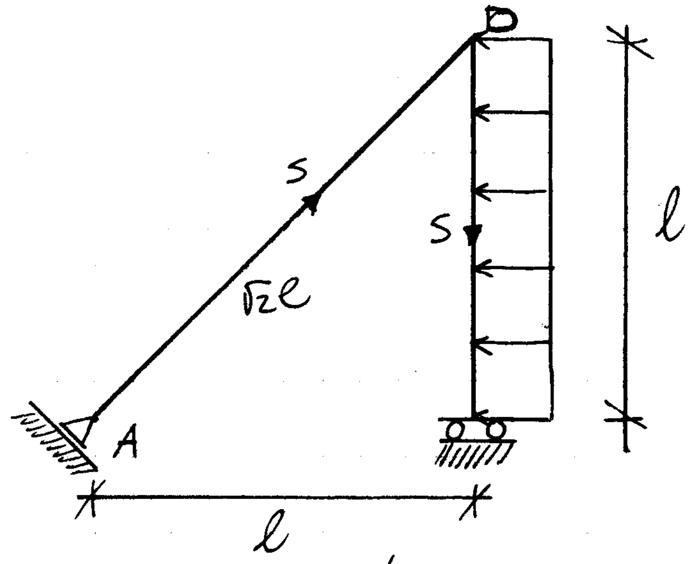
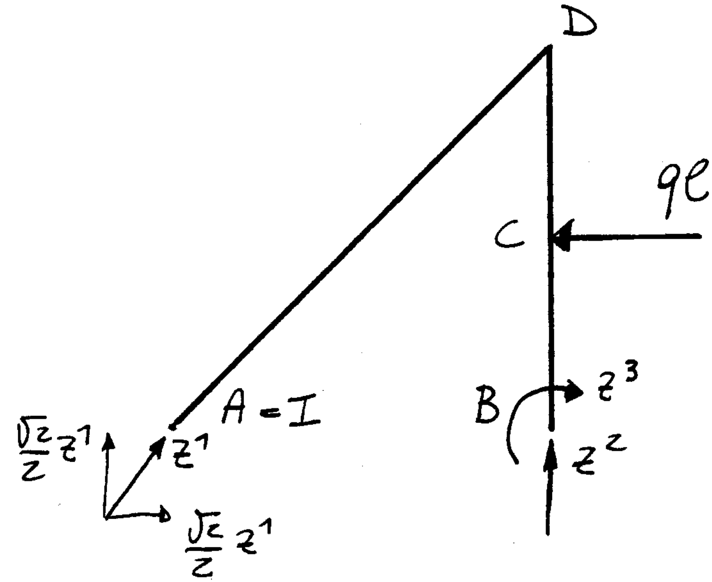
ESERCIZIO 5



Il telaio in esame è isostatico, $m=3$, $\rho(\underline{B})=3$.

Si procede quindi alla determinazione delle reazioni vincolari mediante l'uso delle equazioni di equilibrio



Si riducono le forze distribuite alla risultante $q\ell$ posta nel centro del sistema di forze e che dista da B, $b=\frac{\ell}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}z^1 - q\ell = 0 \Rightarrow z^1 = \sqrt{2}\,q\ell$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}z^1 + z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = -q\ell$$

$$\ell \cdot z^2 - z^3 + \frac{q\ell^2}{2} = 0 \Rightarrow z^3 = -\frac{q\ell^2}{2}$$

Caratteristiche di sollecitazione

Trave AD $(0 \le s < \sqrt{2}\ell)$

. $N(s): f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = cost.$ Calcolo della normale in una sezione lungo AD, $N_A = -\sqrt{2}\, q\ell$

. $T(s): f_\nu(s) = 0 \Rightarrow T(s) = cost.,\ T_A = 0 \Rightarrow T(s) = 0$

. $M(s):\ m(s) = 0,\ \frac{dM}{ds} = T(s) = 0 \Rightarrow M(s) = cost.,\ M_A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(s) = 0$

Trave DB $(0 < s \le \ell)$

. $N(s): f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = cost,\ N_B = q\ell \Rightarrow N(s) = q\ell$

. $T(s): f_\nu(s) = q \Rightarrow T(s)$ varia linearmente, $\frac{dT}{ds} = -q < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T(s)$ è decrescente. È ancora necessario calcolare 2 valori del taglio in corrispondenza (per esempio) degli estremi, $T_B = 0$, $T_D = q\ell$ (la forza risultante del carico distribuito ridotto in D)

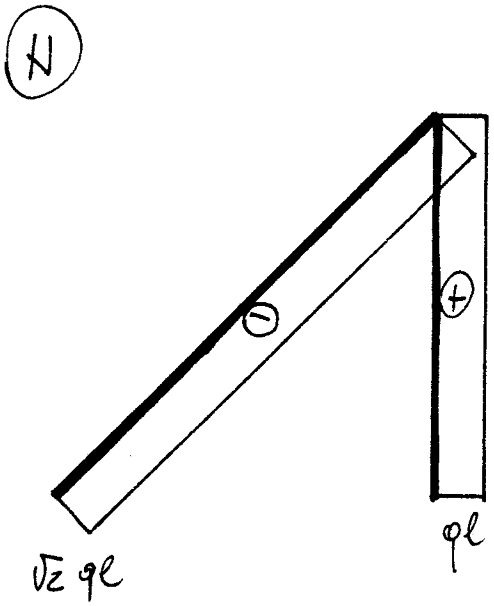
. $M(s): m(s) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{ds} = T(s) > 0 \Rightarrow M(s)$ è crescente. Il momento varia con legge quadratica ed è convesso essendo la curvatura positiva $\frac{d^2M}{ds^2} = q > 0$ (e tenendo conto delle convenzioni per i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione)

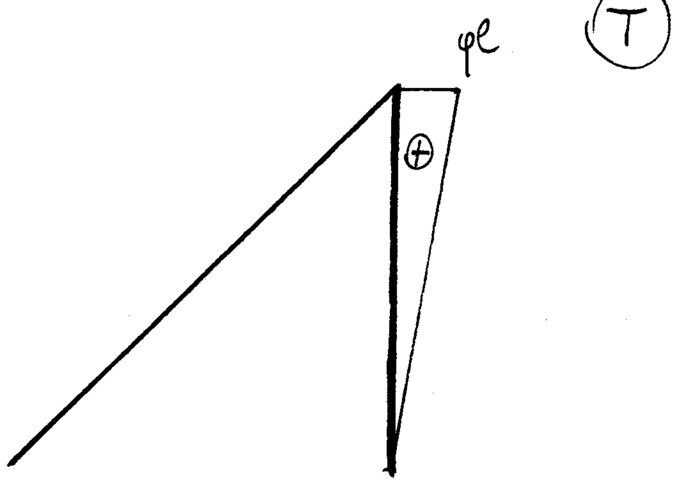
Infine si calcolano i valori agli estremi della trave DB

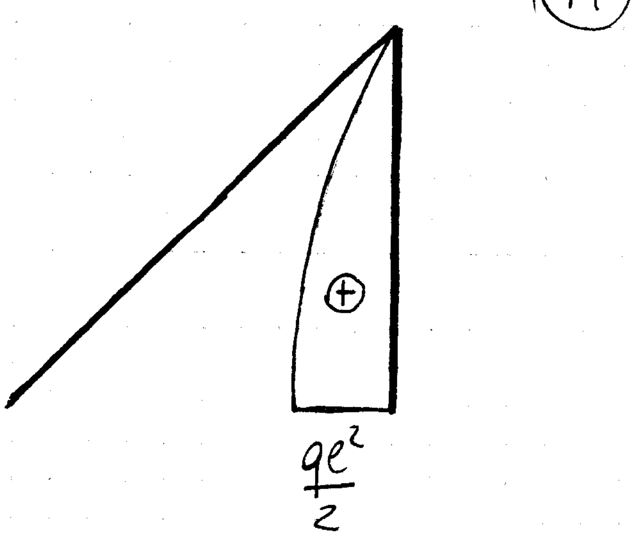
$M_D = 0$ (valore ribaltato dalla trave AD),

$M_B = \frac{ql^2}{2} = z^3$

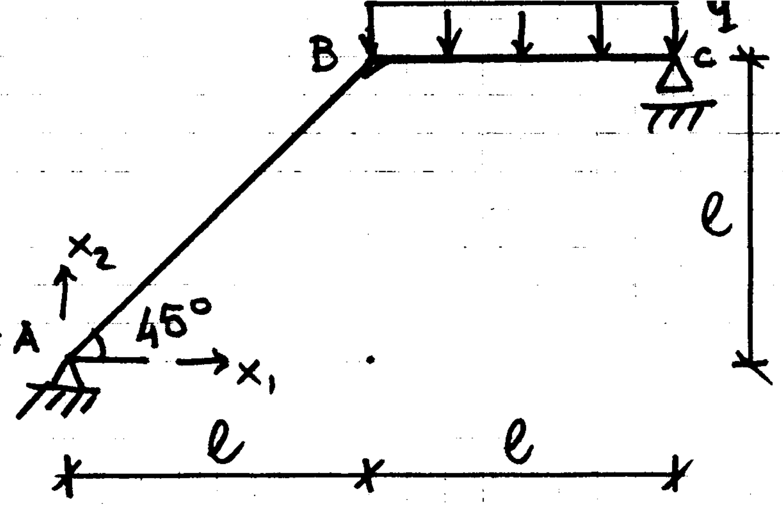
Si possono quindi tracciare i diagrammi



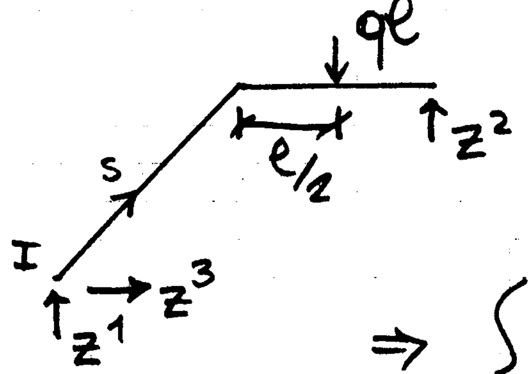




(6)



Determino le reazioni vincolari scrivendo le eq. di equilibrio (polo I) (solo per determinare le reazioni sostituisco alle forze distribuite un sistema di forze concentrate equivalenti).



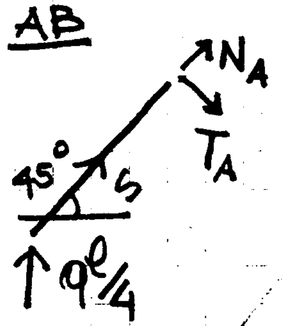
Trasl x_1) $z^3 = 0$

Trasl x_2) $z^1 + z^2 - q\ell = 0$

polo I) $z^2 \, 2\ell - q\ell\left(\frac{3}{2}\ell\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^1 = q\ell/4 \\ z^2 = 3/4 \, q\ell \\ z^3 = 0 \end{cases}$$

TRAVE <u>AB</u> Posso scrivere



$N_A = -q\ell \frac{\sqrt{2}}{8}$ (cioè $-q\ell/4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$T_A = q\ell \frac{\sqrt{2}}{8}$

N, T costante $N_B^s = -q\ell \frac{\sqrt{2}}{8}$

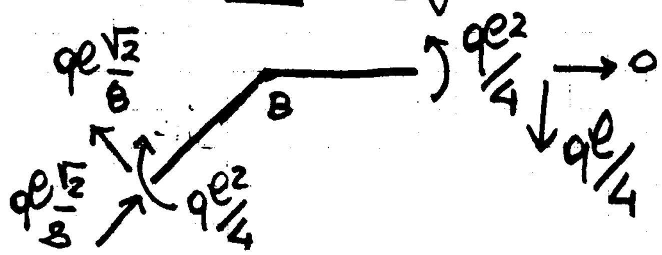
$T_B^s = q\ell \frac{\sqrt{2}}{8}$

M lineare

$M(s) = q\ell \frac{\sqrt{2}}{8} s = T_A s \quad s \in [0, \sqrt{2}\ell]$

$M_B^s = q\ell \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \sqrt{2}\ell = q\ell^2/4$

TRAVE <u>BC</u> Sfrutto l'equilibrio del nodo B



$N_B^d = 0$

N costante ⇒ 6/1

N = 0

$T_B^d = q\ell/4$

Carico distribuito costante $\Rightarrow$ T lineare

$$T(s) = T_B^d - qs = q\ell/4 - qs$$

$$\Rightarrow T_C = -3/4\, q\ell \qquad s \in [0, \ell]$$

$M_B^d = +\, q\ell^2/4$

M parabolico con curvatura negativa (quindi concavo)

$$M(s) = q\ell^2/4 + q\ell/4\, s - qs^2/2 = M_B^d + T_B^d s - qs^2/2$$

$M_C = 0$

M ha un estremo relativo dove $T=0$ (a $3/4\,\ell$ da c) che vale $M_E = 9/32\, q\ell^2$

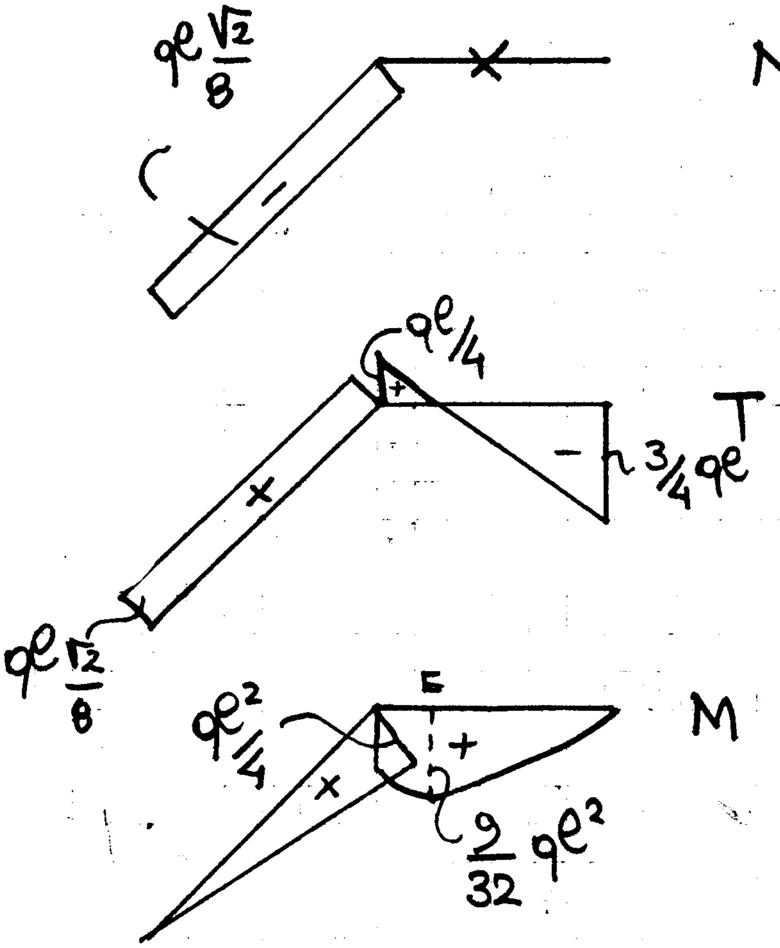
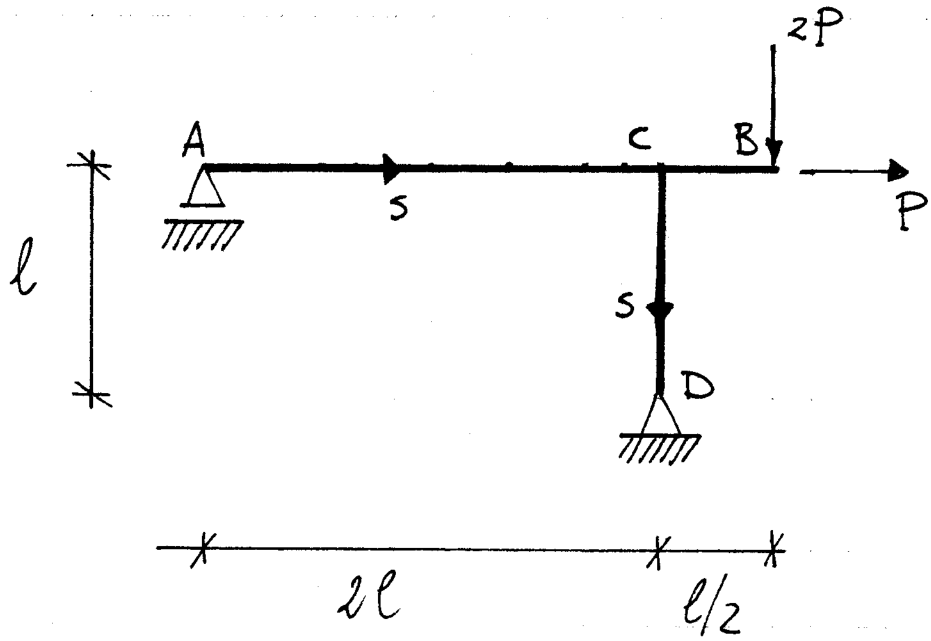


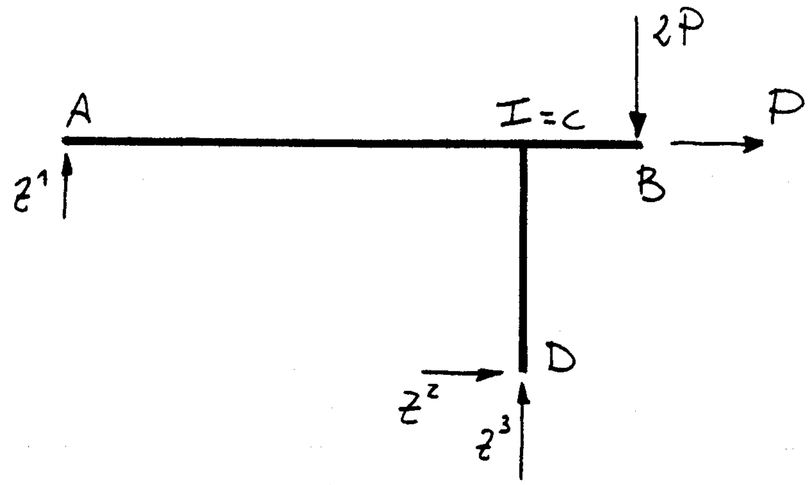
Diagramme delle sollecitazioni

ESERCIZIO 7



Il telaio in esame è isostatico, $m = 3$, $\rho(\underline{B}) = 3$

Si procede quindi alla determinazione delle reazioni vincolari mediante le equazioni di equilibrio

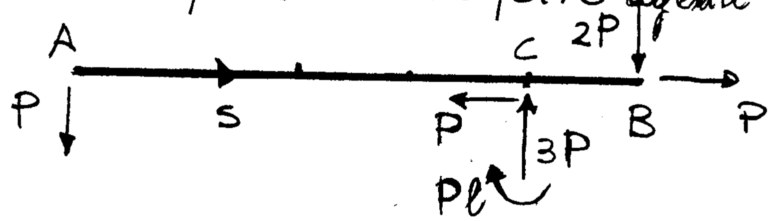


$$z^2 = -P$$

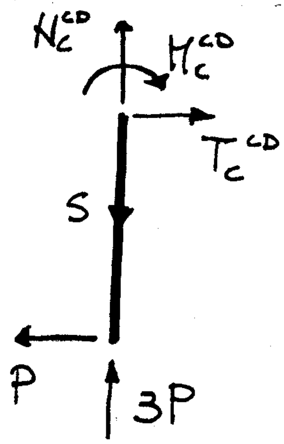
$$z^1 + z^3 - 2P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^3 = +3P$$

$$-2\cancel{\ell}\, z^1 + \cancel{\ell}\, z^2 - \cancel{2}P \cdot \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{4}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z^1 = -P$$

Si sostituisce alla trave DC (connessa alla trave AB nel punto C) le sue azioni trasmesse alla trave AB mediante la reduzione al punto C delle forze agenti su CD.



La trave CD verrà quindi esaminata separatamente



Caratteristiche di sollecitazione

Trave AC $\quad (0 \leq s < 2l)$

$N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost.}$, $N_A = 0 \Rightarrow N(s) = 0$

$T(s)$: $f_\nu(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost.}$, $T_A = -P \Rightarrow T(s) = -P$

$M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \dfrac{dM}{ds} = T(s) < 0$, $M(s)$ varia linearmente

ed è decrescente. È sufficiente calcolare il valore di

$M(s)$ nei due estremi, $M_A = 0$, $M_C = -P2l$.

Trave CB $(0 < s \leq \ell/2)$

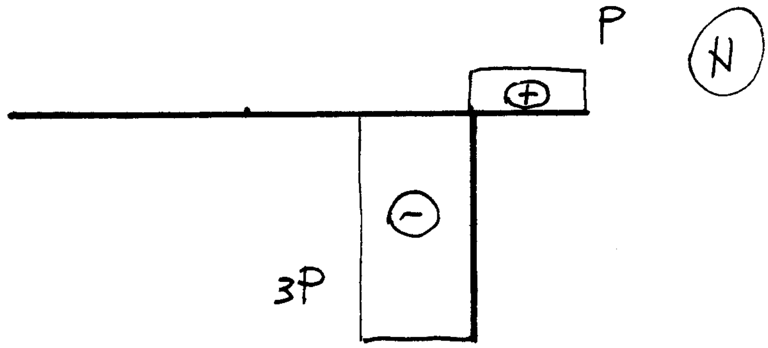
- $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost.}$, $N_B = P \Rightarrow N(s) = P$
- $T(s)$: $f_y(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost.}$, $T_B = 2P \Rightarrow T(s) = 2P$
- $M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \dfrac{dM}{ds} = T(s) \Rightarrow M(s)$ varia linearmente ed è crescente. È sufficiente calcolare il valore del momento ai due estremi, $M_B = 0$, $M_C = -P\ell$

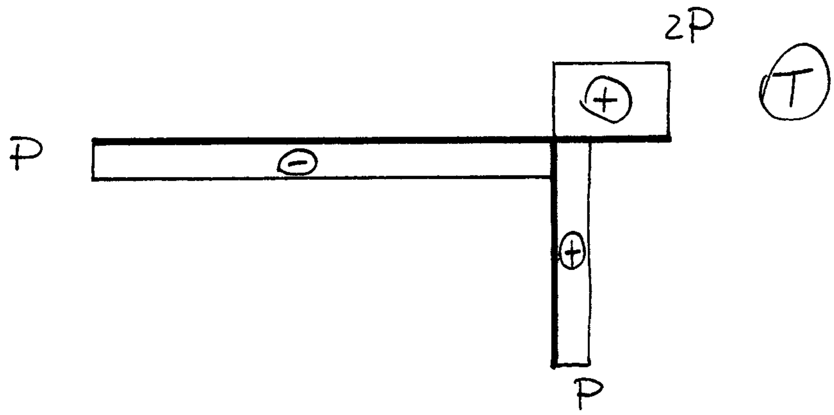
Trave CD $(0 < s \leq \ell)$

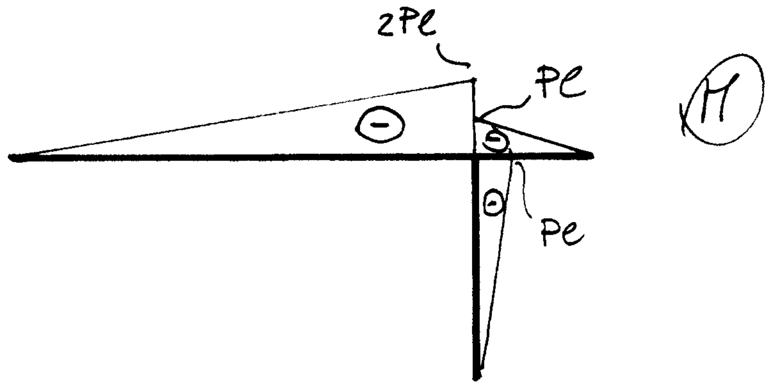
- $N(s)$: $f_s(s) = 0$, $N(s) = \text{cost.}$, $N_D = -3P \Rightarrow N(s) = -3P$
- $T(s)$: $f_y(s) = 0$, $T(s) = \text{cost.}$, $T_D = P \Rightarrow T(s) = P$
- $M(s)$: $m(s) = 0$, $\dfrac{dM}{ds} = T(s) > 0$, $M(s)$ varia linearmente ed è crescente. È sufficiente calcolare il valore del momento ai due estremi, $M_D = 0$, $M_C = -P\ell$

\+ Si osservi che le variazioni nel valore delle caratteristiche di sollecitazione nel punto C coincidono con le azioni trasmesse dalla trave DC sulla trave AB.

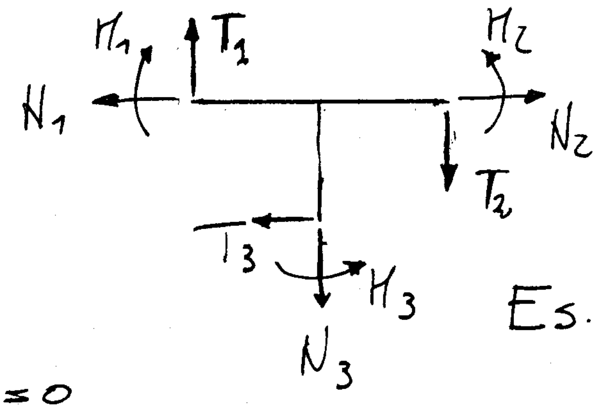
Si possono quindi tracciare i diagrammi







Come controllo dei calcoli fatti si verifica l'equilibrio in un intorno di c



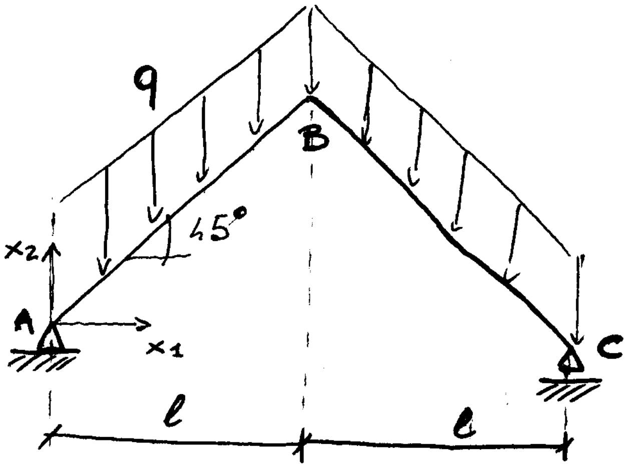
$-N_1 + N_2 - T_3 = 0 \Rightarrow P - P = 0$

$T_1 - T_2 - N_3 = 0 \Rightarrow -P - 2P + 3P = 0$

$-M_1 + M_2 + M_3 = 0 \Rightarrow 2Pl - Pl - Pl = 0$

Es. 7/4

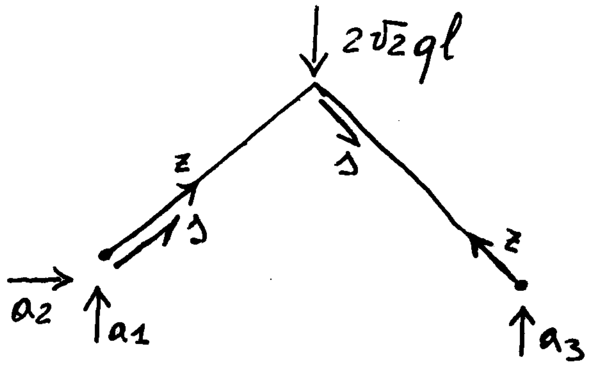
⑧



Determinazione reazioni vincolari

(solo per determinare le reazioni vincolari sostituisca il sistema di forze distribuito con uno equivalente di forze concentrate).

Equazioni di equilibrio



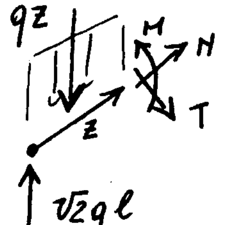
Trasl. x_1) $\quad a_2 = 0$

Trasl. x_2) $\quad a_1 + a_3 - 2\sqrt{2}q\ell = 0$

$\bullet$ B) $\quad a_2\cancel{\ell} - a_1\cancel{\ell} + a_3\cancel{\ell} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 = \sqrt{2}q\ell \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Trave $\overline{AB}$



$z \in [0, \sqrt{2}\ell]$

N lineare (componente assiale carico q = cost.)

$$\Rightarrow \quad N + \sqrt{2}q\ell\frac{\sqrt{2}}{2} - qz\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N = -q\ell + qz\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_A = -q\ell \; ; \quad N_B = 0$$

T lineare $\quad T - q\ell\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} + qz\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$$T = q\ell - qz\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_A = q\ell\ ;\ T_B = 0$$

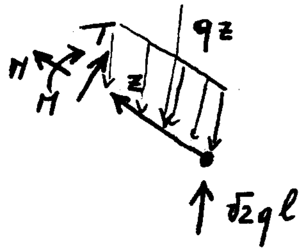
M parabolico, crescente ($T \geq 0\ \forall z$), curvatura negativa
$M(z=\sqrt{2}\ell)$ p.to di max. ($T(z=\sqrt{2}\ell)=0$)

$$M = q\ell z - qz^2\,\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$M_A = 0$$

$$M_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\,q\ell^2$$

Trave $\overline{BC}$

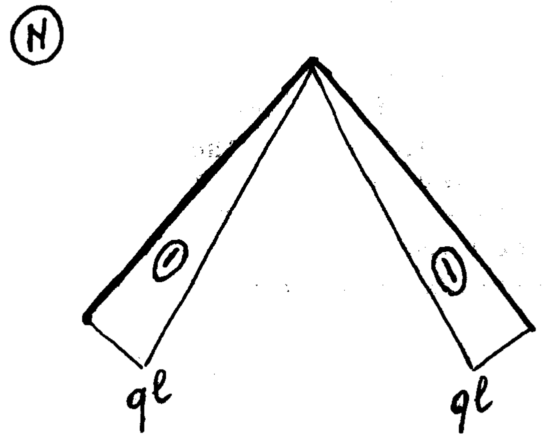


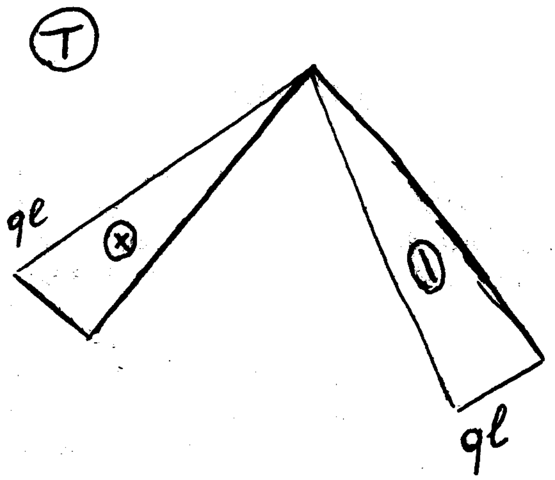
$z \in [0, \sqrt{2}\ell]$

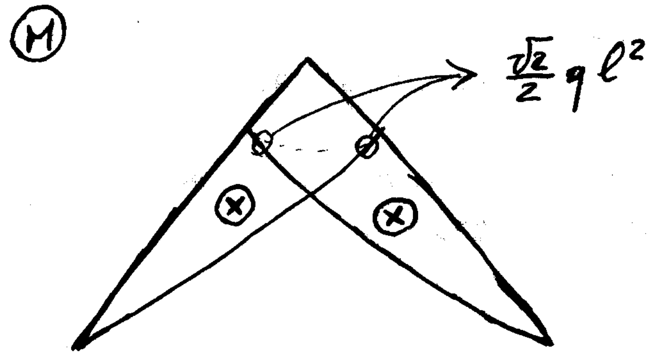
N lineare $\rightarrow N = qz\frac{\sqrt{2}}{2} - q\ell \quad N_C = -q\ell\ ;\ N_B = 0$

T lineare $\rightarrow T = -q\ell + qz\frac{\sqrt{2}}{2} \quad T_C = -q\ell\ ;\ T_B = 0$

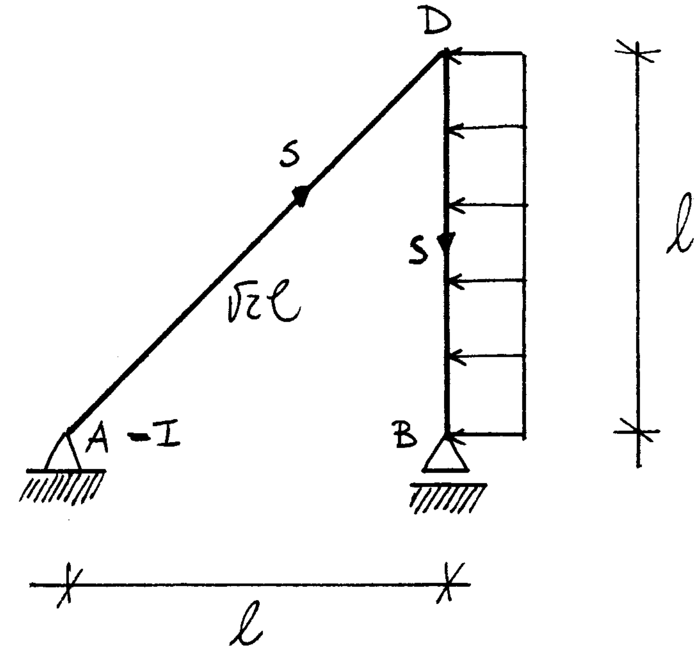
M parabolico $\rightarrow M = q\ell z - qz^2\frac{\sqrt{2}}{4} \quad M_C = 0\ ;\ M_B = \frac{\sqrt{2}}{2}q\ell^2$





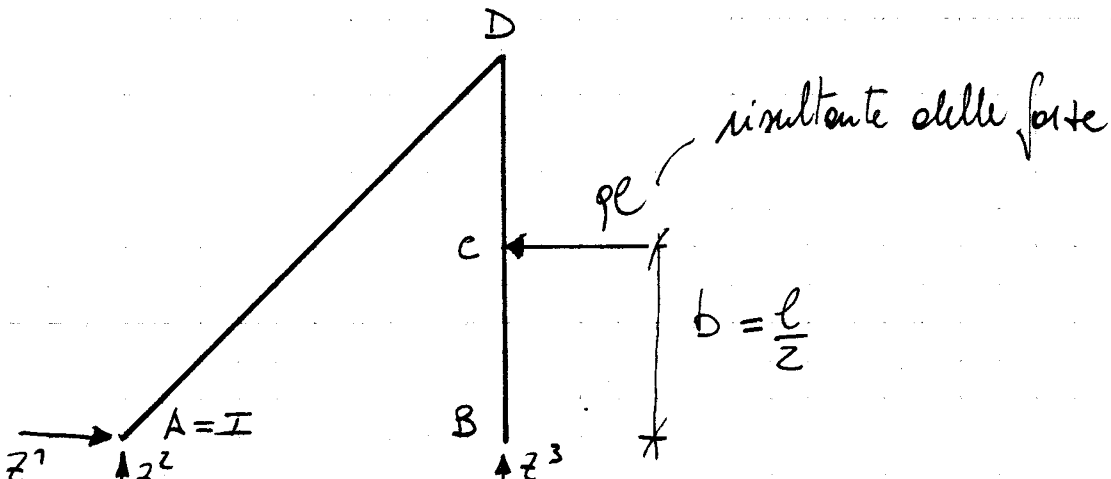


ESERCIZIO 9



Il telaio in esame è isostatico, $\mu = 3$, $\rho(\underline{B}) = 3$

Si procede quindi alla determinazione delle reazioni vincolari mediante l'uso delle equazioni di equilibrio.



$$Z^1 = ql$$

$$Z^2 + Z^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z^2 = \frac{ql}{2}$$

$$l Z^3 + \frac{ql^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z^3 = -\frac{ql}{2}$$

Caratteristiche di sollecitazione

Trave AD $(0 \leq s < \sqrt{2}l)$

- $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost.}$, è sufficiente calcolare il valore della forza normale, $N_A = -\frac{\sqrt{2}}{4}ql - \frac{\sqrt{2}}{2}ql = -\frac{3}{4}\sqrt{2}\,ql \Rightarrow$ $\Rightarrow N(s) = -\frac{3}{4}\sqrt{2}\,ql$
- $T(s)$: $f_\nu(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost.}$, è sufficiente calcolare il valore del taglio in una sezione lungo AD, $T_A = \frac{\sqrt{2}}{4}ql - \frac{\sqrt{2}}{2}ql =$ $= -\frac{\sqrt{2}}{4}ql \Rightarrow T(s) = -\frac{\sqrt{2}}{4}ql$
- $M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{ds} = T(s) < 0$, $M(s)$ varia linearmente ed è decrescente. Si calcolano i valori del momento agli estremi della trave, $M_A = 0$, $M_D = -\frac{\sqrt{2}}{4}ql \cdot \sqrt{2}l = -\frac{1}{2}ql^2$

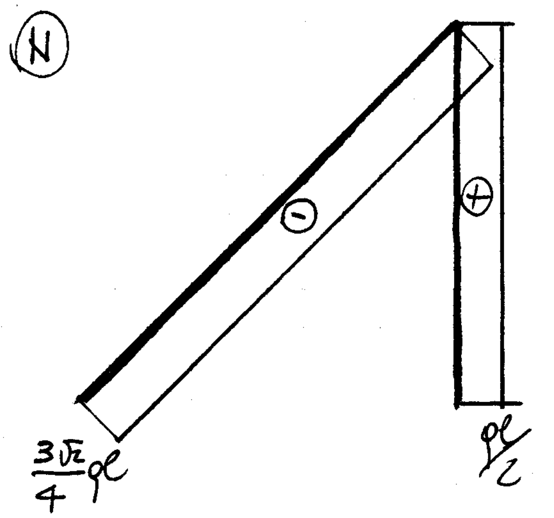
Trave DB $(0 < s \leq l)$

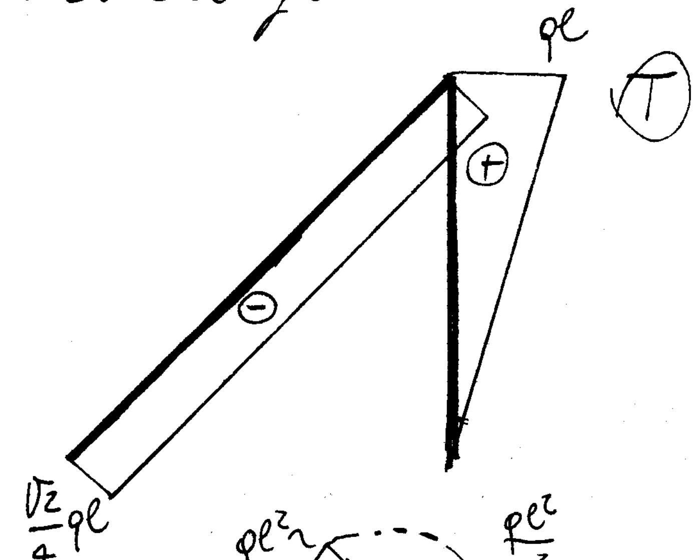
- $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost.}$, $N_B = \frac{ql}{2} \Rightarrow N(s) = \frac{ql}{2}$
- $T(s)$: $f_\nu(s) = q \Rightarrow \frac{dT}{ds} = -q < 0$, $T(s)$ varia linearmente ed è decrescente. Si valuta il valore del taglio nei

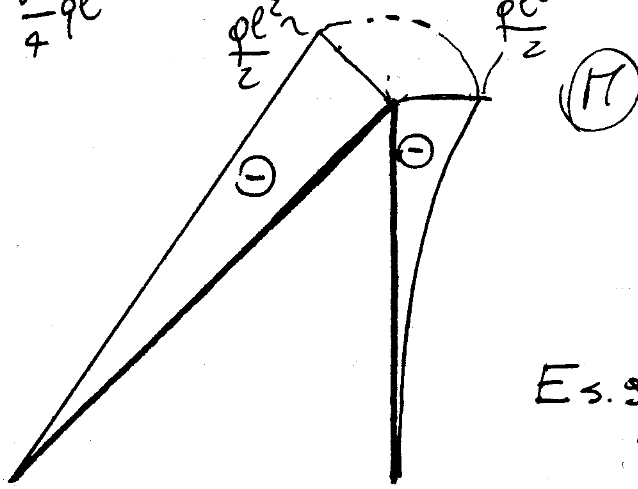
due estremi, $T_B = 0$, $T_D = ql$

· $M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{ds} = T(s) > 0$, $M(s)$ varia con legge quadratica ed è concava (tenendo conto delle convenzioni sui diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione). È necessario calcolare il valore del momento flettente ai due estremi per poter tracciare il diagramma nella trave DB, $M_B = 0$, $M_D = -\frac{ql^2}{2}$ (si è ribaltato il valore calcolato nella trave AD non essendoci momenti applicati in D)

È ora possibile tracciare i diagrammi

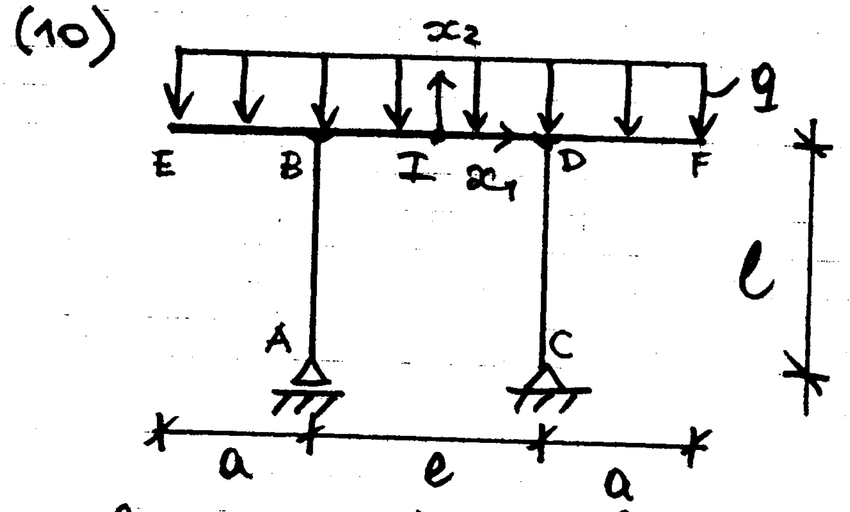




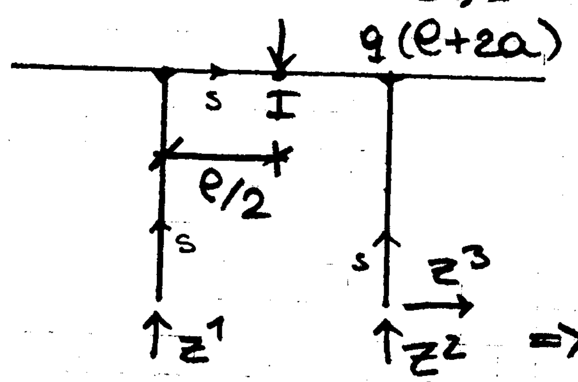


Es. 9/3

(10)



Determino le reazioni vincolari, risolvendo le equazioni di equilibrio. (solo per ricavare le reazioni vincolari sostituisco al sistema di forze distribuite un sistema equivalente di forze concentrate).



Trasl x_1) $z^3 = 0$

Trasl x_2) $z^1 + z^2 - q(l+2a) = 0$

polo I) $-z^1 \, l/2 + z^2 l + z^3 l = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^1 = q(l/2 + a) \\ z^2 = q(l/2 + a) \\ z^3 = 0 \end{cases}$$

TRAVE $\underline{AB}$ N costante $N_A = -q(l/2 + a)$

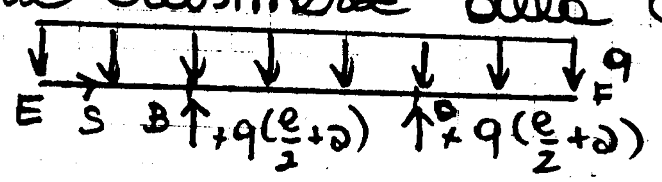
$\Rightarrow N = -q(l/2 + a)$

T costante $T_A = 0 \Rightarrow T = 0$

M costante $M_A = 0 \Rightarrow M = 0$

TRAVE $\underline{CD}$ Come trave AB

Sostituisco alle travi $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ le azioni da esse trasmesse alla trave $\overline{EF}$



N costante $N_E = 0 \Rightarrow N = 0$

T lineare $\underline{EB}$ $T(s) = -qs \quad s \in [0, a]$

$T_E = 0 \quad T_B^s = -qa$

$\underline{BD}$ $T_B^d = -qa + q(l/2 + a) = ql/2$

$$T(s) = q\ell/2 - qs = T_B^d - qs \; ; \; s \in [\emptyset, \ell]$$

$$T_D^s = -q\ell/2$$

__DF__ $$T_D^d = -q\ell/2 + q(\ell/2 + a) = qa$$

$$T(s) = qa - qs = T_D^d - qs \qquad s \in [0, a]$$

$$T_F = 0$$

M parabolico, con curvatura negativa (quindi concavo).

__EB__ $$M(s) = -qs^2/2 \qquad s \in [\emptyset, a]$$

$$M_E = 0 \qquad M_B = -qa^2/2$$

__BD__ $$M(s) = M_B - qs^2/2 + T_B^d s \qquad s \in [\emptyset, \ell]$$

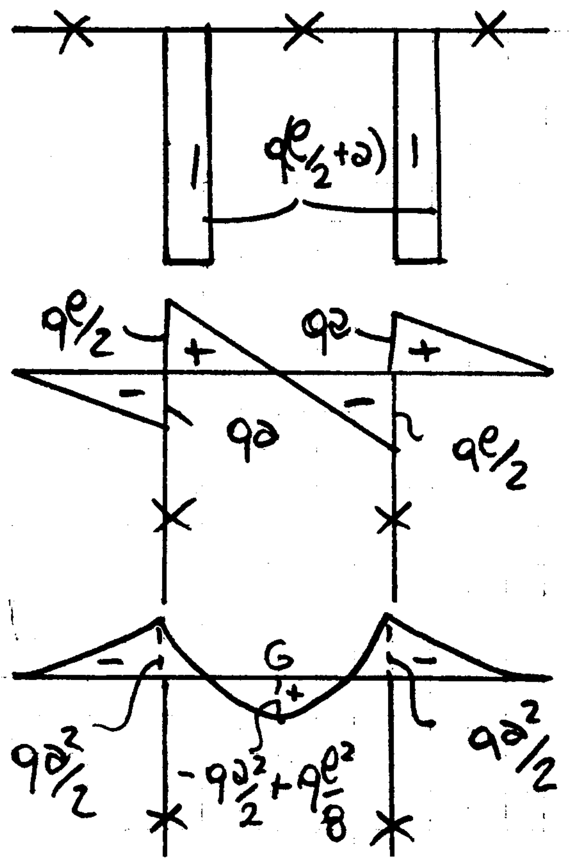
$$M(s) = -qa^2/2 - qs^2/2 + q\tfrac{\ell}{2}s \; ; \; M_D = -qa^2/2$$

con estremo relativo in mezzeria

$$M_G = -qa^2/2 + q\ell^2/8 \quad (>0 \text{ se } \ell^2/8 > a^2/2)$$

__DF__ $$M(s) = M_D + T_D^d s - qs^2/2 \qquad s \in [\emptyset, a]$$

$$M(s) = -\frac{qa^2}{2} + qas - qs^2/2 \qquad M_F = 0$$



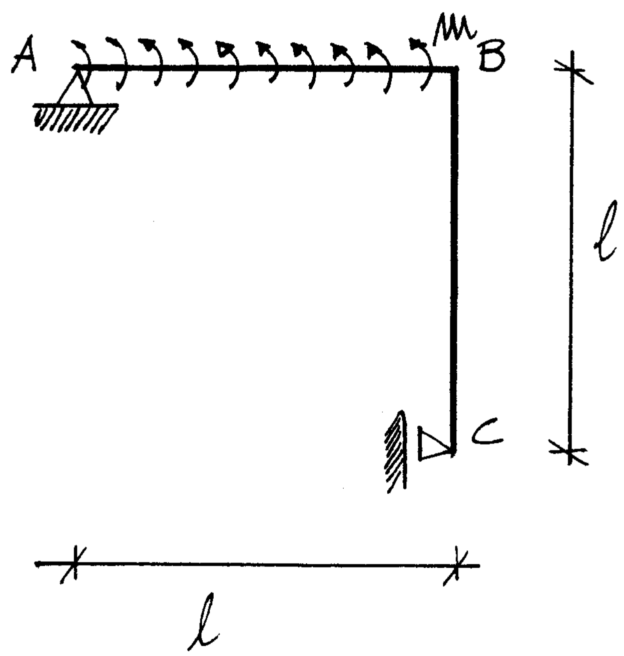
N

Diagramma delle sollecitazioni

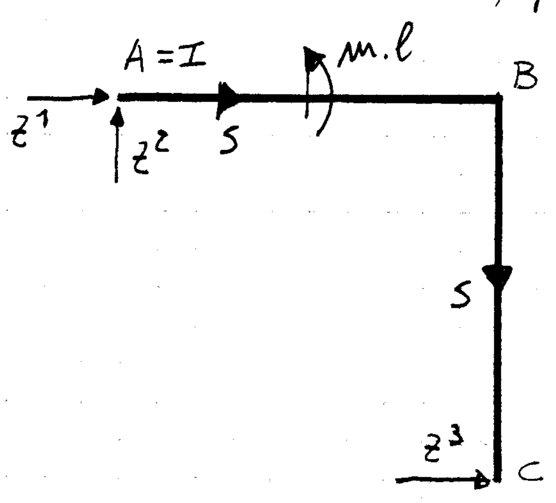
T

M

ESERCIZIO 11



Il telaio in esame è isostatico, $m=3$, $\rho(\underline{B})=3$.
Si procede quindi alla determinazione delle reazioni vincolari mediante l'uso delle equazioni di equilibrio.
La distribuzione uniforme di coppie viene ridotta al momento risultante $m \cdot l$, posto in un ∀ punto lungo AB



$$z^1 + z^3 = 0 \qquad z^1 = m$$

$$z^2 = 0 \qquad z^2 = 0$$

$$l \cdot z^3 + m\, l = 0 \quad \Rightarrow \quad z^3 = -m$$

Si osservi che m ha dimensioni $\frac{F \cdot L}{L}$, quindi $m \cdot l$ ha dimensioni corrette $\frac{F \cdot \cancel{L}}{\cancel{L}} \cdot L$ = coppia. Stesse osservazioni valgono per z^1 e z^3.

Caratteristiche di sollecitazione

Trave AB $(0 \le s \le l)$

. $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost}$, $N_A = -m \Rightarrow N(s) = -m$

. $T(s)$: $f_v(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost}$, $T_A = 0 \Rightarrow T(s) = 0$

$M(s)$: $m(s) = m \Rightarrow \frac{dM}{ds} = -m \Rightarrow M(s)$ varia linearmente ed è decrescente. Si calcolano i valori del momento ai due estremi AB, $M_A = 0$, $M_B = -ml$

Trave BC $(0 < s \le l)$

. $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost}$, $N_C = 0 \Rightarrow N(s) = 0$

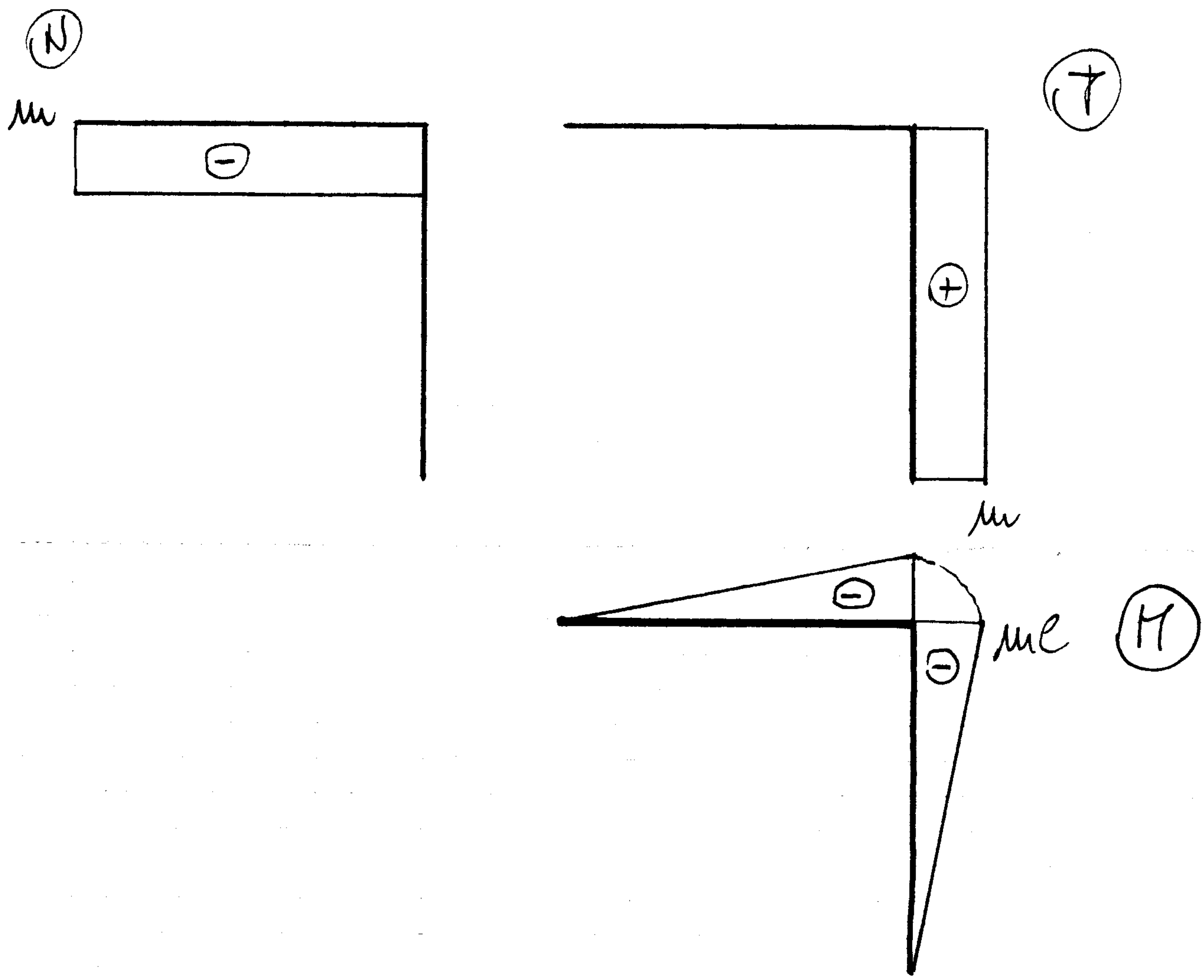
$T(s)$: $f_v(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost}$, $T_C = m \Rightarrow T(s) = m$

$M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{ds} = T(s) \Rightarrow M(s)$ varia linearmente ed è decrescente.

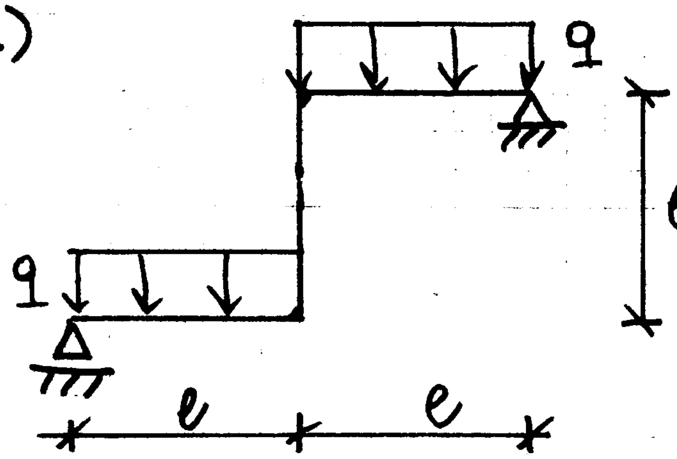
È sufficiente valutare il momento ai due estremi di BC, $M_B = -ml$ (si è ribaltato $M(s)$ della trave AB)

$M_C = 0$

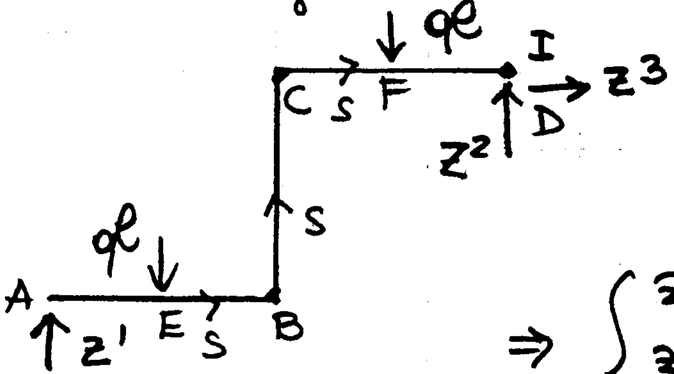
È ora possibile tracciare i diagrammi:



(12)



Determino le reazioni vincolari, scrivendo le equazioni di equilibrio (polo I).
(<u>solo</u> per determinare le reazioni vincolari sostituisco il sistema di forze distribuite con uno equivalente di forze concentrate)



Trasl. x_1) $z^3=0$

Trasl x_2) $z^1+z^2-q\ell-q\ell=0$

polo I) $q\ell\,\ell/2+q\ell\,\frac{3}{2}q\ell-z^1 2\ell=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^1=q\ell \\ z^2=q\ell \\ z^3=0 \end{cases}$$

TRAVE <u>AB</u> N costante, $N_A=0 \Rightarrow N=0$

T lineare; $T_A=q\ell$ $T(s)=T_A-qs$

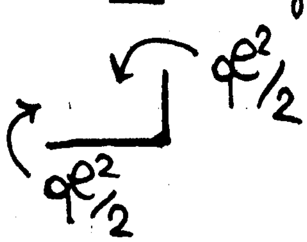
$\Rightarrow T(s)=q\ell-qs$ $s\in[0,\ell]$; $T_B=0$

M parabolico, con curvatura negativa, quindi concavo. $s\in[0,\ell]$

$M_A=0$ $M(s)=T_A s-q s^2/2=q\ell s-q s^2/2$

$M_B=q\ell^2/2$ (che è estremo relativo)

TRAVE <u>BC</u> Sfrutto l'equilibrio del nodo B



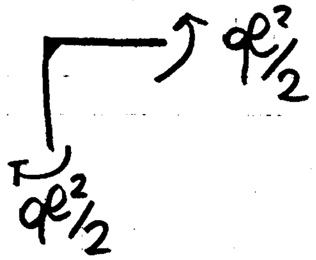
T, N costanti $T_B=0 \Rightarrow T=0$

$N_B=0 \Rightarrow N=0$

$M_B=q\ell^2/2$ M costante $\Rightarrow$ 12/1

$M = q\ell^2/2$

TRAVE CD   Sfrutto l'equilibrio del nodo C



N costante $N_C = 0 \Rightarrow N = 0$

T lineare $T_C = 0$

$T(s) = -qs \quad s \in [0, \ell]$

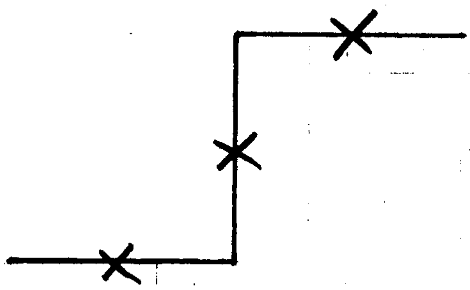
$T_D = -q\ell$

M parabolico, con curvatura negativa, cioè concavo.

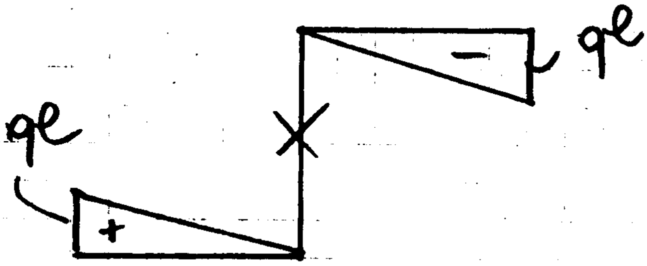
$M_C = q\ell^2/2 \quad M(s) = M_C - qs^2/2$

$M(s) = q\ell^2/2 - qs^2/2 \quad M_D = 0 \quad s \in [0, \ell]$

→ che è estremo relativo

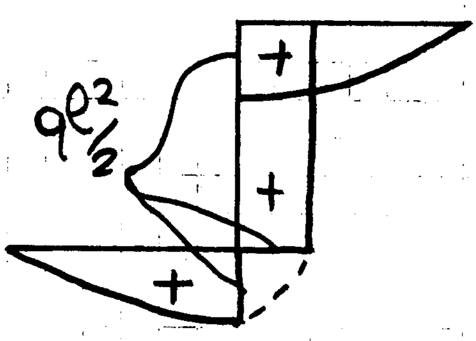


N



T

Diagrammi delle sollecitazioni



M