac{3\Delta}{2\ell^3} s^2 - 3\frac{\Delta}{\ell^2} s$$

$$M(s) = K_x \left(\frac{3\Delta}{\ell^3} s - \frac{3\Delta}{\ell^2} \right) \quad \text{(lineare)}$$

$$T(s) = K_x \frac{3\Delta}{\ell^3} \quad \text{(costante)}$$

Le reazioni vincolari sono:



$$z_1 = T(0) = K_x \frac{3\Delta}{\ell^3}$$

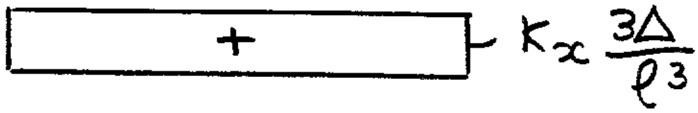
$$z^2 = M(0) = -K_x \frac{3\Delta}{\ell^2}$$

$$z^3 = T(\ell) = K_x \frac{3\Delta}{\ell^3}$$

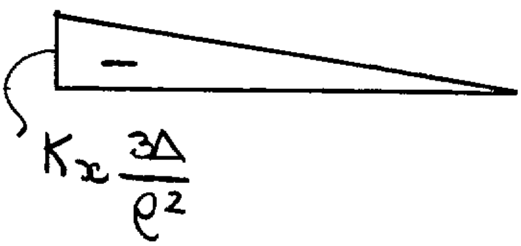
$$z^4 = N(0) = 0 \quad (N = 0 \text{ sulla trave})$$

Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

T

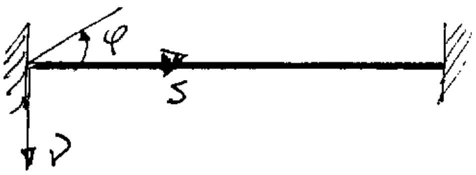


M



ES 2.2

ESERCIZIO 3



K_χ = costante

$f_\nu(s) = m(s) = 0$

. la soluzione generale dello spostamento verticale (inflessione), che coincide con la soluzione al problema in esame, in quanto la soluzione particolare $\overline{u}_\nu(s) = 0$, risulta pari a:

$$u_\nu(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3$$

. le quattro condizioni agli estremi per determinare le costanti incognite sono:

1) $\varphi(0) = \varphi \rightarrow \quad - c_1 = \varphi \rightarrow c_1 = -\varphi$

2) $u_\nu(0) = 0 \rightarrow \quad c_0 = 0$

3) $u_\nu(\ell) = 0 \rightarrow -\varphi\ell + c_2\ell^2 + c_3\ell^3 = 0$

4) $\varphi(\ell) = 0 \rightarrow -(-\varphi + 2c_2\ell + 3c_3\ell^2) = 0$

dalla 3) $c_2 = \dfrac{\varphi - \ell^2 c_3}{\ell} \qquad \rightarrow c_2 = \dfrac{2\varphi}{\ell}$

dalla 4) $\varphi - 2(\varphi - \ell^2 c_3) - 3\ell^2 c_3 = 0 \rightarrow c_3 = -\dfrac{\varphi}{\ell^2}$

. Campo di inflessione

$$u_v(s) = -\varphi s + \frac{2\varphi}{\ell} s^2 - \frac{\varphi}{\ell^2} s^3, \quad u(0) = 0, \; u(\ell) = 0$$

. Campo di rotazione

$$\varphi(s) = -\frac{du_v}{ds} = -\left(-\varphi + 4\frac{\varphi}{\ell} s - 3\frac{\varphi}{\ell^2} s^2\right), \; \varphi(0) = \varphi; \; \varphi(\ell) = 0$$

. Curvatura

$$\chi(s) = -\frac{d^2u_v}{ds^2} = -\left(4\frac{\varphi}{\ell} - 6\frac{\varphi}{\ell^2} s\right), \; \chi(0) = -4\frac{\varphi}{\ell}, \chi(\ell) = 2\frac{\varphi}{\ell}$$

. Momento flettente

$$M(s) = K_\chi \chi = -K_\chi\left(4\frac{\varphi}{\ell} - 6\frac{\varphi}{\ell^2} s\right), \; M(0) = -4K_\chi \frac{\varphi}{\ell}$$

$$M(\ell) = 2K_\chi \frac{\varphi}{\ell}$$

. Taglio

$$T(s) = \frac{dM}{ds} + m(s) \rightarrow T(s) = 6K_\chi \frac{\varphi}{\ell^2} = \text{cost.} > 0$$

. Osservazioni generali

Per tracciare i diagrammi delle variabili di stato sono necessarie alcune ulteriori informazioni ricavabili ricordando che le variabili di stato sono successive derivate dell'inflessione $u_v(s)$. Quindi:

- dove $\varphi(s) = 0$ $\quad u_v(s)$ punti di minimo o massimo

$$\varphi(s) = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi - 4\frac{\varphi}{\ell}s + 3\frac{\varphi}{\ell^2}s^2 = 0$$

$$\text{per } s = \frac{4\frac{\varphi}{\ell} \pm \sqrt{16\frac{\varphi^2}{\ell^2} - 12\frac{\varphi^2}{\ell^2}}}{6\frac{\varphi}{\ell^2}} = \frac{4\frac{\varphi}{\ell} \pm 2\varphi/\ell}{6\frac{\varphi}{\ell^2}} = \begin{cases} \ell \\ \frac{\ell}{3} \end{cases}$$

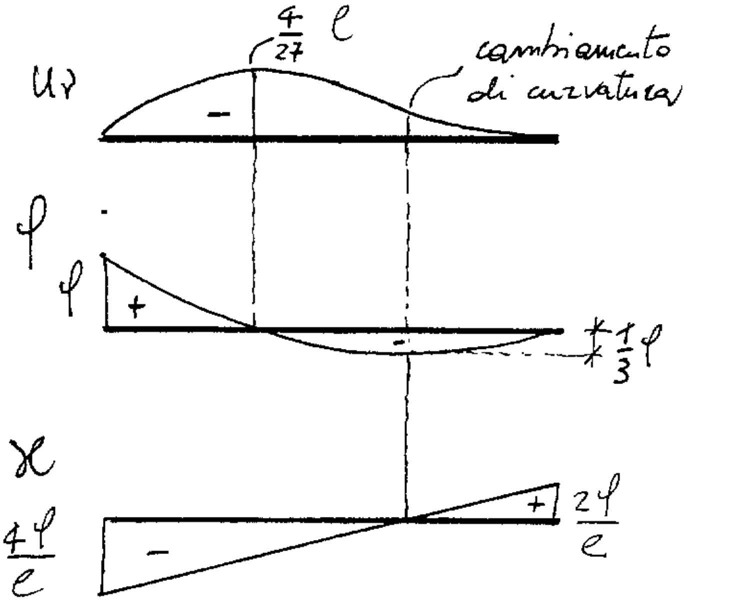
$$u_v\left(\frac{\ell}{3}\right) = -\varphi\frac{\ell}{3} + 2\frac{\varphi}{\ell}\frac{\ell^2}{9} - \frac{\varphi}{\ell^2}\cdot\frac{1}{27}\ell^3 = -\frac{4}{27}\ell$$

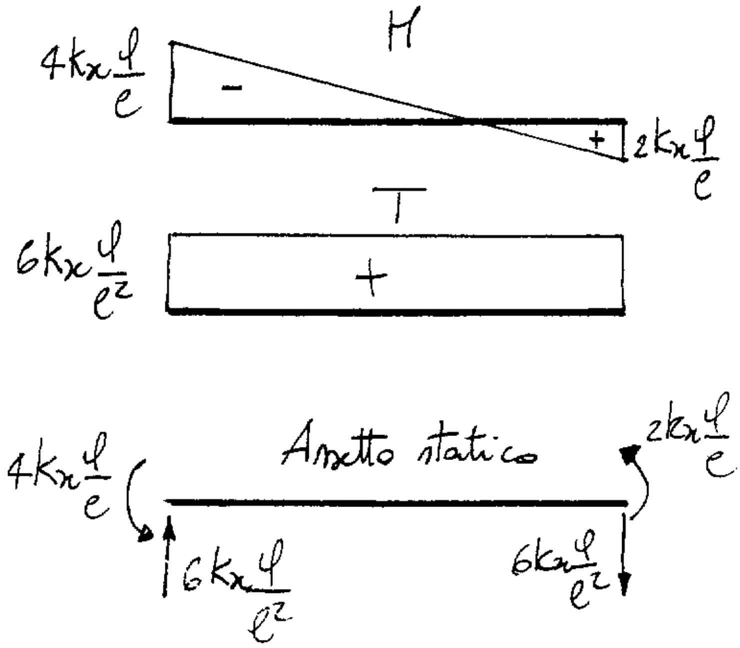
- dove $\chi(s) = 0$ $\quad \varphi(s)$ ha punti di minimo o massimo

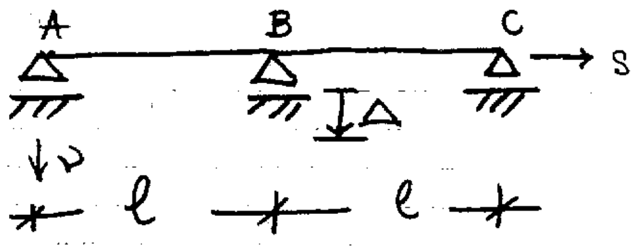
$$\chi(s) = 0 \quad \text{per } s = \frac{2}{3}\ell$$

$$\varphi\left(\frac{2}{3}\ell\right) = \varphi - \frac{8}{3}\varphi + \frac{4}{3}\varphi = -\frac{1}{3}\varphi$$

- È ora possibile tracciare i diagrammi delle variabili di stato





(4) 

In questo caso ho due travi: AB, BC. Posso scrivere e risolvere l'equazione della linea elastica nei due tratti (e avrò 8 costanti) e imporre le condizioni di continuità nel punto B.

TRAVE AB $s \in [0, \ell]$

Non ci sono carichi distribuiti, quindi:

$$m = 0 \quad f_v = 0$$

L'equazione della linea elastica, nel caso di rigidezza K_x costante, è:

$$u_v(s) = \frac{c_0}{6} s^3 + \frac{c_1}{2} s^2 + c_2 s + c_3$$

le condizioni al contorno sono:

$$u_v(0) = 0 \; ; \; M(0) = -K_x \left.\frac{d^2 u_v}{ds^2}\right|_0 = 0 ; \; u_v(\ell) = \Delta$$

$u_v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_3 = 0$

$M(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = 0$

$u_v(\ell) = \Delta \quad \rightarrow \quad \frac{c_0}{6} \ell^3 + c_1 \frac{\ell^2}{2} + c_2 \ell + c_3 = \Delta$

TRAVE BC $s' \in [0, \ell]$

L'equazione è analoga (con altre costanti) a quella della trave AB, poiché deriva da considerazioni uguali.

ES 4.1

$$u_v(s') = \frac{d_0}{6} s'^3 + \frac{d_1}{2} s'^2 + d_2 s' + d_3$$

le condizioni al contorno sono:

$$u_v(0) = \Delta \,; \quad u_v(\ell) = 0 \,; \quad M(\ell) = -k_x \left.\frac{d^2 u_v}{ds'^2}\right|_{\ell} = 0$$

$$u_v(0) = \Delta \longrightarrow d_3 = \Delta$$

$$u_v(\ell) = 0 \longrightarrow \frac{d_0}{6}\ell^3 + \frac{d_1}{2}\ell^2 + d_2\ell + d_3 = 0$$

$$M(\ell) = 0 \longrightarrow -K_x(d_0\ell + d_1) = 0$$

Adesso ho 6 equazioni in 8 incognite; aggiungo 2 equazioni di continuità in B:

$$\varphi(s=\ell) = \varphi(s'=0)$$

$$M(s=\ell) = M(s'=0)$$

$$\Rightarrow \frac{c_0}{2}\ell^2 + c_1\ell + c_2 = d_2$$

$$\Rightarrow c_0\ell + c_1 = d_1$$

Risolvendo il sistema di 8 eq., 8 inc. si ottiene:

$$c_0 = -\frac{3\Delta}{\ell^3} \qquad d_0 = \frac{3\Delta}{\ell^3}$$

$$c_1 = 0 \qquad d_1 = -\frac{3\Delta}{\ell^2}$$

$$c_2 = \frac{3\Delta}{2\ell} \qquad d_2 = 0$$

$$c_3 = 0 \qquad d_3 = \Delta$$

Es 4.2

TRAVE AB $\quad (s \in [0, \ell])$

$$u_v(s) = -\frac{\Delta}{2\ell^3} s^3 + \frac{3\Delta}{2\ell} s$$

$$\varphi(s) = \frac{3\Delta}{2\ell^3} s^2 - \frac{3\Delta}{2\ell}$$

$$M(s) = -k_x\left(-\frac{3\Delta}{\ell^3} s\right) = k_x \frac{3\Delta}{\ell^3} s$$

$$T(s) = K_x \frac{3\Delta}{\ell^3}$$

TRAVE BC $\quad (s' \in [0, \ell])$

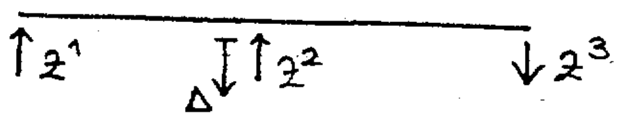
$$u_v(s') = \frac{\Delta}{2\ell^3} s'^3 - \frac{3}{2}\frac{\Delta}{\ell^2} s'^2 + \Delta$$

$$\varphi(s') = -\frac{3\Delta}{2\ell^3} s'^2 + \frac{3\Delta}{\ell^2} s'$$

$$M(s') = -K_x\left(\frac{3\Delta}{\ell^3} s' - \frac{3\Delta}{\ell^2}\right)$$

$$T(s') = -K_x \frac{3\Delta}{\ell^3}$$

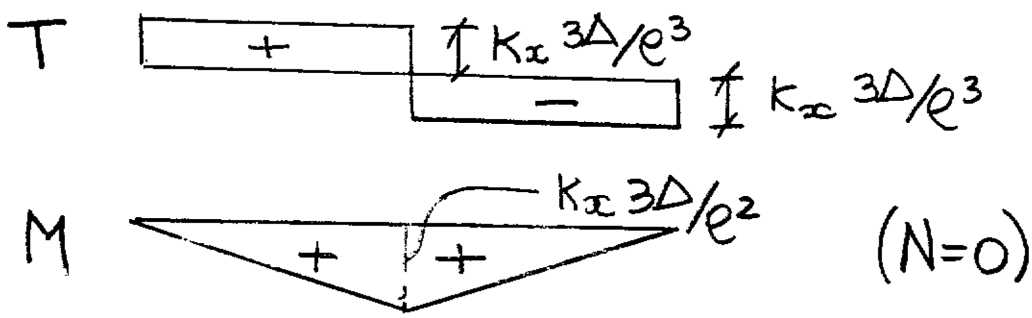
Reazioni vincolari



$z^1 = T(s=0) = K_x\, 3\Delta/\ell^3$

$z^2 = -6 K_x \Delta/\ell^3 \qquad z^3 = T(s'=\ell) = -K_x\, 3\Delta/\ell^3$

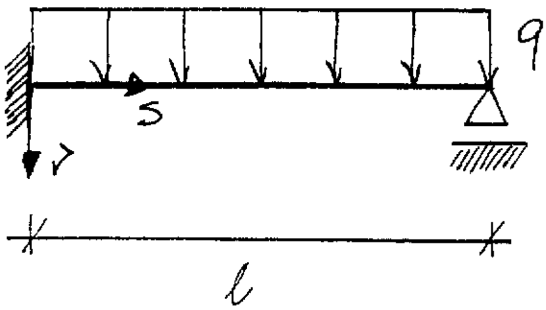
Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione:



(N=0)

ES 4.3

ESERCIZIO 5



$K_x =$ costante

$f_v(s) = q \ , \ m(s) = 0$

- La relazione generale dell'inflessione è uguale a:

$$\hat{u}_v(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3$$

- La soluzione particolare $\bar{u}_v(s) = \frac{1}{24}\frac{q s^4}{K_x}$ che risulta da quattro successive integrazioni dell'equazione della linea elastica considerando il termine noto $f_v(s) = q$ $\left(K_x u_v^{IV}(s) = f_v(s) + \frac{dm}{ds} \right)$.

- La soluzione del problema in esame è quindi:

$$u_v(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \frac{1}{24}\frac{q s^4}{K_x}$$

- Le quattro condizioni agli estremi per determinare le costanti incognite sono:

1) $u_v(0) = 0 \quad \rightarrow c_0 = 0$

2) $\varphi(0) = 0 \quad \rightarrow c_1 = 0$

3) $u_r(\ell) = 0 \rightarrow c_2 \ell^2 + c_3 \ell^3 + \frac{1}{24}\frac{q\ell^4}{K_\chi} = 0$

4) $M(\ell) = 0 \qquad M(s) = +K_\chi \chi$

$$\chi(s) = -\frac{d^2 u_r}{ds^2} = 2c_2 + 6c_3 s + \frac{1}{2}\frac{qs^2}{K_\chi}$$

$$M(\ell) = -K_\chi \left(2c_2 + 6c_3\ell + \frac{1}{2}\frac{q\ell^2}{K_\chi}\right) = 0$$

dalla 3) $c_2 = -\left(c_3\ell + \frac{1}{24}\frac{q\ell^2}{K_\chi}\right)$

dalla 4) $-2\left(c_3\ell + \frac{1}{24}\frac{q\ell^2}{K_\chi}\right) + 6c_3\ell + \frac{1}{2}\frac{q\ell^2}{K_\chi} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow c_3 = -\frac{5}{48}\frac{q\ell}{K_\chi}$$

$$c_2 = -\left(-\frac{5}{48}\frac{q\ell^2}{K_\chi} + \frac{1}{24}\frac{q\ell^2}{K_\chi}\right) \rightarrow c_2 = \frac{1}{16}\frac{q\ell^2}{K_\chi}$$

- Campo di inflessione

$$u_r(s) = \frac{1}{16}\frac{q\ell^2}{K_\chi}s^2 - \frac{5}{48}\frac{q\ell}{K_\chi}s^3 + \frac{1}{24}\frac{qs^4}{K_\chi}, \quad u_r(0) = 0, \quad u_r(\ell) = 0$$

- Campo di rotazione

$$\varphi(s) = -\frac{du_r}{ds} = -\left(\frac{1}{8}\frac{q\ell^2}{K_\chi}s - \frac{5}{16}\frac{q\ell}{K_\chi}s^2 + \frac{1}{6}\frac{qs^3}{K_\chi}\right)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\ell) = +\frac{1}{8}\frac{q\ell^3}{K_\chi}$$

- Curvatura

$$\chi(s) = -\frac{d^2 u_y}{ds} = -\left(\frac{1}{8}\frac{q\ell^2}{K_x} - \frac{5}{8}\frac{q\ell}{K_x}s + \frac{1}{2}\frac{qs^2}{K_x}\right)$$

$$\chi(0) = -\frac{1}{8}\frac{q\ell^2}{K_x}\ , \quad \chi(\ell) = 0$$

- Momento flettente

$$M(s) = K_x\,\chi(s) = -K_x\left(\frac{1}{8}\frac{q\ell^2}{K_x} - \frac{5}{8}\frac{q\ell}{K_x}s + \frac{1}{2}\frac{qs^2}{K_x}\right)$$

$$M(0) = -\frac{1}{8}q\ell^2\ ; \quad M(\ell) = 0\ , \quad M(s) = 0 \text{ per } s = \frac{1}{4}\ell, \ell$$

- Taglio

$$T(s) = \frac{dM}{ds} \rightarrow T(s) = -K_x\left(-\frac{5}{8}\frac{q\ell}{K_x} + \frac{qs}{K_x}\right)$$

$$T(0) = \frac{5}{8}q\ell\ ; \quad T(\ell) = -\frac{3}{8}q\ell$$

- Osservazioni generali

Per tracciare i diagrammi delle variabili di stato sono necessarie alcune ulteriori informazioni ricavabili ricordando che le variabili di stato sono successive derivate dell'inflessione $u_y(s)$. Quindi:

- dove $\varphi(s)=0$, $u_y(s)$ punti di massimo o minimo

$\varphi(s)=0$ per $s_1=0$ (vedi pg. 2), $s_2=\left(\frac{15}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{33}\right)\ell>\ell$ (non interna)

$s_3=\left(\frac{15}{16}-\frac{1}{16}\sqrt{33}\right)\ell<\ell \simeq 0.58\ell$

$u_y(s_3)\simeq 0.0059\,\frac{q\ell^4}{K_x}=u_y\cdot max.$

- dove $\chi(s)=0$ $\varphi(s)$ ha un minimo o un massimo

$\chi(s)=0$ per $s_1=\ell$ (vedi pg. 3), $s_2=\frac{1}{4}\ell$

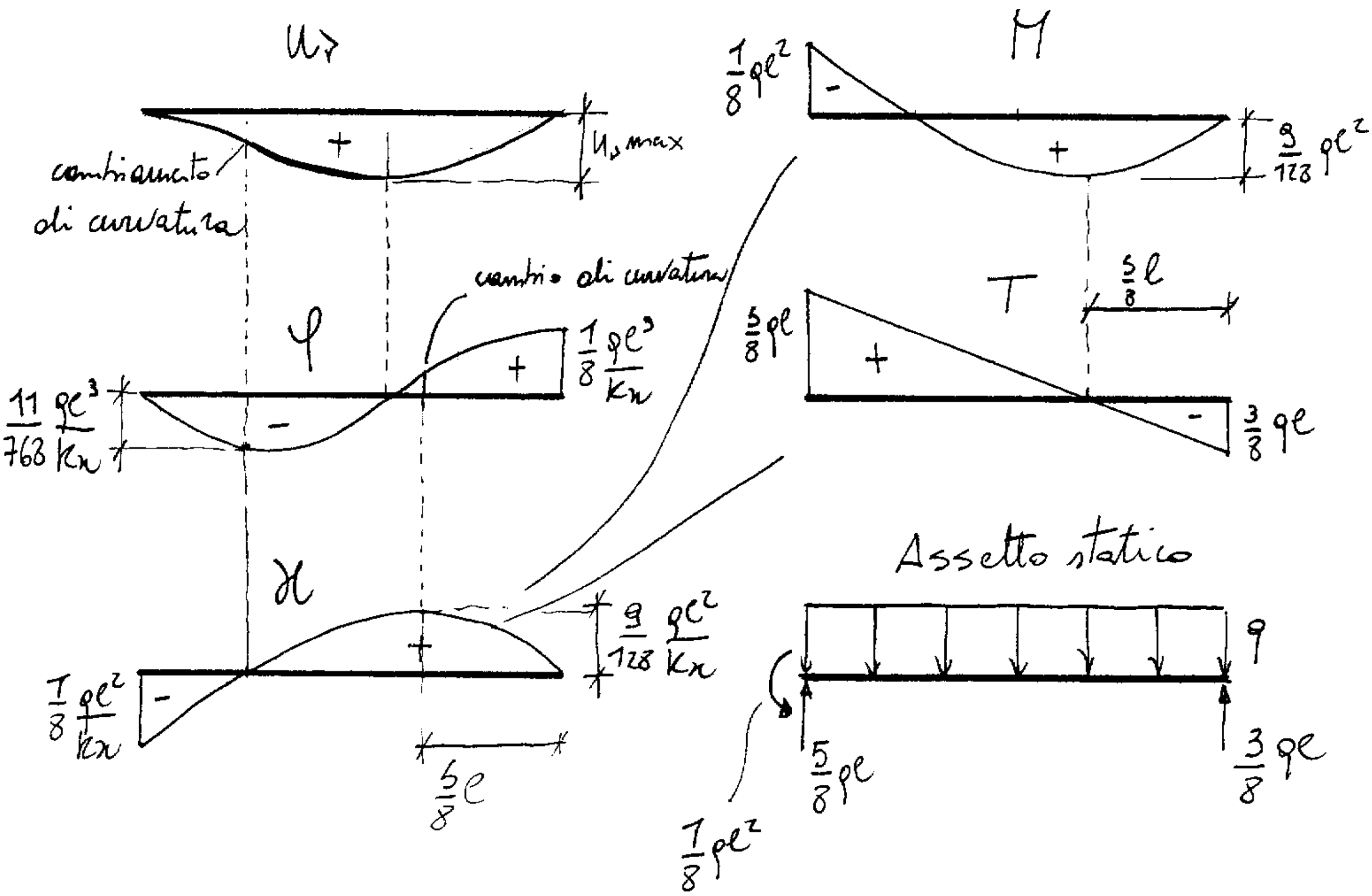
$\varphi(s_2)=-\frac{11}{768}\,\frac{q\ell^3}{K_x}$

- Sapendo che $M=K_x\chi$ si studiano prima le variabili di stato M e T e quindi si ricavano le informazioni di χ

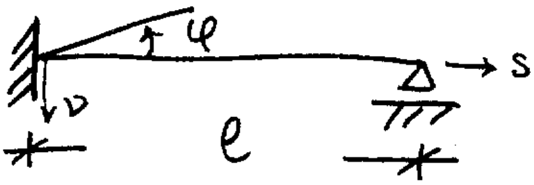
$T(s)=0$ per $s=\frac{5}{8}\ell$

$M_{max}=M\left(\frac{5}{8}\ell\right)=+\frac{9}{128}q\ell^2 \rightarrow \chi\left(\frac{5}{8}\ell\right)=+\frac{9}{128}\,\frac{q\ell^2}{K_x}$

- È ora possibile tracciare i diagrammi delle variabili di stato



(6)



Non ci sono carichi distribuiti, quindi:

$$m=0 \qquad f_v=0$$

L'equazione della linea elastica, nel caso di rigidezza K_x costante, è:

$$u_v(s) = \frac{c_0}{6}s^3 + \frac{c_1}{2}s^2 + c_2 s + c_3$$

Per determinare le 4 costanti incognite scrivo le condizioni al contorno:

$$u_v(0)=0 \qquad u_v(\ell)=0$$

$$\varphi(0) = -\left.\frac{du_v}{ds}\right|_0 = \varphi \qquad M(\ell) = -k_x \left.\frac{d^2u_v}{ds^2}\right|_\ell = 0$$

$u_v(0)=0 \rightarrow c_3=0$ $\qquad$ $u_v(\ell)=0 \rightarrow \frac{c_0}{6}\ell^3 + \frac{c_1}{2}\ell^2 + c_2\ell + c_3 = 0$

$\varphi(0)=\varphi \rightarrow c_2=-\varphi$ $\qquad$ $M(\ell)=0 \rightarrow c_0\ell + c_1 = 0$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$c_0 = -\frac{3\varphi}{\ell^2} \qquad c_1 = \frac{3\varphi}{\ell} \qquad c_2 = -\varphi \qquad c_3 = 0$$

$$\Rightarrow u_v(s) = -\frac{\varphi}{2\ell^2}s^3 + \frac{3\varphi}{2\ell}s^2 - \varphi s$$

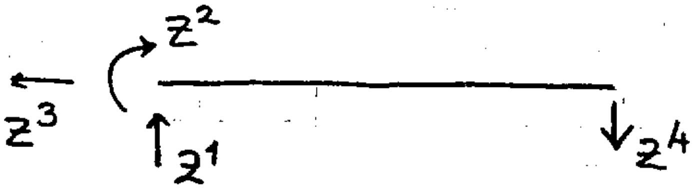
$$\varphi(s) = \frac{3\varphi}{2\ell^2}s^2 - \frac{3\varphi}{\ell}s + \varphi$$

$$M(s) = -K_x\left(-\frac{3\varphi}{\ell^2}s + \frac{3\varphi}{\ell}\right) \quad \text{(lineare)}$$

Es6.1

$$T(s) = K_x \frac{3\varphi}{\ell^2} \qquad \text{(costante)}$$

Le reazioni vincolari sono:



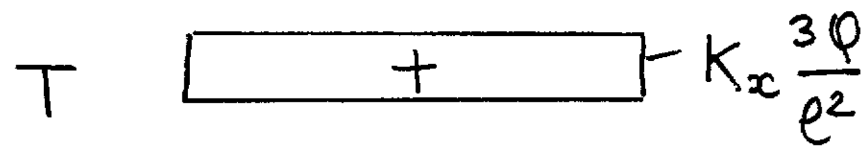
$$z^1 = T(0) = K_x \frac{3\varphi}{\ell^2}$$

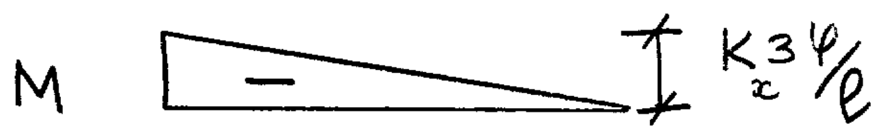
$$z^2 = M(0) = -K_x \frac{3\varphi}{\ell}$$

$$z^3 = N(0) = 0 \qquad (N = 0 \text{ sulla trave})$$

$$z^4 = T(\ell) = K_x \frac{3\varphi}{\ell^2}$$

Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione:





(N = 0)

ES6.2