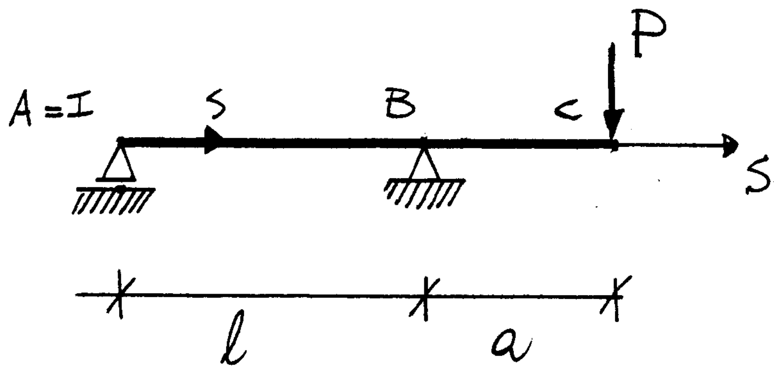
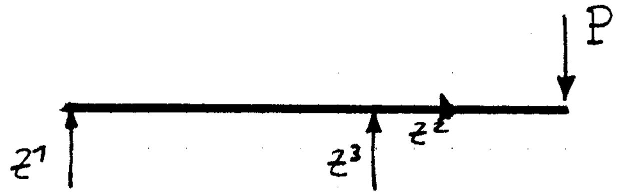
Diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione

ESERCIZIO 1



La trave in esame è isostatica, $m=3$, $\rho(\underline{B})=3$.

Si procede quindi alla <u>determinazione delle reazioni vincolari</u> mediante l'uso delle equazioni di equilibrio

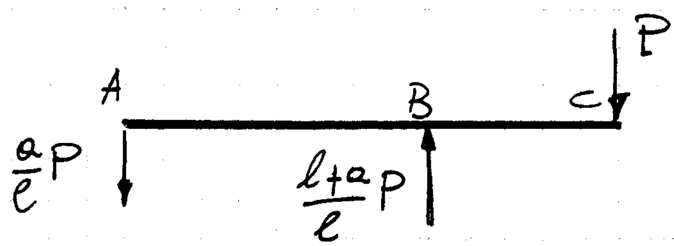


$$z^2=0$$

$$z^1+z^3-P=0 \Rightarrow z^1=P-\frac{l+a}{l}P \Rightarrow z^1=-\frac{a}{l}P$$

$$l\cdot z^3-(l+a)P=0 \Rightarrow z^3=\frac{l+a}{l}P$$

Assetto statico



Caratteristiche di sollecitazione

Nel seguito si analizza lo stato di sollecitazione della trave in esame mediante i diagrammi delle funzioni $N = N(s)$, $T = T(s)$, $M = M(s)$. Indicazioni utili ai fini del tracciamento dei diagrammi sono fornite dalle equazioni indefinite di equilibrio.

Trave AB $(0 \leq s < \ell)$

- $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost}$. È sufficiente calcolare il valore in una sezione di AB per poter tracciare il diagramma di $N(s)$. $N_A = 0 \Rightarrow N(s) = 0$
- $T(s)$: $f_r(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost}$. È ancora sufficiente calcolare il valore del taglio in una sezione lungo AB per poter tracciare il diagramma di $T(s)$. $T_A = -P\cdot\frac{a}{\ell} \Rightarrow$ $\Rightarrow T(s) = -P\cdot\frac{a}{\ell}$
- $M(s)$: $m(s) = 0$, $\frac{dM}{ds} = T(s) \Rightarrow M(s)$ varia linearmente. È necessario calcolare il valore del momento in due sezioni lungo AB, $M_A = 0$, $M_B = -P\cdot\frac{a}{\ell}\cdot\ell = -Pa$. Si può ancora notare che $T(s) = \text{cost.} < 0 \Rightarrow M(s)$ è decrescente.

Trave BC ($0<s\leq a$)

• $N(s)$: nella trave BC si ha ancora $f_s(s)=0 \Rightarrow N(s)=\text{cost}$,

$N_A=0 \Rightarrow N(s)=0$

• $T(s)$: $f_\nu(s)=0 \Rightarrow T(s)=\text{cost.}$, è sufficiente calcolare il valore del taglio in una sezione della trave BC,

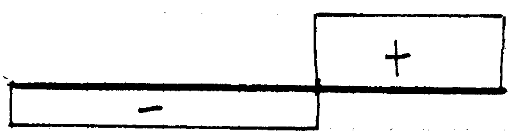
$T_C=P \Rightarrow T(s)=P$

• $M(s)$: $\mu(s)=0$, $\dfrac{dM}{ds}=T(s)=P=\text{cost.} \Rightarrow M(s)$ varia linearmente. È sufficiente calcolare il momento in due sezioni nella trave BC, $M_B=-Pa$, $M_C=0$. $\dfrac{dM}{ds}>0 \Rightarrow M(s)$ crescente.

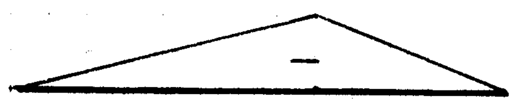
+ Si può ancora osservare che il taglio presenta una discontinuità in B dovuta alla presenza della reazione vincolare verticale $\mathcal{Z}^3$. La variazione di valore del taglio in B deve essere uguale alla reazione vincolare $\mathcal{Z}^3=P\dfrac{l+a}{l}$.

Forza normale e momento non devono presentare punti di discontinuità.

Si possono adesso tracciare i diagrammi



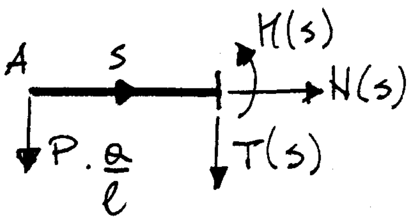
T



M

È possibile giungere agli stessi risultati mediante la metodologia dell'equilibrio di porzioni di travi. Al fine di mostrare un esempio di tale metodologia nel seguito si considerano nuovamente le travi AB e BC e si impone l'equilibrio rispettivamente nella parte sinistra e nella parte destra (si vedano le due figure seguenti).

fig. a



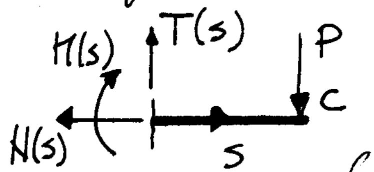


fig. b

<u>Trave AB</u> (vedi fig. a) $(0 \leq s < \ell)$

$$N(s) = 0 \;;\; T(s) = -P \cdot \frac{a}{\ell} = \text{cost.} < 0 \;;\; M(s) = -P \cdot \frac{a}{\ell} \cdot s < 0$$

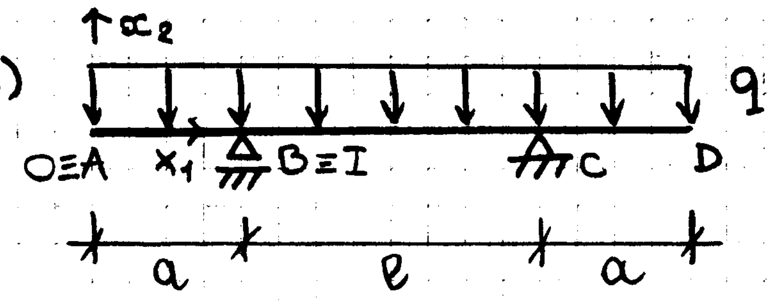
$$M(0) = 0, \; M(\ell) = -P \cdot a$$

<u>Trave BC</u> (vedi fig. b) $(0 < s \leq a)$

$$N(s) = 0 \;;\; T(s) = P = \text{cost.} > 0 \;;\; M(s) = -Ps < 0$$

$$M(0) = 0, \; M(a) = -Pa$$

(2)

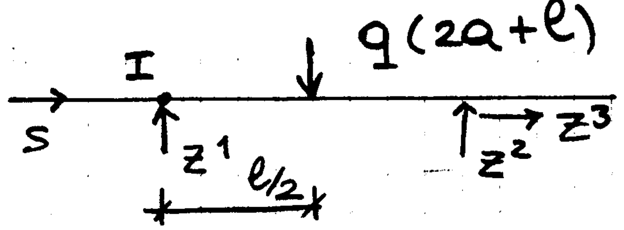


Determino le reazioni vincolari, scrivendo le equazioni di equilibrio: (polo $I \equiv B$)

Trasl. x_1) $\quad Z^3 = 0$

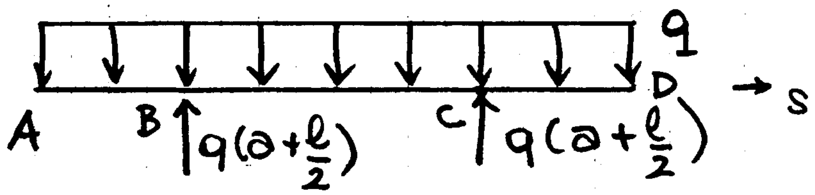
Trasl. x_2) $\quad Z^1 + Z^2 - q(2a + l) = 0$

rotaz. I) $\quad Z^2 l - q(2a + l)\, l/2 = 0$



(solo per determinare le reazioni vincolari sostituisco il sistema di forze distribuite con uno equivalente di forze concentrate)

$$\Rightarrow \begin{cases} Z^1 = q(a + l/2) \\ Z^2 = q(a + l/2) \\ Z^3 = 0 \end{cases}$$



Equazioni indefinite di equilibrio:

- $\dfrac{dN}{ds} = 0 \quad N(s) = N = \text{costante}$ (perchè $f_s = 0$), è in questo caso è nulla perchè $\nexists$ carichi in direzione assiale e $N_A = 0 \Rightarrow N = 0$ _
- $\dfrac{dT}{ds} + f_v(s) = 0$ $\qquad$ con $s \in [0, a]$

  $\underline{AB}$ $\quad -qs - T(s) = 0 \quad T(s) = -qs$ taglio linearmente decrescente: $\quad T_A = 0 \quad \hat{T}_B = -qa$

BC $T(s) = T_B^d - qs = -qa + q(\ell/2 + a) - qs$

$$T(s) = q\ell/2 - qs \quad (\text{con } s \text{ da } \emptyset \text{ ad } \ell)$$

in A c'è una discontinuità (salto nel diagramma) dovuto al carico concentrato (reazione vincolare). Il Taglio è linearmente decrescente.

$$T_B^d = q\ell/2 \qquad T_C^s = -q\ell/2$$

CD $T(s) = T_C^d - qs = -q\ell/2 + q(\ell/2 + a) - qs$

$$T(s) = qa - qs \quad (\text{con } s \text{ da } \emptyset \text{ ad } a)$$

in C c'è una discontinuità. Il taglio è linearmente decrescente.

$$T_C^d = qa \qquad T_D = \emptyset$$

- $\dfrac{dM}{ds} + m(s) - T(s) = 0$

Poichè il taglio ha andamento lineare, il momento avrà un andamento parabolico (con curvatura negativa $\frac{d^2M}{ds^2} = -f_v \Rightarrow$ concava) e si avrà un estremo (massimo) dove il taglio si annulla. $m(s) = \emptyset$.

AB $M(s) = -q\frac{s^2}{2} \qquad \left.\dfrac{dM}{ds}\right|_A = 0 = T_A \quad s \in [0, a]$

$$M_A = 0 \qquad M_B = -q\frac{a^2}{2}$$

$s \in [0, \ell]$

BC $M(s) = M_B - q\frac{s^2}{2} + T_B^d s = -q\frac{a^2}{2} - q\frac{s^2}{2} + q\frac{\ell}{2}s$

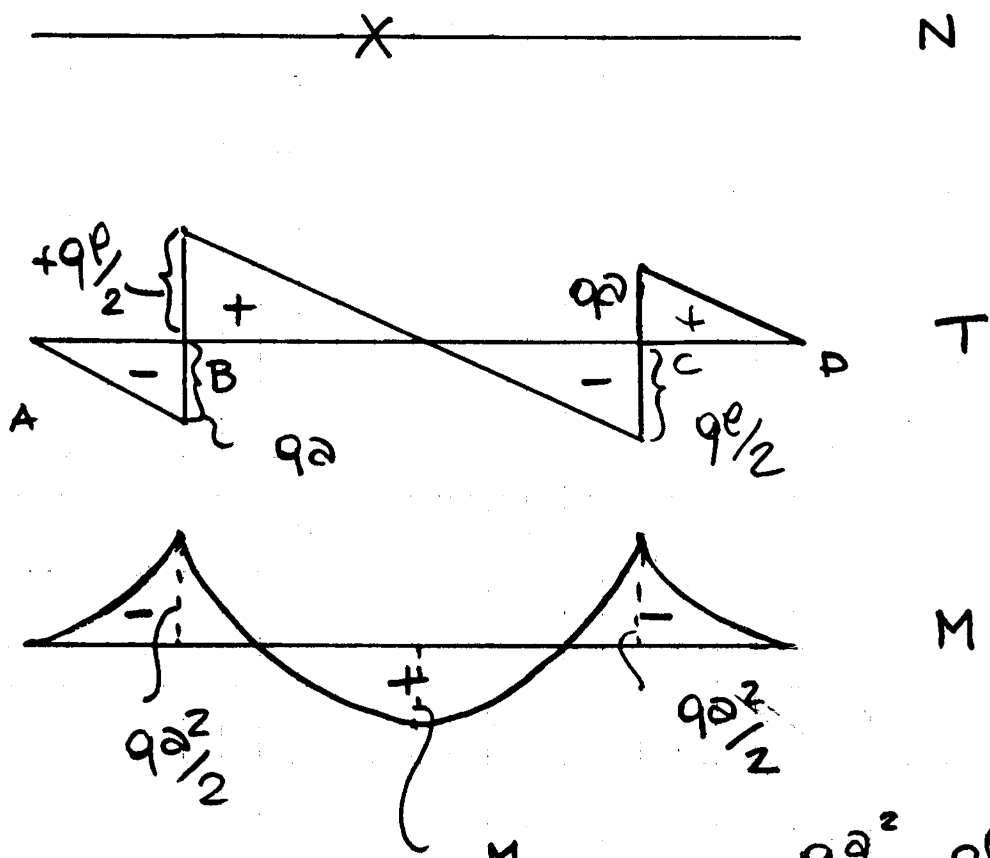
$$M_C = -q\frac{a^2}{2} \quad (\text{con max in mezzeria})$$

CD $M(s) = M_C + T_C^d s - q\frac{s^2}{2} \qquad s \in [0, a]$

$$\Rightarrow M(s) = -q\frac{a^2}{2} + qas - q\frac{s^2}{2} \qquad M_D = 0$$

2/2

$$\left.\frac{dM}{ds}\right|_D = 0 = T_D$$



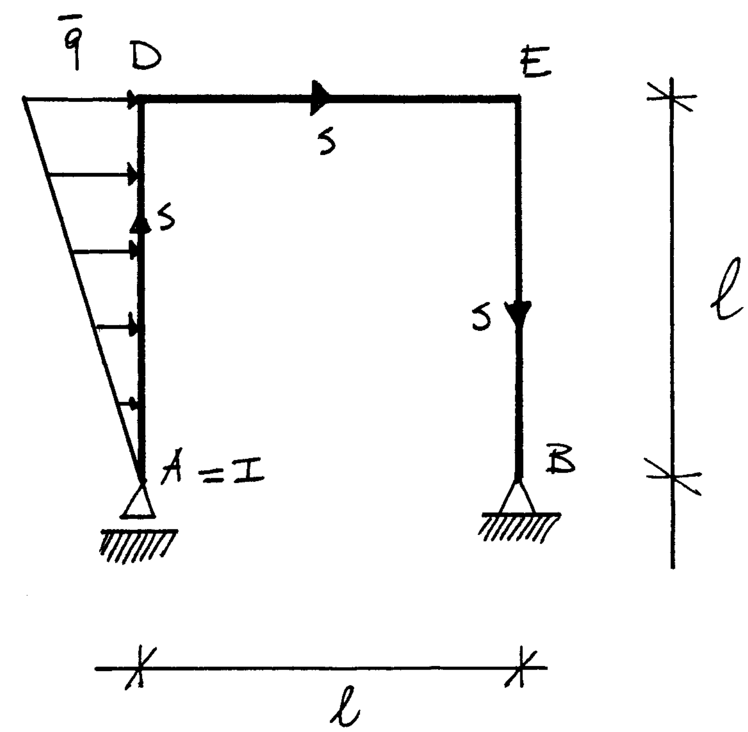
$$M_{mezzeria} = -q\frac{a^2}{2} - q\frac{\ell^2}{8} + q\frac{\ell^2}{4} =$$

$$= -q a^2/2 + q\ell^2/8$$

$$(>0 \text{ se } \ell^2/8 > a^2/2)$$

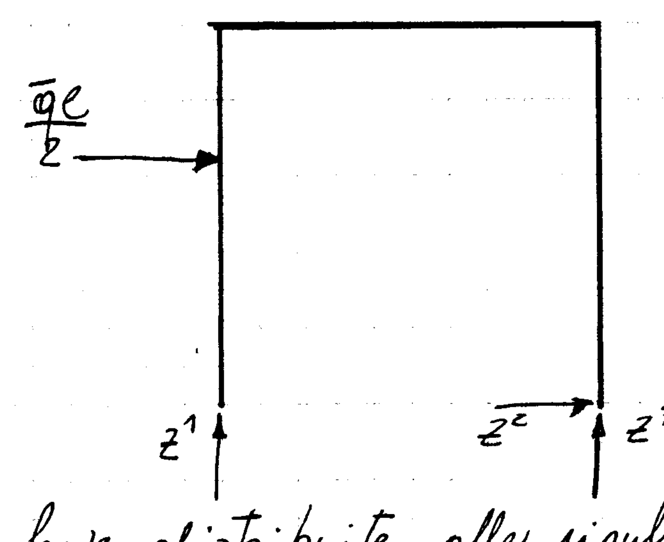
Diagrammi delle sollecitazioni

Esercizio 3



Il telaio in esame è isostatico, $m = 3$, $\rho(\underline{B}) = 3$

Si procede quindi alla determinazione delle reazioni vincolari mediante l'uso delle equazioni di equilibrio



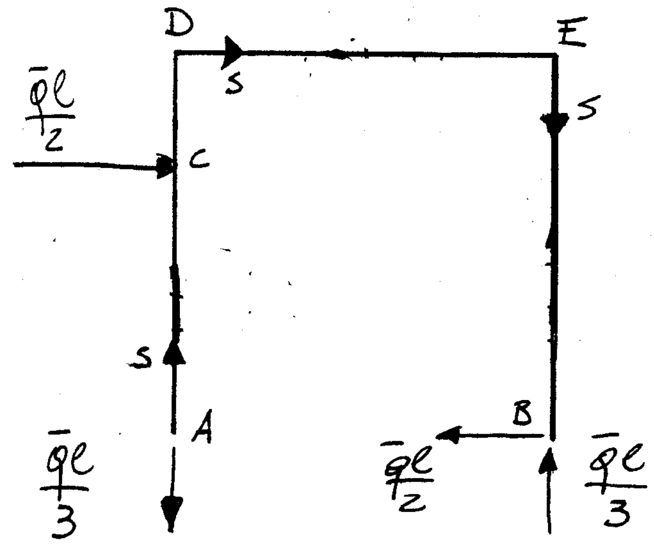
Si riducono le forze distribuite alla risultante $\frac{\bar{q}\ell}{2}$ posta nel centro del sistema di forze e che dista da A $b = \frac{2}{3}\ell$.

$$Z^2 + \frac{\bar q \ell}{2} = 0 \Rightarrow Z^2 = -\frac{\bar q \ell}{2}$$

$$Z^1 + Z^3 = 0 \Rightarrow Z^1 = -\frac{\bar q \ell}{3}$$

$$\cancel{\ell} \cdot Z^3 - \frac{\bar q \ell}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \ell = 0 \Rightarrow Z^3 = \frac{\bar q \ell}{3}.$$

Assetto statico



<u>Caratteristiche di Sollecitazione</u>

<u>Trave AB</u> $(0 \le s < \ell)$

- $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost.}$, è sufficiente calcolare la forza normale in una sezione di AD, $N_A = \frac{\bar q \ell}{3} \Rightarrow N(s) = \frac{\bar q \ell}{3} > 0$
- $T(s)$: $f_r(s) = \bar q \frac{s}{\ell} \Rightarrow T(s)$ varia con legge quadratica.

$\frac{dT}{ds} = -\bar q \frac{s}{\ell} < 0 \Rightarrow T(s)$ decrescente, $\left.\frac{dT}{ds}\right|_A = 0 \Rightarrow$ in A $T(s)$ ha tangente orizzontale. Per poter tracciare il diagramma del taglio in AD è ancora necessario conoscere i valori che assume ai due estremi, $T_A = 0$, $T_D = -\frac{1}{2} \bar q \frac{s}{\ell} \cdot s = -\frac{1}{2} \bar q \frac{s^2}{\ell}$

Es. 3/2

. $M(s)$: $m(s)=0 \Rightarrow \frac{dM}{ds}=T(s) \Rightarrow M(s)$ varia con legge cubica - $\frac{dM}{ds}<0 \Rightarrow M(s)$ è decrescente - $\frac{dM}{ds}\Big|_A=0 \Rightarrow$ tangente orizzontale in A - Il diagramma è concavo, essendo la curvatura negativa (e tenendo conto delle convenzioni per il tracciamento del diagramma del momento), $\frac{d^2M}{ds^2}<0=-f_v(s)$.
È necessario ancora calcolare i valori del momento agli estremi

$\left\{ M_A=0,\ M_D=-\frac{\bar{q}\ell}{2}\cdot\frac{1}{3}\ell=-\frac{1}{6}\bar{q}\ell^2 \right.$

Trave DE $(0<s<\ell)$

. $N(s)$: $f_s(s)=0 \Rightarrow N(s)=\text{cost.}$ - È sufficiente calcolare il valore della forza normale in una sezione della trave DE, $N_D=-\frac{\bar{q}\ell}{2}$

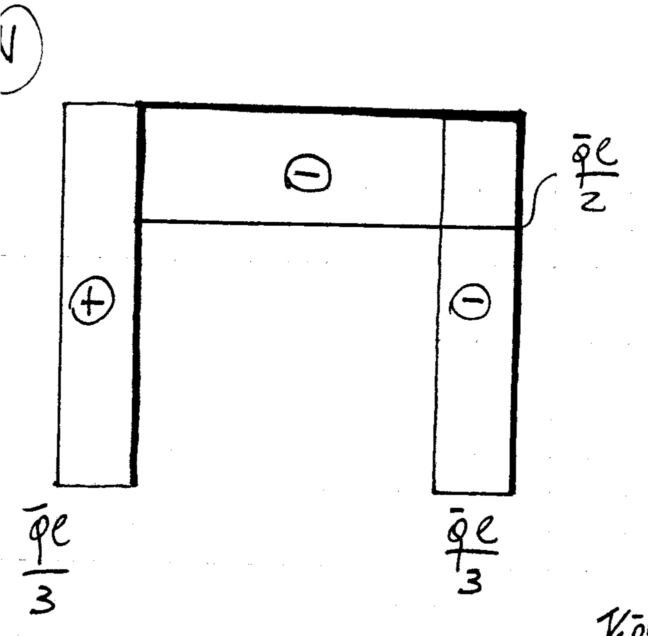
. $T(s)$: $f_v(s)=0 \Rightarrow T(s)=\text{cost.}$ - Si calcola un unico valore del taglio rispetto ad una sezione lungo DE, $T_D=-\frac{\bar{q}\ell}{3}$

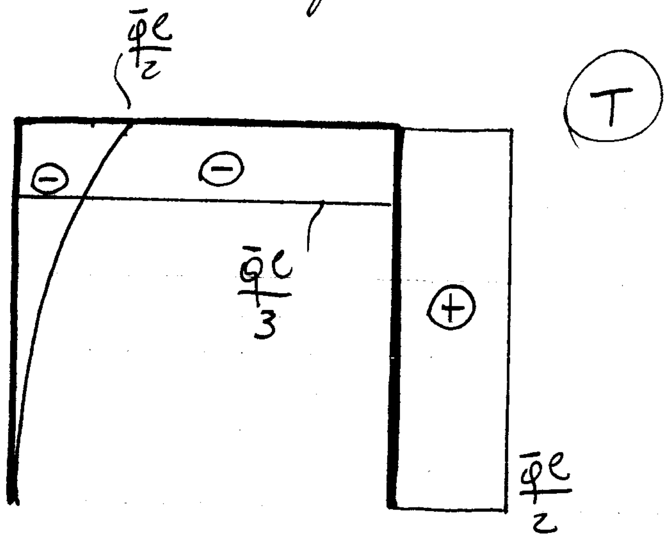
. $M(s)$: $m(s)=0 \Rightarrow \frac{dM}{ds}=T(s)=-\frac{\bar{q}\ell}{3}<0$. Il momento varia linearmente, è sufficiente calcolare i valori agli estremi della trave, $M_D=-\frac{1}{6}\bar{q}\ell^2$ (non essendoci momenti concentrati in D, il momento è uguale a quello calcolato sulla trave AD all'estremo D, si dice che si ribalta la caratteristica di sollecitazione), $M_E=-\frac{\bar{q}\ell^2}{2}$ (si è ridotta la reazione vincolare z^2 in E che induce un momento risultante pari a $z^2\cdot b=-\frac{\bar{q}\ell}{2}\cdot\ell$, dove $b=\ell$

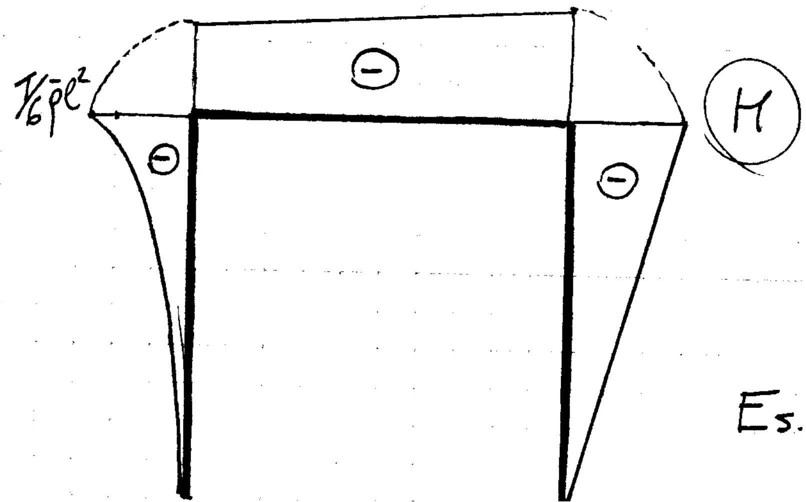
Trave EB $(0 < s \leq \ell)$

- $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = \text{cost}$. Si calcola il valore della normale in un'unica sezione, $N_B = -\dfrac{\bar{q}\ell}{3}$.
- $T(s)$: $f_n(s) = 0 \Rightarrow T(s) = \text{cost}$. Si calcola la normale in un'unica sezione, $T_B = \dfrac{\bar{q}\ell}{2}$.
- $M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \dfrac{dM}{ds} = T(s) > 0$. $M(s)$ varia linearmente ed è crescente. È sufficiente calcolare il momento ai due estremi della trave, $M_E = -\dfrac{\bar{q}\ell^2}{2}$ (è stato ribaltato il valore calcolato nella trave precedente), $M_B = 0$.

Si possono quindi tracciare i diagrammi





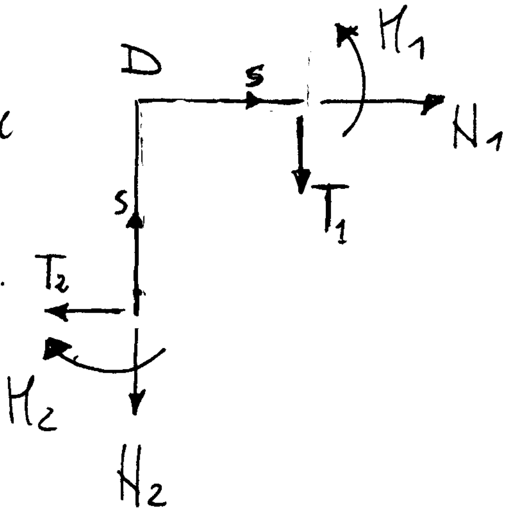


Come verifica dei calcoli eseguiti viene controllato l'equilibrio in un intorno del nodo D (stesso ragionamento vale per il nodo E):

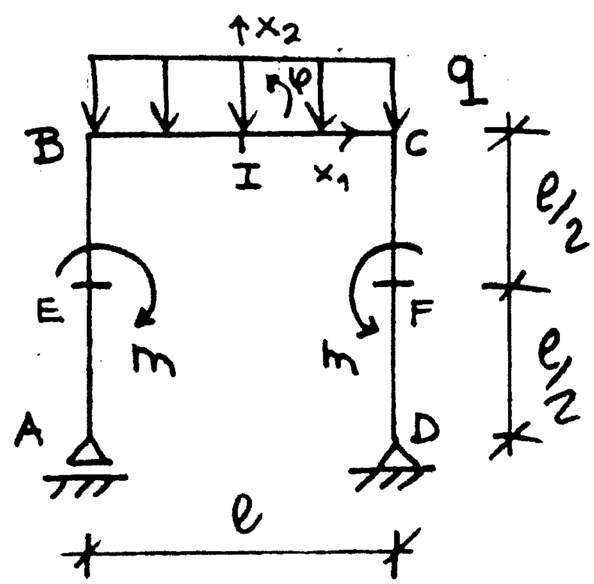
$-T_2 = -N_1 \Rightarrow \frac{\bar{q}l}{2} = \frac{\bar{q}l}{2}$ c.v.d

$N_2 = -T_1 \Rightarrow \frac{\bar{q}l}{3} = \frac{\bar{q}l}{3}$ c.v.d.

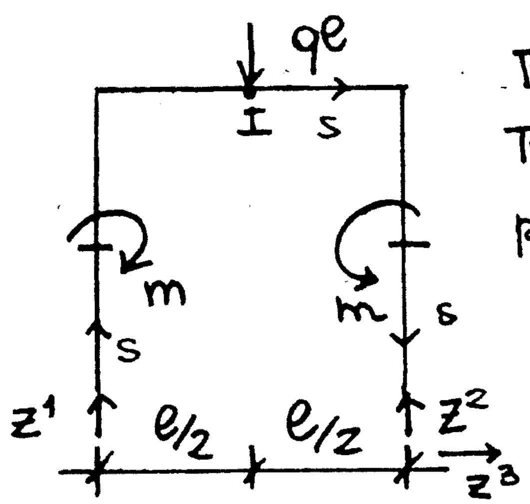
$M_2 = M_1 \Rightarrow \frac{1}{6}\bar{q}l^2 = \frac{1}{6}\bar{q}l^2$ c.v.d.



(4)



Determino le reazioni vincolari, scrivendo le equazioni di equilibrio (polo I) (solo per determinare le reaz. vincolari sostituisco il sistema di forze distribuite con uno equivalente di forze concentrate).



Trasl x_1) $z^3=0$

Trasl x_2) $z^1+z^2-q\ell=0$

polo I) $m-m+z^2\frac{\ell}{2}-z^1\frac{\ell}{2}+z^3\ell=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = q\ell/2 \\ z^2 = q\ell/2 \\ z^3 = 0 \end{cases}$$

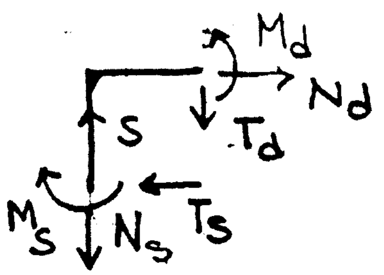
TRAVE <u>AB</u> N costante ; $N = -q\ell/2$

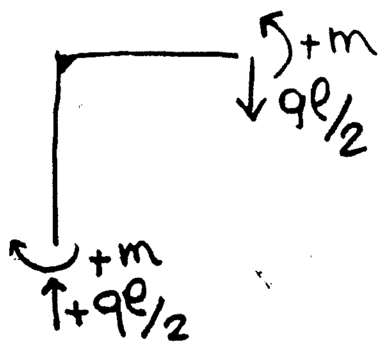
T costante, $T_A = 0 \Rightarrow T(s) = 0$

M costante $M = 0$ fino ad E

$M_E^s = 0$ $M_E^d = +m$ $M_B = +m$

TRAVE <u>BC</u> Sfruttando le condizioni di equilibrio nel nodo B





$N_B^d = 0$

N costante $\Rightarrow N = 0$

$T_B^d = q\ell/2$

$M_B^d = +m$

Carico distribuito q costante ⇒ T lineare

$$T(s) = q\ell/2 - qs = T_B^d - qs$$

$$T_C^s = -q\ell/2 \qquad s \in [0, \ell]$$

Momento parabolico (con curvatura negativa, quindi concavo) $\frac{dM^2}{ds^2} = -f_v$

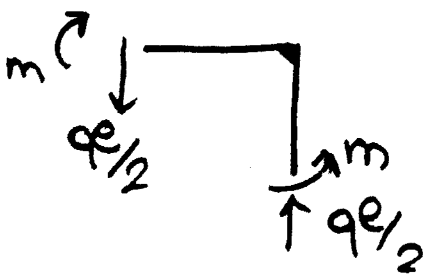
$$M(s) = +m + q\ell/2\, s - qs^2/2 \Rightarrow$$

cioè $M(s) = M_B^d + T_B^d s - qs^2/2 \qquad s \in [0, \ell]$

$$M_C^s = +m$$

dove $T = 0$ (in $\ell/2$) M ha un estremo (massimo) $M_{mezzeria} = +m + q\ell^2/8$

TRAVE <u>CD</u> Sfruttando l'equilibrio del nodo C



$N =$ costante $N_C^d = T_C^s = -q\ell/2$

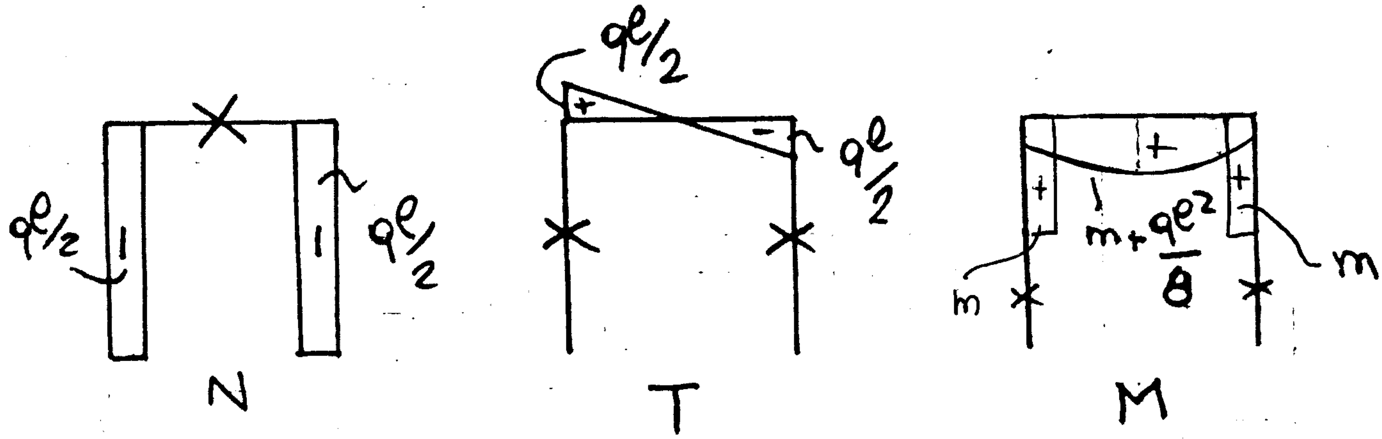
$\Rightarrow N = -q\ell/2$

T costante $T_C^d = 0 \Rightarrow T(s) = 0$

M costante $M(s) = +m$

$M_F^s = +m \qquad M_F^d = -m + m = 0$

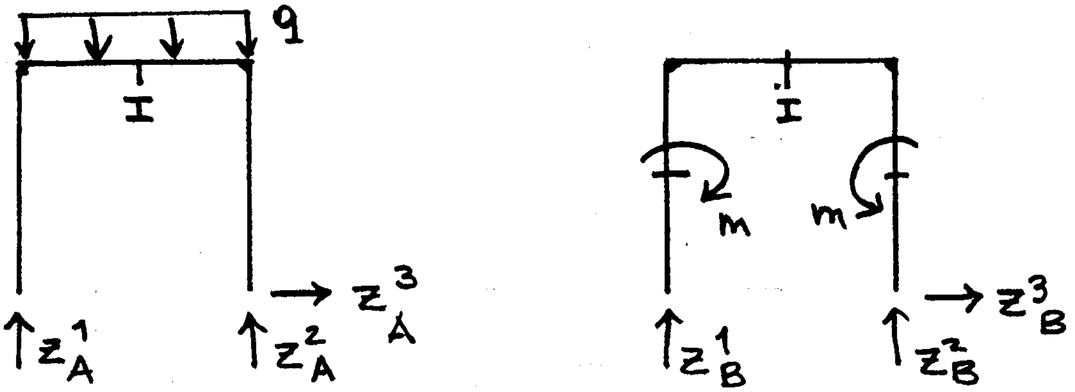
$M_D = 0$



Diagrammi delle sollecitazioni

Posso anche risolvere il sistema considerando la sovrapposizione degli effetti dati da q e m.

SISTEMA A SISTEMA B



SISTEMA (A)

Scrivo le equazioni di equilibrio:

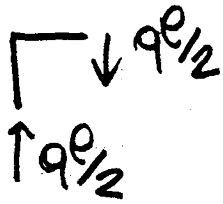
$$\begin{cases} z_A^3 = 0 \\ z_A^1 + z_B^2 - q\ell = 0 \\ -z_A^1 \ell/2 + z_A^2 \ell/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_A^1 = q\ell/2 \\ z_A^2 = q\ell/2 \\ z_A^3 = 0 \end{cases}$$

TRAVE AB N costante $N = -q\ell/2$

T costante $T = 0$

M costante $M = 0$

TRAVE BC Sfrutto l'equilibrio del nodo B



N costante $N = 0$

T costante $T_B = q\ell/2$ $T(s) = q\ell/2 - qs$

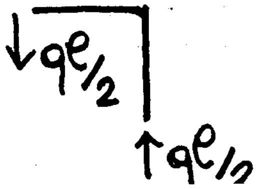
$T_C = -q\ell/2$

M parabolico $M_B = 0$

$$M(s) = T_B s - q\frac{s^2}{2} = \frac{q\ell}{2}s - q\frac{s^2}{2} \Rightarrow M_C = 0$$

Massimo in $\ell/2$ (dove $T=0$) $M_E = q\ell^2/8$

TRAVE CD Sfrutto l'equilibrio del nodo C



N costante $N = -q\ell/2$

T costante $T = 0$

M costante $M = 0$

4/3

SISTEMA B

Scrivo le equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} Z_B^3 = 0 \\ Z_B + Z_B^2 = 0 \\ -Z_B^1 \ell + Z_B^2 \ell + Z_B^3 \ell = 0 \end{cases}$$

$\underline{r}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Sistema autoequilibrato $\Rightarrow$ reazioni vincolari nulle.

TRAVE $\underline{AB}$

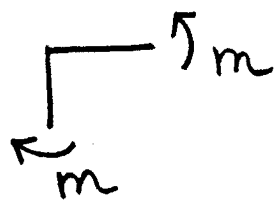
N costante $N = 0$

T costante $T = 0$

M costante $\underline{AE}$ $M = 0$ $\quad M_E^s = 0$

$M_E^d = +m \quad M_B = +m$

TRAVE $\underline{BC}$ Sfrutto l'equilibrio del nodo B

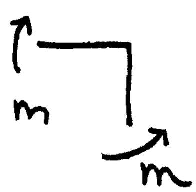


N costante $N = 0$

T costante $T = 0$

M costante $M = +m$

TRAVE $\underline{CD}$ Sfrutto l'equilibrio del nodo C



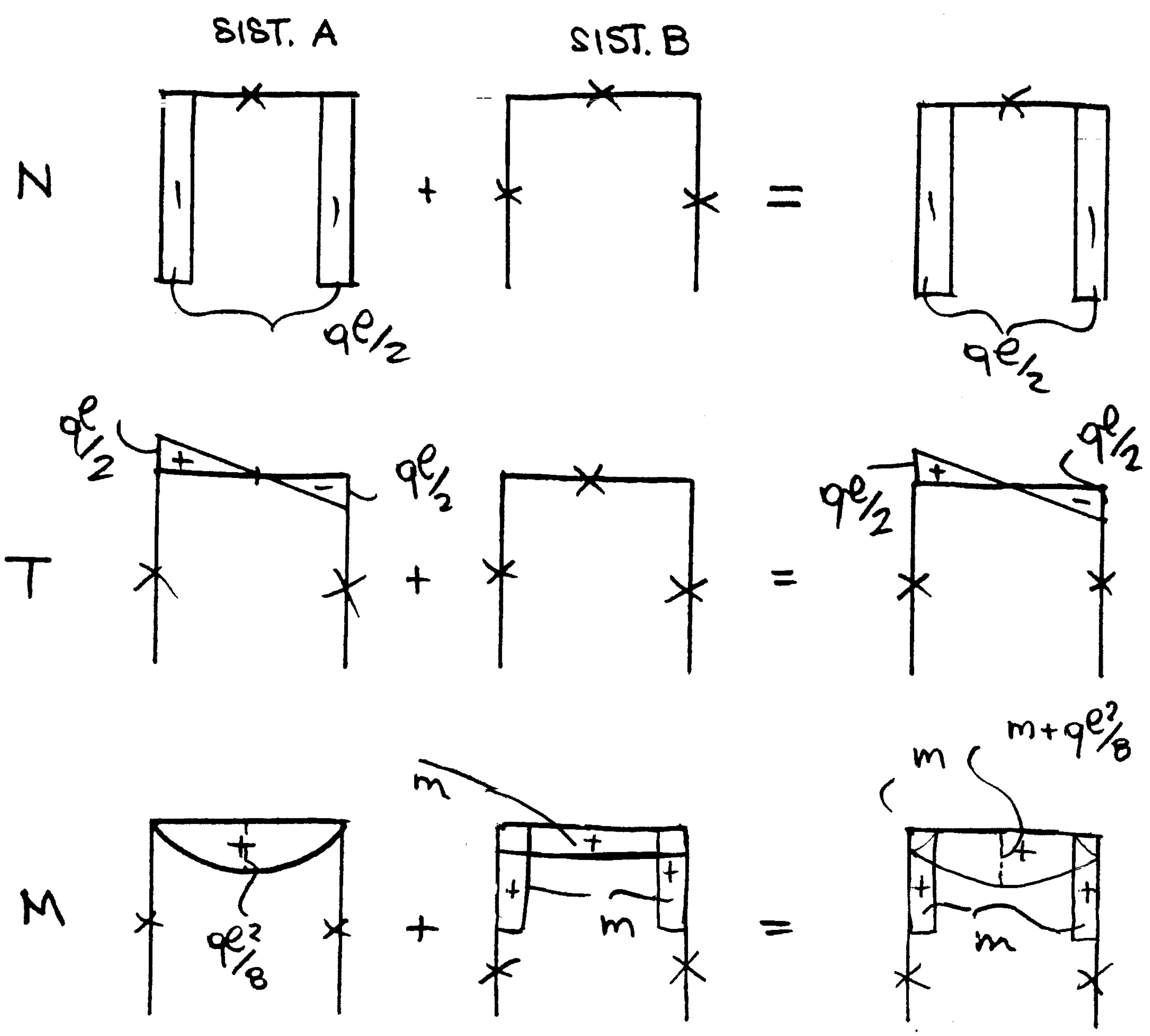
N costante $N = 0$

T costante $T = 0$

M costante $\underline{CF}$ $M = +m \quad M_F^s = +m$

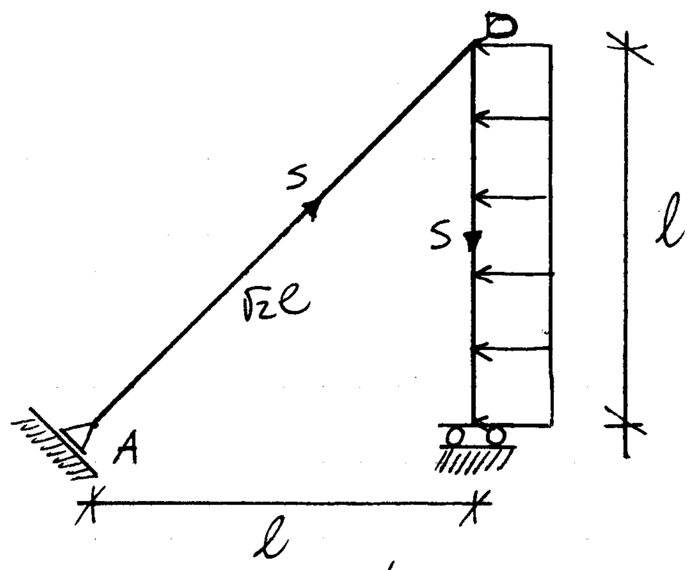
$M_F^d = -m + m = 0 \quad M_D = 0$

Per la linearità del problema posso sovrapporre gli effetti delle due condizioni di carico



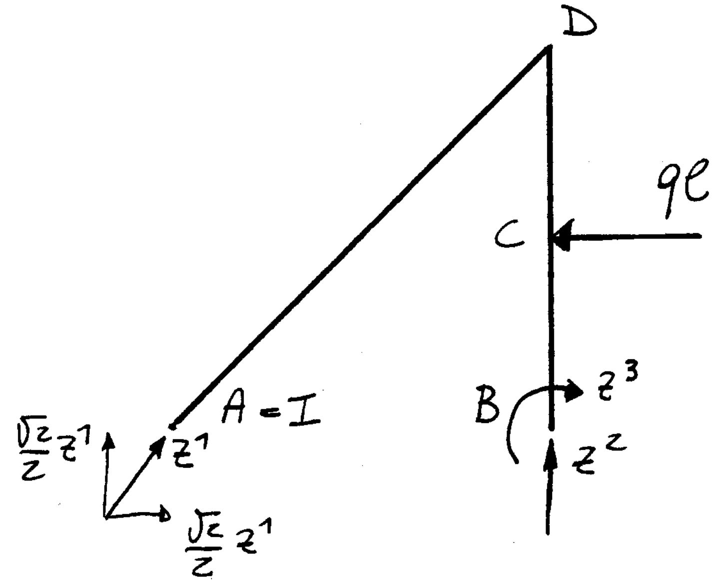
SIST. A
SIST. B
N
+
=
qℓ/2
T
M
m
m+qℓ²/8
qℓ²/8

ESERCIZIO 5



Il telaio in esame è isostatico, $m = 3$, $\rho(\underline{B}) = 3$.

Si procede quindi alla determinazione delle reazioni vincolari mediante l'uso delle equazioni di equilibrio



Si riducono le forze distribuite alla risultante $q\ell$ posta nel centro del sistema di forze e che dista da B, $b = \frac{\ell}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} z^1 - q\ell = 0 \implies z^1 = \sqrt{2}\, q\ell$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} z^1 + z^2 = 0 \implies z^2 = -\,q\ell$$

$$\ell \cdot z^2 - z^3 + \frac{q\ell^2}{2} = 0 \implies z^3 = -\frac{q\ell^2}{2}$$

Caratteristiche di sollecitazione

Trave AD $(0 \leq s < \sqrt{2}\ell)$

. $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = cost.$ Calcolo della normale in una sezione lungo AD, $N_A = -\sqrt{2}\,q\ell$

. $T(s)$: $f_\nu(s) = 0 \Rightarrow T(s) = cost.$, $T_A = 0 \Rightarrow T(s) = 0$

. $M(s)$: $m(s) = 0$, $\frac{dM}{ds} = T(s) = 0 \Rightarrow M(s) = cost.$, $M_A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(s) = 0$

Trave DB $(0 < s \leq \ell)$

. $N(s)$: $f_s(s) = 0 \Rightarrow N(s) = cost$, $N_B = q\ell \Rightarrow N(s) = q\ell$

. $T(s)$: $f_\nu(s) = q \Rightarrow T(s)$ varia linearmente, $\frac{dT}{ds} = -q < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T(s)$ è decrescente. È ancora necessario calcolare 2 valori del taglio in corrispondenza (per esempio) degli estremi, $T_B = 0$, $T_D = q\ell$ (la forza risultante del carico distribuito ridotto in D)

. $M(s)$: $m(s) = 0 \Rightarrow \frac{dM}{ds} = T(s) > 0 \Rightarrow M(s)$ è crescente. Il momento varia con legge quadratica ed è convesso essendo la curvatura positiva $\frac{d^2M}{ds^2} = q > 0$ (e tenendo conto delle convenzioni per i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione)

Infine si calcolano i valori agli estremi della trave DB

$M_D = 0$ (valore ribaltato dalla trave AD),

$M_B = \frac{ql^2}{2} = z^3$

Si possono quindi tracciare i diagrammi