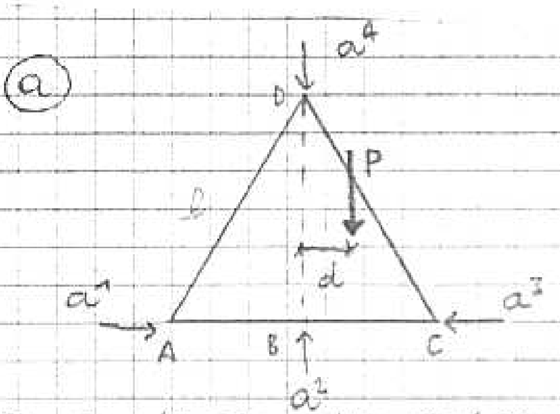
(a)



$s = 4 > 3 \Rightarrow$ soddisfatta la condizione necessaria per l'equilibrio ~~isostatico~~

Eq. cardinali della statica:

$$
\begin{cases}
a^1 - a^3 = 0 \\
a^2 - a^4 - P = 0 \\
Pd = 0
\end{cases}
$$

(B)

Forma matriciale:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ Pd \end{Bmatrix}
= \underline{0}
$$

$[B] - 3 \times 4$

$\rho[B] = 2 < 3 \Rightarrow$ sistema labile

$$
[B|R^a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Pd \end{bmatrix}
$$

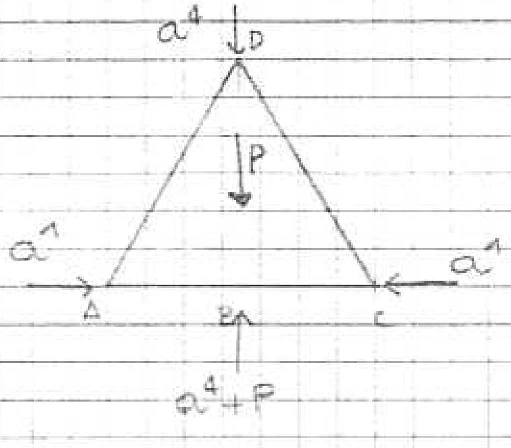
minore $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -P \\ 0 & 0 & Pd \end{bmatrix}$ $\quad \det M = Pd.$

se $\boxed{d = 0} \Rightarrow \det M = Pd = 0 \Rightarrow \rho[B|R^a] = 2 = \rho[B]$

$\Rightarrow$ sistema IPERSTATICO per la particolare condizione di carico.
(∞^2 soluzioni)

$$
\begin{cases}
a^1 = a^3 \\
a^2 = a^4 + P \\
0 = 0
\end{cases}
$$

assetto statico:



NON RICHIESTO

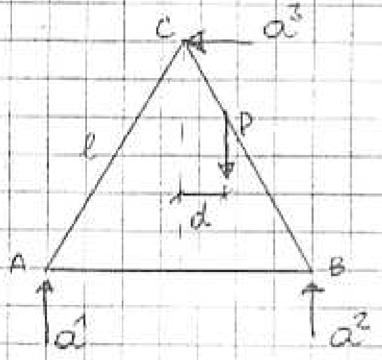
VERIFICHE: dimensioni: a^1, a^2, a^3, a^4 : $[F]$

$$\begin{cases} a^1 - a^1 = 0 \quad ✓ \\ (a^4 + P) - a^4 - P = 0 \quad ✓ \\ (A) \quad (a^4 + P)\dfrac{\ell}{2} - \dfrac{P\ell}{2} - a^4\dfrac{\ell}{2} = 0 \quad ✓ \end{cases}$$

se $\boxed{d \neq 0} \Rightarrow \det M = Pd \neq 0 \Rightarrow \rho[B|R^a] \overset{✓}{=} 3 \neq \rho[B]$

$\Rightarrow$ sistema staticamente impossibile ✓ ($\nexists$ soluzione)

b)



$s = 3 \Rightarrow$ ✓ soddisfatta condizione necessaria per equilibrio isostatico.

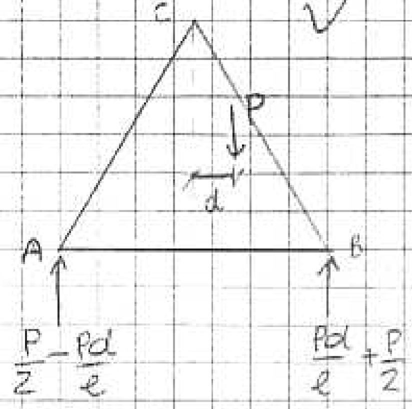
$$\begin{cases} a^1 + a^2 - P = 0 \\ a^3 = 0 \\ (C) \quad -a^1\dfrac{\ell}{2} + a^2\dfrac{\ell}{2} - Pd = 0 \end{cases} \quad ✓ \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ -Pd \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

$\det B = (-1)\left(\dfrac{\ell}{2} + \dfrac{\ell}{2}\right) = -\ell \neq 0 \Rightarrow \rho[B] = 3$ ✓

$\Rightarrow$ sistema ISOSTATICO ✓ per $\forall\, d$

$$\begin{cases} a^1 = P - a^2 = P - \dfrac{Pd}{\ell} - \dfrac{P}{2} = \dfrac{P}{2} - \dfrac{Pd}{\ell} \\ a^3 = 0 \\ -(P - a^2)\dfrac{\ell}{2} + a^2\dfrac{\ell}{2} - Pd = 0 \Rightarrow a^2\ell = Pd + \dfrac{P\ell}{2} \Rightarrow a^2 = \dfrac{Pd}{\ell} + \dfrac{P}{2} \end{cases}$$

schema statico:



verifiche:

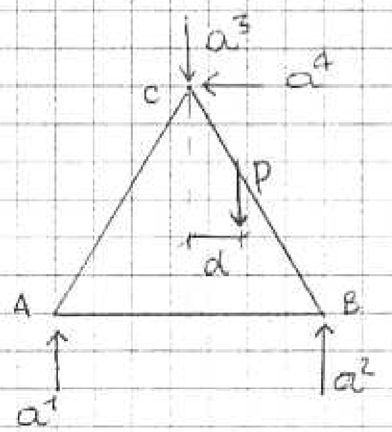
√ a^1: $\frac{[F]}{2} - \frac{[F][L]}{[L]} = [F]$

√ a^3: $\frac{[F][L]}{[L]} + \frac{[F]}{2} = [F]$

$$\checkmark \begin{cases} \frac{P}{2} - \frac{Pd}{\ell} + \frac{Pd}{\ell} + \frac{P}{2} - P = 0 \quad \checkmark \\ 0 = 0 \\ (A)\ \left(\frac{Pd}{\ell} + \frac{P}{2}\right)\ell - P\left(\frac{\ell}{2} + d\right) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow Pd + \frac{P\ell}{2} - \frac{P\ell}{2} - Pd = 0 \quad \checkmark$$

(C)



√ $s = 4 > 3 \Rightarrow$ soddisfatta condizione necessaria per equilibrio ~~isostatico~~

$$\checkmark \begin{cases} a^1 + a^2 - a^3 - P = 0 \\ a^4 = 0 \\ (C)\ a^2\frac{\ell}{2} - a^1\frac{\ell}{2} - Pd = 0 \end{cases}$$

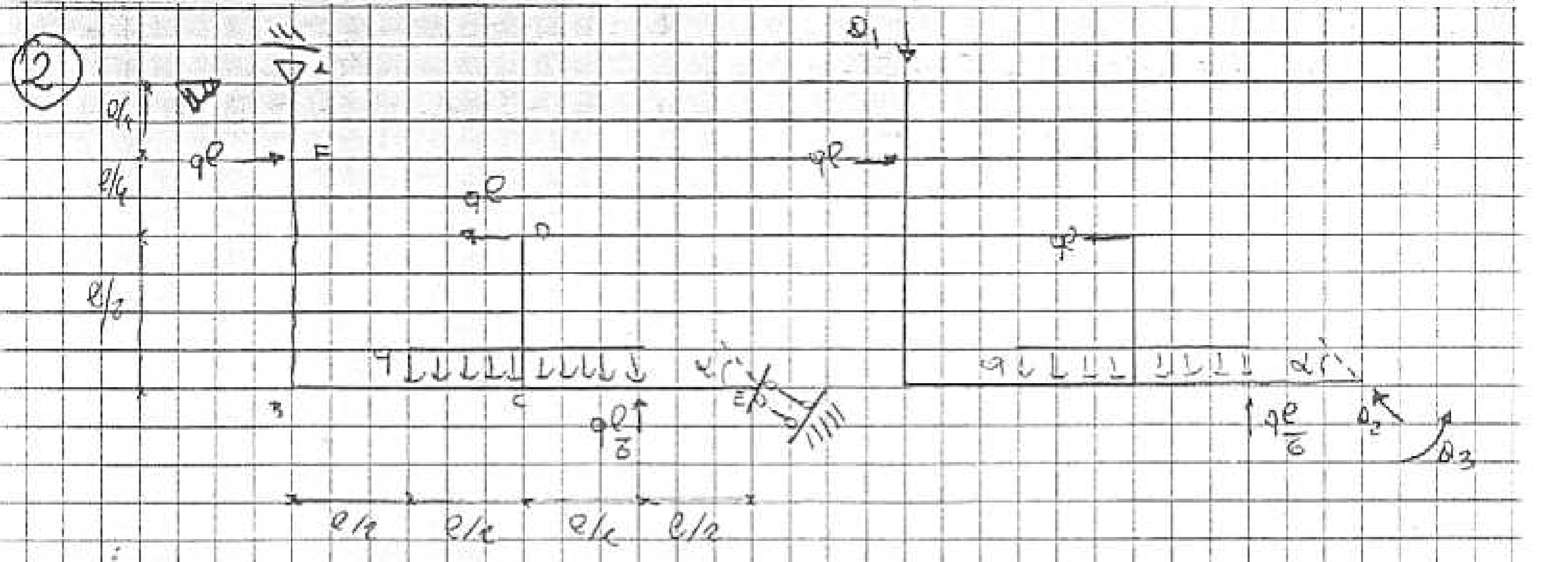
$$\checkmark \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ -Pd \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

minore $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \ell/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det M = (-1)\left(+\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\ell}{2} \neq 0$ √

$\Rightarrow \rho[B] = 3$ √ $\Rightarrow$ equilibrio IPERSTATICO

grado di iperstaticità $i = 1$ √

(2)



$s = 3$ ✓ SODDISFA LA CONDIZIONE NECESSARIA ALL'EQUILIBRIO

$$\begin{cases} q\ell - q\ell - \varnothing_2 \cos\alpha = 0 \\ -\varnothing_1 - q\ell + \frac{q\ell}{6} + \varnothing_2 \operatorname{sen}\alpha = 0 \\ \varnothing_1 2\ell - q\ell^2 \frac{3}{4} + q\ell^2 + q\frac{\ell^2}{2} - \frac{q\ell^2}{12} + \varnothing_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos\alpha & 0 \\ -1 & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 2\ell & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varnothing_1 \\ \varnothing_2 \\ \varnothing_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{6}q\ell \\ \frac{2}{3}q\ell^2 \end{Bmatrix} = \underline{0}$$

$$\det B = -\cos\alpha \begin{cases} \det B = 0 & \text{SE } \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \det B \neq 0 & \text{SE } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

SE $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \det B = 0 \Rightarrow \rho[B] = 2 \Rightarrow$ SIST LABILE ✓

VERIFICO LA MATRICE ORLATA

$$[B/\pi^a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \operatorname{sen}\alpha & 0 & -\frac{5}{6}q\ell \\ 2\ell & 0 & 1 & \frac{2}{3}q\ell^2 \end{bmatrix}$$

ABBIAMO UNA RIGA TUTTA NULLA

$\Rightarrow \rho[B/\pi^a] = 2$ ✓

PER IL TEOREMA DI ROUCHÉ CAPELLI $\rho[B] = 2 = \rho[B/\pi^a] \Rightarrow$

EQUILIBRIO IPERSTATICO PER LA PARTICOLARE CONDIZIONE DI CARICO

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -Q_1 + Q_2 \operatorname{sen}\alpha - \frac{5}{6} q\ell = 0 \\ Q_1 2\ell + \frac{2}{3} q\ell^2 + Q_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = Q_2 \operatorname{sen}\alpha - \frac{5}{6} q\ell \\ Q_3 = -2\ell Q_2 \operatorname{sen}\alpha + \frac{5}{3} q\ell^2 \end{cases}$$

NON RICHIESTO

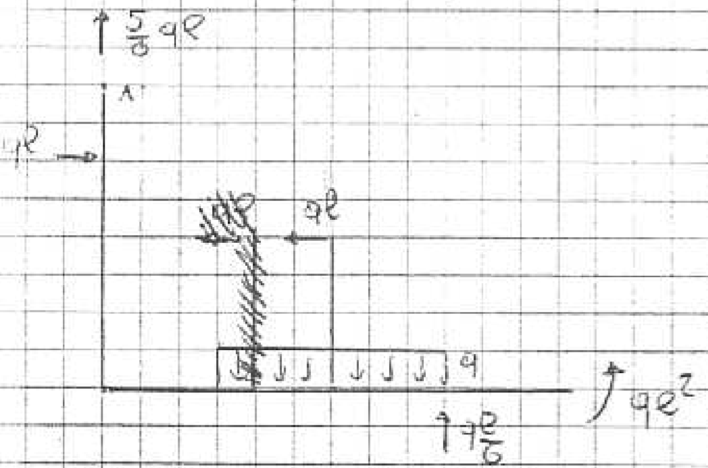
3 INCOGNITE E 2 EQUAZIONI $\Rightarrow \exists\ \infty^1$ SOLUZIONI ✓

• SE $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \det B \neq 0 \Rightarrow \rho[B] = 3 = \rho[B|x^0]$

PER TEOREMA DI ROUCHÉ CAPELLI $\Rightarrow \exists!$ SOLUZIONI, IL SISTEMA È IN <u>EQUILIBRIO ISOSTATICO</u> ✓

$$\begin{cases} Q_2 = 0 \\ Q_1 = -\frac{5}{6} q\ell \\ Q_3 = \frac{5}{3} q\ell^2 - \frac{2}{3} q\ell^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_2 = 0 \\ Q_1 = -\frac{5}{6} q\ell \\ Q_3 = q\ell^2 \end{cases} \checkmark$$

<u>ASSETTO STATICO</u> ✓



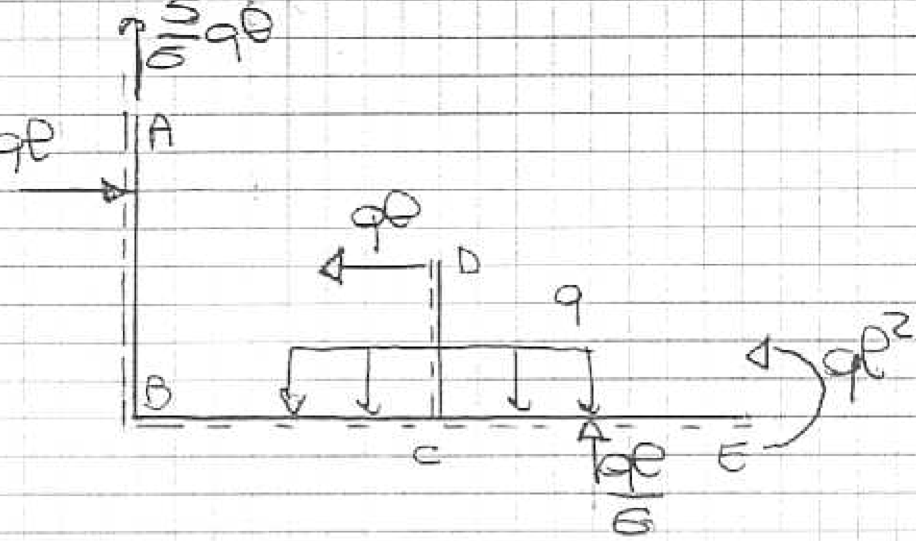
VERIFICA EQUILIBRIO

$$\checkmark \begin{cases} q\ell - q\ell = 0 \checkmark \\ \frac{5}{6} q\ell + \frac{q\ell}{6} - q\ell = 0 \checkmark \\ -\frac{q\ell^2}{4} - q\ell^2 + \frac{q\ell^2}{4} + q\ell^2 = 0 \checkmark \end{cases}$$

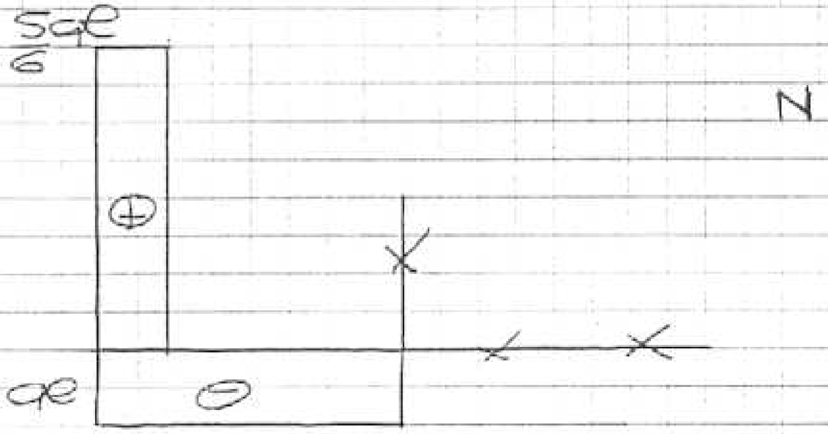
VERIFICA DIMENSIONALE ✓

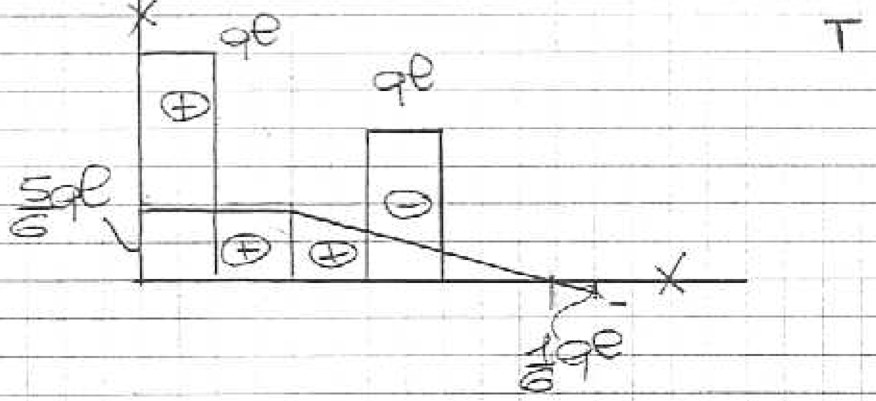
$$\begin{cases} \frac{[F]}{[L]}[L] = [F] \checkmark \\ [F] \checkmark \\ [F][L] \checkmark \end{cases}$$

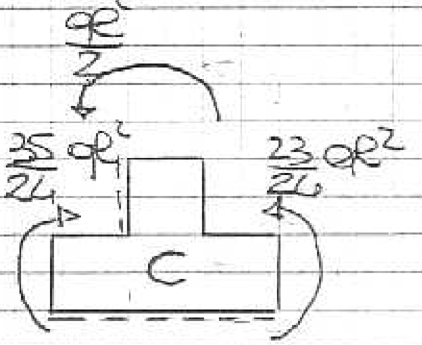
ASSETTO
STATICO



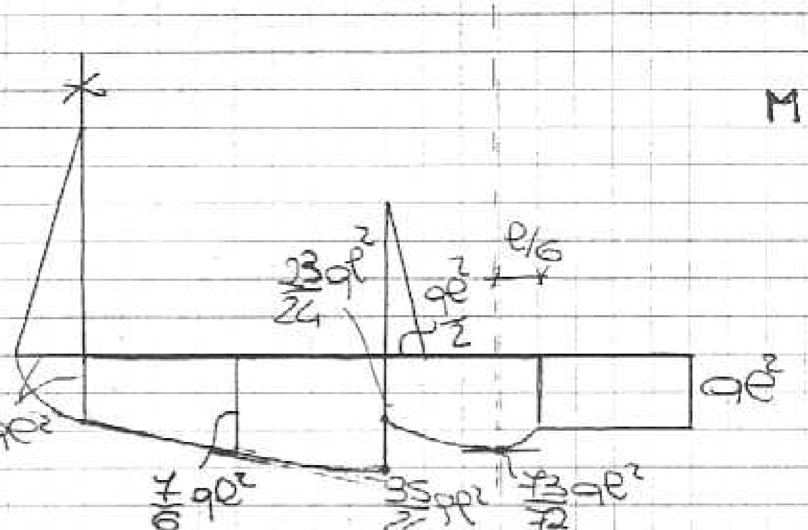
DIAGRAMMI





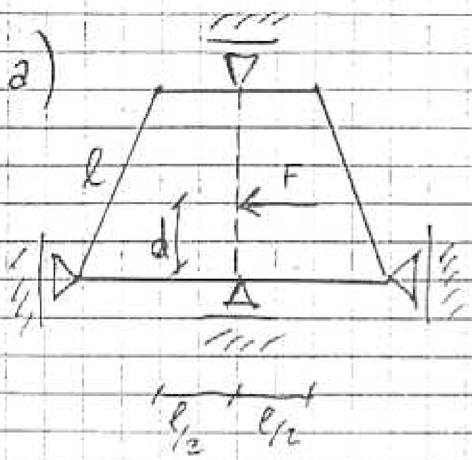


$$\left(\frac{23}{24}+\frac{1}{2}-\frac{35}{24}\right)q\ell^2=0$$



1)

a)

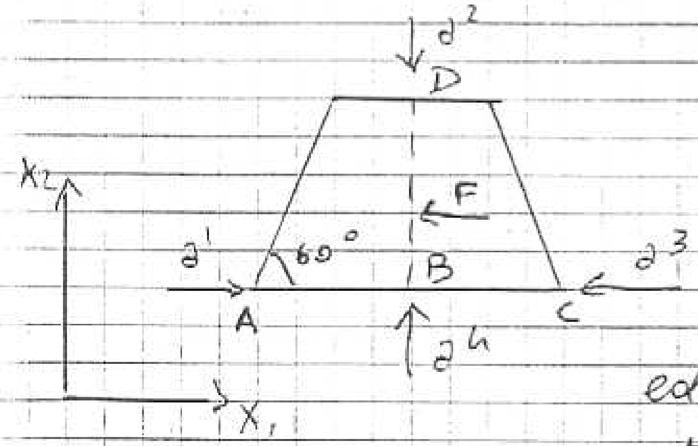


Il numero di vincoli s è uguale a 4:

$s \geq 3$

È rispettata la condizione necessaria per l'equilibrio statico.

Sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari:



Scriviamo le equazioni cardinali della statica, imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale, verticale ed alla rotazione nel generico punto B.

$$\begin{cases} a^1 - a^3 - F = 0 \\ a^4 - a^2 = 0 \\ Fd = 0 \end{cases}$$

Passando in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ Fd \end{Bmatrix}}_{r^a}$$

~~* le rette di azione delle~~

$\rho[B] = 2$ (al così), perché la terza riga è composta da tutti zeri. Quindi il sistema è LABILE (il che si nota ~~dal fatto che le* reazioni vincolari convergono nel punto B~~)

$\rho[B|r^a]$ ~~=3~~ ~~Infatti~~ 2

MINORE ORDINE 3

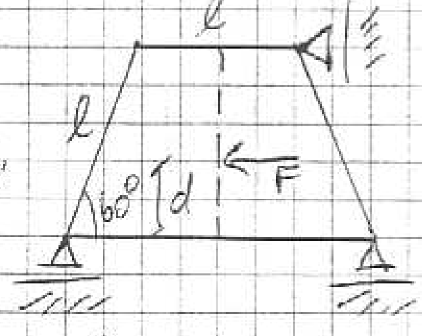
$$\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & -F\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & Fd\end{bmatrix} = -Fd \begin{cases} =0 & \text{se } d=0\\ \neq 0 & \text{se } d\neq 0\end{cases}$$

Nel caso $d=0$ $\rho[B|r^a]=2=\rho[B]$. Il sistema è quindi iperdeterminato con $i=4-2=2$. Esistono ∞^2 soluzioni (posso infatti trovare le reazioni vincolari in funzione di 2 incognite)

$$\begin{cases} a^1 = a^3 + F\\ a^4 = a^2\\ 0=0\end{cases}$$

Nel caso $d\neq 0$ $\rho[B|r^a]=3\neq\rho[B]$, quindi il sistema è impossibile.

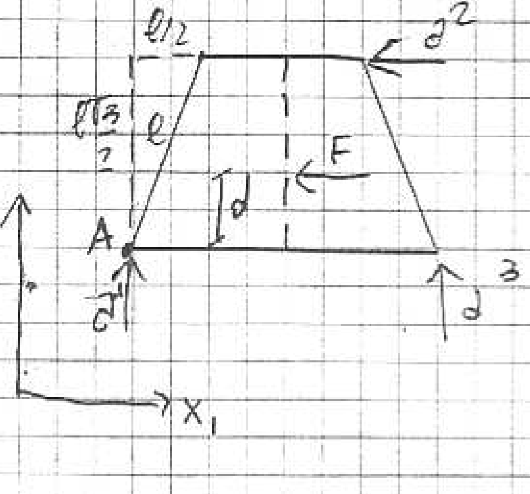
b)



$S=3 \Rightarrow S\geq 3$ edè rispettata la condizione necessaria per l'equilibrio.

Il numero di vincoli è sufficiente e sono ben disposti, il sistema può essere in equilibrio.

Procedo come al punto a:



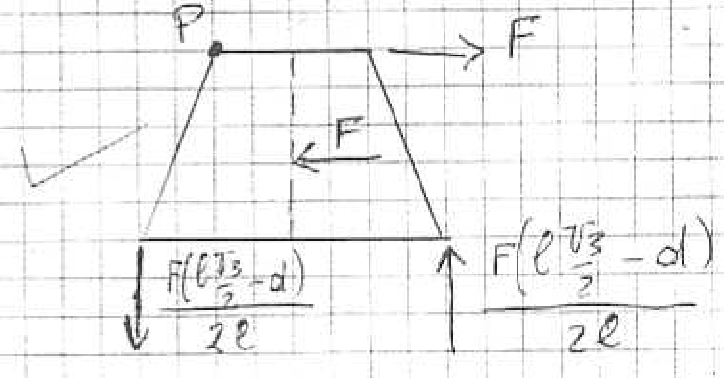
$$\begin{cases} -a^2 - F = 0\\ a^1 + a^3 = 0\\ (A)\quad a^3 2l + a^2 l\frac{\sqrt{3}}{2} + Fd = 0\end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ell\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\ell \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{Bmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \partial^3 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ Fd \end{Bmatrix}}_{r^d}$$

$\det[B] = 2\ell \neq 0 \Rightarrow \rho[B] = 3 \Rightarrow$ il sistema è isostatico e staticamente determinato ($\exists!$ la soluzione)

$$\begin{cases} \partial^2 = -F \\ \partial^1 = -\dfrac{F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)}{2\ell} \\ \partial^3 = \dfrac{F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)}{2\ell} \end{cases}$$

Assetto statico:



Verifiche dimensionali:

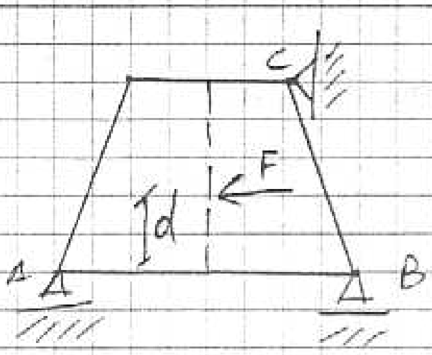
$[\partial^1] = [\partial^3] = [F] \cdot [\cancel{L}]^{+1} \cdot [\cancel{L}]^{-1}$ ok

$[\partial^2] = [F]$ ok

Verifica di equilibrio alla rotazione in un altro punto P:

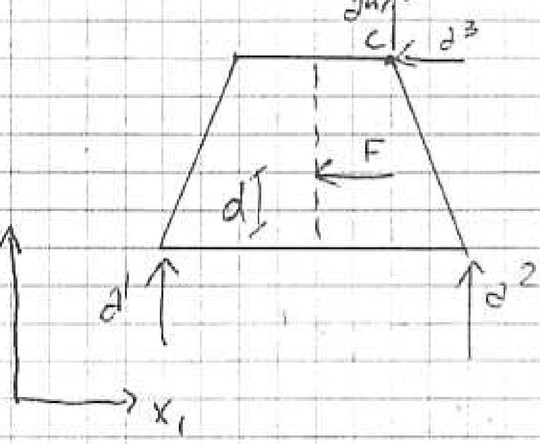
$$\begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ (P) \end{array} \begin{cases} F - F = 0 \quad \checkmark \\ \dfrac{F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)}{2\ell} - \dfrac{F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)}{2\ell} = 0 \quad \checkmark \\ -F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right) + \dfrac{F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)}{2\ell} \cdot \dfrac{\ell}{2} + \dfrac{F\left(\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right)}{2\ell} \cdot \dfrac{3}{2}\ell = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

c)



$s = 4 \Rightarrow s \geq 3$ quindi è nuovamente soddisfatta la c.m. per l'equilibrio

Procedendo come in a e b:



$$
(C)\begin{cases} -a^3 - F = 0 \\ a^1 + a^4 + a^2 = 0 \\ a^2 \frac{l}{2} - F\left(l\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right) - a^1 \frac{3}{2} l = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}l & \frac{l}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ -F\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - d\right) \end{Bmatrix}
$$

$$\det = -\frac{l}{2} \neq 0 \Rightarrow \rho[B] = 3$$

Il sistema è in equilibrio iperstatico con $i = \cancel{3}\ 1 \Rightarrow \infty^1$ soluzioni

Posso determinare le reazioni in funzione di un'incognita, ad esempio a^4:

$$
\begin{cases} a^3 = -F \\ a^1 = -\frac{a^4}{4} - \frac{2}{l} F\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - d\right) \cdot \frac{1}{2} \\ a^2 = \frac{2}{l}\left[F\left(l\frac{\sqrt{3}}{2} - d\right) + a^1 \frac{3}{2} l\right] \end{cases}
$$

NON RICHIESTO

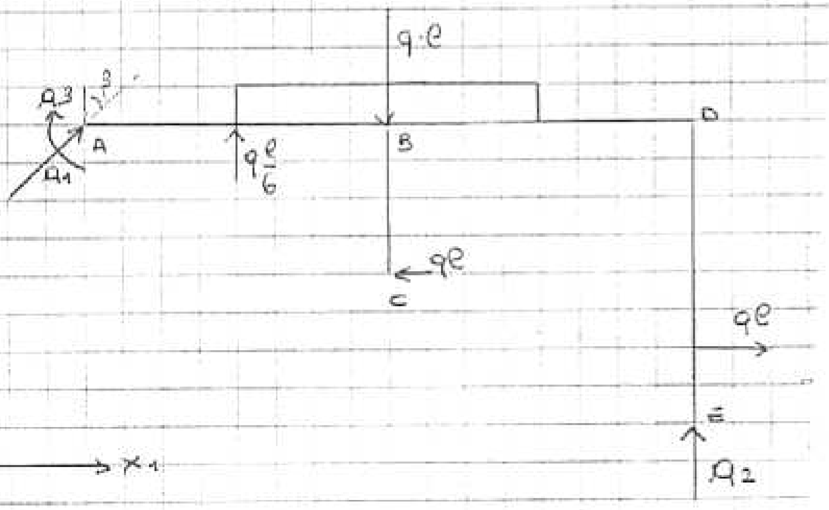
- PROBLEMA 2

1

Nella trave piana mostrata in figura compaiono 2 vincoli di cui uno semplice e uno doppio quindi $\Lambda = 3$

La condizione necessaria ma non sufficiente per l'equilibrio è soddisfatta.

Sostituisco ai vincoli le reazioni vincolari:



Equazioni cardinali della statica:

$$(A)\begin{cases} a_1 \sin\beta \cancel{- q\ell} \cancel{+ q\ell} = 0 \\ a_1 \cos\beta + q\frac{\ell}{6} + a_2 - q\ell = 0 \\ + q\frac{\ell}{6}\cdot\frac{\ell}{2} - q\ell\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}\right) - q\ell\cdot\frac{\ell}{2} + q\ell\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{4}\right) + a_2\cdot 2\ell - a_3 = 0 \end{cases}$$

impongo Σ delle forze secondo x_1 uguali a zero, Σ delle forze secondo x_2 uguale a zero, infine Σ dei momenti rispetto al polo A uguale a zero.

$$\begin{cases} a_1 \sin\beta = 0 \\ a_1 \cos\beta + a_2 - \frac{5}{6} q\ell = 0 \\ -a_3 + \frac{q\ell^2}{12} - q\ell^2 - \frac{q\ell^2}{2} + \frac{3q\ell^2}{4} + a_2\cdot 2\ell = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ -a_3 - \frac{2}{3} q\ell^2 + a_2 \cdot 2\ell = 0 \end{cases}$$

NON NECESSARIE LE SPIEGAZIONI

Scrivo il sistema in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sin\beta & 0 & 0 \\ \cos\beta & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2\ell & -1 \end{matrix}} \\ 0 & & \end{bmatrix}}_{B\,(3\times3)\quad M} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}}_{3\times1} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ -5/6\, q\ell \\ -2/3\, q\ell^2 \end{Bmatrix}}_{3\times1} = \underbrace{\underline{0}}_{3\times1}$$

Calcolo il determinante di B

$$\det[B] = \sin\beta\,(-1) = -\sin\beta$$

CASO 1

Se $\det[B]$ è $\neq 0$ se $\beta \neq 0, \pi, \ldots$

in tal caso $\rho[B] = 3$ quindi ci troviamo in un sistema staticamente isostatico cioè esiste unica la soluzione ed è possibile determinare le reazioni vincolari, mentre cinematicamente è isodeterminato.

CASO 2

Se $\det[B]$ è $= 0$ se $\beta = 0, \pi, \ldots$

in tal caso $\rho[B] = 2$ perché esiste un minore di ordine 2 in B con $\det \neq 0$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\ell & -1 \end{bmatrix}$

Allora cinematicamente il sistema è labile e staticamente bisogna verificare quanto vale $\rho[B|r^o]$.

Siccome la matrice risulta: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5/6\, q\ell \\ 0 & 2\ell & -1 & 2/3\, q\ell^2 \end{bmatrix}$

allora $\rho[B|r^o] = 2$ che è uguale a $\rho[B]$ per la particolare condizione di carico il sistema è staticamente indeterminato con ∞^1 soluzioni.

E le soluzioni risultano:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ a_1 = \frac{5}{6}q\ell - a_2 \\ a_3 = -\frac{2}{3}q\ell^2 + a_2 \cdot 2\ell \end{cases}$$

∞^1 soluzioni in funzione di a_2.

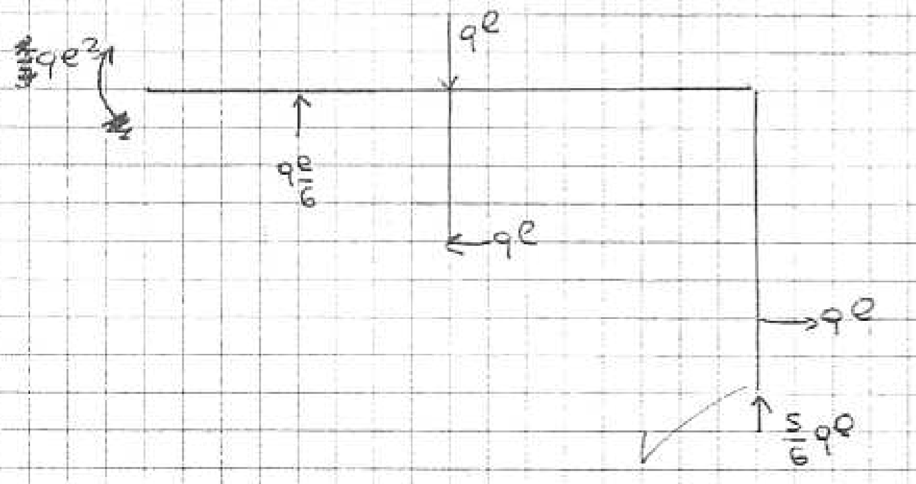
NON RICHIESTO

(2)

Per quanto riguarda il primo caso si possono calcolare le reazioni vincolari per ogni β diverso da 0, π ... e i loro multipli.

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{5}{6}q\ell \\ a_3 = \ldots q\ell^2 \end{cases}$$

Assetto statico



Verifiche dimensionali

$\frac{2}{3}q\ell^2$ MOMENTO

$\frac{[F]}{\cancel{[L]}} \cdot [L^2] = [F][L]$ ✓

$q\ell$, $q\frac{\ell}{6}$, $\frac{5}{6}q\ell$ FORZE

$\frac{[F]}{\cancel{[L]}} \cdot \cancel{[L]} = [F]$

✓

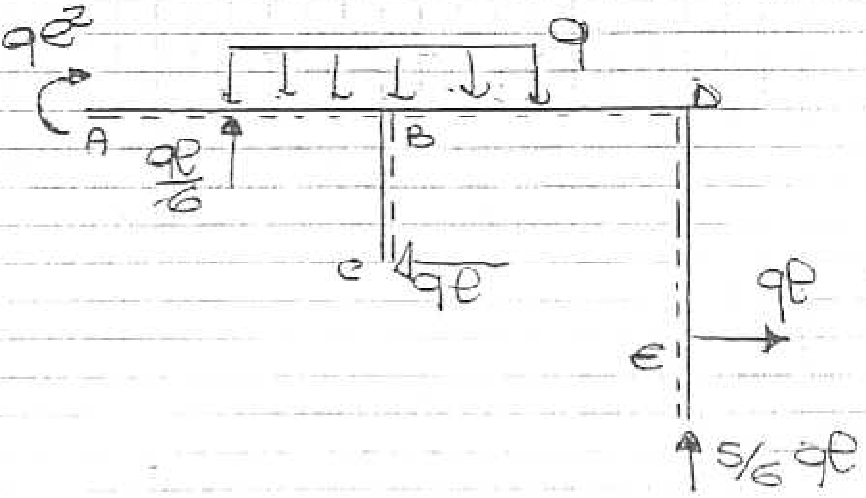
Verifico dell'equilibrio

$$\begin{cases} q\ell - q\ell = 0 \quad ✓ \\ q\frac{\ell}{6} + \frac{5}{6}q\ell - q\ell = 0 \quad ✓ \\ -\frac{2}{3}q\ell^2 - q\frac{\ell}{6}\cdot\frac{\ell}{2} - q\ell\cdot\frac{\ell}{2} + q\ell\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{4}\right) + \frac{5}{6}q\ell\cdot\ell = 0 \quad (B) \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}q\ell^2 - \frac{1}{12}q\ell^2 - \frac{1}{2}q\ell^2 + \frac{3}{4}q\ell^2 + \frac{5}{6}q\ell^2 = 0$$

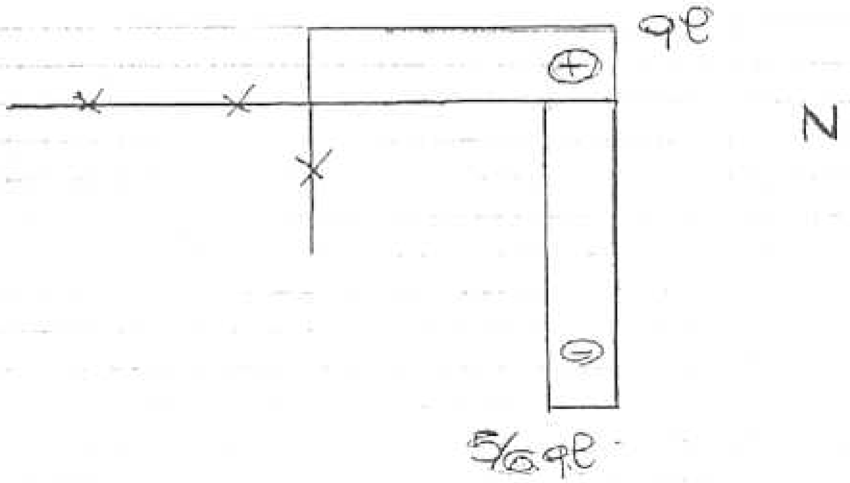
$$q\ell^2 \frac{\cancel{8} - 1\cancel{2} - 6 + 9 \cancel{+} 10 - 1}{12} = 0 \quad ✓$$

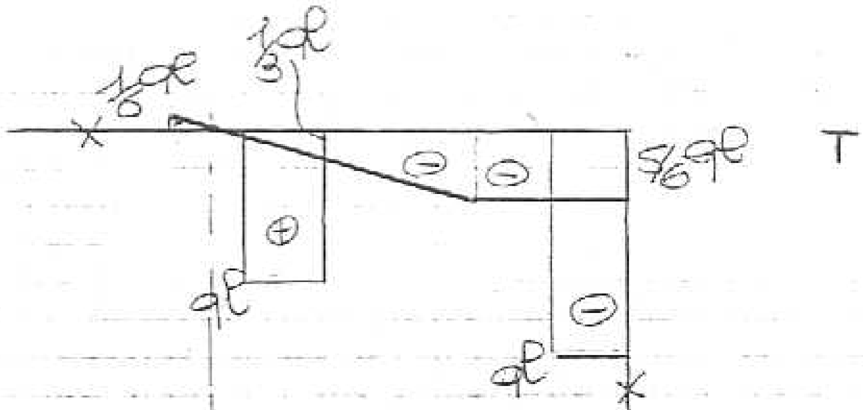
$$0 = 0$$

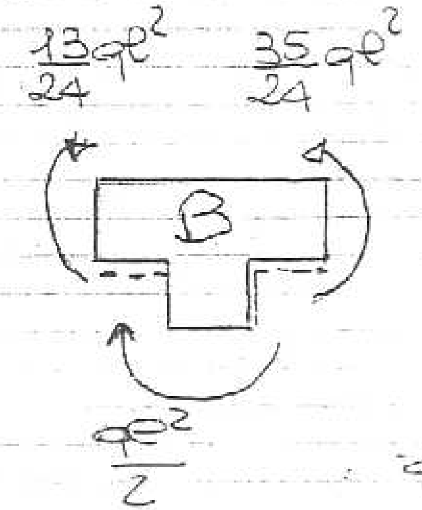


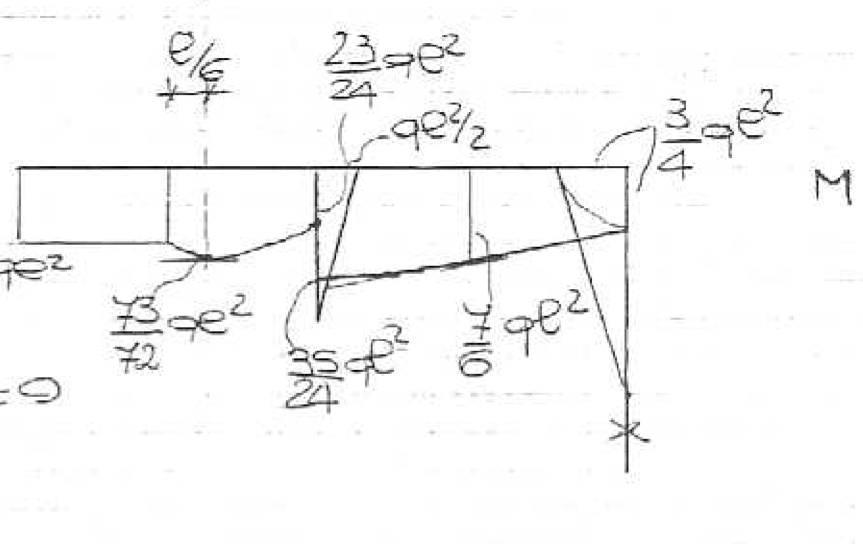
ASSETTO STATICO

DIAGRAMMI









$$\left(\frac{13}{24} + \frac{1}{2} - \frac{35}{24}\right) q\ell^2 = 0$$

✓