

# Dispense del corso di Idrodinamica

a.a. 2013-2014

# Contents

<b>1</b>	<b>LO SCHEMA DI CONTINUO</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>FORZE AGENTI SU UN CONTINUO (FLUIDO)</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>FLUIDI IN QUIETE</b>	<b>14</b>
3.1	L'EQUAZIONE INTEGRALE DELLA STATICA . . . . .	15
3.2	L'EQUAZIONE PUNTUALE DELLA STATICA . . . . .	15
3.3	FLUIDI IN QUIETE RISPETTO A UN SISTEMA DI RIFER- IMENTO NON INERZIALE . . . . .	17
<b>4</b>	<b>FLUIDI IN QUIETE: LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN FLUIDO A DENSITA COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE</b>	<b>18</b>
4.1	Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale .	18
4.2	Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale	22
<b>5</b>	<b>L'EQUAZIONE DI STATO</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN GAS PER- FETTO A TEMPERATURA COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>FENOMENI DI INTERFACCIA</b>	<b>31</b>
<b>8</b>	<b>LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SU- PERFICIE PIANA</b>	<b>35</b>
8.1	Spinta su una superficie piana soggetta a un campo di pres- sione costante . . . . .	35
8.2	Spinta su una superficie piana soggetta all'azione di un fluido con densità costante . . . . .	36

<i>CONTENTS</i>	3
9 LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE GOBBA	51
10 LA TENSIONE IN UN FLUIDO IN MOVIMENTO	58
11 ANALISI DIMENSIONALE E TEOREMA DI BUCKINGHAM	61
12 SIMILITUDINE E MODELLI	68
13 DESCRIZIONE DEL MOTO DEI FLUIDI	72
14 I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI	79
15 LE CORRENTI FLUIDE	87
16 IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER UNA CORRENTE: L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'	92
17 IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO: L'EQUAZIONE DEL MOTO	96
18 LA VALUTAZIONE DI $j$	100
19 ALCUNI PROBLEMI RELATIVI A CONDOTTE A SEZIONE CIRCOLARE	104
20 PERDITE CONCENTRATE DI CARICO DOVUTE A UN BRUSCO ALLARGAMENTO (PERDITE DI BORDA)	109
21 PERDITE CONCENTRATE DI CARICO IN UN IMPIANTO	112
22 PROBLEMI RELATIVI AD ALCUNI SEMPLICI IMPIANTI	116
23 TEOREMA DI BERNOULLI PER LE CORRENTI	125
24 FLUIDI IDEALI E TEOREMA DI BERNOULLI	130
25 TEORIA DELLE TURBINE PELTON	138
26 LO STRATO LIMITE	143

## Introduzione

I corsi di Meccanica dei Fluidi, Idraulica, Idrodinamica intendono fornire agli studenti di diversi corsi di laurea le basi per lo studio della dinamica dei fluidi, cioè gli strumenti utili per la descrizione del moto dei fluidi e per la predizione del loro movimento conoscendo le forze esercitate su di essi. I corsi citati hanno in comune i principi fondamentali e le equazioni di base, differenziandosi per i problemi particolari analizzati in dettaglio.

Queste note hanno lo scopo di accompagnare lo studente durante i corsi di Idraulica 1 e Idrodinamica 1 offerti rispettivamente agli allievi dei corsi di laurea (di 1° livello) in ingegneria civile e ambientale e ingegneria navale della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova. Esse sono altresì utilizzate, tutte o in parte per i corsi di Meccanica dei fluidi 1 (CL3 in Ingegneria Chimica).

La forma di queste note é sintetica. In esse vengono riassunti i contenuti fondamentali delle lezioni svolte, cercando di seguire, per quanto possibile, la loro cronologia. Esse devono essere intese come un ausilio alla preparazione dell'esame che presuppone la frequenza al corso e un approfondimento dei temi trattati su testi facilmente reperibili nella biblioteca della Facoltà e in quella del Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni dell'Ambiente e del Territorio.

# Chapter 1

## LO SCHEMA DI CONTINUO

I fluidi, come tutta la materia, hanno una struttura discontinua essendo formati da molecole (insieme di atomi) poste a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni e animate da elevate velocità relative. In un punto arbitrario dello spazio non è quindi possibile definire con precisione le proprietà di un fluido (della materia) perché in tale punto potrebbe non esserci fluido (materia) o potrebbe trovarsi una particolare molecola dotata di una sua massa, di una sua velocità ....

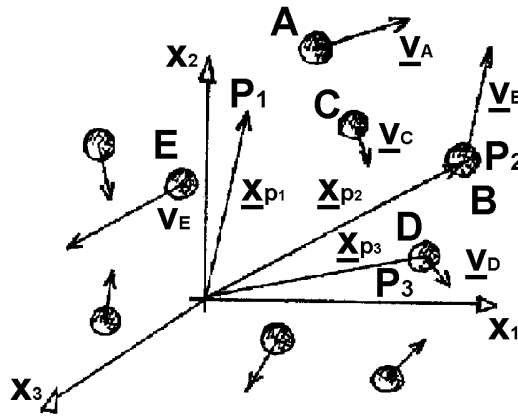


Figure 1.1:

Esempio:

Nel punto  $P_1$ , individuato dal vettore posizione  $\underline{x}_{P_1}$  <sup>(1)</sup> non è possibile definire alcuna velocità non essendo presente alcuna molecola. Nel punto  $P_2$ ,

---

<sup>(1)</sup>Una lettera in grassetto indica un vettore, una grandezza cioè individuata da un modulo, una direzione e un verso. Quindi  $\underline{v}$  indica un vettore le cui componenti, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano costituito dagli assi  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , sono rispettivamente  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ .

occupato all'istante in esame dalla particella B, possiamo definire la velocità  $\mathbf{v}_B$  che tuttavia é molto diversa dalla velocità  $\mathbf{v}_D$  presente nel punto  $P_3$  ove transita la particella D.

Ciò che avviene a livello molecolare non é però di nostro interesse. E' possibile prescindere da questo carattere discontinuo della materia, se si prende in considerazione un volume che contiene un numero elevato di molecole e si definiscono delle grandezze medie. Ad esempio possiamo definire la densità  $\rho_1$  associata al volume  $V_1$  come il rapporto fra la massa  $M_1$  in esso contenuta e il volume stesso.

$$\rho_1 = \frac{M_1}{V_1}$$

Similmente possiamo definire

$$\rho_2 = \frac{M_2}{V_2}$$

e in generale

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

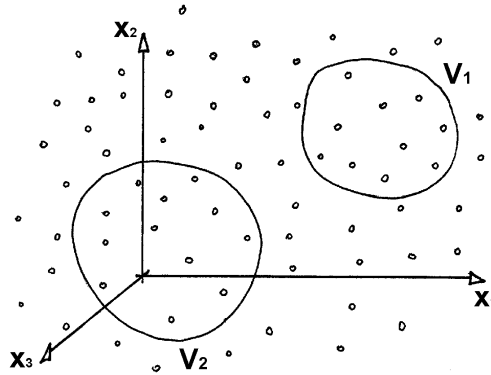


Figure 1.2:

### 1.0.1 La densità in un punto

Consideriamo un punto P nello spazio individuato dal vettore posizione  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e un volume  $\Delta V'$  che racchiude il punto P. Procedendo come prima possiamo associare al volume  $\Delta V'$  una densità  $\rho_{\Delta V'}$ :

$$\rho_{\Delta V'} = \frac{\Delta M'}{\Delta V'}$$

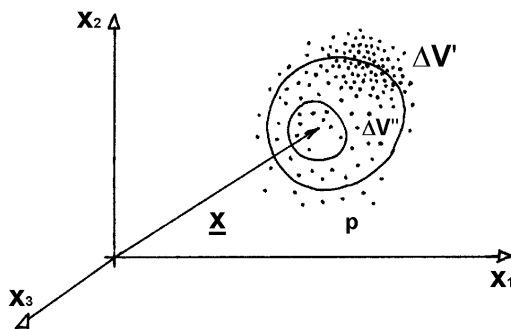


Figure 1.3:

Scegliendo un altro volume  $\Delta V''$  otterremo un valore della densità diverso:  $\rho''_{\Delta V''}$ . La densità  $\rho$  nel punto individuato dal vettore  $\mathbf{x}$  è definita come il limite di  $\rho_{\Delta V}$  per  $\Delta V$  tendente a valori piccoli ( $\epsilon$ ).

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

La dimensione del volume  $\epsilon$  deve essere piccola rispetto alle dimensioni di interesse ma comunque molto maggiore della distanza media fra molecole. L'andamento di  $\rho$  in funzione di  $\Delta V$  è rappresentato in figura 1.4 ove  $d$  rappresenta la distanza media fra le molecole.

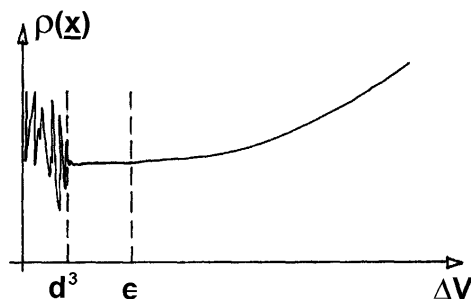


Figure 1.4:

La densità dei fluidi varia con la temperatura e la pressione a cui sono sottoposti. Tale variazione è consistente per i gas ma piuttosto debole per i liquidi. Se la densità di un fluido non dipende dalla pressione e dalla temperatura, il fluido è detto **incomprimibile** (e indilatabile). Come si vedrà nel capitolo 5, i liquidi, se sottoposti a variazioni di pressione e di temperatura modeste, possono essere trattati come fluidi incomprimibili. Le dimensioni

(2) della densità sono quelle di una massa divisa per un volume

$$[\rho] = ML^{-3}$$

e l'unità di misura nel sistema internazionale è il Kg/m<sup>3</sup>. La densità di alcuni fluidi è riportata in una nota relativa al capitolo 5.

In modo analogo a quanto fatto per la densità, possiamo definire qualunque altra grandezza  $F$  di interesse, che risulterà una funzione continua della variabile  $\mathbf{x}$  (funzione continua dello spazio). In questo modo il fluido (materia) assume una struttura “continua”. Considerando che le caratteristiche del fluido (materia) dipendono anche dal tempo, in generale avremo:

$$F = F(\mathbf{x}, t) = F(x_1, x_2, x_3, t)$$

con

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}_0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t_0)$$

essendo  $F$  una qualunque proprietà.

---

(2) Come si vedrà meglio nel capitolo 11, la dimensione di una grandezza fisica è l'entità che accomuna tutte le grandezze che hanno la stessa natura. Ad esempio, se si considerano il diametro di una sfera, la lunghezza di un corso d'acqua e la lunghezza di un condotto, tutte queste quantità hanno in comune la dimensione lunghezza (L). In meccanica dei fluidi si utilizzano tre dimensioni fondamentali di base, atte cioè a descrivere le dimensioni di tutte le altre grandezze: M (massa), L (lunghezza) e T (tempo)



## Chapter 2

# FORZE AGENTI SU UN CONTINUO (FLUIDO)

Le molecole che costituiscono la materia esercitano delle forze sulle molecole circostanti che vengono suddivise in due categorie:

- 1) forze a corto raggio
- 2) forze a lungo raggio

Le prime (forze a corto raggio) assumono valori significativi solo quando le molecole si trovano a distanza dell'ordine delle loro dimensioni. Le seconde (forze a lungo raggio) decadono molto lentamente e rimangono significative anche quando le molecole sono a distanze rilevanti, cioè molto maggiori delle loro dimensioni.

Utilizzando lo schema di continuo illustrato nella capitolo 1, si tiene conto delle osservazioni sperimentali precedenti, introducendo due categorie di forze:

- 1) forze di superficie
- 2) forze di massa

Le prime (forze di superficie) sono proporzionali alla superficie considerata e sono il risultato delle forze molecolari di corto raggio. Le seconde (forze di massa) sono invece proporzionali alla massa presa in considerazione e sono il risultato delle forze molecolari di lungo raggio.

Consideriamo un volume  $V$  di un continuo (fluido) e una sua parte  $V'$ . Denotiamo rispettivamente con  $S$  e  $S'$  le superfici che delimitano  $V$  e  $V'$ .

Attraverso una porzione piccola  $dS'$  (a rigori infinitesima), di normale  $\mathbf{n}$ , della superficie  $S'$ , il continuo (fluido) all'esterno  $S'$  di esercita una forza  $d\mathbf{F}$  (anch'essa piccola e a rigori infinitesima) sul continuo (fluido) all'interno. Se raddoppiamo  $dS'$  la forza raddoppierà. Come detto precedentemente la forza

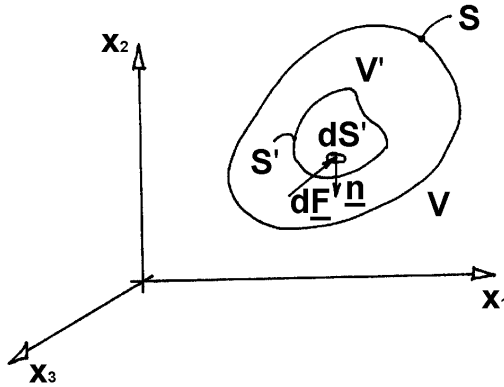


Figure 2.1:

é proporzionale alla superficie. Avremo quindi

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}dS$$

La quantità vettoriale  $\mathbf{t}$  si dice tensione.

Le dimensioni della tensione  $\mathbf{t}$  sono quelle di una forza divisa per una superficie

$$\mathbf{t} = ML^{-1}T^{-2}$$

L'unità di misura é il  $\text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$  <sup>(1)</sup> o anche il  $(\text{Kg m s}^{-2})\text{m}^{-2} = \text{Nm}^{-2}$  denominata anche **pascal** (Pa). Nell'ingegneria vengono ancor oggi utilizzate unità di misura diverse. In particolare:

- il chilogrammo forza su metro quadro

$$1\text{Kg}_f/\text{m}^2 = 9.81\text{N}/\text{m}^2 = 9.81\text{Pa}$$

- un'atmosfera normale

$$1\text{Atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

- un bar

$$1\text{bar} = 10^5 \text{Pa}$$

---

<sup>(1)</sup>Kg indica il chilogrammo massa  
 m indica il metro  
 s indica il secondo  
 N indica il newton

La tensione  $\mathbf{t}$  in generale dipende dalla posizione  $\mathbf{x}$  della superficie infinitesima  $dS'$ , dal tempo  $t$  (non confondere  $\mathbf{t}$ =tensione con  $t$ =tempo) e dalla normale  $\mathbf{n}$ . In uno stesso punto e allo stesso tempo due superfici infinitesime di ugual area  $dS'$  e diversa normale  $\mathbf{n}$  saranno caratterizzate da valori diversi della tensione.

$$d\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{t}^{(1)} dS'$$

$$d\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{t}^{(2)} dS''$$

si ha quindi

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$$

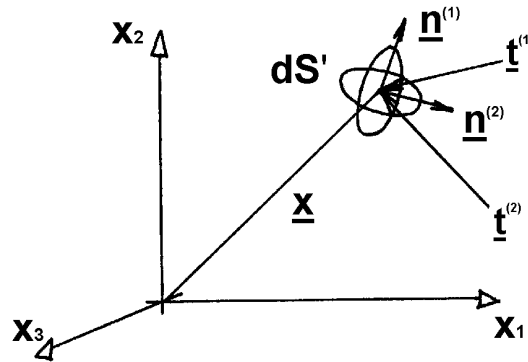


Figure 2.2:

La forza  $d\mathbf{F} = \mathbf{t}dS'$  descrive completamente l'azione che il continuo (fluido) all'esterno di  $V$  esercita su quello all'interno attraverso la superficie  $dS'$  (ASSIOMA DI CAUCHY). Volendo determinare la forza complessiva (risultante) che il continuo (fluido) all'esterno di  $S'$  esercita su quello all'interno é necessario:

- 1) suddividere la superficie  $S'$  in parti infinitesime  $dS'$
- 2) valutare su ciascuna parte la forza infinitesima  $d\mathbf{F}$  esercitata dall'esterno:  
 $d\mathbf{F} = \mathbf{t}dS'$

3) sommare tutti i contributi individuati

$$\mathbf{F} = \int_{S'} \mathbf{t}dS'$$

L'azione che il continuo contenuto in  $V$  esercita su quello posto esternamente, é pari a  $-\mathbf{F}$ .

La forza  $\mathbf{F} = \int_{S'} \mathbf{t} dS'$  rappresenta l'azione del continuo (fluido) all'esterno di  $V'$  (ma nelle immediate vicinanze di  $S'$ ) sul continuo all'interno. Tuttavia altra materia esiste anche a distanze elevate (molto maggiori delle dimensioni di  $V'$ ) e tali da non consentirne la rappresentazione nella figura.

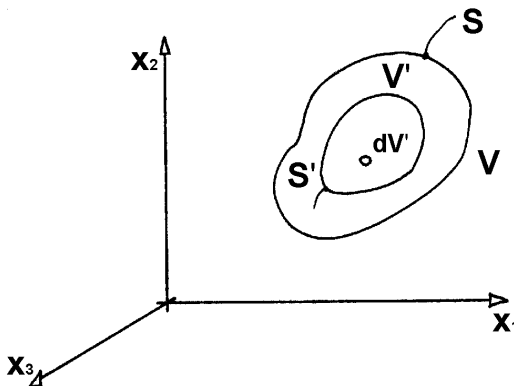


Figure 2.3:

Considerando una porzione piccola  $dV'$  (a rigori infinitesima) del volume  $V'$ , si assume che la materia molto distante da  $dV'$  e non rappresentata in figura eserciti una forza  $d\mathbf{G}$  sul continuo contenuto in  $dV'$  proporzionale alla sua massa. Se raddoppiamo  $dV'$  e quindi la massa in considerazione, la forza raddoppierà. Come detto precedentemente la forza è proporzionale alla massa. Per quanto illustrato nel capitolo 1, la massa  $dM$  contenuta in  $dV'$  è esprimibile come

$$dM = \rho dV'$$

avremo quindi

$$d\mathbf{G} = \mathbf{f} \rho dV'$$

La quantità vettoriale  $\mathbf{f}$  è detta campo di forze.

Le dimensioni del campo di forze  $\mathbf{f}$  sono quelle di una forza divisa per una massa cioè quelle di un'accelerazione.

$$[\mathbf{f}] = LT^{-2}$$

L'unità di misura di  $\mathbf{f}$  è il  $m s^{-2}$ . Il campo di forze  $\mathbf{f}$  in generale dipende dalla posizione  $\mathbf{x}$  e dal tempo  $t$  (non confondere  $\mathbf{t}$  con  $t$ ).

Volendo determinare la forza complessiva (risultante) che la materia lontana da  $V'$  esercita sul continuo (fluido) in esso contenuto é necessario:

1) suddividere il volume  $V'$  in parti infinitesime  $dV'$

2) valutare su ciascuna parte la forza infinitesima  $d\mathbf{G}$ <sup>(2)</sup> esercita dall'esterno

$$d\mathbf{G} = \mathbf{f}\rho dV'$$

3) sommare tutti i contributi individuati

$$d\mathbf{G} = \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'$$

---

<sup>(2)</sup>Benché possano essere considerati diversi campi di forze, il campo di forze che verrà preso in considerazione nel corso é il campo di forze gravitazionale ( $\mathbf{f}=\mathbf{g}$ ). Il vettore  $\mathbf{g}$  é diretto verticalmente verso il basso e ha un valore che é lecito assumere costante e pari a  $9.81 \text{ ms}^{-2}$ .

# Chapter 3

## FLUIDI IN QUIETE

Come illustrato nel Capitolo 2, la tensione  $\underline{t}$  all'interno di un continuo (fluido) dipende non solo dalla posizione individuata dal vettore  $\underline{x}$  e dal tempo  $t$  (non confondere  $\underline{t}$  con  $t$ ) ma anche dall'orientamento della superficie infinitesima  $dS'$  presa in esame.

In generale

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$$

• Nei fluidi in quiete, tuttavia, la tensione assume una forma particolarmente semplice (ASSIOMA DI EULERO). In particolare  $\underline{t}$  risulta sempre ortogonale alla superficie in considerazione e diretta verso la superficie.

$$\underline{t} = -p\underline{n}.$$

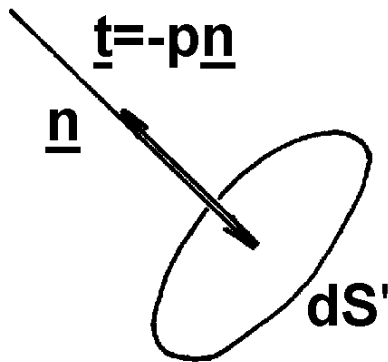


Figure 3.1:

La quantità scalare  $p$  si dice **pressione**.

- Le dimensioni della pressione sono uguali a quelle della tensione ( $[p]=ML^{-1}T^{-2}$ ) così come le unità di misura (si ricordi che la normale é adimensionale).

- La pressione  $p$  in generale dipende dalla posizione  $\mathbf{x}$  e dal tempo  $t$  (non confondere  $\mathbf{t}$  con  $t$ )

$$p = p(\mathbf{x}, t)$$

### 3.1 L'EQUAZIONE INTEGRALE DELLA STATICA

Consideriamo un volume di fluido  $V$  e una sua porzione arbitraria  $V'$ . Per il principio della quantità di moto (la derivata della quantità di moto di una massa in movimento rispetto al tempo é uguale alla risultante delle forze esercitate sulla massa dall'esterno), la risultante delle forze che l'esterno esercita su  $V'$  deve annullarsi. Infatti in un fluido in quiete la quantità di moto é sempre nulla, essendo nulla la velocità. Per quanto esposto nel capitolo 2, la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze esercitate dall'esterno su  $V'$  sará

$$\mathbf{R} = \int_{S'} \mathbf{t} dS' + \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'$$

o, tenendo conto che  $\mathbf{t} = -p \mathbf{n}$

$$\mathbf{R} = - \int_{S'} p \mathbf{n} dS' + \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'$$

Deve quindi risultare

$$\mathbf{R} = 0 \quad \text{oppure} \quad \int_{S'} p \mathbf{n} dS' = \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'$$

L'equazione precedente é detta **equazione integrale della statica** e deve valere qualunque volume  $V'$ .

### 3.2 L'EQUAZIONE PUNTUALE DELLA STATICA

L'equazione della statica in forma integrale puó essere trasformata utiliz-

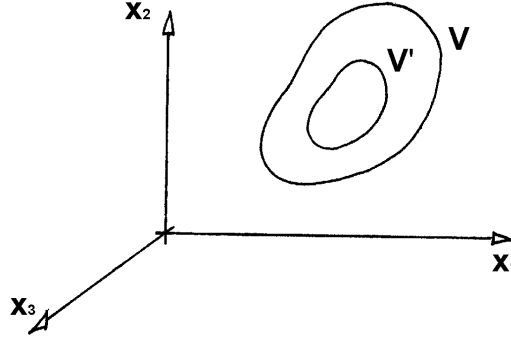


Figure 3.2:

zando il teorema del gradiente <sup>(1)</sup> che porge

$$\int_{S'} (p\mathbf{n})dS' = \int_{V'} \nabla p dV'$$

si ottiene quindi

$$\int_{V'} (\nabla p - \rho\mathbf{f})dV' = 0$$

Considerando che l'equazione della statica in forma integrale vale qualunque porzione  $V'$  di  $V$  si consideri, l'equazione precedente può essere soddisfatta solo se si annulla la funzione integranda; se cioè

$$\nabla p = \rho\mathbf{f}$$

L'equazione precedente, detta **equazione puntuale della statica**, é un'equazione vettoriale che corrisponde a tre equazioni scalari

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho f_1; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho f_2; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho f_3.$$

---

<sup>(1)</sup>Questo risultato segue banalmente osservando che  $p\mathbf{n} = p\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$  (dove  $\mathbf{I}$  é la matrice identità) e applicando il teorema di Gauss (detto anche teorema della divergenza)

$$\int_S (p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}dS = \int_V \nabla \cdot (p\mathbf{I})dV = \int_V \nabla p dV$$



Essa descrive come cambia nello spazio la pressione  $p$ . Tale equazione può essere integrata una volta noto il campo di forze  $\mathbf{f}$  e l'equazione di stato che lega la densità allo stato del fluido.

### 3.3 FLUIDI IN QUIETE RISPETTO A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE

Si considerino due sistemi di riferimento. Il primo sistema di riferimento  $(O, x, y, z)$  è inerziale mentre il secondo sistema di riferimento  $(O', x', y', z')$  non è inerziale, trasla con velocità  $\mathbf{U}$  e ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$  rispetto al primo. L'accelerazione di una particella fluida nel sistema di riferimento inerziale è legata all'accelerazione misurata nel sistema non inerziale dalla relazione seguente:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}')$$

dove le quantità relative al sistema di riferimento non inerziale sono state denotate con un apice. Se la particella fluida è in quiete rispetto al sistema di riferimento non inerziale, le quantità  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{u}'$  risultano nulle ma le equazioni della statica, scritte nel sistema di riferimento non inerziale, risulteranno differenti da quelle viste precedentemente, che sono valide per un fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale. In particolare l'equazione integrale della statica risulterà:

$$\int_{S'} p \mathbf{n} dS' = \int_{V'} \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) dV'$$

mentre l'equazione puntuale della statica da utilizzare è:

$$\nabla p = \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a})$$

dove:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}')$$

Nel capitolo 4 è presentato il calcolo della distribuzione della pressione in un fluido a densità costante quando il fluido è in quiete rispetto a due particolari sistemi di riferimento non inerziali.

## Chapter 4

# FLUIDI IN QUIETE: LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN FLUIDO A DENSITA COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE

In molte circostanze, discusse nel capitolo 5, la densità di un fluido può essere considerata costante. Qualora il campo di forze sia quello gravitazionale, è possibile integrare facilmente l'equazione puntuale della statica e ottenere la distribuzione spaziale della pressione.

### 4.1 Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale

Consideriamo il fluido, all'interno del contenitore in figura 4.1, supposto di densità costante  $\rho$ . Il campo di forze sia quello gravitazionale e l'accelerazione sia diretta verticalmente verso il basso. L'equazione puntuale della statica porge

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

e impone quindi che la pressione non dipenda né da  $x_1$  né da  $x_3$ : la pressione è costante su un piano orizzontale.

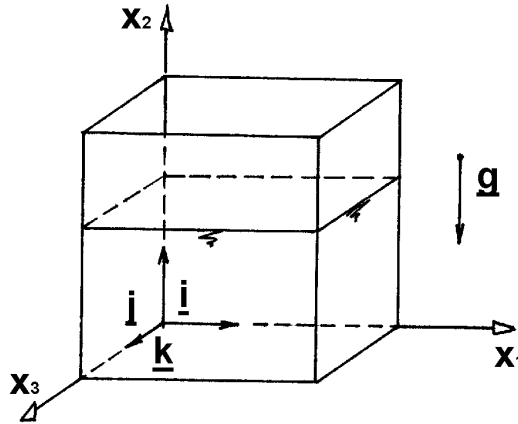


Figure 4.1:

La seconda equazione si trasforma in un'equazione alle derivate ordinarie che può essere facilmente integrata

$$\frac{dp}{dx_2} = -\rho g \implies p = -\rho g x_2 + c_1 = -\gamma x_2 + c_1$$

La pressione aumenta linearmente all'aumentare della profondità. Il valore della costante  $c_1$  può essere determinato solo se è nota la pressione in un punto. Il prodotto  $\gamma = \rho g$  è detto peso specifico e le sue dimensioni sono quelle di una forza divisa per un volume

$$[\gamma] = ML^{-3}LT^{-2} = ML^{-2}T^{-2}$$

L'unità di misura è il  $N\ m^{-3}$ . Nell'ingegneria viene talvolta utilizzato il chilogrammo forza su metro cubo.

$$1Kg_fm^{-3} = 9.81Nm^{-3}$$

Con riferimento agli assi in figura 4.2, denotiamo con  $p_0$  la pressione nel piano che risulta essere l'interfaccia fra due fluidi. Non consideriamo per il momento il fluido sovrastante, che possiamo pensare essere aria, e focalizziamo l'attenzione su quello sottostante di peso specifico  $\gamma$ . Al fine di analizzare un caso reale possiamo pensare quest'ultimo come acqua. Si ha dunque

$$p = p_0 - \gamma z$$

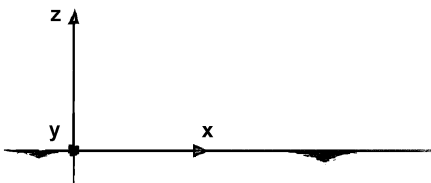


Figure 4.2:

Essendo  $\rho$ <sup>(1)</sup> pari a  $1000 \text{ Kg/m}^3$  ed essendo  $p_0$  pari alla pressione atmosferica cioè circa  $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , l'andamento della pressione é quello riportato in figura 4.3. La pressione raddoppia ad una profondità di circa 10m mentre diviene  $3 p_0$  a una profondità di circa 20m e così via. Dal grafico risulta evidente quanto già detto in precedenza e sintetizzato dalla formula: la pressione aumenta in modo lineare con la profondità. **La distribuzione della pressione in un fluido incompressibile in quiete é idrostatica.**

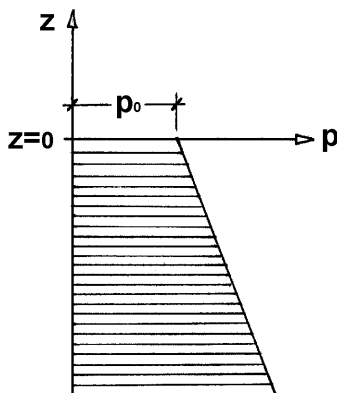


Figure 4.3:

Per motivi che saranno chiari nel seguito, introduciamo la quantità

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

---

<sup>(1)</sup>La densità  $\rho$  dell'acqua, che in generale dipende dalla pressione e dalla temperatura (vedi capitolo 5), in molti casi può essere assunta costante e pari a  $1000 \text{ Kg/m}^3$ . Il peso specifico  $\gamma$  risulta quindi pari a  $9810 \text{ N/m}^3$ . Talvolta  $\gamma$  viene espresso in chilogrammi forza su metro cubo. In questo caso si ha  $\gamma = 1000 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$ .

detta **carico piezometrico**. Le dimensioni del carico piezometrico sono quelle di una lunghezza

$$[h] = L$$

e quindi la sua unità di misura é il metro (m). **In un fluido in quiete  $h$  risulta costante.** Si ha infatti:

$$h = z + \frac{c_1 - \gamma z}{\gamma} = \frac{c_1}{\gamma}.$$

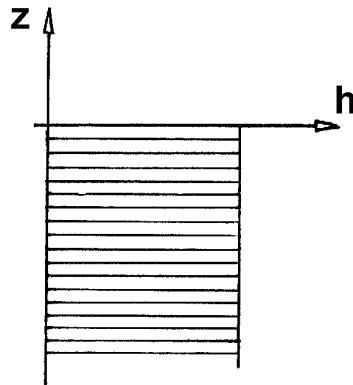


Figure 4.4:

La figura 4.4 mostra l'andamento del carico piezometrico in un fluido in quiete. Il carico piezometrico  $h$  rappresenta l'energia meccanica posseduta dal fluido per unità di peso. Essa si compone di energia potenziale per unità di peso ( $z$ ) ed energia di pressione per unità di peso ( $p/\gamma$ ).

L'equazione della statica per un fluido a densità costante soggetto al campo di forze gravitazionale

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

porge anche

$$p_A - p_B = -\gamma(z_A - z_B)$$

Cioé la differenza di pressione fra due punti é pari a  $\gamma$  per la differenza di quota. Chiaramente il punto a quota piú bassa ha la pressione maggiore.

## 4.2 Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale

Nel seguito sono presentati due esempi in cui, sulla base di quanto esposto sopra, viene calcolata la distribuzione della pressione in un fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale.

### 4.2.1 Fluido in moto di corpo rigido sottoposto a una accelerazione lineare di intensità costante

Si consideri un fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento che accelera, come il caso mostrato in figura 4.5 in cui un contenitore è sottoposto a un moto accelerato con accelerazione  $a$  allineata con l'asse  $y$ . All'interno del contenitore è presente un fluido che risulta in quiete rispetto a un sistema di assi solidali con il contenitore. L'equazione puntuale della statica, espressa in un sistema di riferimento non inerziale, in questo caso porge:

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{k} - \rho a \mathbf{j}$$

che proiettata nelle direzioni degli assi coordinati consente di ottenere un sistema di equazioni alle derivate parziali che si può integrare facilmente, ottenendo la distribuzione della pressione all'interno del serbatoio.

$$p(x, y, z) = -\rho a y - \rho g z + c_2$$

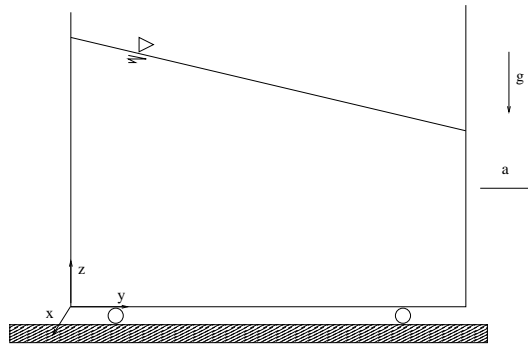


Figure 4.5:

Si noti che fissato il valore di  $y$ , la pressione ha la distribuzione lineare (idrostatica) rispetto alla direzione verticale mostrata in figura 4.6. Con semplici passaggi algebrici è facile mostrare che i piani con pressione costante pari a  $p_c$  sono individuati dall'equazione:

$$z = \frac{c_2 - p_c}{\rho g} - \frac{a}{g}y$$

dove  $c_2$  é una costante il cui valore si calcola, ipotizzando che il liquido non esca dal recipiente, nota la quantità di liquido presente all'interno del serbatoio. Indicate con  $h$  l'altezza del liquido quando il recipiente é fermo, e con  $l$  la sua lunghezza, si ottiene:

$$c_2 = p_{atm} + \gamma \left[ h_0 + \frac{al}{2g} \right]$$

da cui si ricava l'equazione dell'interfaccia:

$$z = h_0 + \frac{a}{g} \left[ \frac{l}{2} - y \right]$$

la cui forma é mostrata in figura 4.6. Si noti che, considerando un valore assegnato di  $z$ , cioè in un piano orizzontale, al crescere del valore di  $y$  il valore della pressione diminuisce.

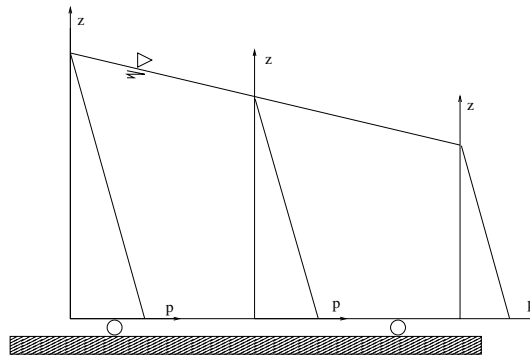


Figure 4.6:

### 4.2.2 Fluido in moto di corpo rigido sottoposto a una velocità angolare di intensità costante

Si consideri un recipiente cilindrico di raggio  $R$  contenente un fluido incomprimibile che ruota, con velocità angolare costante  $\omega$ , attorno al proprio asse. Il pannello a sinistra della figura 4.7 mostra il recipiente prima dell'inizio del moto mentre il pannello a destra mostra il recipiente in rotazione quando il fluido al suo interno é in quiete rispetto al sistema di riferimento non inerziale  $(x', y', z')$  solidale con il recipiente.

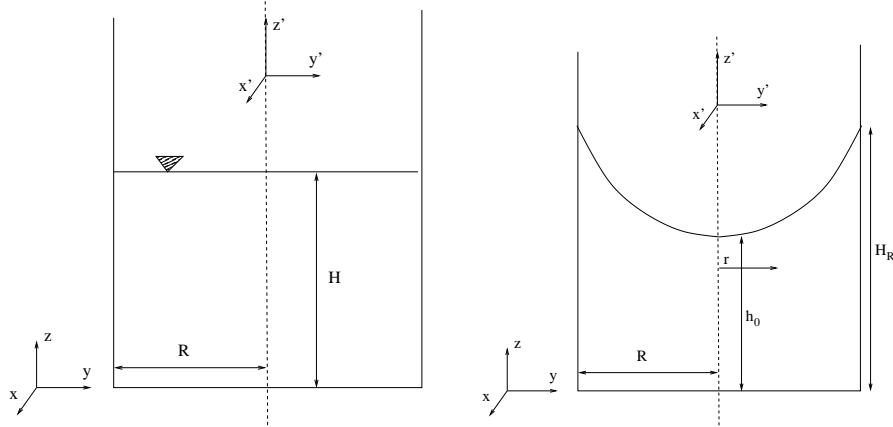


Figure 4.7:

Considerata la particolare geometria del problema in esame, é opportuno introdurre un sistema di coordinate cilindrico  $(r, \theta, z')$ , rispetto al quale l'equazione puntuale della statica diviene:

$$\nabla p = \rho [-g\mathbf{i}_{z'} + r\omega^2\mathbf{i}_r] \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{i}_r$  e  $\mathbf{i}_{z'}$  sono i versori degli assi  $r$  e  $z'$ .

L'equazione puntuale della statica (4.1) é equivalente al sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

che possono essere facilmente integrate per ottenere:

$$p(r, \rho, z) = \rho \frac{r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C.$$

É facile mostrare che le superfici caratterizzate dal valore costante della pressione  $p_c$  sono descritte dall'equazione:

$$z' = \frac{C - p_c}{\rho g} + \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$

L'interfaccia tra il fluido e l'aria ha la forma mostrata nel pannello a destra della figura 4.1. La pressione cresce linearmente al crescere dell'affondamento del punto considerato.

L'altezza massima é raggiunta dal liquido per  $r = R$  e risulta pari a:

$$H_R = \frac{C - p_{atm}}{\rho g} + \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$



mentre l'altezza minima si realizza in  $r = 0$  e risulta pari a:

$$h_0 = \frac{C - p_{atm}}{\rho g}.$$

Il valore della costante  $C$  che compare nelle due espressioni precedenti si calcola facilmente, supponendo che il liquido non fuoriesca dal recipiente in rotazione, imponendo l'uguaglianza del volume del fluido contenuto nel serbatoio fermo e nel serbatoio in rotazione:

$$\pi R^2 H = \int_0^R 2\pi r z' dr$$

da cui, svolgendo i calcoli si ottiene:

$$C = p_{atm} + \rho g H - \frac{1}{4} \rho \omega^2 R^2$$

e quindi:

$$H_R = H + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad h_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

# Chapter 5

## L'EQUAZIONE DI STATO

• Per i cosiddetti fluidi termodinamici, lo stato del fluido (le sue caratteristiche) dipende da due variabili, dette variabili di stato. Le due variabili di stato possono essere scelte arbitrariamente, essendo tutte le altre caratteristiche del fluido legate alle due scelte da equazioni dette “equazioni di stato”. Spesso come variabili di stato vengono scelte:

1) la pressione  $p$

2) la temperatura  $T$

si ha quindi:

$$\rho = \rho(p, T)$$

che è l'equazione di stato che lega la densità alla pressione e alla temperatura. L'equazione evidenzia che variando la pressione e/o la temperatura varia la densità del fluido. Ogni fluido è caratterizzato da una diversa equazione; cioè la sua densità può variare in modo più o meno significativo al variare della pressione e della temperatura.

• In forma differenziale l'equazione di stato può essere scritta nella forma:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) dT.$$

L'equazione precedente può essere riscritta introducendo il coefficiente di comprimibilità isoterma e quello di dilatabilità isobaro.

- **Coefficiente di comprimibilità isoterma:**

$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$$

- Coefficiente di dilatabilità isobaro:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$$

L'equazione diviene

$$d\rho = \rho (\epsilon^{-1} dp - \alpha dT).$$

• Essendo proprietà del fluido,  $\epsilon$  e  $\alpha$  a loro volta dipendono da  $p$  e  $T$ . Tuttavia se le variazioni di  $p$  e  $T$  non sono elevate,  $\epsilon$  e  $\alpha$  possono essere considerati costanti e pari a  $\epsilon_0$  e  $\alpha_0$ .

Segue

$$\frac{d\rho}{\rho} = \epsilon_0^{-1} dp - \alpha_0 dT$$

↓

$$\ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \epsilon_0^{-1} (p - p_0) - \alpha_0 (T - T_0)$$

↓

$$\rho = \rho_0 e^{\epsilon_0^{-1}(p-p_0) - \alpha_0(T-T_0)}$$

ove  $\rho_0$  è la densità alla pressione  $p_0$  e alla temperatura  $T_0$ .

L'equazione precedente può essere considerata come equazione di stato in quelle situazioni in cui le variazioni di  $p$  e  $T$  non sono rilevanti.

Per valori della pressione e della temperatura pari a quelli ambientali (es.:  $p=1,013 \cdot 10^5$  Pa,  $T= 20^\circ$  C), i valori di  $\epsilon_0$  e  $\alpha_0$  per l'acqua sono molto grandi e molto piccoli rispettivamente ( $\epsilon_0 = 2.178 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>,  $\alpha_0 = 20.66 \cdot 10^{-5}$  K<sup>-1</sup>). Per variazioni di pressione piccole rispetto a  $\epsilon_0$  e per variazioni di temperatura piccole rispetto a  $\alpha_0^{-1}$ , è possibile approssimare  $e^{\epsilon_0^{-1}(p-p_0) - \alpha_0(T-T_0)}$  con 1 e considerare il valore di  $\rho$  costante e pari a  $\rho_0$ .

Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per altri fluidi tenendo presente che per assumere  $\rho \cong \rho_0$  è necessario che siano piccole (molto minori di 1) le quantità  $(p - p_0) / \epsilon_0$  e  $\alpha_0 (T - T_0)$ .

• Esistono altre forme di equazione di stato, valide per fluidi o casi particolari. Ad esempio per un gas perfetto che subisce una trasformazione isoterma l'equazione di stato diviene

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

essendo  $p_0$  e  $\rho_0$  la pressione e la densità di riferimento. <sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup>A temperatura  $T=15^\circ$  C e pressione  $p=1.013 \cdot 10^5$  Pa si ha:  
Densità dell'acqua uguale a  $9.99 \cdot 10^2$  Kg/m<sup>3</sup>  
Densità dell'olio lubrificante uguale a  $8.67 \cdot 10^2$  Kg/m<sup>3</sup>  
Densità dell'aria uguale a  $1.22$  Kg/m<sup>3</sup>  
Densità del mercurio uguale a  $1.36 \cdot 10^4$  Kg/m<sup>3</sup>

## Chapter 6

# LA DISTRIBUZIONE DI PRESSIONE IN UN GAS PERFETTO A TEMPERATURA COSTANTE SOGGETTO AL CAMPO DI FORZE GRAVITAZIONALE

L'equazione puntuale della statica impone

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti a temperatura costante (capitolo 5), si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\rho_0}{p_0}g$$

↓

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz$$

↓

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z - z_0)$$

↓

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0(z-z_0)}{p_0}}$$

Se consideriamo aria a una temperatura di  $15^\circ\text{C}$  e assumiamo  $p_0$  pari a  $1.013 \cdot 10^5$  Pa con  $z_0=0$ , il valore di  $\gamma_0$  risulta pari a  $12 \text{ N/m}^3$ . La figura 6.1 riporta l'andamento di  $p$  e di  $\rho$  con la quota.

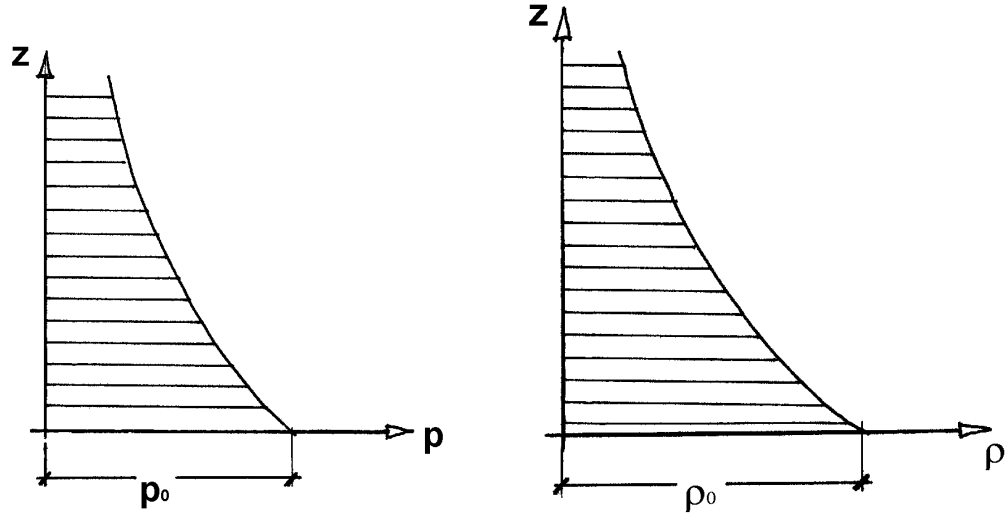


Figure 6.1:

Se tuttavia le variazioni di quota sono modeste (per esempio se  $z - z_0$  é inferiore a 100 m.), la quantità  $\gamma_0(z - z_0)/p_0$  risulta molto minore di uno ( $\gamma(z - z_0)/p_0 = 1.2 \cdot 10^{-2}$  per  $z - z_0 = 100$  m) e sia la pressione che la densità possono essere assunte costanti. Infatti per valori piccoli di  $\gamma_0(z - z_0)/p_0$  si può scrivere

$$p \cong p_0 \left[ 1 - \frac{\gamma_0(z - z_0)}{p_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_0(z - z_0)}{p_0} \right)^2 + \dots \right]$$

Quindi se  $(z - z_0)$  é pari a 100 m o inferiore,  $p$  può essere assunta pari a  $p_0$  con un errore di ordine  $10^{-2}$  o minore. E per questo motivo che nei problemi che noi affronteremo, in cui le variazioni di quota sono modeste, riterremo la pressione atmosferica costante con la quota.

# Chapter 7

## FENOMENI DI INTERFACCIA

### 7.0.3 LA TENSIONE SUPERFICIALE

• I fenomeni che hanno luogo all'interfaccia fra due fluidi sono molto complessi e legati alla struttura molecolare della materia. Cerchiamo di dare una semplice spiegazione di tali fenomeni. Con riferimento alla figura 7.1 sup-

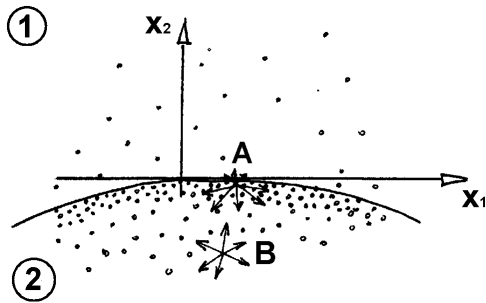


Figure 7.1:

poniamo che la densità del fluido ① sia inferiore a quella del fluido ②. La particella B del fluido 2 è attratta dalle particelle limitrofe. Anche la particella A del fluido ② è attratta dalle particelle limitrofe. Tuttavia, essendo la densità del fluido ① inferiore a quella del fluido ②, la forza risultante sulla particella A non sarà nulla ma diretta verso il basso. È evidente quindi che, perché sia possibile una situazione di equilibrio, in prossimità della superficie le particelle tenderanno a formare uno strato più denso. Situazione analoga si avrà nel fluido ①.

• A livello macroscopico il fenomeno può essere schematizzato assumendo

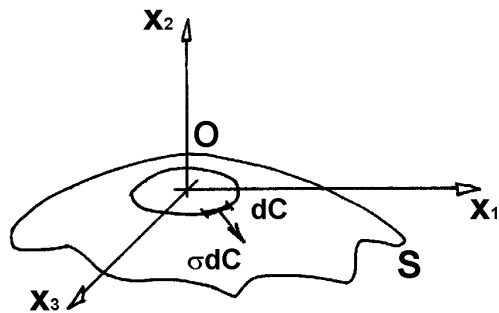


Figure 7.2:

che l'interfaccia sia una superficie soggetta ad uno stato di tensione. Con riferimento alla figura 7.2, la superficie  $S$  sia l'interfaccia fra due fluidi e  $C$  una curva chiusa su  $S$  che abbraccia l'origine  $O$  degli assi cartesiani  $(x_1, x_2, x_3)$ . Il fenomeno descritto precedentemente può essere schematizzato pensando che sul tratto  $dC$ , la superficie esterna alla zona delimitata dalla curva  $C$  eserciti una forza, sulla superficie all'interno, di modulo pari a  $\sigma dC$ , diretta ortogonalmente all'elemento di linea  $dC$  e tangente alla superficie. La quantità  $\sigma$  è detta **tensione superficiale** ed è una proprietà dell'interfaccia fra due fluidi. Esisterà quindi la tensione superficiale aria-acqua, aria-olio, olio-acqua ma non la tensione superficiale di un singolo fluido. Dimensionalmente la tensione superficiale è una forza per unità di lunghezza

$$[\sigma] = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2}.$$

L'unità di misura è il  $Nm^{-1}$  o alternativamente il  $Kg_fm^{-1}$ .

• Nel seguito sono riportati alcuni valori della tensione superficiale di diversi liquidi con l'aria a una temperatura di  $15^\circ C$  e alla pressione di un'atmosfera

Acqua	$7.3 \cdot 10^{-2} N/m$
Glicerina	$7.1 \cdot 10^{-2} N/m$
Benzene	$2.8 \cdot 10^{-2} N/m$
Mercurio	$47.3 \cdot 10^{-2} N/m$

## IL SALTO DI PRESSIONE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE GOBBA

Qualora l'interfaccia fra due fluidi non sia piana, la pressione  $p_1$  all'interfaccia nel fluido ① sarà diversa dalla pressione  $p_2$  all'interfaccia nel fluido ②. E' pos-



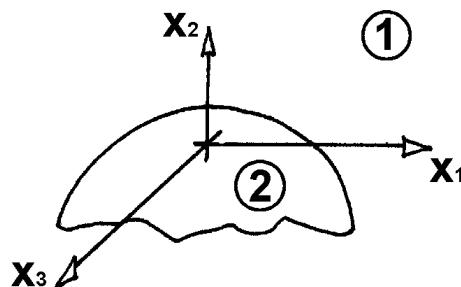


Figure 7.3:

sibile mostrare che il salto di pressione  $\Delta p = p_1 - p_2$  é pari a

$$\pm \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

essendo  $R_1$  e  $R_2$  i raggi principali di curvatura nel punto in considerazione. La pressione sará maggiore sul fluido che si trova dalla parte concava della superficie.

## CONTINUITA' DELLA PRESSIONE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE PIANA

- Consideriamo l'interfaccia piana fra due fluidi rispettivamente di peso specifico  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e analizziamo l'equilibrio di un cilindro a sezione circolare (vedi figura 7.4) di area  $\Omega$  e altezza  $2a$  per metà immerso nel primo fluido e per l'altra metà immerso nel secondo fluido. Si denoti con  $p_1$  la pressione (costante per quanto visto precedentemente nel capitolo 4) sulla base superiore del cilindro e con  $p_2$  la pressione sulla base inferiore. Il fluido all'esterno del cilindro eserciterá quindi una forza verso il basso pari a  $p_1\Omega$  dovuta alla somma di tante forze infinitesime  $p_1 d\Omega$  esercitate sull'area infinitesima  $d\Omega$ . Analogamente sará presente una forza verso l'alto pari a  $p_2\Omega$ . Infine, sempre nella direzione verticale, é presente il peso del fluido contenuto dentro al cilindro pari a  $\gamma_1\Omega a + \gamma_2\Omega a$ . Non esiste altra forza nella direzione verticale; quindi l'equilibrio in tale direzione impone che:

$$p_2\Omega = p_1\Omega + a\Omega(\gamma_1 + \gamma_2)$$

Nel limite di  $a$  tendente a zero si ottiene

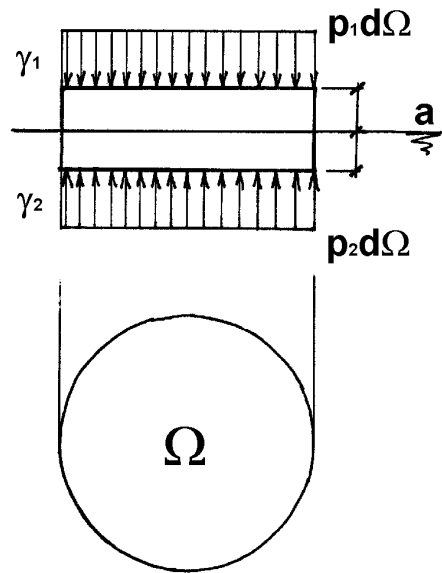


Figure 7.4:

$$p_1 = p_2$$

Dunque all'interfaccia, la pressione nel fluido 1 é uguale alla pressione del fluido 2.

## Chapter 8

# LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE PIANA

### 8.1 Spinta su una superficie piana soggetta a un campo di pressione costante

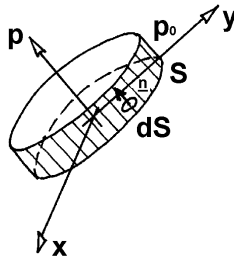


Figure 8.1:

In primo luogo mostriamo (come assunto precedentemente nel capitolo 7) che la spinta su una superficie piana  $S$  prodotta da una distribuzione di pressione costante  $p_0$  (vedi figura 8.1) é una forza  $\mathbf{F}$  ortogonale alla superficie stessa diretta verso la superficie e di modulo pari al valore della pressione per l'area della superficie. Per quanto esposto nel capitolo 2 e nel capitolo 3 si ha

$$\mathbf{F} = \int_S -p \mathbf{n} dS$$

Nella situazione in esame  $p = p_0$  e  $\mathbf{n}$  sono costanti.  
Segue dunque

$$\mathbf{F} = -p_0 \mathbf{n} \int_S dS = -\mathbf{n} p_0 S$$

La forza  $\mathbf{F}$  é quindi diretta come  $\mathbf{n}$ , ha verso opposto e il suo modulo é pari a  $p_0 S$ .

## 8.2 Spinta su una superficie piana soggetta all'azione di un fluido con densità costante

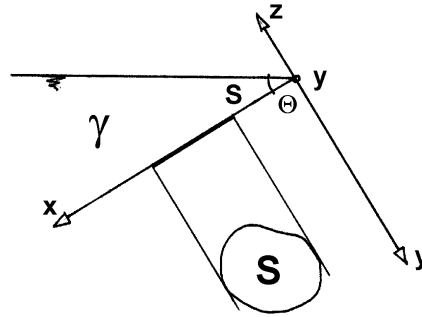


Figure 8.2:

Consideriamo ora il problema illustrato in figura 8.2 dove a sinistra del piano  $(x,y)$  é presente un liquido di peso specifico  $\gamma$ . Al di sopra del liquido e a destra della superficie é presente aria supposta a pressione costante pari alla pressione atmosferica  $p_{atm}$ . Nel disegno é anche raffigurato il piano  $(x,y)$  ribaltato sul foglio in modo tale da visualizzare la superficie  $S$  in esso contenuta.

Si voglia determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie. Nella figura 8.3 é rappresentato l'andamento della pressione sul piano  $(x,y)$ . Da quanto esposto nel capitolo 4 emerge che

$$p = p_{atm} + \gamma x \sin \theta$$

Volendo determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie  $S$ , é necessario determinare

$$\mathbf{F} = \int_S -p \mathbf{n} dS = \int_S -(p_{atm} + \gamma x \sin \theta) \mathbf{n} dS.$$

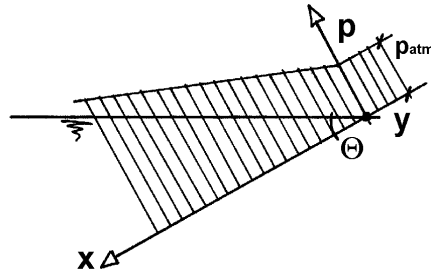


Figure 8.3:

Tenendo conto che  $\mathbf{n}$  é costante, la forza  $\mathbf{F}$  puó essere scomposta facilmente in due parti

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{n}p_{atm}S - \mathbf{n} \int_S \gamma x \sin \theta dS$$

La forza  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{n}p_{atm}S$  é esattamente bilanciata da una forza uguale e contraria esercitata dall'aria sulla superficie. Per questo motivo il problema di determinare  $\mathbf{F}$  viene trasformato nella determinazione di  $\mathbf{F}_2$

$$\mathbf{F}_2 = \int_S -(p - p_{atm})\mathbf{n}dS$$

La pressione  $p$  diminuita dalla pressione atmosferica é detta **pressione relativa** ( $p_r$ ).

- Considerando che l'uso della pressione relativa é piú diffuso di quello della pressione assoluta, nella rimanente parte di questo capitolo e nel capitolo seguente indicheremo con  $p$  la pressione relativa e con  $\mathbf{F}$  la forza da essa indotta.

- Dalla relazione

$$\mathbf{F} = -\mathbf{n} \int_S \gamma x \sin \theta dS$$

emerge chiaramente che la forza  $\mathbf{F}$  é ortogonale alla superficie (la direzione di  $\mathbf{F}$  coincide con quella di  $\mathbf{n}$ ) é diretta dal liquido verso la superficie e ha intensitá  $\mathbf{F}$  pari a

$$\int_S \gamma x \sin \theta dS = \gamma \sin \theta \int_S x dS = \gamma \sin \theta x_G S = p_G S^{(1)}$$

<sup>(1)</sup>  $\int_S x dS$  é detto **momento statico** della superficie  $S$  rispetto all'asse  $y$ . Si ha quindi  $\int_S x dS = x_G S$  essendo  $x_G$  la coordinata  $x$  del baricentro della superficie  $S$ .

ove con il pedice G si sono indicate quantità riferite al baricentro G della superficie. Da quanto ricavato emerge inoltre che l'intensità della forza esercitata dal liquido sulla superficie può essere ricavata moltiplicando l'area della superficie per il valore della pressione (relativa) nel baricentro della superficie stessa.

- Nel seguito ricaviamo le coordinate  $x_G, y_G$  del baricentro di alcune semplici superfici piane

1) Rettangolo

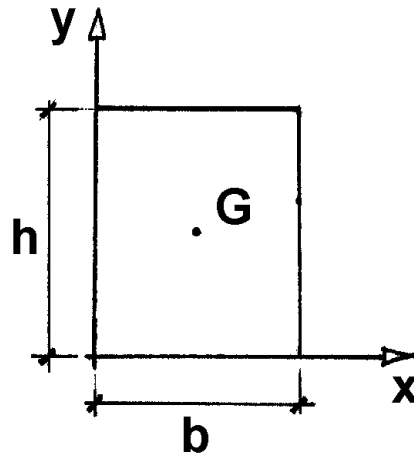


Figure 8.4:

$$x_G = \frac{1}{S} \int_S x dS = \frac{1}{bh} \int_0^h \left( \int_0^b x dx \right) dy = \frac{h \frac{1}{2} b^2}{bh} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{1}{bh} \int_0^b \left( \int_0^h y dy \right) dx = \frac{b \frac{1}{2} h^2}{bh} = \frac{h}{2}$$

2) Triangolo

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{2}{bh} \int_0^h \int_{\frac{y}{m}}^{\frac{(h-mb)}{mh} + b} y dx dy$$

$$y_G = \frac{2}{bh} \int_0^h y \left[ b + y \left( \frac{h-mb}{mh} - \frac{1}{m} \right) \right] dy = \frac{2}{bh} \left[ b \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \frac{(h-mb-h)}{mh} \right]$$

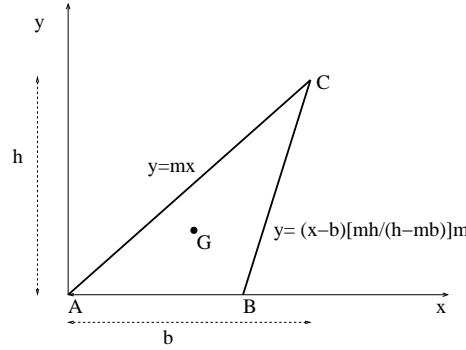


Figure 8.5:

$$= \frac{2}{bh} \left[ \frac{bh^2}{2} - \frac{mbh^2}{3m} \right] = \frac{3bh^2 - 2bh^2}{3bh} = \frac{h}{3}$$

**La coordinata  $y_G$  non dipende dal valore di  $m$  !**

Ripetendo il calcolo ruotando il triangolo é facilmente verificabile che il baricentro  $G$  dista dalla base sempre un terzo dell'altezza qualunque lato sia scelto come base.

3) Semicerchio

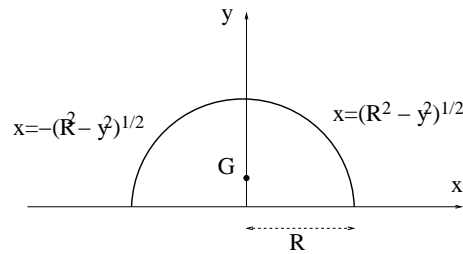


Figure 8.6:

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y dx dy$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{2}{\pi R^2} \left[ -\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{4}{3\pi} R$$

Nota la direzione, il verso e il modulo della forza  $\mathbf{F}$ , per risolvere completamente il problema é necessario determinare la retta di applicazione di  $\mathbf{F}$ . La forza  $\mathbf{F}$  deve essere infatti equivalente alla somma delle forze infinitesime

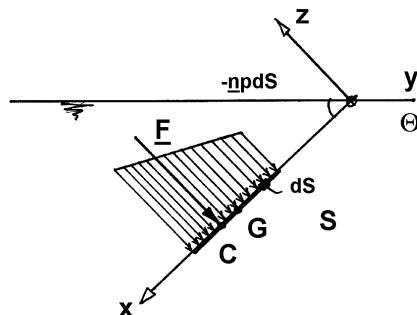


Figure 8.7:

$-npdS$  esercitate dal fluido sulle superfici infinitesime  $dS$  che compongono  $S$ .  $\mathbf{F}$  sarà equivalente se avrà la stessa risultante e lo stesso momento rispetto ad un qualsiasi polo. Indicando con  $C$  il punto di incontro della retta di applicazione di  $\mathbf{F}$  con la superficie  $S$  si deve avere

$$Fx_c = \int_S pxdS \quad Fy_c = \int_S pydS$$

essendo  $(x_c, y_c)$  le coordinate del punto  $C$  detto **centro di spinta**.

Le formule precedenti, insieme alla relazione

$$F = \int pdS$$

precedentemente ricavata, evidenziano un importante risultato: le coordinate  $(x_c, y_c)$  coincidono con le coordinate del baricentro del cosiddetto solido delle pressioni, cioè di un solido, nello spazio  $(x, y, p)$ , individuato dall'intersezione delle superfici  $p = 0$  e  $p = \gamma x \sin \theta$  con un cilindro a generatrici parallele all'asse  $p$  e con una direttrice coincidente con il contorno di  $S$  (vedi figura 8.7).

E' importante anche notare che il valore di  $\mathbf{F}$  coincide con il volume del solido delle pressioni.

• I risultati illustrati precedentemente suggeriscono una procedura semplice e rapida per il calcolo della forza  $\mathbf{F}$  e della sua retta di applicazione

1) Nello spazio  $(x, y, p)$ , con il piano  $(x, y)$  contenente la superficie  $S$  e l'asse  $p$  a esso ortogonale, tracciare l'andamento di  $p(x, y)$ .

2) Individuare il solido delle pressioni.



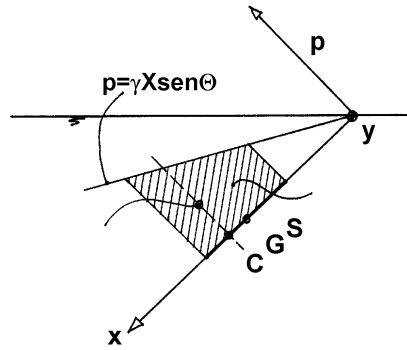


Figure 8.8:

3) Scomporre il solido delle pressioni in parti di cui sia semplice valutare il volume e la posizione del baricentro.

4) Valutare il volume  $V_i (i = 1, 2, \dots, N)$  delle  $N$  parti così individuate.

5) Valutare le coordinate  $(x_{ci}, y_{ci})$  dei baricentri degli  $N$  volumi.

6) Calcolare la forza  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N (-V_i \mathbf{n})$$

7) Calcolare le coordinate  $(x_c, y_c)$  del centro di spinta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i x_{ci})}{\sum_{i=1}^N V_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i y_{ci})}{\sum_{i=1}^N V_i}$$

• Consideriamo le relazioni già ottenute e discusse

$$F x_c = \int_S p x dS \quad F y_c = \int_S p y dS$$

Discende

$$x_c = \frac{\int_S p x dS}{F} = \frac{\int_S p x dS}{\int_S p dS} = \frac{\int_S \gamma x^2 \sin \theta dS}{\int_S \gamma x \sin \theta dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{x_G S}$$

La quantità  $\int_S x^2 dS$  é il momento d'inerzia della superficie  $S$  rispetto all'asse  $y$  e viene indicato con  $J_{yy}$ . E' inoltre noto che  $J_{yy} = J_{y_G y_G} + S x_G^2$ ,

essendo  $J_{y_G y_G}$  il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse  $y$  e passante per il baricentro  $G$ . Segue

$$x_c = \frac{J_{yy}}{x_G S} = \frac{S x_G^2 + J_{y_G y_G}}{x_G S} = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S}$$

Tale risultato mostra in particolare che il centro di spinta é sempre a una profondità maggiore o al piú uguale al baricentro. In modo analogo si mostra che

$$y_c = \frac{\int_S p y dS}{\int_S p dS} = \frac{\int_S \gamma x y \sin \theta dS}{\int_S \gamma x \sin \theta dS} = \frac{\int_S x y dS}{\int_S x dS} = \frac{J_{xy}}{x_G S} = y_G + \frac{J_{x_G y_G}}{x_G S}$$

essendo  $J_{xy}$  e  $J_{x_G y_G}$  i momenti centrifughi della superficie  $S$  rispetto agli assi  $x, y$  e ad assi a essi paralleli passanti per il baricentro  $G$  di  $S$ .

Resta da sottolineare che le formule precedentemente ricavate sono valide per una distribuzione continua di  $p$  e con riferimento ad un sistema di assi coordinati tali che la pressione si annulli nell'origine e lungo tutto l'asse  $y$ .

### ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DELLA SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA

1) Si consideri il serbatoio in figura 8.9 riempito di un liquido di densità  $\rho$  e si determini il momento  $M$  necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABCD incernierata (e quindi in grado di ruotare ma non traslare) lungo il lato AD.

Dati:  
 $a = 0.5\text{m}$  ,  $b = 0.7\text{m}$  ,  $c = 0.2\text{m}$   $\rho = 1000\text{ Kg/m}^3$  (acqua)

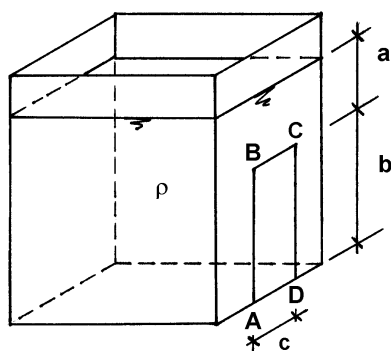


Figure 8.9:

Soluzione: Si introduca il sistema di riferimento in figura. Si ha:

$$p = \rho g x$$

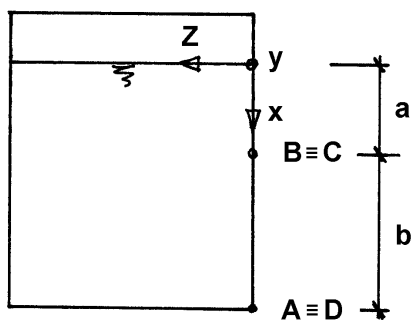


Figure 8.10:

Quindi il solido delle pressioni é quello riportato nella figura 8.11 insieme a una sua semplice scomposizione.

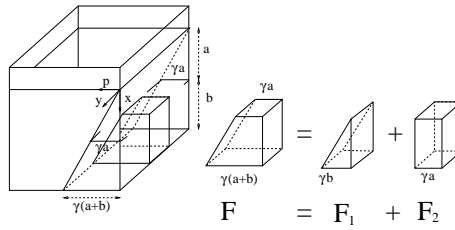


Figure 8.11:

Emerge quindi che

$$F = F_1 + F_2 = \gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc$$

Il risultato ottenuto coincide con la relazione

$$F = p_G S$$

Infatti la pressione nel baricentro G della superficie pari a

$$p_G = \gamma \left( a + \frac{b}{2} \right)$$

mentre

$$S = bc$$

Segue

$$F = \gamma abc + \gamma \frac{b}{2} bc$$

che coincide con la relazione già trovata.

Sapendo che il baricentro di un triangolo si trova a una distanza dalla base pari ad un terzo dell'altezza e che il baricentro di un rettangolo si trova a una distanza dalla base pari a metà dell'altezza é facile verificare che

$$x_c = \frac{F_1 x_{C1} + F_2 x_{C2}}{F}$$

$$x_c = \frac{\frac{\gamma b^2 c}{2} \left( a + \frac{2}{3} b \right) + \gamma abc \left( a + \frac{b}{2} \right)}{\gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc} = \frac{\frac{b}{2} \left( a + \frac{2}{3} b \right) + a \left( a + \frac{b}{2} \right)}{a + \frac{b}{2}} =$$

$$\frac{\frac{b}{2} \left( a + \frac{b}{2} + \frac{b}{6} \right) + a \left( a + \frac{b}{2} \right)}{a + \frac{b}{2}} = \frac{\left( a + \frac{b}{2} \right) \left( a + \frac{b}{2} \right) + \frac{b^2}{12}}{a + \frac{b}{2}} = \left( a + \frac{b}{2} \right) + \frac{\frac{b^2}{12}}{a + \frac{b}{2}}$$

## 8.2. SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA SOGGETTA ALL'AZIONE DI UN FLUIDO CON DENS

il valore di  $x_G$  appena determinato coincide con quello ricavabile dalla relazione

$$x_c = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S}$$

sapendo che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto ad un asse baricentrale é pari a un dodicesimo del prodotto della base con il cubo dell'altezza.

Segue infine che la forza  $\mathbf{F}$  é ortogonale alla superficie (quindi parallela all'asse  $z$ ), diretta verso la superficie e di intensità pari a

$$F = (9.81 \times 1000 \times 0.5 \times 0.7 \times 0.2 + 9.81 \times 1000 \times 0.35 \times 0.7 \times 0.2) N = 1167 N$$

Il momento da applicare per mantenere in equilibrio la paratoia sarà un vettore diretto lungo l'asse  $y$ , nel verso positivo, di modulo pari a

$$M = F(a + b - x_c) = F \left( a + b - a - \frac{b}{2} - \frac{\frac{b^2}{12}}{a + \frac{b}{2}} \right)$$

E' facile verificare che la quantità precedente coincide con

$$M = \gamma \frac{b^2 c b}{2 \cdot 3} + \gamma abc \frac{b}{2} = \gamma cb^2 \left[ \frac{b}{6} + \frac{a}{2} \right]$$

Segue quindi

$$M = 9.81 \times 1000 \times 0.2 \times 0.7^2 \times \left[ \frac{0.7}{6} + \frac{0.5}{2} \right] Nm = 353 Nm$$

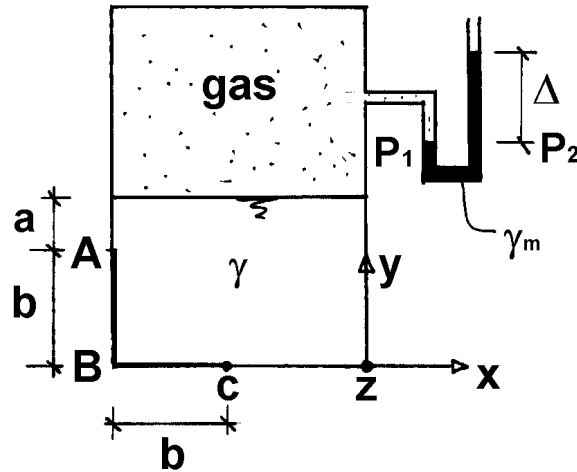


Figure 8.12:

2) Assumendo il problema piano e di larghezza unitaria, determinare il momento necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABC incernierata in C. Si trascuri il peso specifico del gas (si assuma quindi costante la sua pressione). La pressione del gas viene misurata attraverso il tubo manometrico contenente il liquido di peso specifico  $\gamma_m$  rilevando il dislivello  $\Delta$ . Sia  $\gamma$  il peso specifico del liquido all'interno del serbatoio.

Dati:  $\gamma = 1000 \text{Kg}_f/\text{m}^3$ ,  $\gamma_m = 13000 \text{Kg}_f/\text{m}^3$ ,  $\Delta = 5 \text{cm}$ ,  $a = 25 \text{cm}$ ,  $b = 35 \text{cm}$ .

Soluzione: Il momento  $\mathbf{M}$  per bilanciare l'azione del fluido è un vettore ortogonale al piano del disegno ( $\mathbf{M}=(0,0,M)$ ) e con una componente  $M_z$  negativa. Focalizziamo ora l'attenzione sul calcolo del modulo di  $\mathbf{M}$ . Con riferimento alla figura 8.12 la pressione  $p_0$  nel gas è pari alla pressione nel punto  $P_1$  che a sua volta è uguale alla pressione nel punto  $P_2$ . Si ha dunque

$$p_0 = \gamma_m \Delta$$

Sulla superficie AB la distribuzione di pressione sarà dunque quella rappresentata in figura 8.13 Sulla superficie BC la distribuzione di pressione sarà quella mostrata in figura 8.14

La forza esercitata dal liquido sulla superficie AB sarà dunque orizzontale diretta da destra verso sinistra e pari alla somma di due contributi  $F_1 + F_2$

8.2. SPINTA SU UNA SUPERFICIE PIANA SOGGETTA ALL'AZIONE DI UN FLUIDO CON DENS

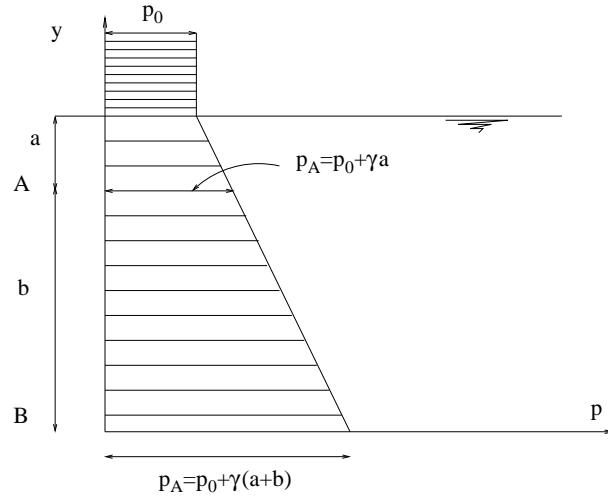


Figure 8.13:

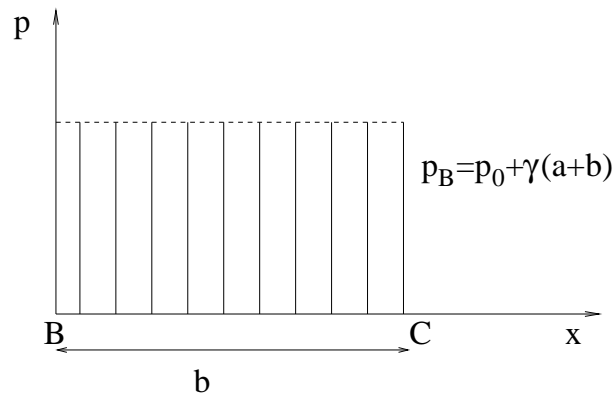


Figure 8.14:

$$F_1 = p_A b = (p_0 + \gamma a) b$$

$$F_2 = (p_B - p_A) \frac{b}{2} = \gamma \frac{b^2}{2}$$

Il primo contributo ( $F_1$ ) é applicato ad una distanza da B pari a  $b/2$ , il secondo ( $F_2$ ) é applicato ad una distanza da B pari a  $b/3$ . Sulla superficie BC la distribuzione di pressione é costante e quindi il liquido eserciterá una forza diretta verticalmente verso il basso di intensitá tale che

$$F_3 = p_B b = [p_0 + \gamma(a + b)] b$$

Inoltre  $F_3$  é applicata ad una distanza da C pari a  $\frac{b}{2}$ . Il modulo di  $M$  risulterà

quindi

$$\begin{aligned}
 M &= F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{3} + F_3 \frac{b}{2} = (p_0 + \gamma a) \frac{b^2}{2} + \gamma \frac{b^3}{6} + [p_0 + \gamma(a+b)] \frac{b^2}{2} = \\
 &= p_0 b^2 + \gamma a b^2 + \gamma \frac{2}{3} b^3 = [13000 \times 0.05 \times (0.35)^2 + 1000 \times 0.25 \times (0.35)^2 + \\
 &\quad 1000 \times \frac{2}{3} \times (0.35)^3 b] K g_f m = 139 K g_f m
 \end{aligned}$$

3) Assumendo il problema piano e di larghezza unitaria, calcolare la forza esercitata dai due fluidi in figura 8.15 sulla superficie AB. Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  il peso specifico del fluido sovrastante e sottostante rispettivamente.

Dati:  $\gamma_1=800 K g_f/m^3$ ;  $\gamma_2=1000 K g_f/m^3$ ;  $a=0.5$  m;  $b=0.3$  m;  $\theta = \pi/4$

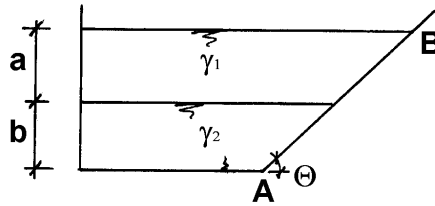


Figure 8.15:

Soluzione: Con riferimento agli assi in figura 8.16, la distribuzione di pressione risulta descritta da:

$$p = \gamma_1 x \sin \theta \quad \text{per} \quad x \leq \frac{a}{\sin \theta}$$

$$p = \gamma_1 a + \gamma_2 \left( x - \frac{a}{\sin \theta} \right) \sin \theta \quad \text{per} \quad x \geq \frac{a}{\sin \theta}$$

E' conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura 8.16.



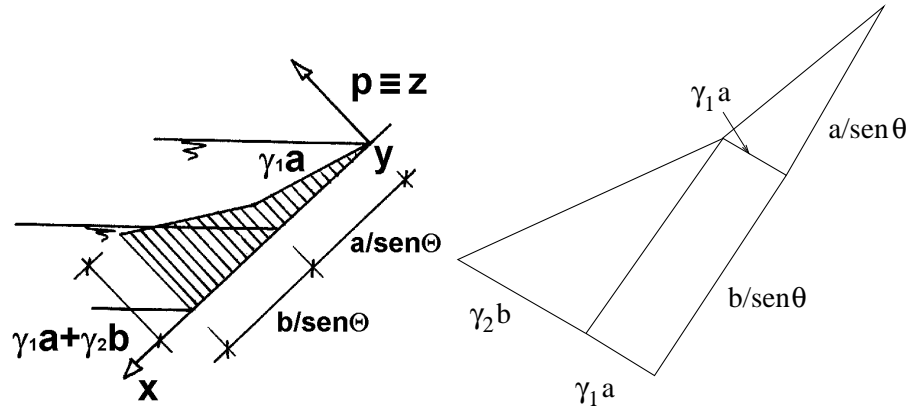


Figure 8.16:

Risulterà dunque

$$F = \gamma_1 \frac{a^2}{2 \sin \theta} + \gamma_1 \frac{ab}{\sin \theta} + \gamma_2 \frac{b^2}{2 \sin \theta}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$F = \left( 800 \times \frac{0.5}{\sin \frac{\pi}{4}} \left[ \frac{0.5}{2} + 0.3 \right] + 1000 \times \frac{0.3^2}{2 \sin \frac{\pi}{4}} \right) Kg_f = 375 Kg_f$$

Per determinare la retta di azione della forza F, é necessario calcolare la coordinata  $x_c$  del centro di spinta. Si calcola quindi dapprima il momento, per unità di larghezza, della distribuzione di forze rispetto all'asse y. Facendo riferimento alla scomposizione del solido delle pressioni illustrata prima, si ha:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \gamma_1 a \frac{a}{\sin \theta} \frac{2}{3} \frac{a}{\sin \theta} + \gamma_1 a \frac{b}{\sin \theta} \left( \frac{a}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \theta} \right) + \gamma_2 b \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \theta} \left( \frac{a}{\sin \theta} + \frac{2}{3} \frac{b}{\sin \theta} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{2} \times 800 \times \frac{2}{3} \times \frac{(0.5)^3}{\sin \pi/4} + 800 \times 0.5 \times \frac{0.3}{\sin \pi/4} \times \left[ \frac{0.5}{\sin \pi/4} + \frac{1}{2} \frac{0.3}{\sin \pi/4} \right] \right. \\ &\quad \left. + 1000 \times \frac{1}{2} \frac{(0.3)^2}{\sin \pi/4} \left[ \frac{0.5}{\sin \pi/4} + \frac{2}{3} \frac{0.3}{\sin \pi/4} \right] \right) Kg_fm \\ &= 47 Kg_fm + 156 Kg_fm + 63 Kg_fm \cong 266 Kg_fm \end{aligned}$$

e quindi si impone che M sia uguale al momento della forza risultante F

$$F x_c = M$$

ci porge:

$$x_c = \frac{M}{F} = \frac{266Kg_fm}{375Kg_f} \cong 0.71m$$

## Chapter 9

# LA SPINTA ESERCITATA DA UN FLUIDO SU UNA SUPERFICIE GOBBA

Come illustrato nel capitolo 2 e nel capitolo 3, la forza esercitata da un fluido in quiete su una superficie  $S$  risulta

$$\mathbf{F} = \int_S -pn dS$$

Mentre per una superficie piana  $\mathbf{n}$  é indipendente dalla posizione sulla superficie e quindi é costante, facilitando la valutazione dell'integrale, nel caso di una superficie gobba  $\mathbf{n}$  risulta variabile. Non é possibile illustrare una procedura generale per la valutazione dell'integrale considerando che essa dipende dalla forma della superficie. Consideriamo il caso particolare illustrato in figura 9.1 (assunto piano). Poniamoci l'obbiettivo di determinare la forza  $\mathbf{F}$  esercitata dal liquido di peso specifico  $\gamma$  sulla superficie AB assunta di larghezza unitaria. In primo luogo é opportuno valutare separatamente la componente lungo la direzione  $x$  e quella lungo la direzione  $y$ .

$$F_x = \int_S -pn_x dS$$

$$F_y = \int_S -pn_y dS$$

Per valutare gli integrali é conveniente utilizzare un sistema di coordinate polari con l'origine nel punto  $O$ . Nel generico punto  $P$  della superficie AB si ha

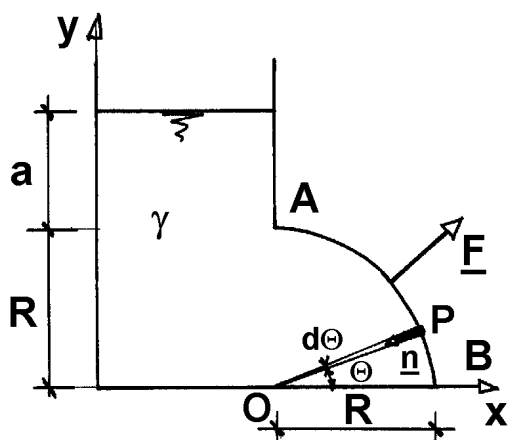


Figure 9.1:

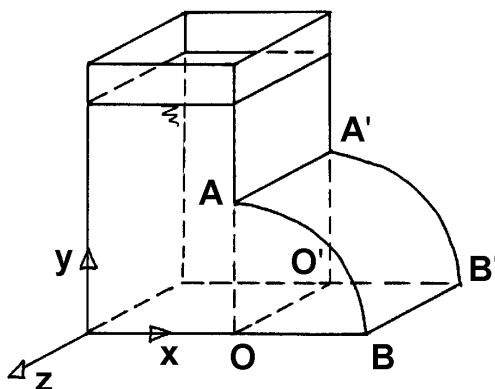


Figure 9.2:

$$\mathbf{n} = (-\cos \theta, -\sin \theta)$$

Si noti che la normale  $\mathbf{n}$  é diretta verso l'interno del fluido perché si vuole calcolare l'azione del fluido sulla parete. Inoltre  $dS = R d\theta$  avendo assunto la larghezza della superficie unitaria. Infine la pressione  $p$  nel punto P risulterà

$$p = \gamma [a + R - R \sin \theta] = \gamma a + \gamma R (1 - \sin \theta).$$

Segue quindi

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -[\gamma a + \gamma R(1 - \sin \theta)](-\cos \theta) R d\theta = \\
 &= \gamma(a + R) R [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \gamma R^2 \frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \gamma(a + R) R - \frac{\gamma R^2}{2} = \gamma \left( a + \frac{R}{2} \right) R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -[\gamma a + \gamma R(1 - \sin \theta)](-\sin \theta) R d\theta = \\
 &= -\gamma(a + R) R [\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \gamma R^2 \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \gamma(a + R) R - \gamma \frac{\pi R^2}{4}
 \end{aligned}$$

Nel caso in esame si é riusciti facilmente a valutare gli integrali che forniscono  $F_x$  e  $F_y$ . Tuttavia quando la geometria del problema é piú complessa, la valutazione di  $\mathbf{F}$  utilizzando l'espressione  $\int_s -p \mathbf{n} dS$  puó risultare difficile.

- Una procedura alternativa che spesso consente il rapido calcolo di  $\mathbf{F}$  é quella illustrata nel seguito

- Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido.

- Determinare le forze  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$  che il fluido all'esterno del volume esercita sulle superfici piane.

- Calcolare la forza  $\mathbf{F}$  esercitata dal fluido sulla superficie gobba, imponendo l'equilibrio del volume isolato in precedenza, su cui l'esterno esercita le forze di superficie  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_N, -\mathbf{F}$  e la forza peso  $\mathbf{G}$ .

Risulterà

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i - \mathbf{F} + \mathbf{G} = 0$$

Da cui

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$$

Al fine di illustrare chiaramente la procedura, applichiamo al problema considerato precedentemente. Consideriamo il volume di fluido delimitato dalla superficie gobba  $AA'B'B$ , dalle superfici piane  $AA'O'O$ ,  $OO'B'B$ ,  $OAB$ ,  $O'A'B'$ .

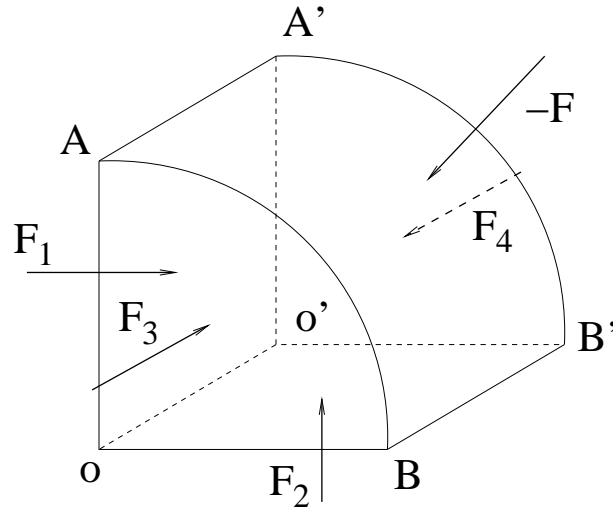


Figure 9.3:

Considerando l'orientamento delle superfici piane e indicando con  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , i versori degli assi  $x, y, z$  rispettivamente, é facile vedere che

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}; \quad \mathbf{F}_2 = F_2 \mathbf{j}; \quad \mathbf{F}_3 = -F_3 \mathbf{k}; \quad \mathbf{F}_4 = F_4 \mathbf{k}; \quad \mathbf{G} = -G \mathbf{j}$$

L'equilibrio del volume considerato alla traslazione lungo i tre assi impone

$$F_x = F_1; \quad F_y = F_2 - G; \quad F_z = F_4 - F_3$$

avendo denotato con  $(F_x, F_y, F_z)$  le componenti del vettore  $\mathbf{F}$ . Utilizzando i risultati illustrati nel capitolo 8 é possibile determinare  $F_i$ . Si ha

$$F_1 = \gamma \left( a + \frac{R}{2} \right) R; \quad F_2 = \gamma (a + R) R; \quad F_3 = F_4 = \gamma \left( a + R - \frac{4R}{3\pi} \right) \frac{\pi R^2}{4}$$

Inoltre

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{4}$$

Segue

$$F_x = \gamma \left( a + \frac{R}{2} \right) R; \quad F_y = \gamma (a + R) R - \gamma \frac{\pi R^2}{4}; \quad F_z = 0$$

I risultati ottenuti coincidono con quelli ricavati precedentemente.

• Nel caso di una superficie gobba, il sistema equivalente alla somma delle forze infinitesime  $-p \mathbf{n} dS$  é in generale fornito da una forza e da una coppia.

Per individuare la retta di applicazione di  $\mathbf{F}$  e il valore della coppia é necessario imporre l'equilibrio alla rotazione del volume in esame. Nel nostro caso, considerando che le forze infinitesime passano per la retta  $OO'$  e per la simmetria del problema, si può affermare che la forza  $\mathbf{F}$  passa per la retta  $OO'$  in un punto equidistante da  $O$  e da  $O'$  e il valore della coppia é nullo.

## ESERCIZI SULLA DETERMINAZIONE DELLA SPINTA SU UNA SUPERFICIE GOBBA

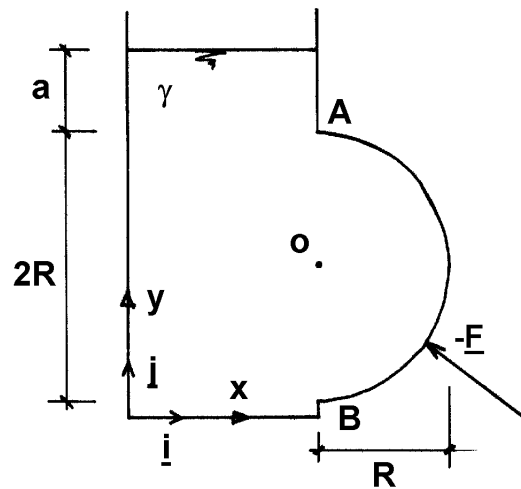


Figure 9.4:

1) Si consideri il problema piano rappresentato in figura 9.4 e costituito dalla determinazione della forza  $\mathbf{F}$  esercitata dal fluido di peso specifico  $\gamma$  sulla superficie  $AB$  supposta di larghezza unitaria.

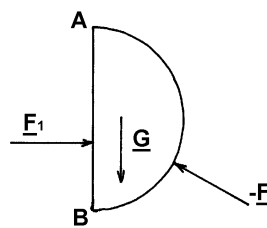


Figure 9.5:

Soluzione: si consideri il volume isolato dalla superficie gobba  $AB$  e dalla

superficie piana  $AB$ , come evidenziato nella figura 9.5. Per quanto spiegato precedentemente

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}$$

Da cui

$$F_x = F_1 = \gamma (a + R) 2R$$

$$F_y = G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$

con

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}; \quad \mathbf{G} = -G \mathbf{j}; \quad \mathbf{F} = F_x \mathbf{i} - F_y \mathbf{j}$$

E' evidente inoltre che la forza passa per il punto  $O$ .

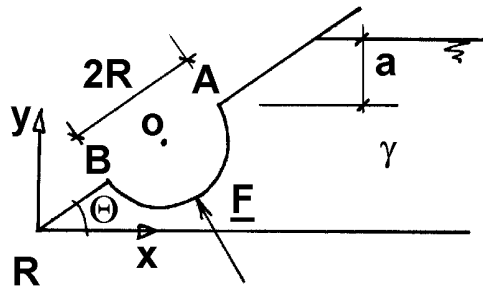


Figure 9.6:

2) Si consideri il problema piano rappresentato in figura 9.6 e costituito dalla determinazione della forza  $\mathbf{F}$  esercitata dal fluido di peso specifico  $\gamma$  sulla superficie  $AB$  supposta di larghezza unitaria.

Soluzione: il modo piú rapido per risolvere il problema é quello di considerare il serbatoio evidenziato nella figura 9.7 e imporre l'equilibrio del volume tratteggiato e costituito dalla superficie gobba  $AB$  e da quella piana  $AB$ .

Su tale volume l'esterno eserciterá le seguenti forze:  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{G}$

Si ha inoltre

$$\mathbf{F} = (-F_x, F_y); \quad \mathbf{F}_1 = (F_1 \sin \theta, -F_1 \cos \theta); \quad \mathbf{G} = (0, -G)$$

Segue

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}$$



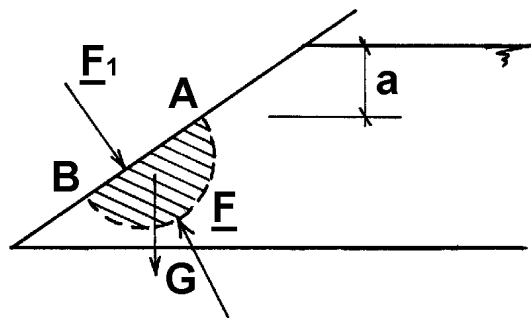


Figure 9.7:

$$\mathbf{F} = (-F_x, F_y) = (-F_1 \sin \theta, F_1 \cos \theta) + (0, G)$$

oppure

$$F_x = F_1 \sin \theta, \quad F_y = F_1 \cos \theta + G$$

ove

$$F_1 = \gamma (a + R \sin \theta) 2R$$

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$

La forza  $\mathbf{F}$  passa per il centro della circonferenza.

# Chapter 10

## LA TENSIONE IN UN FLUIDO IN MOVIMENTO

Abbiamo visto (capitolo 3) che in un fluido in quiete la tensione  $\mathbf{t}$  é sempre ortogonale alla superficie. In altre parole se un fluido é in quiete

$$\mathbf{t} = -pn$$

Nei fluidi in movimento, tuttavia, la direzione di  $\mathbf{t}$  non coincide con quella di  $\mathbf{n}$  e in generale si manifestano delle componenti tangenti alla superficie.

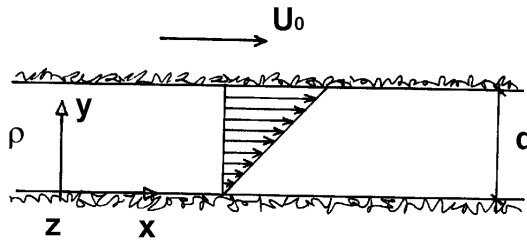


Figure 10.1:

Esaminiamo la situazione rappresentata in figura 10.1. Due piastre parallele fra di loro sono poste ad una distanza  $d$  e costituiscono così un meato riempito di un fluido di densità  $\rho$ . La piastra inferiore é ferma mentre quella superiore viaggia con una velocità  $U_0$  in una direzione parallela alla piastra stessa.

Introduciamo il sistema di riferimento in figura 10.1. Se misurassimo il campo di velocità, ci accorgeremmo che la velocità ha un'unica componente nella direzione  $x$  che si annulla in corrispondenza di  $y = 0$ , assume il valore  $U_0$  per  $y = d$  e varia linearmente con  $y$

$$u = \frac{U_0}{d}y$$

Per mantenere la piastra superiore in movimento con velocità  $U_0$  é necessario applicare una forza nella direzione  $x$  che, rapportata alla superficie della piastra, porge un valore che indicheremo con  $\tau$ . E' evidente che il valore di  $\tau$  é uguale e contrario alla componente nella direzione  $x$  della tensione  $\mathbf{t}$  esercitata dal fluido sulla parete. Misure di mostrano che

1)  $\tau$  é proporzionale a  $U_0$

2)  $\tau$  é inversamente proporzionale a  $d$

Si ha cioè

$$\tau \propto \frac{U_0}{d}$$

La costante di proporzionalità dipende dal fluido contenuto all'interno del meato ed é denominata **viscosità dinamica** ( $\mu$ )

$$\tau = \mu \frac{U_0}{d}.$$

Il legame  $\tau = \mu U_0/d$  é valido per i fluidi cosiddetti newtoniani. L'aria, l'acqua e molti fluidi di interesse ingegneristico sono "newtoniani". Per altri fluidi il legame fra  $\tau, U_0, d$  puó essere piú complicato.

Le dimensioni di  $\mu$  sono quelle di una massa divisa per una lunghezza e per un tempo

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

mentre l'unità di misura é il  $Kg/(ms) = Pa \cdot s$ , anche se talvolta viene utilizzato il centipoise ( $cP$ ), essendo

$$cP = 10^{-3}Kg/(ms)$$

- La viscosità dinamica di un fluido, essendo una sua proprietà, dipende dallo stato del fluido e quindi dalla pressione e dalla temperatura. Per l'acqua in condizioni ordinarie (pressione atmosferica e temperatura pari a 20°C)

$$\mu = 1cP.$$

• Spesso si utilizza la **viscosità cinematica** definita come il rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Le dimensioni di  $\nu$  sono quelle di una lunghezza al quadrato su un tempo

$$[\nu] = L^2/T$$

mentre l'unità di misura è  $m^2/s$ . Anche la viscosità cinematica dipende da pressione e temperatura. Per l'acqua in condizioni ordinarie<sup>(1)</sup>

$$\nu \cong 10^{-6} m^2/s.$$

• Il legame  $\tau = \mu U_0/d$  è un caso particolare di una relazione più generale che nella geometria in considerazione può scriversi

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

La tensione tangenziale  $\tau$  può infatti variare al variare di  $y$ . In geometrie più complesse la relazione tra  $\mathbf{t}$  e il campo di moto, detta “legame costitutivo”, diviene complessa. Si rimanda lo studente interessato a corsi successivi.

---

<sup>(1)</sup>Per aria secca a pressione atmosferica alla temperatura di 20°C si ha

$$\mu \cong 1.8 \cdot 10^{-5} Kg/(ms)$$

$$\nu \cong 1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$$

# Chapter 11

## ANALISI DIMENSIONALE E TEOREMA DI BUCKINGHAM

I problemi a cui siamo interessati e i problemi della fisica in generale, sono caratterizzati dalla ricerca della dipendenza di una grandezza fisica  $Q_0$  dalle altre grandezze fisiche  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  coinvolte nel fenomeno in esame. In altre parole si vuole determinare la funzione  $f$  che lega  $Q_0$  a  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N).$$

Un esempio tipico in idrodinamica é la ricerca della resistenza (forza nella direzione del moto) incontrata da un corpo (per esempio una sfera) che avanza in fluido fermo. Utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo (vedi figura 11.1), il problema é costituito dalla valutazione di  $R$  (modulo di  $\mathbf{R}$ ).

E' evidente che il valore di  $R$  sará influenzato:

\_ dalle caratteristiche del fluido (nel caso in esame dalla densitá  $\rho$  e dalla viscositá cinematica  $\nu$ )

\_ dalle dimensioni della sfera (il diametro  $D$ )

\_ dalla velocitá con cui il fluido investe la sfera ( $U_0$ )

Si cercherá quindi di valutare la funzione  $f$  tale che

$$R = f(\rho, \nu, D, U_0).$$

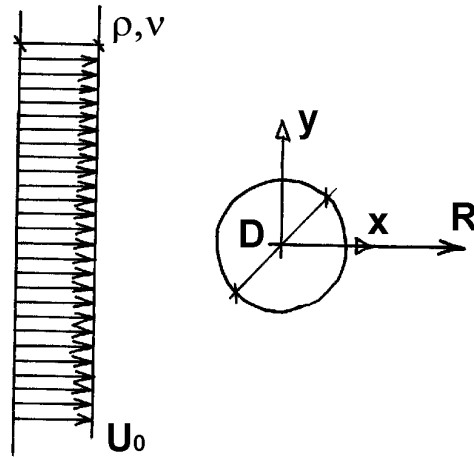


Figure 11.1:

E' evidente che la funzione  $f$  di cui sopra é un caso particolare di quella scritta inizialmente

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

con

$$Q_0 = R, \quad N = 4, \quad Q_1 = \rho, \quad Q_2 = \nu, \quad Q_3 = D, \quad Q_4 = U_0$$

Alcune volte é possibile risolvere il problema in esame risolvendo le equazioni che governano il fenomeno. In tal caso é possibile fornire un'espressione analitica di  $f$ . In altri casi ciò non é possibile e il legame fra  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  puó essere cercato solo attraverso esperienze di laboratorio. Se il valore di  $N$  é elevato il numero di esperimenti da eseguire risulta estremamente alto. In tale situazione é utile il teorema di Buckingham, detto anche teorema II.

- Teorema II

Il teorema II stabilisce che la relazione

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

fra  $N + 1$  grandezze fisiche puó essere trasformata in una nuova relazione fra  $N + 1 - M$  numeri adimensionali

$$\Pi_0 = \bar{f}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-M})$$

essendo  $M$  il numero massimo di grandezze dimensionalmente indipen-

denti <sup>(1)</sup> che può essere individuato all'interno delle  $N+1$  grandezze  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  e  $\Pi_i$  numeri adimensionali.

Dimostrazione:

Si voglia trasformare la relazione

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

\_ Si scelga il massimo numero  $M$  di grandezze dimensionalmente indipendenti.

\_ Non si perde di generalità se si suppone che le grandezze scelte siano  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$ .

\_ Si individui il monomio  $Q_1^{\alpha_0}, Q_2^{\beta_0}, Q_3^{\gamma_0} \dots, Q_M^{\omega_0}$  che abbia le stesse dimensioni di  $Q_0$ . Dalla definizione di  $M$  e di grandezze dimensionalmente indipendenti i valori  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots, \omega_0$  non sono tutti nulli.

\_ Si divida la relazione di partenza sia a destra che a sinistra per

$Q_1^{\alpha_0}, Q_2^{\beta_0}, Q_3^{\gamma_0} \dots, Q_M^{\omega_0}$ . Si avrà

$$\frac{Q_0}{Q_1^{\alpha_0}, Q_2^{\beta_0}, Q_3^{\gamma_0} \dots, Q_M^{\omega_0}} = \Pi_0 = f_0(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

E' evidente che il termine a sinistra della relazione precedente é un rapporto adimensionale.

\_ Si individui il monomio  $Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}} \dots, Q_M^{\omega_{M+1}}$  che abbia le stesse dimensioni di  $Q_{M+1}$ .

\_ Laddove nella funzione  $f_0$  (evidentemente diversa da  $f$ ) compare  $Q_{M+1}$  si sostituisca

---

<sup>(1)</sup> •  $M$  grandezze si dicono **dimensionalmente indipendenti** se il monomio

$$Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma \dots Q_M^\omega$$

avente dimensioni nulle, implica

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \dots, \omega = 0.$$

Se esistono valori  $\alpha, \beta, \dots, \omega$  diversi da zero e tali che il monomio

$$Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma \dots Q_M^\omega$$

ha dimensioni nulle, allora le  $M$  grandezze sono dimensionalmente **dipendenti**.

• Il valore massimo di  $M$  dipende dalla natura del fenomeno. In particolare se il fenomeno é geometrico  $M = 1$ , se il fenomeno é cinematico  $M = 2$ , se il fenomeno é di natura dinamica  $M = 3$  e cosí via.

$$\frac{Q_{M+1}}{Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}}, \dots, Q_M^{\omega_{M+1}}} Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}}, \dots, Q_M^{\omega_{M+1}} =$$

$$\Pi_{M+1} Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}}, \dots, Q_M^{\omega_{M+1}}$$

segue dunque

$$\Pi_0 = f_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \Pi_{M+1}, Q_{M+2}, \dots, Q_N)$$

- Si ripeta il punto precedente per  $Q_{M+2}, Q_{M+3}, \dots, Q_N$  per giungere alla relazione

$$\Pi_0 = f_{N-M}(Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, \dots, \Pi_N)$$

- Cambiando l'unità di misura della sola  $Q_1$  (procedura possibile essendo  $Q_1, Q_2, \dots, Q_M$  grandezze dimensionalmente indipendenti), i valori di  $\Pi_0, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, \dots, \Pi_N$  non cambiano essendo  $\Pi_i$  numeri adimensionali. Neanche i valori di  $Q_2, Q_3, \dots, Q_M$  cambiano non essendo variare le loro unità di misura. Segue quindi che la funzione  $f_{N-M}$  non può dipendere esplicitamente da  $Q_1$ .

- Cambiando l'unità di misura di  $Q_2$  e seguendo il ragionamento esposto al punto precedente si conclude che  $f_{N-M}$  non può dipendere esplicitamente da  $Q_2$ .

- Analogamente si può concludere che  $f_{N-M}$  non dipende esplicitamente da  $Q_3, Q_4, \dots, Q_M$

- E' possibile quindi concludere che

$$Q_0 = f_0(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

si trasforma in

$$\Pi_0 = \bar{f}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-M})$$

come si voleva dimostrare.

• L'utilità del teorema  $\Pi$  emerge chiaramente applicandolo all'esempio considerato precedentemente.

$$R = f(\rho, \nu, D, U_0)$$

Essendo il problema di natura dinamica  $M = 3$ .

Scegliamo  $\rho, U_0, D$  come grandezze dimensionalmente indipendenti. In primo luogo verifichiamo che  $\rho, U_0, D$  siano dimensionalmente indipendenti, cioè che il monomio



$$\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$$

con dimensioni nulle implichi  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ . Si ha

$$[\rho] = ML^{-3}; \quad [U_0] = LT^{-1}; \quad [D] = L$$

segue dunque

$$\left[ \rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma \right] = M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma$$

Dunque  $\left[ \rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma \right] = 0$  se e solo se

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\beta &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema algebrico lineare precedente é omogeneo e il determinante della matrice dei coefficienti diverso da zero: la soluzione allora é quella identicamente nulla. E' quindi possibile concludere che  $\rho, U_0, D$  sono grandezze dimensionalmente indipendenti.

Cerchiamo ora il monomio  $\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$  che ha le stesse dimensioni di  $R$ . Sapendo che

$$[R] = MLT^{-2}$$

Si ottiene

$$M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma = MLT^{-2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 & \alpha &= 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 1 & \implies \gamma &= 2 \\ -\beta &= -2 & \beta &= 2 \end{aligned}$$

Dunque la relazione iniziale può essere scritta nella forma

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_1(\rho, U_0, D, \nu)$$

Cerchiamo ora il monomio  $\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$  che ha le dimensioni di  $\nu$ . Sapendo che

$$[\nu] = L^2 T^{-1}$$

Si ottiene

$$M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma = L^2 T^{-1}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & \alpha &= 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 2 \implies \gamma &= 1 \\ -\beta &= -1 & \beta &= 1 \end{aligned}$$

Si può quindi concludere

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_2 \left( \frac{\nu}{U_0 D} \right)$$

Per motivi storici invece del numero adimensionale  $\frac{\nu}{U_0 D}$  si ritiene che  $\frac{R}{\rho U_0^2 D^2}$  dipenda da  $\frac{U_0 D}{\nu}$ .

Dunque

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = \bar{f} \left( \frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

Il numero  $\frac{U_0 D}{\nu}$  é detto numero di Reynolds e viene usualmente indicato con  $Re$ .

Il numero  $\frac{R}{\rho U_0^2 D^2}$  é detto numero di Newton e viene usualmente indicato con  $Ne$ . Applicando il teorema II si é trasformato il problema iniziale, che prevedeva la determinazione della funzione  $f$  di 4 variabili indipendenti, nella determinazione della funzione  $\bar{f}$  che dipende da una sola variabile indipendente con chiaro e indubbio vantaggio.

## IL TEOREMA II NEI PROBLEMI DI IDRODINAMICA

Nei problemi idrodinamici, oltre al numero di Newton ( $Ne$ ) e al numero di Reynolds ( $Re$ ), possono comparire altri numeri adimensionali. I piú comuni sono

- Il numero di Froude

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gD}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato anche dalla accelerazione di gravitá.

- Il numero di Mach

$$Ma = \frac{U_0}{\sqrt{\epsilon/\rho}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla comprimibilità del fluido.

- Il numero di Weber

$$We = \sqrt{\frac{\rho D U_0^2}{\sigma}}$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla tensione superficiale.

# Chapter 12

## SIMILITUDINE E MODELLI

Consideriamo nuovamente il problema descritto nel capitolo 11: un fluido di densità  $\rho$  e viscosità cinematica  $\nu$  investe una sfera di diametro  $D$  con una velocità  $U_0$ .

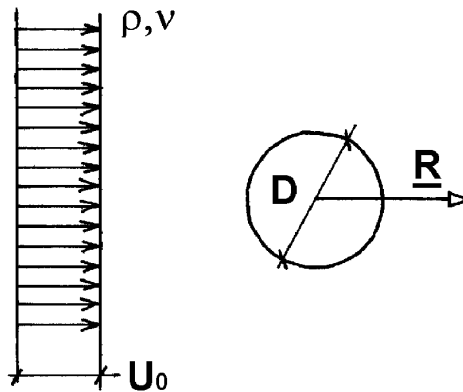


Figure 12.1:

La forza che il fluido esercita sulla sfera nella direzione del moto risulta esprimibile nella forma (vedi teorema II)

$$R = \rho U_0^2 D^2 \bar{f} \left( \frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

che spesso viene riscritta nella forma

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left( \frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

ove  $C_D = \frac{8}{\pi} \bar{f}$  é detto coefficiente di resistenza e risulta evidentemente funzione di Reynolds.

- Emerge chiaramente che per conoscere  $R$  é necessario conoscere il valore di  $C_D$  per il valore del numero di Reynolds caratteristico del problema. Se ad esempio pensiamo la sfera come l'approssimazione di una batisfera investita da una corrente oceanica di intensitá pari a  $0.2 \text{ m/s}$  e supponiamo che  $D$  sia pari a  $2 \text{ m}$ , il numero di Reynolds risulterà pari a

$$Re = \frac{2m \times 0.2m/s}{10^{-6}m^2/s} = 4 \times 10^5 m^2/s$$

Nel caso in esame dovremo dunque valutare  $C_D$  per tale valore di  $Re$ . Ciò però non comporta la misura della forza esercitata sulla batisfera ( $D=2m$ ) da una corrente di  $0.2 \text{ m/s}$ . E' infatti possibile misurare  $C_D$  utilizzando "un modello", cioè una sfera molto piú piccola, a patto di aumentare  $U_0$  in modo tale che il numero di Reynolds rimanga inalterato. Indicati con il pedice  $m$  le grandezze relative al modello deve risultare

$$\frac{U_0 D}{\nu} = \frac{U_{0m} D_m}{\nu_m}$$

Utilizzando nel modello, come di solito avviene, lo stesso fluido del problema originale si ha

$$\frac{U_{0m}}{U_0} = \frac{D}{D_m}$$

Tale risultato indica che se il rapporto  $D_m/D$  é pari a  $1/10$ , il rapporto  $U_{0m}/U_0$  dovrà essere pari a  $10$ . Il valore ricercato di  $C_D$  sará dunque pari a  $8R_m / (\pi \rho U_{0m}^2 D_m^2)$

- Consideriamo ora un problema lievemente diverso:

la batisfera si trova in prossimitá della superficie libera a una profonditá pari a  $h$ . Analizzando il problema risulta chiaramente che il valore di  $R$  sará

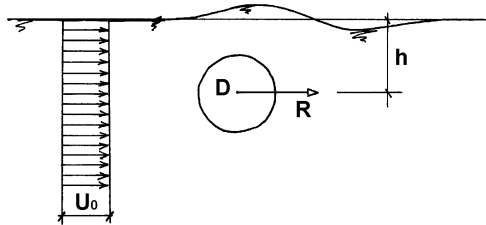


Figure 12.2:

influenzato anche dal valore di  $h$  e dal valore dell'accelerazione di gravitá

*g.* La presenza della sfera in prossimitá della superficie libera genera infatti un'onda la cui evoluzione dipende da  $g$

$$R = f(\rho, U, D, \nu, g, h)$$

Applicando il teorema II si ottiene

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left( Re, Fr, \frac{h}{D} \right)$$

essendo

$$Re = \frac{UD}{\nu}; \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gD}}.$$

In questo problema per determinare  $R$  é necessario valutare  $C_d$  per i valori di  $Re, Fr, \frac{h}{D}$  propri del problema originale. Vediamo se é possibile utilizzare un modello. Per semplicitá indichiamo  $\lambda = \frac{L_m}{L}$  la scala di riduzione delle lunghezze e con  $\tau = \frac{T_m}{T}$  la scala di riduzione dei tempi. La scala di riduzione di ogni altra grandezza cinematica deriva dalla conoscenza di  $\lambda$  e  $\tau$ . Infatti

$$v = \frac{U_m}{U} = \frac{L_M}{L} \frac{T}{T_m} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

La scala  $v$  di riduzione delle velocitá é pari dunque a  $\frac{\lambda}{\tau}$ . Similmente é possibile determinare per esempio la scala di riduzione delle accelerazioni. Una corretta modellazione del fenomeno impone che i valori del numero di Reynolds, del numero di Froude e il rapporto  $h/D$  del prototipo e del modello risultino uguali. E' evidente che se il modello é ridotto in scala, il rapporto  $h_m/D_m$  risulta uguale al rapporto  $h/D$ .

Vediamo ora cosa emerge imponendo

$$Re = Re_m$$

Utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo si ha:

$$\frac{L^2}{T} = \frac{L_m^2}{T_m} \implies \tau = \frac{T_m}{T} = \left( \frac{L_m}{L} \right)^2 = \lambda^2.$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze  $\lambda$ , l'uguaglianza dei numeri di Reynolds del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi  $\tau$  pari a  $\lambda^2$  e conseguentemente le scale di riduzione di tutte le altre grandezze cinematiche. Ad esempio

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \lambda^{-1}.$$

Vediamo ora cosa segue imponendo

$$Fr = Fr_m$$

$$\frac{L}{T\sqrt{L}} = \frac{L_m}{T_m\sqrt{L_m}} \implies \tau = \frac{T_m}{T} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze  $\lambda$ , l'uguaglianza dei numeri di Froude del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi  $\tau$  pari a  $\lambda^{\frac{1}{2}}$ . Emerge che utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo é impossibile mantenere inalterati i valori di tutti i numeri adimensionali che influenzano il fenomeno. E' infatti possibile mantenere inalterato il valore di un solo numero adimensionale.

- Se si mantiene inalterato il numero di Reynolds si effettuerá una “similitudine di Reynolds”. Se viceversa si manterrá inalterato il numero di Froude si effettuerá una “similitudine di Froude”. In funzione del problema in esame potranno essere considerate similitudini di Mach, Weber, ...

E' evidente che si sceglierá di effettuare una certa similitudine invece di un'altra in funzione dell'importanza degli effetti rappresentati dai diversi numeri.

- Se gli effetti viscosi sono i piú rilevanti si sceglierá di effettuare una similitudine di Reynolds

- Se gli effetti gravitazionali sono i piú rilevanti si sceglierá di effettuare una similitudine di Froude ...

- Resta da sottolineare che l'uguaglianza fra il numero di Newton del prototipo e quello del modello fissa la scala di riduzione delle forze

$$Ne = Ne_m$$

Utilizzando nel prototipo e nel modello lo stesso fluido

$$\frac{F}{L^4 T^{-2}} = \frac{F_m}{L_m^4 T_m^{-2}} \implies \varphi = \frac{F_m}{F} = \left(\frac{L_m}{L}\right)^4 \left(\frac{T_m}{T}\right)^{-2} = \lambda^4 \tau^{-2}.$$

# Chapter 13

## DESCRIZIONE DEL MOTO DEI FLUIDI

- Consideriamo un volume di fluido  $V(t)$  in movimento che all'istante iniziale  $t = 0$  occupa la regione  $V_0$ .

Sia  $(x_1, x_2, x_3)$  un sistema cartesiano di riferimento fisso nello spazio e  $(X_1, X_2, X_3)$  la posizione della generica particella di fluido all'istante iniziale, rispetto al sistema di riferimento  $(x_1, x_2, x_3)$ .

- Una qualunque grandezza  $F$  del fluido (ad esempio la densità  $\rho$ ) può essere descritta fornendo la funzione  $f_1$

$$F = f_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

o fornendo la funzione  $f_2$

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

Nel primo caso (descrizione lagrangiana), fissando i valori di  $X_1, X_2, X_3$ , si ottiene una funzione che descrive la variazione di  $F$  di una particolare particella fluida al variare del tempo sapendo che quella particella fluida occuperà posizioni diverse nello spazio al trascorrere del tempo.

Nel secondo caso (descrizione euleriana), fissando i valori di  $x_1, x_2, x_3$ , si ottiene una funzione che descrive la variazione di  $F$  in un punto dello spazio che al variare del tempo sarà occupato da particelle diverse.

Le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  sono chiaramente diverse e sono legate fra di loro dal moto del fluido. In particolare nota la funzione  $f_2$  è possibile ricavare  $f_1$  se sono note le funzioni



$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\x_2 &= \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\x_3 &= \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t)\end{aligned}$$

queste ultime descrivono il moto delle particelle fluide. In particolare fissato il valore di  $X_1, X_2, X_3$  le funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  descrivono la traiettoria di una particella fluida. Siccome una particella fluida non può occupare due posizioni diverse allo stesso tempo e due particelle fluide non possono occupare la stessa posizione, le funzioni  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sono invertibili e in particolare si possono ottenere le funzioni

$$\begin{aligned}X_1 &= \Phi_1(x_1, x_2, x_3, t) \\X_2 &= \Phi_2(x_1, x_2, x_3, t) \\X_3 &= \Phi_3(x_1, x_2, x_3, t).\end{aligned}$$

Le funzioni  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  consentono a loro volta di determinare  $f_2$  nota la funzione  $f_1$ . Essendo  $f_1$  diversa da  $f_2$ , è evidente che la derivata di  $f_1$  rispetto al tempo sarà diversa dalla derivata parziale rispetto al tempo di  $f_2$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \neq \frac{\partial f_2}{\partial t}$$

In particolare  $\partial f_1 / \partial t$  descrive come cambia nel tempo la grandezza  $F$  di una particella fluida che si muove nello spazio. La funzione  $\partial f_2 / \partial t$  descrive invece come varia  $F$  in un punto dello spazio che al trascorrere del tempo sarà occupato da particelle fluide diverse. Per descrivere il moto dei fluidi si usa in generale un approccio euleriano, cioè si assegna o si ricerca la funzione

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

e si indica con  $\frac{\partial F}{\partial t}$  la funzione  $\frac{\partial f_2}{\partial t}$ .

Certi concetti della fisica richiedono tuttavia la valutazione di  $\frac{\partial f_1}{\partial t}$  che indicheremo con  $\frac{dF}{dt}$ .

$\frac{\partial F}{\partial t}$  è detta derivata locale.

$\frac{dF}{dt}$  è detta derivata totale o materiale o sostanziale.

Considerando che spesso è necessario valutare  $\frac{dF}{dt}$  e che  $F$  è usualmente assegnata come funzione di  $x_1, x_2, x_3, t$  è necessario individuare una semplice procedura per valutare  $\frac{\partial f_1}{\partial t}$  nota  $f_2$ .

Considerando che  $f_2(x_1, x_2, x_3, t)$  é uguale a  $f_2(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t)$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [f_2(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t)]_{\mathbf{X}} = \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{aligned}$$

Notando che  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$  sono le tre componenti della velocità delle particelle fluide, dalla formula precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F. \end{aligned}$$

La derivata materiale é dunque fornita dalla somma della derivata locale piú il cosiddetto termine convettivo pari al prodotto scalare fra le velocità e il gradiente di  $F$ . <sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup>• Assegnata la funzione scalare  $F(x_1, x_2, x_3, t)$ , il gradiente di  $F$ , indicato con  $\nabla F$ , é un vettore le cui componenti sono cosí definite

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$$

• Assegnata la funzione vettoriale  $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, t)$  che corrisponde a tre funzioni scalari  $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}, t), F_2(\mathbf{x}, t), F_3(\mathbf{x}, t))$ , la divergenza di  $\mathbf{F}$ , indicata con  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ , é uno scalare cosí definito

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

Il rotore di  $\mathbf{F}$ , indicato con  $\nabla \times \mathbf{F}$ , é un vettore cosí definito

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

• Assegnati due vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , ( $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ), il prodotto scalare é cosí definito

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

il prodotto vettoriale é cosí definito

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

## ALCUNE GRANDEZZE CINEMATICHE

• Utilizzando un approccio euleriano, il moto di un fluido viene descritto assegnando il vettore velocità come funzione di  $\mathbf{x}$  e del tempo  $t$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

o, equivalentemente come:

$$v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

• Il calcolo dell'accelerazione può essere semplicemente eseguito valutando la derivata materiale di  $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow a_1 &= \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ a_2 &= \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ a_3 &= \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

dove

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

• Le traiettorie, che sono un concetto tipicamente lagrangiano, possono essere calcolate integrando l'equazione

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt$$

note le posizioni iniziali delle particelle fluide.

• Le linee di corrente sono definite come quelle linee che in ogni punto sono tangenti, al vettore velocità. Esse si ricavano integrando l'equazione

$$d\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

## LA DERIVATA MATERIALE DI UNA GRANDEZZA INTEGRATA SU UN VOLUME MATERIALE

Nello studio del moto dei fluidi é spesso necessario calcolare l'integrale di una certa grandezza  $F$  su un **volume materiale di fluido**, cioè un volume di fluido costituito sempre dalle stesse particelle fluide. In alcuni casi é necessario valutare la derivata materiale (fatta cioè seguendo il moto della massa fluida) di tale quantità. In altre parole é necessario valutare:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV.$$

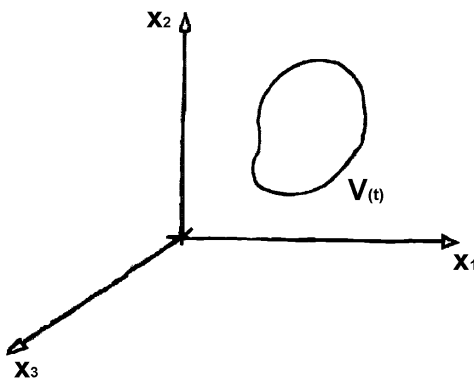


Figure 13.1:

Per esempio la massa  $M$  associata a un volume materiale di fluido (in movimento) é:

$$M = \int_{V(t)} \rho dV.$$

Infatti dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata a un volume infinitesimo  $dV$  sarà  $\rho dV$ . Per determinare la massa contenuta in  $V$  é necessario sommare tutti i contributi e quindi integrare su tutto il volume  $V(t)$ . Il principio di conservazione della massa impone poi che la massa  $M$  associata al volume  $V(t)$  di fluido in movimento rimanga costante. É necessario dunque imporre

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0.$$

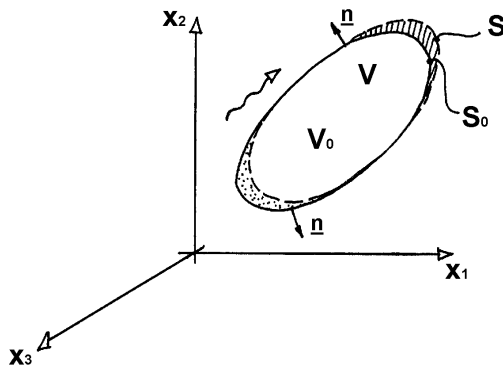


Figure 13.2:

Tale calcolo risulta difficile da effettuarsi pur essendo nota la funzione  $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ , considerato che il volume  $V(t)$  é mobile. É pertanto utile trasformare l'integrale di cui sopra in uno da effettuarsi su un volume fisso nello spazio. Vediamo come ciò é possibile.

- Consideriamo il volume  $V(t)$  al tempo  $t_0$  e denotiamolo con  $V_0$ . Indichiamo con  $S_0$  la sua frontiera. Consideriamo quindi il volume all'istante  $t_0 + \Delta t$  e indichiamolo con  $V$ . Sia  $S$  la frontiera di  $V$ . Il volume  $V$  sará quasi coincidente con  $V_0$ , essendo trascorso un tempo piccolo (a rigori infinitesimo)  $\Delta t$ . Con riferimento alla figura 13.2, rispetto a  $V_0$ , il volume  $V$  avrá in piú il volume tratteggiato e in meno il volume punteggiato. Cerchiamo di quantificare tale differenza. Con riferimento alla figura 13.3 consideriamo una parte infinitesima di  $S_0$  e denotiamola con  $dS_0$ . Sia  $\mathbf{n}$  la normale alla superficie, uscente per convenzione dal volume  $V_0$ . Se indichiamo con  $\mathbf{v}$  la velocità del fluido valutata sulla superficie infinitesima  $dS_0$ , dopo un tempo piccolo  $\Delta t$ , la particella fluida che si trovava su  $dS_0$  si sará spostata nello spazio di una quantità  $\mathbf{v}dt$ . Essendo  $dS_0$  una superficie infinitesima si possono trascurare le differenze di velocità fra le diverse particelle fluide che si trovano su  $dS_0$ . Il volume di fluido che ha attraversato  $dS_0$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  e che occuperá il volume  $dS$  delimitato da  $dS_0$ , e da una superficie cilindrica con generatrici parallele a  $\mathbf{v}dt$  (vedi figura 13.3), sará dunque  $dS_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t$

Tale volume sará positivo se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é positivo (se cioè il fluido esce da  $V_0$ ), mentre sará negativo se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é negativo (se cioè il fluido entra in  $V_0$ ).

La differenza fra il volume  $V$  e il volume  $V_0$  sará dunque:

$$\int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t dS_0.$$

Vediamo ora di valutare

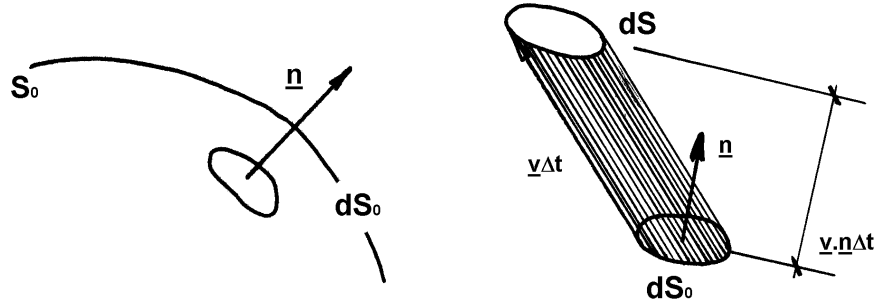


Figure 13.3:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV$$

ad un generico tempo  $t_0$ . Applichiamo la definizione di derivata

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V F(t_0 + \Delta t) dV - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} F(t_0 + \Delta t) dV_0 + \int_{S_0} F(t_0 + \Delta t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} \left[ F(t_0) + \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} \Delta t \right] dV_0 + \int_{S_0} F(t_0 + \Delta t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \int_{V_0} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} dV_0 + \int_{S_0} F(t_0) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 \end{aligned}$$

Si é quindi dimostrato (dimostrazioni piú rigorose sono disponibili nei libri di testo) il teorema del trasporto:

$$\left( \frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right)_{t=t_0} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} dV_0 + \int_{S_0} F(t_0) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0$$

essendo  $V_0$  un volume fisso nello spazio che nell'istante in considerazione coincide con il volume mobile  $V$ .

# Chapter 14

## I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

- Il moto dei fluidi é controllato da alcuni principi fondamentali della fisica. Enunceremo nel seguito:
  - il principio di conservazione della massa
  - il principio della quantità di moto
  - il principio del momento della quantità di motoche verranno utilizzati nel corso

### IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

“La massa associata ad un volume materiale di fluido é costante nel tempo”

### IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO

“La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un volume materiale di fluido é uguale alla risultante delle forze che l'esterno esercita sul volume di fluido”

### IL PRINCIPIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO

“La derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto di un volume materiale di fluido é uguale al momento risultante delle forze che l'esterno esercita sul volume di fluido”

- Vediamo ora a quali equazioni conducono i principi enunciati preceden-

temente

## IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

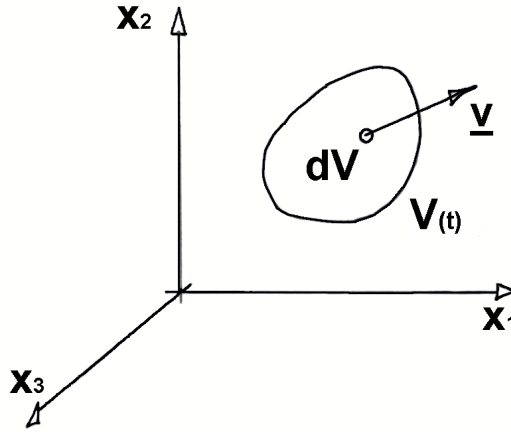


Figure 14.1:

Dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata al volume infinitesimo  $dV$  è  $\rho dV$ .

La massa del volume materiale  $V(t)$  è dunque fornita dalla somma dei contributi derivanti da tutti i volumi infinitesimi che compongono  $V(t)$ . Si ha dunque

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho dV$$

e il principio di conservazione della massa impone la costanza di  $M$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = 0.$$

Utilizzando il teorema del trasporto si può anche scrivere

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0$$

Per quanto esposto nel capitolo 13 la quantità

$$\int_{S_0} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0$$



rappresenta la massa di fluido che attraversa la superficie  $S_0$  nell'unit  di tempo. Tale quantit    detta "portata massica". Il principio della conservazione della massa impone che

$$\int_{S_0} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = - \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0$$

In altre parole la portata massica deve uguagliare la derivata temporale della massa contenuta all'interno di  $V_0$  cambiata di segno.

In particolare se la densit  del fluido   costante, essendo inoltre  $V_0$  costante, la portata massica associata a  $S_0$  deve annullarsi. Tanto fluido entra in  $V_0$ , tanto deve uscire, non essendo possibile che il fluido si accumuli in  $V_0$  per variazioni di densit .

## IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA DI MOTO

Come discusso nel punto precedente la massa infinitesima associata al volume  $dV$  risulta pari a  $\rho dV$ .

La quantit  di moto della massa  $\rho dV$  sar   $\rho \mathbf{v} dV$ .

Si noti che la quantit  di moto   una grandezza vettoriale la cui direzione e verso coincidono con quelli di  $\mathbf{v}$ . La quantit  di moto del volume  $V(t)$  sar  dunque fornita da

$$\int_V \rho \mathbf{v} dV$$

Il principio della quantit  di moto impone dunque

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} dS$$

dove le forze che l'esterno esercita su  $V$  sono state suddivise in forze di massa e forze di superficie (vedi capitolo 2). Utilizzando il teorema del trasporto si pu  anche scrivere

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{t} dS_0$$

o in forma compatta

$$\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}$$

Dove

$$\mathbf{I} = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV_0 \quad \text{  il termine di inerzia locale}$$

$$\mathbf{M} = \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 \quad \text{é il flusso di quantità di moto attraverso } S_0$$

$$\mathbf{G} = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0 \quad \text{é la risultante delle forze di massa sul volume } V_0. \text{ }^{(1)}$$

$$\mathbf{\Pi} = \int_{S_0} \mathbf{t} dS_0 \quad \text{é la risultante delle forze di superficie sulla superficie } S_0.$$

Spesso il termine  $\mathbf{M}$  viene suddiviso in due contributi

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_u - \mathbf{M}_i$$

dividendo la superficie  $S_0$  in due parti. Nella prima  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é positivo e il fluido esce da  $V_0$ , nella seconda  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  é negativo e il fluido entra in  $V_0$ .  $\mathbf{M}_u$  rappresenta quindi il flusso di quantità di moto in uscita mentre  $\mathbf{M}_i$  quello in ingresso. Resta da sottolineare che sia  $\mathbf{M}_u$  che  $\mathbf{M}_i$  sono quantità vettoriali la cui direzione é coincidente con quella della velocità  $\mathbf{v}$ . Segue che  $-\mathbf{M}_i$  é un vettore opposto a  $\mathbf{M}_i$ .

## IL PRINCIPIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Procedendo come nei punti precedenti, il principio del momento della quantità di moto fornisce

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV + \int_{S(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS$$

o, applicando il teorema del trasporto

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v})] dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{V_0} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS_0.$$

• Per concludere questa lezione illustriamo alcune semplici applicazioni dei principi della quantità di moto e del momento della quantità di moto in forma integrale che dimostra la capacità della relativa equazione di consentire

---

<sup>(1)</sup>Nel caso di campo di forze gravitazionali  $\mathbf{G}$  corrisponde al peso del fluido contenuto in  $V_0$ .

la soluzione di problemi anche complessi.

Si consideri un getto che orizzontalmente va a urtare una superficie verticale. Siano  $U_0$  e  $\Omega$  la velocità del fluido nel getto e la sezione di quest'ultimo (vedi figura 14.2). Si calcoli la forza  $\mathbf{F}$  che il getto esercita sulla superficie.

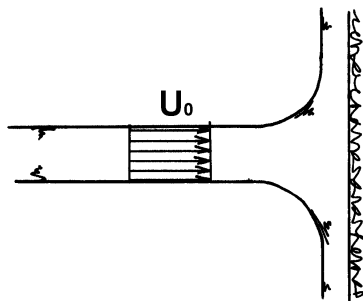


Figure 14.2:

**Soluzione:** il problema può essere risolto utilizzando l'equazione del principio della quantità di moto in forma integrale

$$\mathbf{I} + \mathbf{M}_u - \mathbf{M}_i = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}$$

Per procedere è necessario in primo luogo individuare il volume  $V$ . È evidente che l'equazione precedente vale qualunque volume si scelga, ma una scelta opportuna consente la soluzione del problema mentre altre scelte non conducono a utili espressioni. Per risolvere il problema in esame consideriamo il volume (detto il controllo) tratteggiato in figura 14.3 e introduciamo un sistema di riferimento. Notiamo inoltre che per la simmetria del problema la forza  $\mathbf{F}$  sarà diretta lungo l'asse  $x$ . È conveniente quindi proiettare l'equazione del principio della quantità di moto lungo la direzione  $x$

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x$$

Assumendo il problema stazionario il termine

$$I_x = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV_0$$

sarà nullo. Si noti che  $\mathbf{v}$  è stato espresso come  $(u, v, w)$ .

Se inoltre assumiamo che l'asse  $z$  sia verticale, il vettore  $\mathbf{G}$  sarà parallelo a  $z$  e quindi il termine

$$\mathbf{G} = \int_{V_0} \rho g_x dV_0$$

sarà anch'esso nullo. Notiamo ora che dalle superfici  $BC$  e  $AF$  non esce

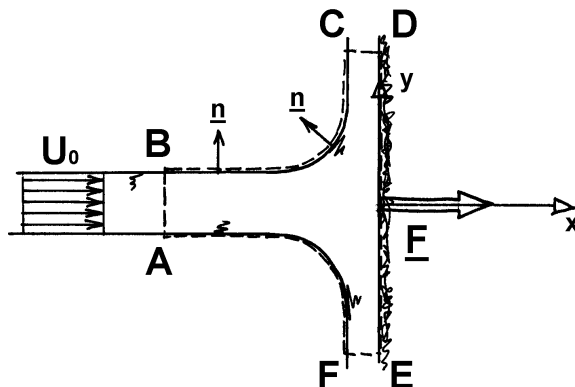


Figure 14.3:

né entra della massa in quanto  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{n}$  sono ortogonali. Si ha un flusso di massa e quindi di quantità di moto solo attraverso  $AB$ ,  $CD$  e  $EF$ . In particolare la superficie  $AB$  contribuisce a  $\mathbf{M}_i$  a mentre le superfici  $CD$  e  $EF$  contribuiscono a  $\mathbf{M}_u$ . Infine, notando che il vettore velocità del fluido in uscita è parallelo all'asse  $y$  (è evidente che il fluido che attraversa le superfici  $CD$  e  $EF$  si muove parallelamente alla superficie rigida), si può concludere che

$$M_{ux} = 0.$$

Risulta inoltre

$$M_{ix} = \int_{\Omega} \rho U_0^2 d\Omega = \rho U_0^2 \Omega$$

essendo la velocità del fluido un ingresso pari a  $U_0$  e uniformemente distribuita su  $\Omega$ . Come detto precedentemente  $\Pi$  rappresenta la risultante delle forze di superficie che l'esterno esercita sul fluido contenuto all'interno di  $V_0$ . Sulle superfici  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $EF$  e  $FA$  la pressione relativa è nulla e non esistono (o sono trascurabili) le tensioni tangenziali. Segue quindi che  $\Pi$  è pari a  $-\mathbf{F}$  (principio di azione e reazione) e in particolare è

$$\Pi_x = -F_x$$

Si può quindi concludere

$$-\rho U_0^2 \Omega = -F_x$$

oppure

$$F_x = \rho U_0^2 \Omega$$

Il problema illustrato verrà poi ripreso nel seguito per illustrare come sia possibile estrarre energia dal getto e trasformarla in lavoro. A causa della particolare simmetria del problema in questo caso é evidente che la retta di azione di  $F_x$  passa per l'origine degli assi.

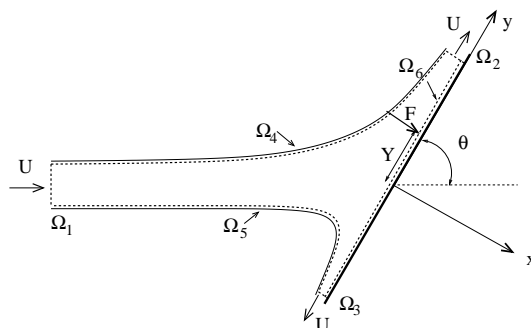


Figure 14.4:

Se la piastra fosse inclinata, dopo aver inserito il sistema di assi illustrato in figura 14.4, applicando l'equazione della quantità di moto in direzione  $x$  al volume di fluido tratteggiato e ragionando analogamente al caso precedente, si ottiene:

$$F = \rho U^2 \Omega_1 \sin \theta.$$

La componente lungo  $y$  del principio della quantità di moto, unita al principio di conservazione della massa, consente di calcolare  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  :

$$\Omega_2 = \frac{\Omega_1}{2} (1 + \cos \theta) \quad \Omega_3 = \frac{\Omega_1}{2} (1 - \cos \theta).$$

E' evidente che in questo caso la retta di azione di  $F$  non passa per l'origine degli assi.

La determinazione della retta di azione della forza  $F$  richiede l'applicazione del principio del momento della quantità di moto, sempre in riferimento al volume tratteggiato. Ricordando che il problema é piano, stazionario e che si suppone che la gravità sia diretta lungo  $z$ , la componente lungo  $z$  dell'equazione che esprime il principio del momento della quantità di moto risulta:

$$\int_{S_0} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{S_0} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t} \quad (14.1)$$

essendo  $\boldsymbol{\zeta}$  il vettore distanza dell'elemento  $dS$  dall'origine degli assi e  $S_0$  la superficie del volume di controllo tratteggiato che può essere scomposta nelle superfici  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$  e  $\Omega_6$  mostrate in figura 14.4. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= 0 \\ \int_{\Omega_2} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= -\rho U^2 \frac{d_2^2}{2} \\ \int_{\Omega_3} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= +\rho U^2 \frac{d_3^2}{2} \\ \int_{\Omega_4} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{\Omega_5} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Omega_6} (\boldsymbol{\zeta} \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \end{aligned}$$

Avendo indicato con  $d_2$  e  $d_3$  l'altezza delle superfici  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  che risultano essere rettangoli di larghezza unitaria.

Le uniche tensioni agenti sul volume di controllo sono dunque quelle esercitate dalla piastra in risposta alla sollecitazione del fluido:

$$\int_{S_0} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t} dS_0 = \int_{\Omega_6} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t} dS_0 = -FY$$

avendo indicato con  $Y$  la posizione della retta di azione di  $\mathbf{F}$  e con  $F$ , come consuetudine, il modulo della forza  $\mathbf{F}$ . Sostituendo le relazioni trovate nella 14.1 si ottiene:

$$\frac{\rho U^2}{2} (d_2^2 - d_3^2) = FY$$

da cui

$$Y = \frac{\rho U^2}{2F} (d_2^2 - d_3^2)$$

# Chapter 15

## LE CORRENTI FLUIDE

Lo studio del moto dei fluidi nel caso generale é estremamente complesso e la scrittura delle equazioni necessarie a determinare il campo di moto e lo stato di tensione cosí come la descrizione delle tecniche di soluzione di tali equazioni sono argomenti propri dei corsi della laurea specialistica. Ci limiteremo qui ad analizzare un caso particolare ma molto frequente e di notevole rilevanza applicativa che é quello delle correnti.

Le correnti fluide sono definite come un moto in cui la velocità é “sensibilmente” parallela a una direzione che é facile individuare. Con il termine “sensibilmente” accettiamo che la direzione della velocità si discosti localmente da quella della corrente anche se gli angoli formati da  $\mathbf{v}$  e dalla direzione della corrente devono essere comunque piccoli e tali da poter essere trascurati. Si dice anche che una corrente é un moto quasi unidirezionale.

- Definiamo ora alcune grandezze tipiche delle correnti:

- *Sezione della corrente:  $\Omega$*

La sezione di una corrente é la superficie individuata dall'intersezione di un piano ortogonale alla direzione della corrente con il dominio fluido.

- *Asse della corrente e ascissa curvilinea  $s$*

L'asse della corrente é il luogo geometrico dei baricentri delle diverse sezioni. E' possibile introdurre un'ascissa curvilinea lungo l'asse della corrente.

- *Portata volumetrica della corrente:  $Q$*

La portata volumetrica della corrente é definita come il flusso di volume (di fluido) attraverso la generica sezione  $\Omega$

$$Q = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$$

Abbiamo già visto (Capitolo 13) che considerando una superficie infinites-

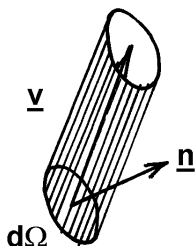


Figure 15.1:

ima (in questo caso  $d\Omega$ ) di normale  $\mathbf{n}$ , il volume di fluido che attraversa  $d\Omega$  nel tempo  $dt$  é fornito dall'espressione  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dt d\Omega$ , avendo assunto che tutte le particelle fluide che si trovano su  $d\Omega$  all'istante iniziale si muovono con la stessa velocità  $\mathbf{v}$  e percorrono la distanza  $\mathbf{v}dt$  nel tempo  $dt$ . Definito il flusso come il volume che attraversa la superficie  $\Omega$  rapportato al tempo deriva

$$Q = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$$

- *Portata massica della corrente:*  $Q_m$

La portata massica della corrente é definita come il flusso di massa (di fluido) che attraversa la generica sezione  $\Omega$

$$Q_m = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$$

- *Portata ponderale della corrente:*  $Q_p$

La portata ponderale della corrente é definita come il flusso di peso (di fluido) che attraversa la generica sezione  $\Omega$

$$Q_p = \int_{\Omega} \rho g (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega$$

- *La velocità media sulla sezione:*  $U$

Muovendosi all'interno di una sezione, la velocità assume valori diversi. E' quindi utile definire il valore medio che la velocità assume su  $\Omega$ . Considerando che la velocità é "sensibilmente" ortogonale a  $\Omega$ , é opportuno considerare solo la componente di  $\mathbf{v}$  perpendicolare a  $\Omega$ . Si ha quindi

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Omega$$



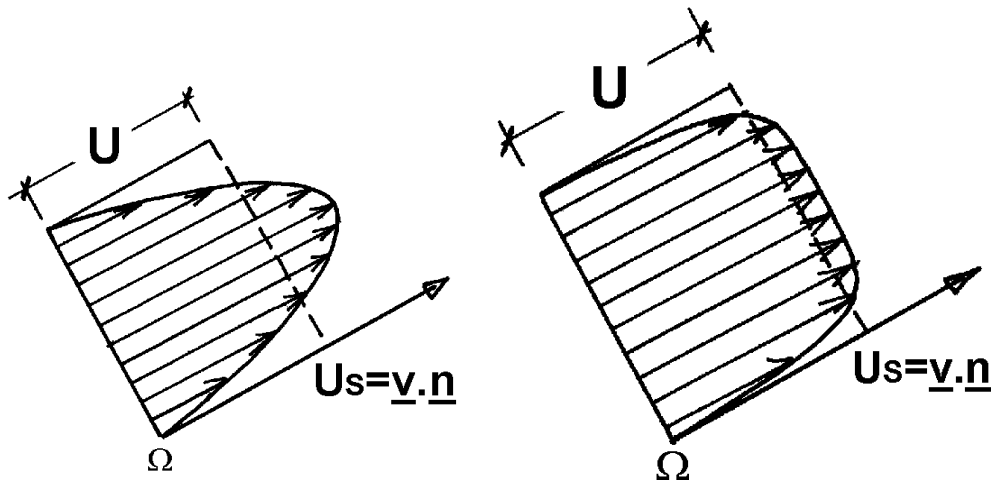


Figure 15.2:

Nei moti laminari (si rimanda ai corsi di laurea specialistica per una definizione precisa del regime di moto laminare e di quello turbolento) la velocità si discosta anche sensibilmente da  $U$  mentre nei moti turbolenti la distribuzione di velocità sulla sezione tende ad essere molto piatta e pari ad  $U$ .

- *Il carico piezometrico  $h$*

Nel Capitolo 4 è stato definito il carico piezometrico  $h$  come somma della quota  $z$  e della quantità  $p/\gamma$  e si è visto che in un fluido in quiete  $h$  risulta costante. È possibile dimostrare (anche se ciò non verrà qui fatto) che il valore di  $h$  non varia muovendosi su una sezione, mentre  $h$  varia al variare di  $s$ . È quindi possibile attribuire un valore di  $h$  alla sezione.

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

- *il carico totale  $H$*

Al carico piezometrico è possibile aggiungere la quantità  $\frac{v^2}{2g} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g}$  detta carico cinetico e ottenere il carico totale. È facile vedere che il carico cinetico rappresenta l'energia cinetica del fluido per unità di peso, cioè l'energia cinetica di una massa di fluido divisa per il peso del fluido.

Analogamente è possibile vedere che il termine  $z$  del carico piezometrico rappresenta l'energia potenziale per unità di peso.

Il termine  $p/\gamma$ , detto carico di pressione, rappresenta un'energia per unità di peso non posseduta dai corpi rigidi. Dimensionalmente  $h, H, z, p/\gamma, \frac{v^2}{2g}$  sono delle lunghezze e si misurano in metri nel sistema metrico internazionale.

Siccome la velocità non é costante sulla sezione é opportuno definire il carico totale mediato sulla sezione

$$H = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left( h + \frac{v^2}{2g} \right) d\Omega = h + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega$$

Tenendo conto che la componente della velocità normale alla superficie può essere scritta come somma di  $U$  piú uno scarto  $\bar{u}$  che per definizione ha media nulla sulla sezione

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = U + \bar{u}$$

con

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{u} d\Omega = 0$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega &= \frac{1}{\Omega} \frac{1}{2g} \int_{\Omega} (U + \bar{u})^2 d\Omega = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{2g} \int_{\Omega} U^2 \left( 1 + \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 d\Omega = \\ &= \frac{U^2}{2g} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left[ 1 + \left( \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 \right] d\Omega \end{aligned}$$

Essendo in generale  $\bar{u} \ll U$  e quindi  $(\bar{u}/U)^2 \ll 1$  si può scrivere

$$H \cong h + \frac{U^2}{2g}$$

- *Flusso di energia meccanica di una corrente*

Nei punti precedenti abbiamo visto che a una corrente possiamo associare una portata di fluido cioè un flusso di volume.  $Q$  rappresenta il volume di fluido che attraversa  $\Omega$  nell'unità di tempo. Al volume di fluido che attraversa  $\Omega$  possiamo associare una massa, un peso ed evidentemente un'energia. Possiamo quindi definire il flusso di energia associato ad una corrente come

$$P = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \gamma H d\Omega$$

essendo  $H$  l'energia per unità di peso.

Segue

$$P \cong \int_{\Omega} \gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \left[ h + \frac{U^2}{2g} \right] d\Omega \cong \gamma Q H$$

Per ultimo sottolineiamo che tutte le grandezze caratterizzanti le correnti ( $U, Q, h, H, \dots$ ) risultano funzioni dell'ascissa  $s$  e del tempo  $t$ .

Per la determinazione di  $U, Q, h, \dots$  si utilizzano delle equazioni che derivano dai principi enunciati nel capitolo 14 e che verranno ricavate nel capitolo 16 e nel capitolo 17.

## Chapter 16

# IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER UNA CORRENTE: L'EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Nel capitolo 14 si é visto che il principio di conservazione della massa conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = 0$$

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo  $V_0$  (vedi figura 16.1) individuato dal contorno della corrente al tempo  $t$  e dalle sezioni di ascisse  $s$  e  $s + ds$  (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo  $t + dt$ .

Il primo termine dell'equazione derivante dal principio di conservazione della massa può essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 \cong \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right)_{s,t} ds$$

dove  $(\Omega)_{s,t} ds$ , a meno di termini di ordine  $ds^2$ , rappresenta il volume  $V_0$  e dove le quantità  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  e  $\Omega$  possono essere valutate in  $s$  e al tempo  $t$ .

Il secondo termine rappresenta il flusso di massa attraverso la superficie  $S_0$  che delimita  $V_0$ , positivo se uscente. Dalla sezione posta in  $s + ds$  il flusso é  $[\rho Q]_{s+ds,t}$  mentre il flusso corrispondente alla sezione posta in  $s$  é  $[\rho Q]_{s,t}$ . La massa uscita nell'intervallo  $dt$  dalla superficie laterale del volume di controllo

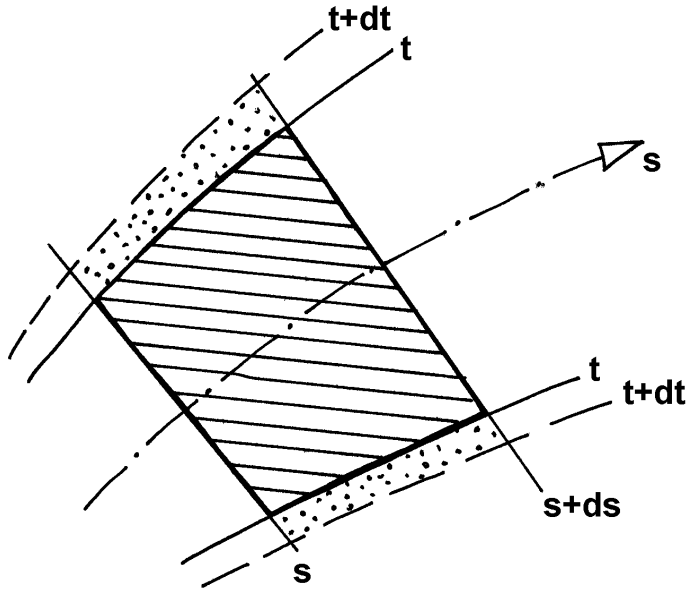


Figure 16.1:

é pari al prodotto di  $\rho$  per il volume punteggiato in figura, quest'ultimo essendo pari a

$$\left[ \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} dt ds$$

il flusso legato alla superficie laterale sarà dunque

$$\left[ \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds$$

L'equazione derivante dal principio di conservazione della massa, detta anche equazione di continuità, risulta dunque

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s+ds,dt} - [\rho Q]_{s,dt} + \left[ \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds = 0$$

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s,dt} + \left[ \frac{\partial (\rho Q)}{\partial s} \right]_{s,t} ds - [\rho Q]_{s,dt} + \left[ \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Q)}{\partial s} = 0$$

Come detto in precedenza, questa é l'equazione di continuitá per le correnti.

- Nel caso di un moto stazionario, un moto cioé in cui le grandezze non dipendono dal tempo si ha

$$\frac{d(\rho Q)}{ds} = 0$$

Si noti che la derivata rispetto a  $s$  é ora ordinaria, considerato che sia  $\rho$  sia  $Q$  dipendono solo da  $s$ .

Segue

$$\rho Q = \text{costante}$$

la portata massica lungo le correnti stazionarie si mantiene dunque costante. Se inoltre il fluido in esame é a densitá costante l'equazione di continuitá impone

$$Q = \text{costante}.$$

Essendo  $Q = U\Omega$ , quando la sezione diminuisce la velocitá aumenta, quando invece la sezione aumenta la velocitá diminuisce.

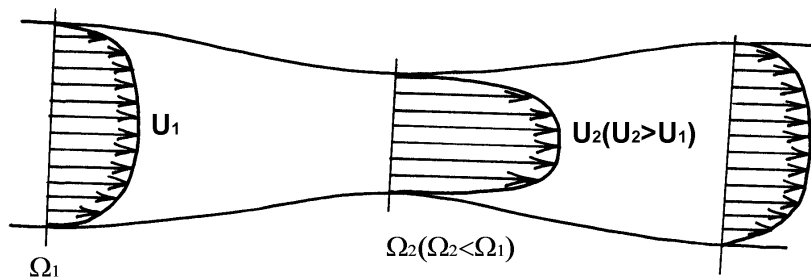


Figure 16.2:

Ciò non é vero se il fluido é a densitá variabile. In tal caso infatti si deve mantenere costante il prodotto  $\rho U\Omega$ .

- Nel caso di un condotto a sezione indipendente dal tempo (per esempio un condotto in acciaio) e di un fluido a densitá costante si ha

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0.$$

Si noti che la derivata rispetto a  $s$  rimane parziale. La funzione  $Q$  che soddisfa l'equazione precedente é

$$Q = Q(t) = \Omega(s) U(s, t).$$

Se poi la sezione é costante si ha

$$U = U(t)$$

cioé quello che si definisce un moto in blocco. Infatti in ogni sezione la velocità é uguale anche se essa varia nel tempo.

# Chapter 17

## IL PRINCIPIO DELLA QUANTITA' DI MOTO: L'EQUAZIONE DEL MOTO

- Nel capitolo 14 si é visto che il principio della quantità di moto conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{t} dS_0$$

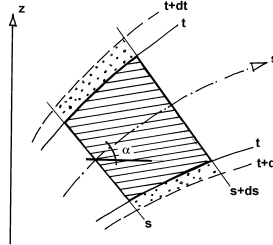


Figure 17.1:

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo  $V_0$  (vedi figura 17.1) individuato dal contorno della corrente al tempo  $t$  e dalle sezioni poste all'ascissa  $s$  e all'ascissa  $s + ds$  (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo  $t + dt$ . Infine l'angolo  $\alpha$  denoti l'angolo formato dall'asse della corrente con un piano orizzontale e il campo di forze  $\mathbf{f}$  sia quello gravitazionale.

L'equazione considerata é un'equazione vettoriale. Essendo il vettore velocità parallelo all'ascissa curvilinea  $s$ , proiettiamo l'equazione lungo  $s$

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s$$



Il termine  $I_s$  può essere approssimato dalla relazione

$$I_s = \left[ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \right]_{s,t} (\Omega)_{s,t} ds$$

dove  $(\Omega)_{s,t} ds$ , a meno di termini di ordine  $ds^2$ , rappresenta il volume  $V_0$ . La derivata rispetto al tempo di  $\rho U$  può essere valutata al tempo  $t$  e all'ascissa  $s$  comportando cioè un errore in  $I_s$  di ordine  $ds^2$  e  $dsdt$ .

Il fluido entra nel volume di controllo solo attraverso la sezione posta in  $s$ . Il flusso di quantità di moto in ingresso, proiettato nella direzione  $s$  è quindi

$$M_{is} = (\rho Qu)_{s,t}$$

Il flusso di quantità di moto in uscita è dato dalla somma di due termini

$$M_{us} = (\rho QU)_{s+ds,t} + (\rho)_{s,t} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{s,t} ds (U)_{s,t}$$

Il primo termine rappresenta il flusso di quantità di moto in uscita dalla sezione caratterizzata dall'ascissa  $s + ds$ , il secondo è legato al flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale. Invero come discusso nel capitolo 16 il termine

$$(\rho)_{s,t} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) ds$$

è il flusso di massa attraverso la superficie laterale del volume di controllo che trascina con se quantità di moto nella direzione  $s$ . Il termine  $G_s$  è

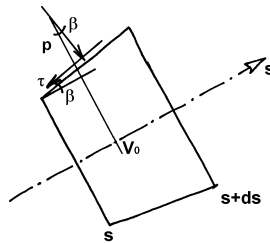


Figure 17.2:

facilmente calcolabile e risulta

$$G_s = -(\Omega)_{s,t} ds (\rho)_{s,t} g \sin \alpha$$

Resta infine da calcolare  $\Pi_s$ . Sulla sezione caratterizzata dall'ascissa  $s$ , la distribuzione della pressione è idrostatica (vedi capitolo 15) così come sulla

sezione posta in  $s + ds$ . Le tensioni tangenziali agenti sulle sezioni poste in  $s$  e  $s + ds$  non forniscono alcun contributo a  $\Pi_s$ .

Sulla superficie laterale, l'esterno esercita una tensione che ha una componente normale alla superficie e una tangente. Entrambe le componenti forniscono un contributo a  $\Pi_s$ . Con riferimento alla figura 17.2 e denotando con  $\beta$  l'angolo (piccolo) che il contorno forma con l'asse  $s$ , si ha

$$\Pi_s = (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p)_{s,t} S_\ell \sin \beta - (\tau)_{s,t} S_{\ell b} \cos \beta$$

Nell'espressione precedente mentre  $S_\ell$  indica tutta la superficie laterale del volume di controllo,  $S_{\ell b}$  é quella parte a contatto con un contorno solido in grado cioé di esercitare una resistenza al moto del fluido. Analizzando la geometria del problema é possibile dedurre che

$$S_\ell \sin \beta = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_{s,t} ds$$

$$S_{\ell b} = (B)_{s,t} ds$$

essendo  $B$  la parte del perimetro della generica sezione a contatto con un contorno solido (  $B$  é detto perimetro bagnato).

L'equazione della quantità di moto porge dunque

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial (\rho U)}{\partial t} \right]_{s,t} (\Omega)_{s,t} ds + (\rho Q U)_{s+ds,t} + \left( \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U \right)_{s,t} ds - (\rho Q U)_{s,t} = - \\ & - (\rho \Omega)_{s,t} g \sin \alpha ds + (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p)_{s,t} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_{s,t} ds - (\tau B)_{s,t} ds \end{aligned}$$

dove si é anche assunto che  $\beta$  sia cosí piccolo da poter considerare  $\cos \beta \cong 1$ .

Tenendo conto che

$$(\rho Q U)_{s+ds} = (\rho Q U)_s + \frac{\partial (\rho Q U)}{\partial s} ds + O(ds^2)$$

$$(p\Omega)_{s+ds} = (p\Omega)_s + \frac{\partial (p\Omega)}{\partial s} ds + O(ds^2)$$

e che il  $\sin \alpha$  può essere espresso come  $\partial z / \partial s$  indicando con  $z$  la quota dell'asse della corrente si ha

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} \Omega + \underline{U \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega} + \underline{U \frac{\partial (\rho Q)}{\partial s}} + \rho Q \frac{\partial U}{\partial s} + \underline{\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U} = -\gamma \Omega \frac{\partial z}{\partial s} - p \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} + p \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \tau B$$

essendo tutte le quantità valutate in  $s$  al tempo  $t$ . Nell'equazione precedente la somma dei termini sottolineati si annulla in forza dell'equazione di continuità.

Segue, dividendo per  $\gamma\Omega$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\tau B}{\gamma\Omega}$$

o ancora

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

essendo  $R_i$  il raggio idraulico della sezione pari al rapporto fra l'area della sezione ed il perimetro bagnato

$$R_i = \frac{\Omega}{B}$$

Infine per un fluido barotropico <sup>(1)</sup>, la cui densità é funzione solo della pressione, é possibile scrivere

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

ove

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \quad \text{e} \quad j = \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

L'equazione precedente costituisce l'equazione del moto di una corrente. Essa ci dice che il carico totale (l'energia per unità di peso del fluido) diminuisce nella direzione del moto a causa del termine  $-j$  ( $j$  é infatti una quantità sempre positiva) mentre il termine  $-\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$  può causare variazioni o positive o negative del carico.

Il termine  $j$  corrisponde alle perdite di carico per unità di percorso.

---

<sup>(1)</sup>Se il fluido é barotropico, cioè se  $\gamma = \gamma(p)$ , si ha

$$\frac{\partial}{\partial s} \int \frac{dp}{\gamma} = \frac{d}{dp} \int \frac{dp}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s}$$

# Chapter 18

## LA VALUTAZIONE DI $j$

• L'equazione di continuità e l'equazione del moto per le correnti richiedono, per essere risolte, un'espressione che leghi  $j$  alle caratteristiche cinematiche della corrente.

Per determinare tale relazione consideriamo un moto stazionario (quindi indipendente dal tempo) e uniforme (quindi indipendente dalla coordinata  $s$ ). La sezione (di forma arbitraria) deve essere perciò costante. Si ricordi che

$$j = \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

L'analisi del problema mostra che  $\tau$  dipende:

- dalle caratteristiche del fluido  $\rho, \nu$
- dalla dimensione e dalla forma della sezione descrivibile attraverso il raggio idraulico  $R_i$  (o convenzionalmente dalla dimensione  $4R_i$ ) e da parametri di forma  $\epsilon_i$
- dalle dimensioni della scabrezza  $y_r$  che influenza senza dubbio il valore della tensione alla parete
- dalla velocità media della corrente  $U$

(si potrebbe pensare che  $\tau$  sia influenzato anche dalla portata  $Q$ . Tuttavia avendo affermato che  $\tau$  dipende da  $U$  e  $\Omega$  e sapendo che  $Q = U\Omega$ , sarebbe ridondante affermare che  $\tau$  dipende anche da  $Q$ )

Si ha dunque

$$\tau = f(4R_i, \epsilon_{fi}, y_r, U, \rho, \nu)$$

Applicando il teorema II (vedi capitolo 11) e scegliendo come grandezze dimensionalmente indipendenti  $4R_i, U, \rho$  si ottiene

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = f_1 \left( \frac{4R_i U}{\nu}, \frac{y_r}{4R_i}, \epsilon_{fi} \right)$$

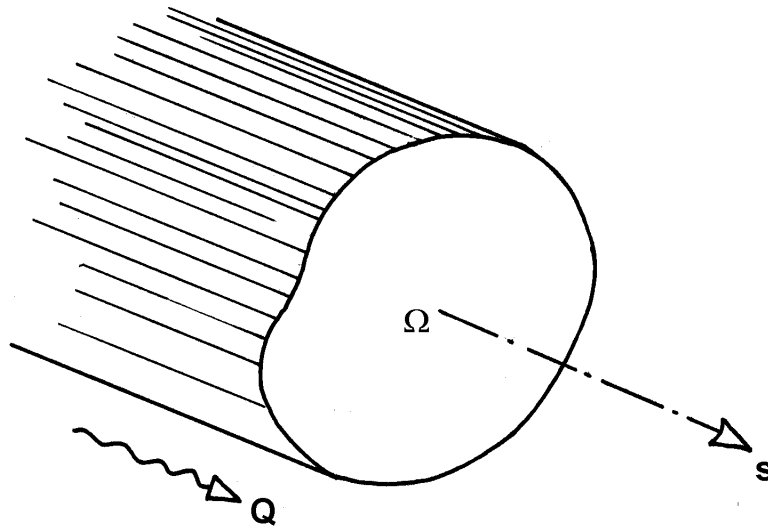


Figure 18.1:

La quantità  $j$  può dunque essere valutata utilizzando l'espressione

$$j = \frac{\tau}{\gamma R_i} = \frac{\rho U^2 f_1}{\rho g R_i} = \frac{U^2}{2g} \frac{8f_i}{4R_i} = \frac{\lambda}{4R_i} \frac{U^2}{2g}$$

dove  $\lambda = 8f_i = \lambda \left( \frac{4R_i U}{\nu}, \frac{y_r}{4R_i}, \epsilon_{fi} \right)$

$\lambda$  è detto coefficiente di resistenza e dipende dal numero di Reynolds  $Re = \frac{4R_i U}{\nu}$ , dalla scabrezza relativa  $\frac{y_r}{4R_i}$  e dalla forma della sezione descritta dai parametri  $\epsilon_{fi}$ .

Chiaramente per determinare  $\lambda$  è necessario ricorrere a misure sperimentali. Per un condotto a sezione circolare  $4R_i = D$ , essendo  $D$  il diametro del condotto (infatti  $R_i = \frac{\pi D^2}{4} / \pi D = \frac{D}{4}$ ).

Si ha dunque

$$\lambda = \lambda \left( \frac{UD}{\nu}, \frac{y_r}{D} \right)$$

Nel grafico sottostante (denominato diagramma di Moody) è riportato l'andamento di  $\lambda$  in funzione di  $Re = UD/\nu$  per diversi valori di  $\epsilon = y_r/D$

Sempre per condotti a sezione circolare nel regime di moto turbolento esistono formule empiriche per la valutazione di  $\lambda$ . Una delle più usate,

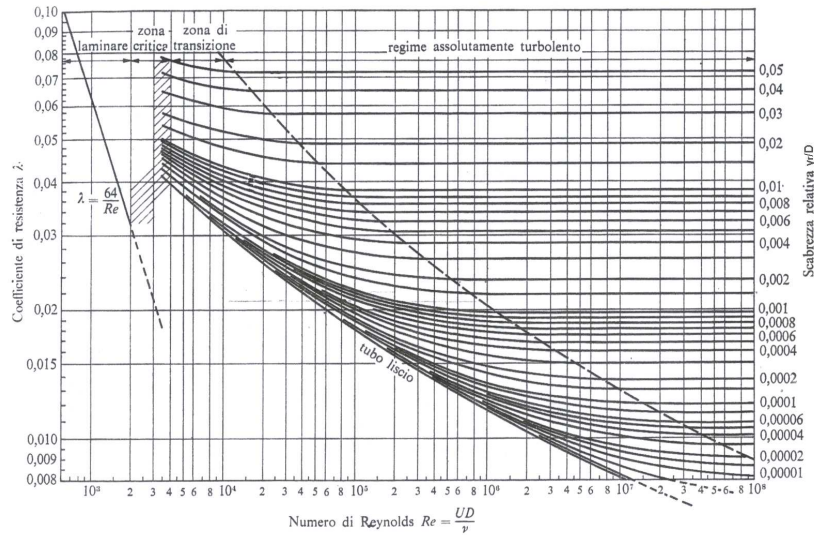


Figure 18.2:

anche se non esplicita, é quella di **Colebrook**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.71} \right)$$

Notiamo che per valori di  $Re$  tendenti ad infinito, il valore di  $\lambda$  risulta indipendente da  $Re$ . Quando  $\lambda$  dipende solo da  $\epsilon$  si ha il regime di **parete assolutamente scabra**. Per  $\epsilon = 0$  (parete liscia)  $\lambda$  dipende solo da  $Re$ . Il **regime di transizione** é quello in cui  $\lambda$  dipende sia da  $Re$  che da  $\epsilon$ . Si noti infine che la formula di Colebrook é valida in regime di moto turbolento ( $Re \geq 2000 - 2200$ ). Quando il regime di moto é laminare ( $Re \leq 2000 - 2200$ ) il valore di  $\lambda$  puó essere calcolato analiticamente (ció verrà fatto nei corsi previsti nell'ambito della laurea specialistica) e risulta

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

- Per il calcolo di  $\lambda$  relativo a condotti di forma diversa dalla circolare si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere.

- L'espressione di  $j$  é stata ottenuta supponendo il moto stazionario e uniforme. Nel caso di moti lentamente variabili o di condotti lentamente convergenti o divergenti, si utilizza la stessa espressione utilizzando i valori

locali e istantanei di  $Re$  e  $\lambda$ .<sup>(1)</sup>

---

<sup>(1)</sup>Un valore indicativo di  $y_r$  può essere dedotto dalla seguente tabella.

- Vetro,ottone, rame, piombo, tubi trafilati	0.1 $10^{-4}$ m
- Tubi saldati, amianto-cemento	0.5 $10^{-4}$ m
- Ghisa asfaltata	1.0 $10^{-4}$ m
- Ferro galvanizzato	1.5 $10^{-4}$ m
- Ghisa	3 – 5 $10^{-4}$ m
- Calcestruzzo	5 – 50 $10^{-4}$ m
- Tubi chiodati	10 – 100 $10^{-4}$ m

# Chapter 19

## ALCUNI PROBLEMI RELATIVI A CONDOTTE A SEZIONE CIRCOLARE

Come accennato nel capitolo 18, se consideriamo il moto stazionario di un fluido incomprimibile all'interno di una condotta a sezione circolare e costante, l'equazione di continuità, (per fluido a densità costante) porge

$$Q = \text{costante} \Rightarrow U = \text{costante}$$

Questa situazione, anche se particolare, é estremamente frequente nella pratica.

L'equazione del moto inoltre si semplifica e diviene

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{\lambda U^2}{D 2g}$$

Siccome la sezione  $\Omega$  é costante cosí come il suo diametro  $D$  e la sua scabrezza  $y_r$  (se la condotta é costruita tutta di uno stesso materiale) segue che anche il coefficiente di resistenza  $\lambda$  é costante. Infatti

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \text{costante}; \quad \epsilon = \frac{y_r}{D} = \text{costante}$$

L'equazione del moto può dunque essere facilmente integrata porgendo

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} (s_2 - s_1) = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L$$

essendo  $L$  la distanza fra due sezioni diverse con ascissa curvilinea  $s_2$  e  $s_1$  rispettivamente (  $s_2$  a valle di  $s_1$ ) e carico totale  $H_2$  e  $H_1$ . La relazione



$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L$$

o l'equivalente

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda Q^2}{D 2g\Omega^2} L$$

consentono di determinare una delle caratteristiche della condotta o della corrente note le altre<sup>(1)</sup>.

### Problema 1: calcolo delle perdite di carico

Di una condotta in ghisa asfaltata sia assegnato il diametro  $D$  e la lunghezza  $L$ . Conoscendo il valore della portata di acqua defluente, valutare le perdite di carico totali subite dalla corrente fra la sezione iniziale e quella finale.

Dati:  $D = 15\text{cm}$ ,  $L = 500\text{m}$ ,  $Q = 25\ell/\text{s}$

#### Soluzione:

Dai dati disponibili é immediato calcolare la sezione  $\Omega$  e quindi la velocità media

$$\Omega = \pi \frac{D^2}{4} = 1.767 \cdot 10^{-2} \text{m}^2, \quad U = \frac{Q}{\Omega} = 1.415 \text{ m/s}$$

Conoscendo il materiale con cui é stata realizzata la condotta é possibile valutare la scabrezza assoluta (vedi capitolo 18)

$$y_r = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{m}$$

Segue

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 2.12 \cdot 10^5; \quad \epsilon = \frac{y_r}{D} = 6.67 \cdot 10^{-4}$$

Dal diagramma di Moody é possibile stimare

$$\lambda = 0.0195$$

e quindi le perdite di carico

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L = -6.63 \text{ m}$$

---

<sup>(1)</sup>Notiamo che in questo caso, essendo la velocità costante, le equazioni precedenti possono essere anche scritte nella forma

$$H_2 - H_1 = h_2 - h_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L = -\frac{\lambda Q^2}{D 2g\Omega^2} L$$

**Problema 2: calcolo della portata**

La differenza fra il carico iniziale e quello finale in un tubo in rame lungo  $L$  é  $\Delta H = H_1 - H_2$ . Conoscendo il diametro  $D$  del tubo, valutare la portata  $Q$  di acqua defluente .

Dati:  $L = 10$  m,  $\Delta H = 5$  m,  $D = 2.6$  cm

**Soluzione:**

Dall'equazione del moto é possibile ricavare

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g\Delta HD}{\lambda L}}$$

La precedente relazione non consente tuttavia il calcolo diretto di  $Q$  perché dipende dal numero di Reynolds e quindi da  $Q$ . E' necessario dunque procedere per tentativi.

Dalla conoscenza del materiale della condotta (rame) deriva il valore di  $y_r = 0.1 \cdot 10^{-4}$  m e quello di

$$\epsilon = \frac{y_r}{D} = 3.85 \cdot 10^{-4}$$

Se si suppone che il regime di moto sia quello di parete assolutamente scabra (alti valori del numero di Reynolds) si ottiene un valore di primo tentativo di  $\lambda$

$$\lambda = 0.0158$$

Con esso é possibile ricavare un valore di primo tentativo di  $Q$

$$Q_1 = 2.13 \text{ l/s}$$

da cui discendono

$$U_1 = 4.01 \text{ m/s}; \text{ e } Re_1 = 1.04 \cdot 10^5$$

Avendo ora a disposizione un valore di tentativo del numero di Reynolds é possibile controllare se l'ipotesi iniziale di regime di parete assolutamente scabra era corretta o no.

Dall'analisi del diagramma di Moody emerge che la condotta é nel regime di transizione. La conoscenza di  $Re$  consente di ottenere un secondo valore di  $\lambda$

$$\lambda_2 = \lambda (1.04 \cdot 10^5, 3.85 \cdot 10^{-4}) \cong 0.02$$

Con tale valore di  $\lambda$  é possibile ottenere un secondo valore di  $Q$

$$Q_2 = 1.89 \ell/s$$

da cui discendono

$$U_2 = 3.56 \text{ m/s} \text{ e } Re_2 = 9.26 \cdot 10^4$$

la conoscenza di  $Re_2$  consente di ottenere un terzo valore di  $\lambda$

$$\lambda_3 = \lambda(9.26 \cdot 10^4, 3.85 \cdot 10^{-4}) \cong 0.0201$$

che porta a un valore di  $Q$  praticamente coincidente con  $Q_2$ . Si é ottenuta la convergenza del risultato. Se  $Q_3$  fosse stato sensibilmente diverso da  $Q_2$  il calcolo avrebbe dovuto proseguire.

### Problema 3: calcolo del diametro (Problema di progetto)

Fra due serbatoi, distanti 4 Km, si vuole posare una tubazione in grado di far defluire una portata  $Q$  di acqua. Si decide di utilizzare tubi in ghisa asfaltata ( $y_r = 0.1mm$ ). Sapendo che il dislivello fra il pelo libero dei due serbatoi é  $\Delta H$ , valutare il diametro del tubo da utilizzare.

Dati:  $Q = 2 \ell/s$ ,  $\Delta H = 10 \text{ m}$

#### Soluzione:

Il calcolo del diametro di una condotta, noti gli altri dati, deve essere fatto per tentativi, cercando di individuare il valore di  $D$  che causa delle perdite di carico lungo la condotta pari a  $\Delta H$ . In altre parole si deve trovare  $D$  tale che

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$$

A tal fine é opportuno precisare che la valutazione di  $D$  non deve essere fatta con troppe cifre significative, considerando che i diametri in commercio sono un numero limitato. Un valore di primo tentativo  $D$  per puó essere individuato imponendo che la velocità media nella condotta sia pari a  $1m/s$

$$D_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U_1}} = 0.0618 \text{ m}$$

Con tale valore del diametro (ricordiamo di tentativo) valutiamo  $\frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$  e confrontiamolo con  $\Delta H$  pari a 10m.

Si ha

$D$ [m]	$\Omega$ [m <sup>2</sup> ]	$U$ [m/s]	$Re$	$\epsilon$	$\lambda$	$\frac{\lambda U^2}{D} L$ [m]
0.0618	$3.0 \cdot 10^{-3}$	1.00	$6.18 \cdot 10^4$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	82.6

Il valore delle perdite risulta molto maggiore del dislivello effettivamente disponibile. Ciò suggerisce che il diametro deve essere maggiore, affinché il fluido viaggi a una velocità inferiore e inferiori siano le perdite. Tentiamo con  $D = 10\text{cm}$ . Si ha

$D$ [m]	$\Omega$ [m <sup>2</sup> ]	$U$ [m/s]	$Re$	$\epsilon$	$\lambda$	$\frac{\lambda U^2}{D} L$ [m]
0.1	$7.85 \cdot 10^{-3}$	0.38	$3.8 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	7.36

Le perdite sono ora inferiori al dislivello. Proviamo  $D = 9.5\text{ cm}$

$D$ [m]	$\Omega$ [m <sup>2</sup> ]	$U$ [m/s]	$Re$	$\epsilon$	$\lambda$	$\frac{\lambda U^2}{D} L$ [m]
0.095	$7.09 \cdot 10^{-3}$	0.42	$3.99 \cdot 10^4$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	9.44

Le perdite sono ancora inferiori a  $\Delta H$  anche se molto vicine. Verifichiamo che con un diametro di 9 cm esse risultano superiori

$D$ [m]	$\Omega$ [m <sup>2</sup> ]	$U$ [m/s]	$Re$	$\epsilon$	$\lambda$	$\frac{\lambda U^2}{D} L$ [m]
0.09	$6.36 \cdot 10^{-3}$	0.47	$4.23 \cdot 10^4$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.024$	12.12

Emerge quindi che il diametro da utilizzare é compreso fra 9 e 9.5 cm.

## Chapter 20

# PERDITE CONCENTRATE DI CARICO DOVUTE A UN BRUSCO ALLARGAMENTO (PERDITE DI BORDA)

In un impianto é possibile che sia presente il passaggio da un diametro  $D_1$  a uno  $D_2$  maggiore. Localmente il moto non é piú unidirezionale, generandosi significative componenti di velocità ortogonali all'asse della condotta. Ciò fa sì che localmente il moto del fluido non possa essere analizzato con le equazioni delle correnti. Da un punto di vista qualitativo, uno schizzo del

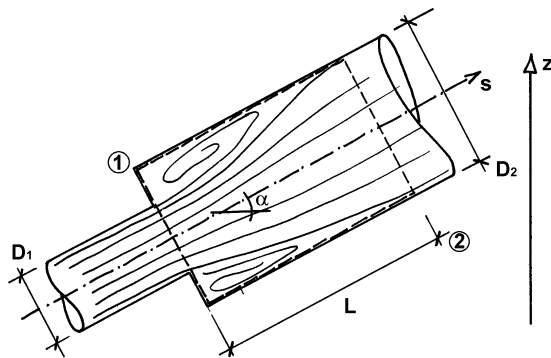


Figure 20.1:

campo di moto é riportato nella figura 20.1.

Per legare le caratteristiche della corrente immediatamente a monte dell'allargamento con quelle della corrente a valle é possibile utilizzare il principio della quantità di moto in forma integrale (capitolo 14). Sottolineamo che il moto riprende le caratteristiche di una corrente a una distanza dall'allargamento dell'ordine di qualche diametro.

Applichiamo dunque il principio della quantità di moto al volume di riferimento tratteggiato in figura e delimitato dalla sezione ①, immediatamente a valle dell'allargamento, e dalla sezione ② a una distanza  $L$  tale che il moto abbia ripreso le caratteristiche di una corrente. Proiettiamo l'equazione lungo direzione  $s$

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s$$

Supposto il moto stazionario,  $\mathbf{I}$  e quindi  $I_s$  risultano nulli. Sia  $\Omega_1 = \pi D_1^2/4$  e  $\Omega_2 = \pi D_2^2/4$ . Denotando con  $Q$  la portata defluente nell'impianto, si ha

$$\begin{aligned} M_{us} &= \rho Q U_2 = \rho \Omega_2 U_2^2 \\ M_{is} &= \rho Q U_1 = \rho \Omega_1 U_1^2 \end{aligned}$$

Ricordiamo infatti che il principio di conservazione della massa impone

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = Q = \text{costante}$$

E' facile verificare che

$$G_s = -\gamma \Omega_2 L \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 L \frac{z_2 - z_1}{L} = \gamma \Omega_2 (z_1 - z_2)$$

essendo  $z_1$  e  $z_2$  le quote dei baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Rimane da quantificare  $\Pi_s$ . Sulla sezione ① possiamo assumere che la distribuzione di pressione sia idrostatica in quanto parte della sezione é occupata dalla corrente in arrivo e parte da fluido é praticamente fermo.

Anche sulla sezione ② é possibile assumere che la distribuzione di pressione sia pari a quella idrostatica. Trascurando le tensioni tangenziali sulla superficie laterale in considerazione del valore modesto di  $L$ , si ha

$$\Pi_s = p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2$$

essendo  $p_1$  e  $p_2$  le pressioni sui baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Si ottiene dunque

$$\rho \Omega_2 U_2^2 - \rho \Omega_1 U_1^2 = \gamma \Omega_2 (z_1 - z_2) + p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2$$

e dividendo per  $\gamma\Omega_2$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma} = h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} - \frac{\Omega_1 U_1^2}{\Omega_2 g}$$

Utilizzando quindi la relazione  $\Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2$  si può ottenere

$$h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} \left[ 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right] = \frac{U_1^2}{g} \left[ \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right]$$

Essendo  $\Omega_2 > \Omega_1$ , la relazione precedente mostra che  $h_2 > h_1$ : il carico piezometrico a valle del restringimento è maggiore di quello a monte. Ricaviamo ora il valore di  $H_1 - H_2$ . Si ha

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = h_1 - h_2 + \frac{U_2^2 \Omega_2^2}{2g \Omega_1^2} - \frac{U_2^2}{2g} = \\ &= \frac{U_2^2}{2g} \left[ 2 - \frac{2\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 1 \right] = \frac{U_2^2}{2g} \left[ 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right]^2 \end{aligned}$$

L'equazione precedente mostra che  $H_1 > H_2$ , cioè passando attraverso l'allargamento il fluido dissipa dell'energia e l'ammontare dell'energia dissipata è pari a

$$\Delta H_c = \frac{U_2^2}{2g} \left[ 1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right]^2$$

Tale dissipazione di energia può essere anche quantificata rispetto al carico cinetico di monte

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g} \left[ \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right]^2$$

Quest'ultima relazione mostra che quando una condotta sfocia in un serbatoio, la corrente in arrivo dissipa tutta la sua energia cinetica. Infatti lo sbocco di una condotta in un serbatoio può essere pensato come un brusco allargamento con  $\Omega_1/\Omega_2$  tendente a zero.

Segue

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g}.$$

## Chapter 21

# PERDITE CONCENTRATE DI CARICO IN UN IMPIANTO

Nel capitolo 20 abbiamo determinato le perdite di carico (perdite di energia per unità di peso del fluido) dovute a un brusco allargamento e allo sbocco di una condotta in un serbatoio. In un impianto sono presenti altre sorgenti di perdite di carico localizzate quali imbrocchi, valvole, gomiti, curve, diaframmi, biforcazioni, alcune schematicamente rappresentate in figura. Le

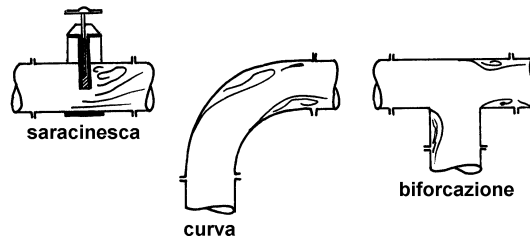


Figure 21.1:

perdite di carico localizzate indotte da tali componenti di un impianto vengono usualmente espresse con una relazione del tipo

$$\Delta H_C = \xi \frac{U^2}{2g}$$

in cui  $U$  è la velocità media che si stabilisce in una sezione caratteristica e  $\xi$  un parametro che dipende essenzialmente dalla configurazione geometrica



e dal numero di Reynolds. Spesso però la dipendenza di  $\xi$  dal numero di Reynolds è trascurabile.

È impossibile qui fornire una panoramica dei valori di  $\xi$  a causa della grande varietà delle componenti di un impianto dal punto di vista geometrico. Ricordiamo solamente che la determinazione di  $\xi$  viene fatta attraverso esperienze di laboratorio caso per caso.

A titolo indicativo forniamo i seguenti valori di  $\xi$ :

- Imbocco da serbatoio:

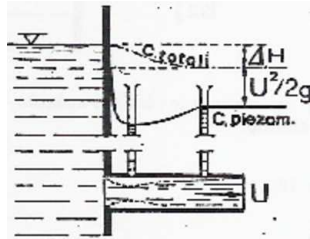


Figure 21.2: Imbocco a spigolo vivo  $\xi = 0.5$

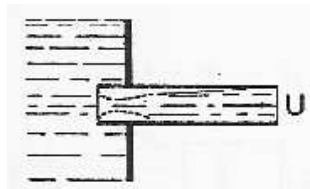


Figure 21.3: Imbocco con condotta rientrante  $\xi = 1.0$

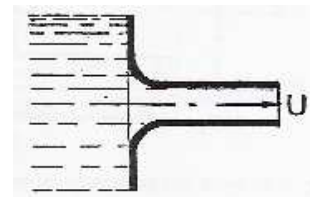


Figure 21.4: Imbocco arrotondato  $\xi = 0.05 \div 0.10$

- Restringimento di sezione da  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ :

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \xi \frac{U_2^2}{2g}$$

il coefficiente  $\xi$  dipende dal rapporto  $\Omega_2/\Omega_1$ :

$\Omega_2/\Omega_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\xi$	0.48	0.44	0.41	0.31	0.26	0.24	0.18	0.13	0.06

- Gomiti e curve:

il parametro  $\xi$  dipende dal rapporto tra il raggio di curvatura ( $r$ ) e il diametro del condotto ( $D$ ), dall'angolo di deviazione ( $\theta$ ) e dal numero di Reynolds. In figura 21.5 sono forniti i valori di  $\xi$  per  $Re = 10^6$  in funzione di  $r/D$  e  $\theta$ .

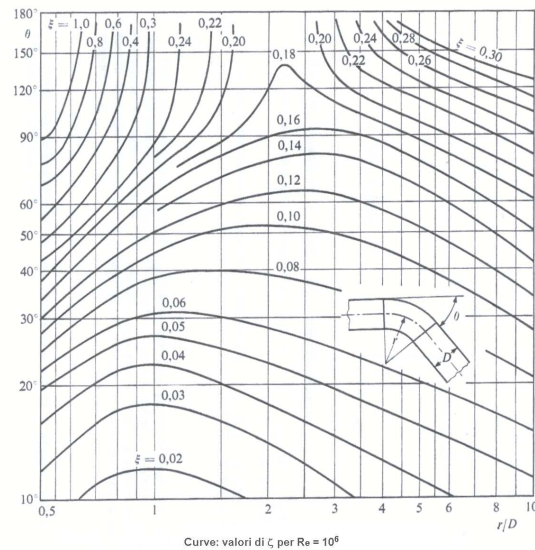


Figure 21.5:

- Valvole a piena apertura
  - valvole a farfalla  $\xi = 0.2 \div 0.4$
  - valvole a fuso  $\xi = 0.2 \div 0.3$
  - saracinesca piana  $\xi = 0.1 \div 0.3$
- Giunzioni a T fra tubi di ugual diametro  $\Delta H_{i-j} = \xi_{i-j} (U_3^2/2g)$ .

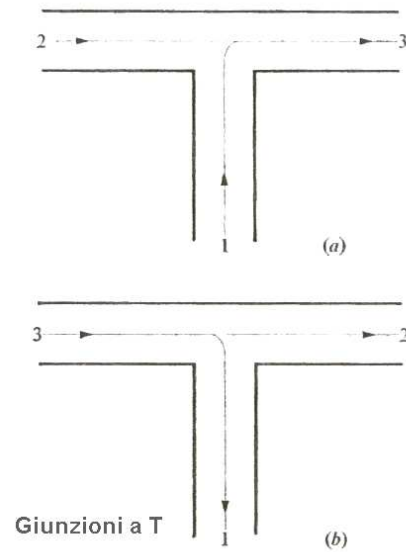


Figure 21.6:

Per  $Q_1/Q_3$  variabile da 0.5 a 1.0 si ha corrispondentemente:

a) per confluenza delle correnti 1 e 2 nella 3:

$$\xi_{1-3} = 0.4 \div 1.1$$

$$\xi_{2-3} = 0.5 \div 0.6$$

b) per suddivisione della corrente 3 nelle 1 e 2:

$$\xi_{3-1} = 0.8 \div 1.3$$

$$\xi_{3-2} = 0.05 \div 0.4$$

## Chapter 22

# PROBLEMI RELATIVI AD ALCUNI SEMPLICI IMPIANTI

• Nel seguito illustreremo alcuni problemi relativi a semplici impianti. Nell'illustrare la loro soluzione introdurremo le pompe <sup>(1)</sup>, organi di un impianto in grado di fornire energia al fluido, e tratteremo le linee dei carichi totali e piezometrici, utile strumento per determinare graficamente la pressione in una sezione e per accertarsi del buon funzionamento di un impianto.

Per impostare la soluzione di un problema relativo a un impianto, è necessario analizzare l'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale: il carico iniziale diminuito di tutte le perdite, distribuite e localizzate, ed eventualmente aumentato del carico fornito da pompe presenti sull'impianto deve fornire il carico nella sezione finale. Tale bilancio energetico fornisce un'equazione che consente di determinare una delle caratteristiche dell'impianto note ad altre. Per illustrare la procedura analizziamo nel seguito alcuni problemi particolari.

---

<sup>(1)</sup>Nell'ambito del corso non è possibile descrivere nei dettagli il funzionamento delle pompe e le loro caratteristiche. Ci limiteremo qui a dire che le pompe sono essenzialmente caratterizzate dalla prevalenza  $h_P$  e dalla portata  $Q$ .

La prevalenza è il carico che la pompa fornisce al fluido mentre il valore  $Q$  è la portata che attraversa la pompa. L'energia che la pompa fornisce al fluido è pari a

$$P = \gamma Q h_p$$

(vedi capitolo 15). Un'altra caratteristica della pompa è il rendimento  $\eta$  cioè il rapporto tra la potenza  $P$  fornita al fluido e la potenza assorbita. Le caratteristiche delle pompe vengono in generale fornite dalle case costruttrici.

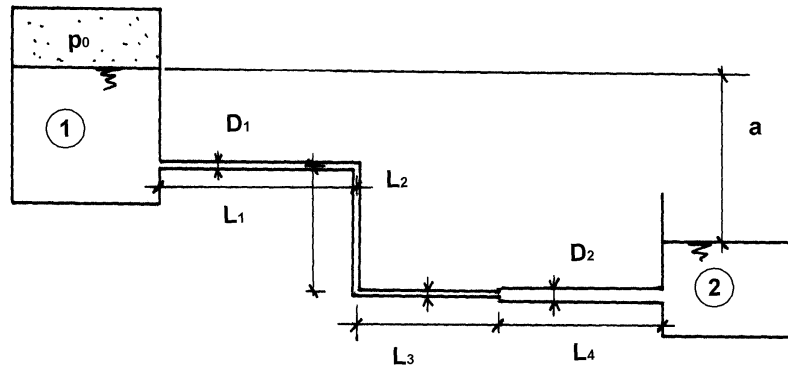


Figure 22.1:

**Problema 1**

Determinare il valore della pressione relativa  $p_1$  nel serbatoio ① affinché nell'impianto in figura 22.1 defluisca una portata  $Q$  di acqua dal serbatoio ① al serbatoio ②. I tubi siano in ghisa asfaltata con un valore di scabrezza assoluta  $y_r$  pari a 0.1mm.

**Dati:**  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $L_1 = 50 \text{ m}$ ,  $L_2 = 3 \text{ m}$ ,  $L_3 = 75 \text{ m}$ ,  $L_4 = 55 \text{ m}$ ,  $D_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 15 \text{ cm}$ ,  $Q = 5 \text{ l/s}$ .

**Soluzione:** Introducendo un asse verticale  $z$  diretto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ②, il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio ① (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta

$$H_1 = h_1 = a + \frac{p_0}{\gamma}$$

mentre nel serbatoio ②, il carico totale risulta nullo

$$H_2 = 0$$

Si deve quindi avere

$$H_1 - \frac{U_1^2}{2g} \left[ 0.5 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_1 + 1 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_2 + 1 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_3 + \left( \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \right] - \frac{U_2^2}{2g} \left[ \frac{\lambda_2}{D_2} L_4 + 1 \right] = H_2$$

ove si sono indicate con  $U_1$  e  $U_2$  le velocità nei tubi di diametro  $D_1$  e  $D_2$  rispettivamente.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  indicano i rispettivi coefficienti di resistenza. Infine si è assunto che le perdite concentrate siano valutabili con l'espressione  $\xi \frac{U^2}{2g}$  e  $\xi = 0.5$  per l'imbocco,  $\xi = 1$  per i gomiti e lo sbocco.

Si ha

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = 0.637 \text{ m/s} \rightarrow Re_1 = 6.37 \cdot 10^4$$

$$U_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = 0.283 \text{ m/s} \rightarrow Re_2 = 4.25 \cdot 10^4$$

Essendo

$$\epsilon_1 = \frac{y_r}{D_1} = 0.001, \quad \epsilon_2 = \frac{y_r}{D_2} = 0.000667$$

è possibile valutare  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  dal diagramma di Moody.

Risulta

$$\lambda_1 \cong 0.023 \quad \lambda_2 \cong 0.024$$

L'equazione di partenza porge dunque

$$\frac{p_0}{\gamma} = -a + \frac{U_1^2}{2g} \left[ 2.809 + \frac{\lambda_1}{D_1} (L_1 + L_2 + L_3) \right] + \frac{U_2^2}{2g} \left[ 1 + \frac{\lambda_2 L_2}{D_2} \right]$$

avendo valutato  $\left( \frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \cong 0.309$ .

Effettuando i calcoli si ha

$$\frac{p_0}{\gamma} = [-0.4 + 0.0207 (2.809 + 29.4) + 0.00408 (1 + 8.8)] m = 0.307 m$$

Da cui  $p_0 = 3.01 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$

Nella figura 22.2 sono riportate le linee dei carichi totali e piezometrici e la quota della condotta. Si noti che la differenza fra il carico piezometrico e la quota della condotta rappresenta il valore di  $p/\gamma$ .

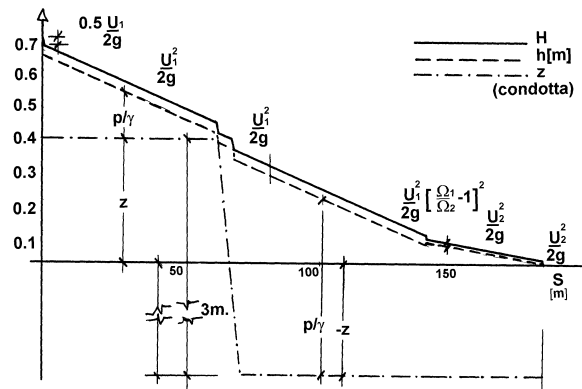


Figure 22.2:

### Problema 2

Si valuti la prevalenza  $h_p$  della pompa necessaria a far defluire un'assegnata portata  $Q$  di acqua dal serbatoio ① fino alla fine del tubo (vedi figura 22.3). Il tubo sia in rame.

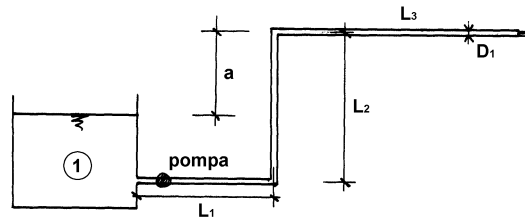


Figure 22.3:

**Dati:**  $L_1 = 10 \text{ m}$ ,  $L_2 = 2.5 \text{ m}$ ,  $L_3 = 6 \text{ m}$ ,  $a = 1.5 \text{ m}$ ,  $D_1 = 2.7 \text{ cm}$ ,  $Q = 1.5 \text{ l/s}$

### Soluzione:

Essendo il tubo in rame, si ha  $y_r = 0.01 \text{ mm}$ . Inoltre dalla conoscenza della portata e del diametro segue

$$U = \frac{Q}{\Omega} = 2.62 \text{ m/s} \rightarrow Re = 7.07 \cdot 10^4 \rightarrow \epsilon = \frac{y_r}{D} = 3.7 \cdot 10^{-4}$$

Dalla conoscenza di  $Re$  e  $\epsilon$ , si ottiene  $\lambda$  dal diagramma di Moody

$$\lambda \cong 0.021$$

Infine, con riferimento a un asse verticale  $z$  rivolto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ①, si ha

$$H_1 = 0 : H_2 = a + \frac{U^2}{2g}$$

e

$$H_1 - 0.5 \frac{U^2}{2g} - \frac{\lambda U^2}{D} (L_1 + L_2 + L_3) - \frac{U^2}{2g} (1 + 1) + h_p = a + \frac{U^2}{2g}$$

Si noti che perdite concentrate in un imbocco sono state assunte pari a  $0.5 \frac{U^2}{2g}$  mentre quelle causate da un gomito pari a  $\frac{U^2}{2g}$ .

Segue

$$h_p = a + \frac{U^2}{2g} \left[ 3.5 + \frac{\lambda}{D} (L_1 + L_2 + L_3) \right]$$

Effettuando i calcoli si ha

$$h_p = 1.5m + 0.35 [3.5 + 14.4] m = 7.76 m$$

Tracciamo ora la linea dei carichi totali e piezometrici

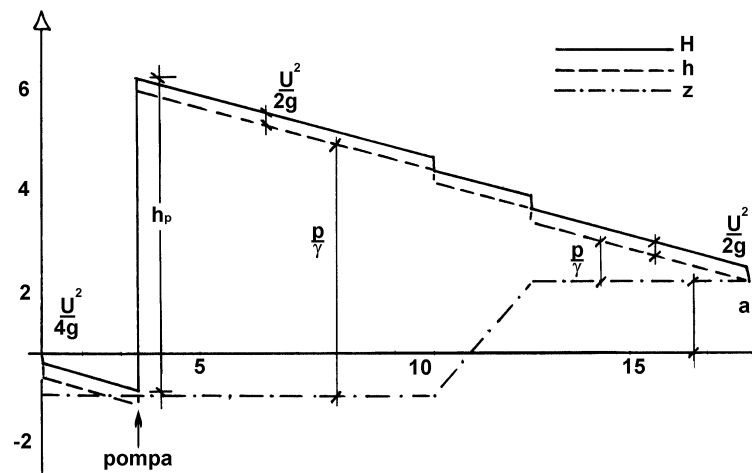


Figure 22.4:



### Problema 3

Valutare il diametro  $D$  necessario a far scorrere una assegnata portata  $Q$  di acqua dal serbatoio ① al serbatoio ② rappresentati in figura 22.5. Si supponga che la condotta sia in ghisa asfaltata.

**Dati:**  $a = 20 \text{ m}$ ,  $L = 2.5 \text{ Km}$ ,  $Q = 50 \text{ l/s}$ ,  $y_r = 0.1 \text{ mm}$

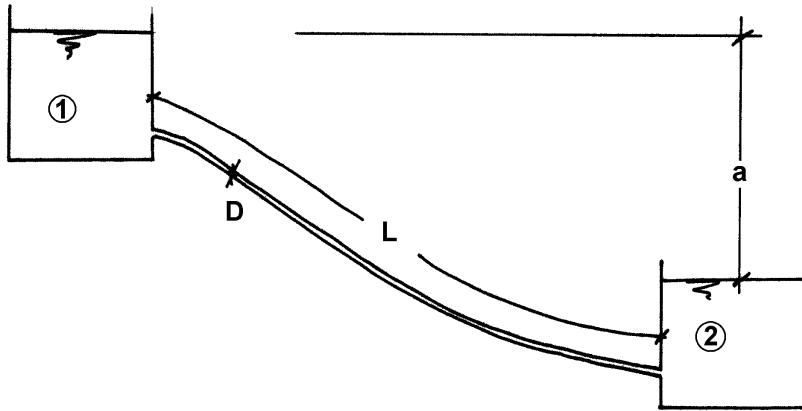


Figure 22.5:

**Soluzione:** L'equazione da soddisfare é:

$$a = \frac{U^2}{2g} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{D}L + 1 \right] = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[ 1.5 + \frac{\lambda}{D}L \right]$$

Procediamo per tentativi

$D$ [m]	$U$ [m/s]	$Re$	$\epsilon$	$\lambda$	$\frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[ 1.5 + \frac{\lambda}{D}L \right]$ [m]
0.25	1.02	$2.5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{-4}$	$\approx 0.018$	9.6
0.15	2.83	$4.2 \cdot 10^5$	$6.6 \cdot 10^{-4}$	$\approx 0.019$	130.9
0.20	1.59	$3.2 \cdot 10^5$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$\approx 0.018$	29.2
0.22	1.32	$2.9 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$\approx 0.018$	18.3
0.21	1.44	$3.0 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$\approx 0.018$	22.8

Sulla base di questi risultati é possibile concludere che il diametro richiesto é compreso fra 0.21 e 0.22 m.

### IL PROBLEMA DEL SIFONE

• Tracciamo, in modo qualitativo, le linee del carico totale, piezometrico e della quota della condotta, facendo riferimento ad un asse  $z$  rivolto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ② dell'impianto in figura 22.6, uguale a quello considerato nel problema precedente.

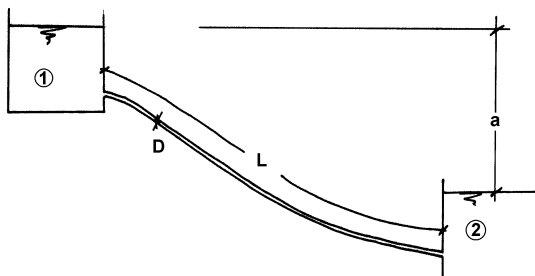


Figure 22.6:

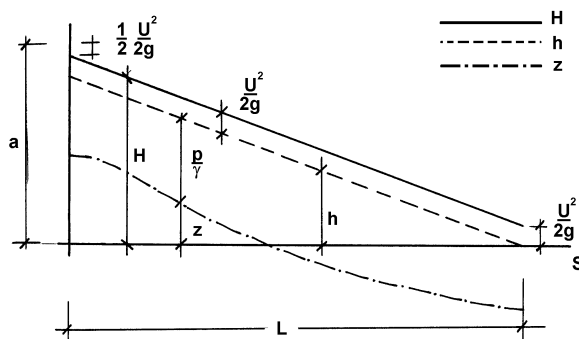


Figure 22.7:

E'interessante osservare che il funzionamento idraulico della condotta non é influenzato, se certi limiti sono rispettati, dall'andamento altimetrico della condotta. Ad esempio nelle condotte  $A$  e  $B$  della figura 22.8 defluisce la stessa portata e l'andamento del carico totale e piezometrico é uguale (chiaramente a patto che il diametro, la scabrezza e la lunghezza della condotta rimangano inalterati). Nelle due condotte sará solo diversa la distribuzione della pressione come si puó notare dalla figura 22.9 dove sono riportati  $H(s)$ ,  $h(s)$ ,  $z_A(s)$  e  $z_B(s)$ .

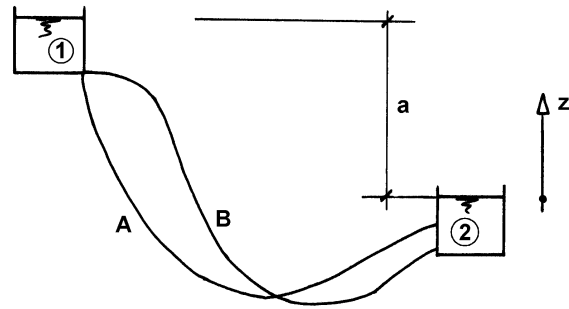


Figure 22.8:

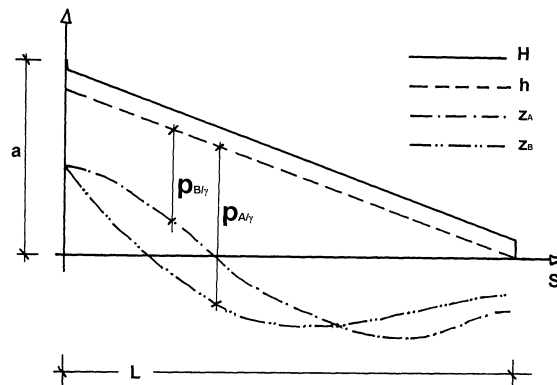


Figure 22.9:

L'impianto funzionerà anche quando la quota della condotta sarà maggiore della linea dei carichi piezometrici. In tale situazione la pressione relativa all'interno della condotta sarà negativa, cioè la pressione assoluta sarà inferiore alla pressione atmosferica (vedi figura 22.10). In particolare la condotta sarà in depressione fra la coordinata  $s_i$  e la coordinata  $s_f$ . Ci sono tuttavia dei limiti sull'andamento altimetrico della condotta. In primo luogo il valore di  $z(s)$  non può superare  $a$  se si vuole che il fluido inizi a defluire senza problemi. Se anche in un solo punto  $z > a$  per innescare il moto è necessario creare una depressione nella condotta.

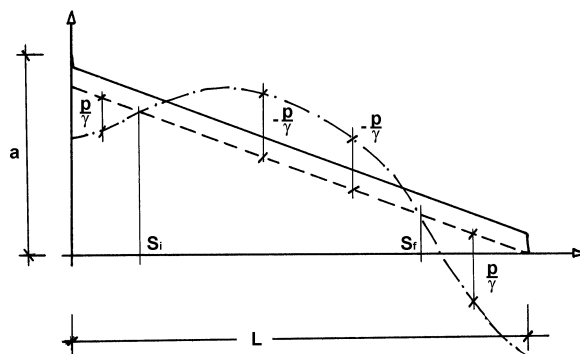


Figure 22.10:

Anche innescando il moto non é possibile superare certi valori di  $z$ , il limite é facilmente valutabile sapendo che la pressione assoluta non puó scendere al di sotto di un valore, denominato **tensione di vapore** che dipende dal fluido presente nell'impianto. Alzando la condotta al di sopra di tale limite, la portata defluente nell'impianto diminuirá, fino a che, quando  $z$  supererá il valore  $a + \frac{p_{atm} - p_v}{\gamma}$ , il fluido cesserá di scorrere ( $p_v$  indica la tensione di vapore).

## Chapter 23

# TEOREMA DI BERNOULLI PER LE CORRENTI

L'equazione del moto delle correnti stabilisce che

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

cioé le variazioni di  $H$  lungo l'ascissa curvilinea  $s$  sono causate da accelerazioni o decelerazioni del moto e dalla resistenza che le pareti oppongono al deflusso del fluido.

Nel caso, estremamente frequente, di moto stazionario si ha

$$\frac{dH}{ds} = -j = -\frac{\tau}{\gamma R_i}$$

cioé il carico totale varia solo per effetto della resistenza esercitata dal contorno della corrente.

Si noti che il carico totale diminuisce sempre nella direzione del moto.

Tutti i fluidi sono caratterizzati da una viscosità che può essere più o meno elevata ma che comunque è sempre presente. Ciò implica che  $\tau$  è sempre diversa da zero e che quindi anche  $j$  è sempre non nulla. Tuttavia quando il tratto di condotta oggetto di indagine è relativamente breve, le perdite di carico subite dal fluido possono essere trascurate rispetto al carico stesso. In tale situazione si può assumere che il moto del fluido soddisfi l'equazione:

$$\frac{dH}{ds} = 0.$$

Tale equazione risulta quindi valida nelle ipotesi che qui ricordiamo

1) Perdite di carico trascurabili

- 2) Moto stazionario
- 3) Campo di forze gravitazionali
- 4) Fluido barotropico ( $\rho = \rho(p)$ )

Sotto tali ipotesi il carico totale rimane costante lungo  $s$ . Tale risultato é noto come teorema di Bernoulli per le correnti. Originariamente il risultato fu ottenuto nell'ipotesi di fluido ideale ( $\mu = 0$ ) e di campo di forze conservativo (non necessariamente gravitazionale).

Se il fluido é barotropico

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma(p)} + \frac{U^2}{2g}$$

Se il fluido é a densità costante

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}$$

Si noti che il fatto che  $H$  sia costante non implica la costanza dell'energia potenziale o di quella di pressione o dell'energia cinetica: é la loro somma che si mantiene costante. Il fluido puó ad esempio aumentare la sua energia cinetica a scapito di quella potenziale o di quella di pressione e viceversa.

## IL VENTURIMETRO E ALTRI MISURATORI DI PORTATA

Il venturimetro é un misuratore di portata che, inserito in una condotta, permette di quantificare la portata che vi scorre attraverso il rilievo di un dislivello fra due superfici libere. Esso é costituito da: un tratto convergente che porta la sezione dal valore  $\Omega_1$  della condotta a un valore  $\Omega_2$ ; un breve tratto di sezione costante  $\Omega_2$  un lungo tratto divergente che riporta la sezione al valore originario  $\Omega_1$ . Immediatamente a monte del tratto convergente, tutto intorno alla sezione sono presenti dei fori collegati ad un tubo a U la cui altra estremitá é collegata ad altri fori posizionati attorno alla sezione contratta. All'interno del tubo a U (detto tubo manometrico) é presente un fluido (in generale mercurio) di peso specifico elevato indicato con  $\gamma_m$ . Quando all'interno della condotta defluisce una portata  $Q$ , la pressione nella sezione 1 risulta diversa da quella nella sezione 2 e ciò induce un dislivello fra i due rami del tubo a U. La lettura di tale dislivello consente di valutare  $Q$ . Vediamo ora come. Fra la sezione 1 e la sezione 2 il moto del fluido é accelerato, il tratto é molto breve e ciò consente di trascurare le dissipazioni di energia e di supporre quindi il comportamento del fluido "ideale". Il moto é supposto stazionario. Il fluido é soggetto al campo di forze gravitazionale. Supponiamo infine di considerare un fluido a densità costante. Esistono i

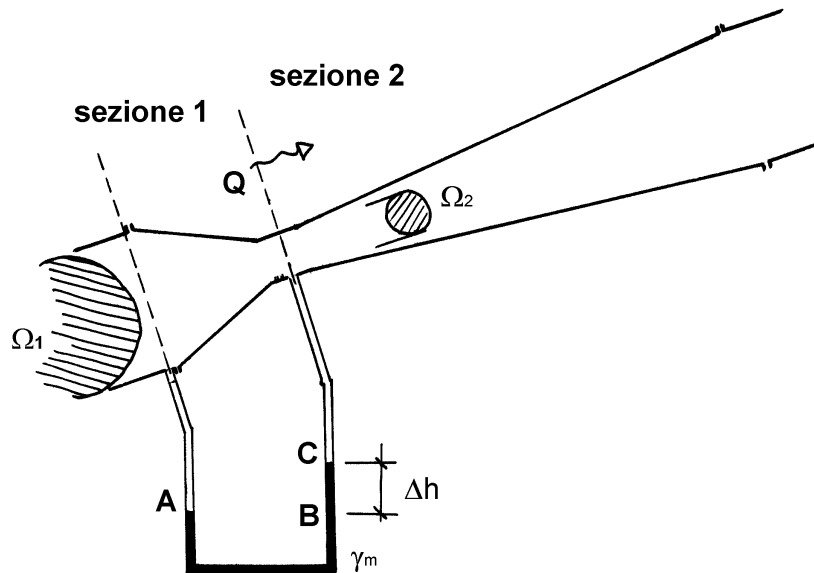


Figure 23.1:

presupposti per poter applicare il teorema di Bernoulli per le correnti. Segue dunque

$$H_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = H_2$$

L'equazione di continuit a porge inoltre

$$U_1\Omega_1 = U_2\Omega_2 = Q \quad \text{e} \quad U_1 = \frac{Q}{\Omega_1}; U_2 = \frac{Q}{\Omega_2}$$

Si ha quindi

$$\frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) = h_1 - h_2$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2}} \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$\text{essendo } C_Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^2}}$$

Il valore di  $h_1 - h_2$  pu  essere facilmente legato a  $\Delta h$  tenendo conto che la pressione  $p_A$  in  $A$    uguale alla pressione  $p_B$  in  $B$  e che il carico piezometrico

nella sezione 1 e nel ramo di sinistra del tubo manometrico é costante cosí come é costante il carico piezometrico nella sezione 2 e nel ramo di destra del tubo manometrico. La costanza del carico piezometrico nelle sezioni deriva dal fatto che il comportamento del fluido é quello di una corrente mentre la costanza del carico piezometrico nei due rami del tubo manometrico discende dal fatto che ivi il fluido é fermo. Si ha

$$h_1 - h_2 = h_A - h_C = \frac{p_A}{\gamma} + z_A - \frac{p_C}{\gamma} - z_C$$

$$h_1 - h_2 = -\Delta h + \frac{1}{\gamma} [p_A - (p_B - \gamma_m \Delta h)] = -\Delta h + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta h = \Delta h \left( \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)$$

Da cui

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g \Delta h \left( \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)}$$

Altri misuratori di portata sono i diaframmi (figura 23.2) e i boccgli (figura 23.3).

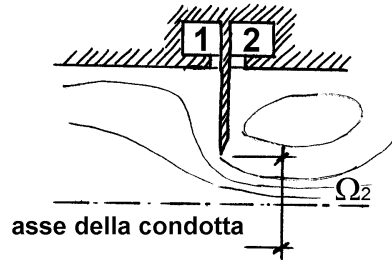


Figure 23.2:

Essi si basano sullo stesso principio di funzionamento dei venturimetri e presuppongono la lettura della differenza di pressione fra la sezione 1 immediatamente a monte del diaframma e del boccglio e la sezione 2 immediatamente a valle. Si ha

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}$$



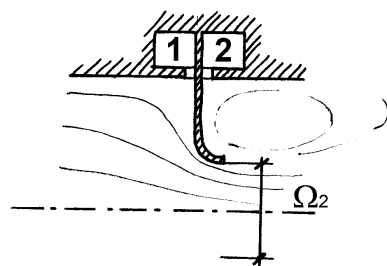


Figure 23.3:

essendo  $\Omega_2$  la superficie di efflusso del fluido e  $C_Q$  un coefficiente che dipende dai dettagli geometrici (per i valori di  $C_Q$  si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere).

## Chapter 24

# FLUIDI IDEALI E TEOREMA DI BERNOULLI

- Nel capitolo 23 abbiamo dedotto il teorema di Bernoulli per le correnti fluide, partendo dall'equazione del moto valida in tali circostanze. Il carico totale

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g}$$

é definito anche in un moto tridimensionale e rappresenta comunque l'energia meccanica posseduta dal fluido per unitá di peso.

- Partendo dalle equazioni tridimensionali che esprimono il principio della quantitá di moto per un fluido stokesiano (equazioni di Navier - Stokes) é possibile dimostrare il teorema di Bernoulli nel caso generale. Non siamo in grado di effettuare tale dimostrazione nell'ambito di questo corso, perché ciò presuppone lo studio del moto tridimensionale dei fluidi che verrà effettuato nei corsi della laurea specialistica.

Tuttavia, vista la sua importanza, considerato che il teorema di Bernoulli nella forma generale presenta stretta analogia con quello valido per le correnti e tenendo presente che la soluzione di alcuni problemi che affronteremo nel capitolo 25 richiede la sua conoscenza, enuncieremo qui il teorema di Bernoulli nella forma generale elencando le ipotesi che devono essere verificate per la sua validitá.

### **Ipotesi:**

#### 1) Fluido ideale

Per fluido ideale si intende un fluido privo di viscositá, tale quindi che la tensione da esso esercitata sia sempre normale alla superficie considerata

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$$

In natura non esiste un fluido ideale, in quanto tutti i fluidi hanno una viscosità dinamica  $\mu$  diversa da zero e esercitano anche tensioni tangenti alla superficie considerata.

Tuttavia in moti accelerati, caratterizzati da alti valori del numero di Reynolds e con contorni rigidi limitati, il comportamento dei fluidi reali può essere assimilato a quello dei fluidi ideali.

2) Moto stazionario

Spesso nei problemi si analizzano le situazioni di regime quando tutte le grandezze caratterizzanti il moto sono indipendenti dal tempo.

3) Campo di forze conservativo<sup>(1)</sup>

Spesso nei problemi ingegneristici, il campo di forze che deve essere considerato è quello gravitazionale che è un particolare campo di forze conservativo tale che

$$\varphi = -gz$$

essendo  $z$  un asse verticale diretto verso l'alto.

4) Fluido barotropico

Un fluido si dice barotropico quando la densità  $\rho$  risulta funzione solo della pressione  $p$ . Dovrebbe essere evidente che un fluido a densità costante è in particolare fluido barotropico. **Quando le quattro ipotesi sopra elencate sono verificate il carico totale**

$$H = -\frac{\varphi}{g} + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g}$$

**si mantiene costante lungo una linea di corrente.**

Ricordiamo che le linee di corrente sono definite dalla proprietà di essere tangenti (quindi parallele) al vettore velocità in ogni punto. La loro equazione in forma differenziale è dunque

$$d\mathbf{x} \times \mathbf{v} = 0$$

essendo  $d\mathbf{x}$  l'elemento infinitesimo della linea di corrente (vedi capitolo 13).

Se il moto è stazionario le traiettorie delle particelle fluide, definite dall'equazione parametrica

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$$

coincidono con le linee di corrente. Emerge quindi che il carico totale  $H$  si mantiene costante anche lungo le traiettorie.

---

<sup>(1)</sup>Ricordiamo che un campo di forze si dice conservativo quando ammette una funzione potenziale  $\psi$  tale che

$$\mathbf{f} = \nabla\varphi$$

### 24.0.1 EFFLUSSO DA LUCI - APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

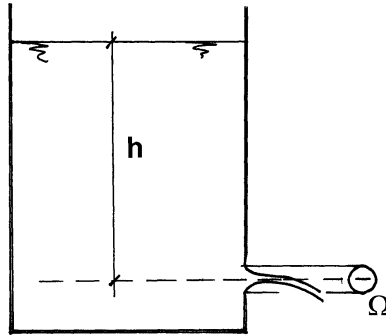


Figure 24.1:

Consideriamo il serbatoio in figura 24.1 dove, alla profondità  $h$ , è praticato un foro circolare di sezione  $\Omega$ . Supponiamo che la superficie libera  $S$  del serbatoio sia molto maggiore di  $\Omega$  in modo tale da poter assumere che le variazioni del pelo libero siano lente nel tempo e quindi il moto generato dall'efflusso attraverso il foro sia praticamente stazionario. Il campo di forze cui è soggetto il fluido sia quello gravitazionale. Inoltre la densità del fluido sia costante. All'interno del serbatoio, lontano dal foro, il fluido è praticamente fermo e gli effetti viscosi sono trascurabili. In prossimità del foro, il moto è accelerato e ad alti numeri di Reynolds. È possibile dunque assumere ideale il comportamento del fluido e applicare il teorema di Bernoulli. Consideriamo un'asse  $z$  rivolto verso l'alto con origine in corrispondenza del livello del foro. Il carico totale in un qualunque punto all'interno del serbatoio e lontano dal foro vale  $h$ . Invece il carico cinetico è nullo perché il fluido è praticamente fermo e il carico piezometrico risulta quindi costante. Il getto avrà una geometria simile a quella illustrata in figura 24.2.

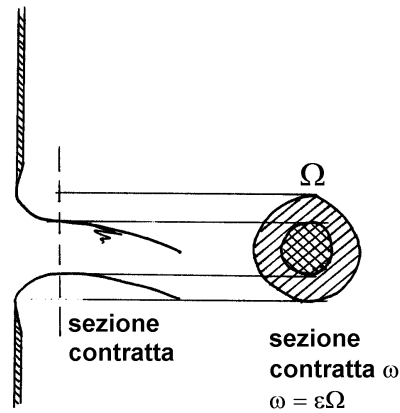


Figure 24.2:

Il getto ha una sezione inferiore a quella del foro perché il fluido che si trova in prossimità della parete non esce con una traiettoria ortogonale alla parete stessa bensì con una che inizialmente è tangente alla parete. Le traiettorie delle particelle fluide vicine alla parete, che inizialmente si muovono parallelamente a essa, non possono infatti presentare un punto angoloso. L'area del getto, in quella che si definisce sezione contratta dove le traiettorie delle particelle fluide sono fra di loro parallele e ortogonali alla parete del serbatoio, vale

$$\omega = C_C \Omega$$

ove  $C_C$  è il cosiddetto coefficiente di contrazione che misure sperimentali mostrano essere circa 0.6. Considerato che le ipotesi del teorema di Bernoulli sono verificate, applichiamo lungo una qualunque linea di corrente passante per un generico punto  $B$  della sezione contratta (figura 24.3). Si avrà

$$H_A = H_B$$

essendo  $A$  un punto all'interno del serbatoio. Per i motivi discussi precedentemente

$$H_A = h$$

indipendentemente dall'esatta forma della linea di corrente e dall'esatta posizione del punto  $A$ . È facile vedere che

$$H_B = v_B^2/2g$$

Infatti il valore di  $z_B$  è trascurabile rispetto a  $h$  e la pressione relativa  $p_B$  è

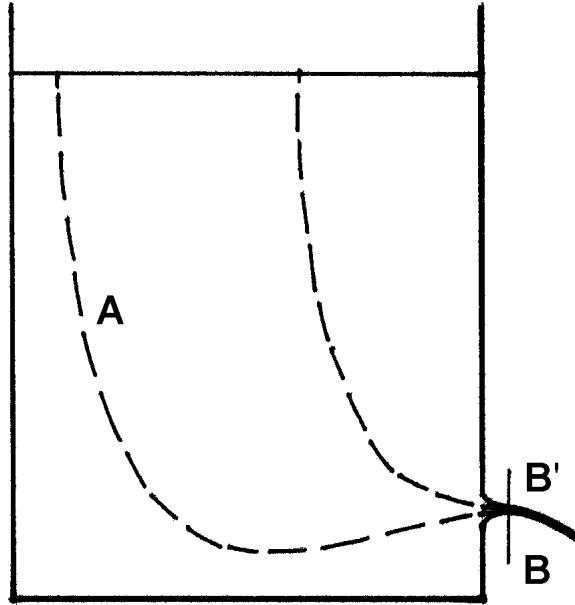


Figure 24.3:

nulla (in un getto la pressione é costante sulla generica sezione e pari a quella atmosferica). Si ha quindi

$$h = v_B^2/2g$$

da cui

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

La velocità  $\sqrt{2gh}$  é detta “velocità- torricelliana”. La portata uscente dal serbatoio risulta dunque

$$Q = C_C \Omega \sqrt{2gh}$$

Volendo valutare il tempo necessario affinché  $h$  passi dal valore  $h_1$  al valore  $h_2$  é necessario imporre un bilancio di massa. Semplici considerazioni sul volume di fluido che attraversa la sezione contratta impongono

$$Qdt = -dhS$$

essendo  $S$  l’area della superficie libera del serbatoio. Segue

$$-dhS = C_C \Omega \sqrt{2gh} dt$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{C_C \Omega \sqrt{2g}}{S} dt$$

$$2\sqrt{h_2} - 2\sqrt{h_1} = -\frac{C_C \Omega \sqrt{2g}}{S} (t_2 - t_1)$$

$$\Delta t = (t_2 - t_1) = -\frac{2S}{C_C \Omega \sqrt{2g}} (\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1})$$

## PRESSIONE DI RISTAGNO - APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI BERNOULLI

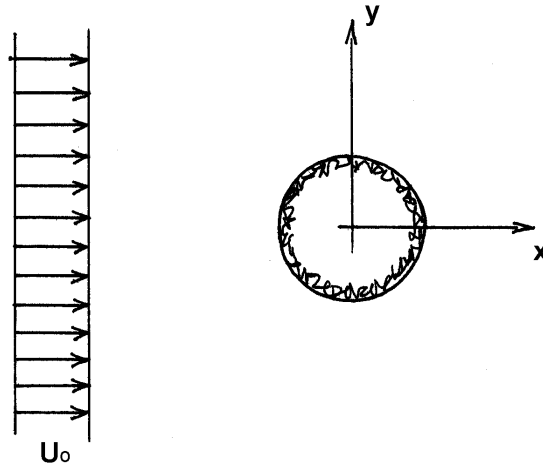


Figure 24.4:

Consideriamo un corpo (ad esempio un cilindro) che si muove con velocità costante  $U_0$  all'interno di un fluido fermo. Analizziamo il problema utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo, trasformando quindi il problema in quello di un oggetto fermo investito da un fluido che lontano dal corpo è animato da una velocità costante pari a  $U_0$ .

Se ipotizziamo il fluido ideale, la densità costante, il moto stazionario e il campo di forze gravitazionale, sappiamo (teorema di Bernoulli) che

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2g} = \text{cost}$$

lungo una linea di corrente (l'accelerazione di gravità é qui supposta diretta come l'asse  $z$ ).

E' evidente che sul corpo esisterá un punto (detto **punto di ristagno**) in cui la velocità é nulla. Nel caso di un cilindro il punto di ristagno é posizionato in  $(-R, 0)$  essendo  $R$  il raggio della sezione del cilindro. Consideriamo ora la linea di corrente che passa per il punto di ristagno (vedi figura 24.5) e un punto  $A$  lontano dal corpo.

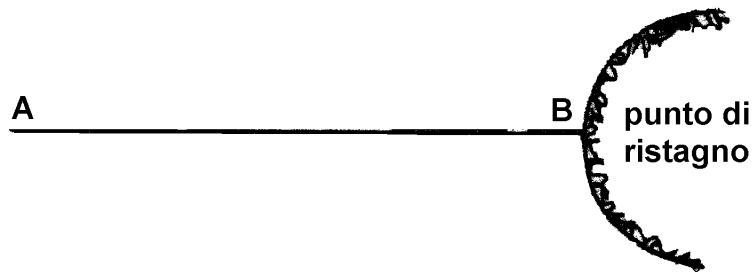


Figure 24.5:

Per il teorema di Bernoulli  $H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{|\mathbf{v}|_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{|\mathbf{v}|_B^2}{2g} = H_B$  tuttavia  $z_A = z_B$  e  $|\mathbf{v}|_A = U_0$ ,  $|\mathbf{v}|_B = 0$ . Segue dunque

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

La differenza di pressione  $p_B - p_A$  é detta **pressione di ristagno**. Essa cresce con il quadrato della velocità  $U_0$  ed é proporzionale alla densità del fluido. Siccome lontano dal corpo la pressione é pari alla pressione atmosferica, la quantità  $\rho U_0^2/2$  é semplicemente la pressione relativa nel punto  $B$ .



## TUBO DI PITOT

E' evidente che nel problema precedentemente analizzato, la misura della pressione relativa in  $B$ , consente la valutazione della velocità  $U_0$ . Nel passato, la misura della velocità  $U_0$  veniva effettuata con uno strumento denominato "tubo di Pitot", schematicamente rappresentato in figura.

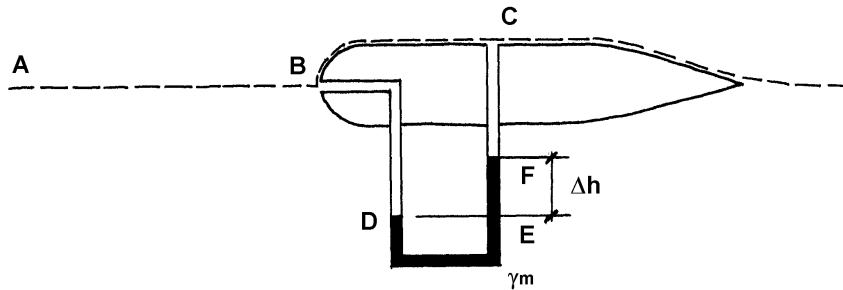


Figure 24.6:

La velocità nel punto  $C$  risulta praticamente quella indisturbata e pari quindi a  $U_0$  (la linea tratteggiata rappresenta la linea di corrente passante per  $A, B$  e  $C$ ).

Si ha quindi

$$p_B - p_C = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

Inoltre

$$p_B - p_C = \Delta h (\gamma_m - \gamma)$$

Segue

$$U_0 = \sqrt{2g\Delta h \left( \frac{\rho_m - \rho}{\rho} \right)}$$

## Chapter 25

# TEORIA DELLE TURBINE PELTON

Nel capitolo 14 abbiamo visto che un getto, che urta una parete piana ferma, esercita su di essa una forza  $F$

$$F = \rho \Omega U_0^2$$

Se la geometria della parete é diversa, diverso é il valore di  $F$ . Consideriamo ad esempio la situazione in figura 25.1

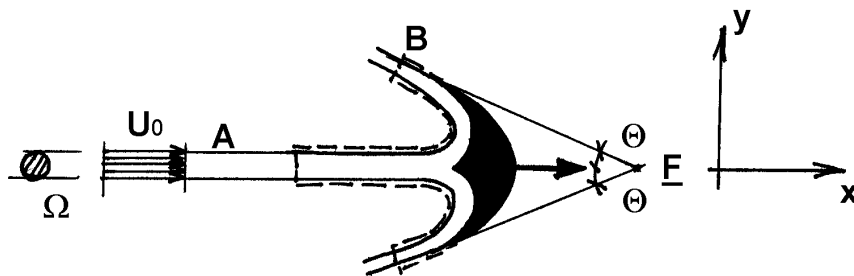


Figure 25.1:

In primo luogo osserviamo che la velocità del fluido che si allontana dalla superficie dopo averla urtata é pari ad  $U_0$ . Tale risultato é facilmente ottenibile dal teorema di Bernoulli (si assuma fluido ideale, densità costante, campo di forze gravitazionali con  $\mathbf{g}$  diretta lungo l'asse  $z$ , moto stazionario e si applichi il teorema di Bernoulli uguagliando i carichi totali del punto  $A$  e

del punto  $B$ ). Per determinare la forza  $\mathbf{F}$  esercitata dal getto é necessario applicare il principio della quantità di moto nella sua forma integrale al volume delimitato dalla linea tratteggiata in figura 25.1. Considerando la proiezione dell'equazione nella direzione  $x$ , si ottiene

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x$$

Come discusso nel capitolo 14, si ha

$$I_x = 0, \quad G_x = 0, \quad \Pi_x = -F_x, \quad M_{ix} = \rho\Omega U_0^2$$

Nel caso in esame, inoltre,  $M_{ux}$  é diverso da zero. Per valutare  $M_{ux}$  é necessario notare che la sezione dei getti che abbandonano la superficie deve essere pari a  $\Omega/2$ . Per la conservazione della massa deve infatti risultare

$$U_0\Omega = 2U_B\Omega_B$$

Inoltre  $U_B = U_0$  e quindi  $\Omega_B = \Omega/2$ . Tenendo conto che i getti che abbandonano la superficie hanno un'inclinazione  $\theta$  rispetto al semiasse negativo  $x$ , é facile valutare  $M_{ux}$  che risulterà

$$M_{ux} = -2\rho U_B^2 \Omega_B \cos \theta = -\rho\Omega U_0^2 \cos \theta$$

Segue infine

$$F_x = \rho U_0^2 \Omega (1 + \cos \theta)$$

e anche

$$F_x = \rho Q U_0 (1 + \cos \theta)$$

essendo  $Q = U_0\Omega$  la portata del getto.

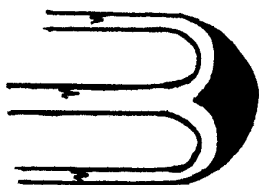


Figure 25.2:

In particolare se  $\theta = 0$  (vedi figura 25.2) la forza  $F_x$  risulta doppia rispetto a quella determinata nel capitolo 14 dove  $\theta = \pi/2$ .

Pur potendo generare forze notevoli, in questa situazione il getto non é in grado di compiere alcun lavoro. La potenza associata al getto (vedi capitolo 15)

$$P_d = \gamma QH = \rho \Omega \frac{U_0^3}{2}$$

non riesce quindi a essere sfruttata.

Al fine di far fare del lavoro al getto e quindi di sfruttare in parte l'energia posseduta dal getto é necessario fare in modo che la superficie (nel seguito anche pala) si muova. Si denoti con  $V$  la velocità della pala rispetto al convergente che genera il getto.

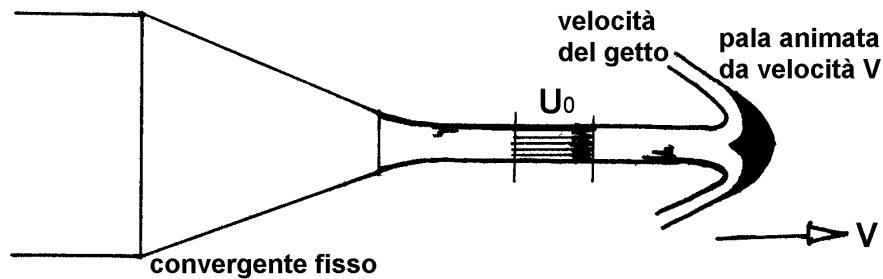


Figure 25.3:

Quest'ultimo abbia una velocità  $U_0$  rispetto al convergente. Applicando il principio della quantità di moto adottando un sistema di riferimento solidale con la pala (sistema inerziale perché in moto con velocità costante) si ottiene

$$F = \rho \Omega (U_0 - V)^2 (1 + \cos \theta)$$

La forza é inferiore a quella che si ha per la pala ferma poiché il termine  $(U_0 - V)^2$  sostituisce il termine  $U_0^2$ . Tenendo conto che

$$U_0^2 \Omega = QU_0$$

$$(U_0 - V)^2 \Omega = \tilde{Q} (U_0 - V) \quad \text{ove} \quad \tilde{Q} = (U_0 - V) \Omega$$

si può capire che la forza  $F$  per la pala in movimento é inferiore a quella relativa alla pala ferma per due motivi.

Il primo é legato al fatto che la velocità di impatto passa da  $U_0$  a  $(U_0 - V)$ .

Il secondo motivo é dovuto al fatto che per la pala in movimento non tutta la portata  $Q$  viene utilizzata, ma una parte di essa (per la precisione  $\Omega V$ ) viene utilizzata per allungare il getto. Questa portata puó essere recuperata utilizzando una sequenza di pale: quando una pala si allontana troppo dal convergente ne subentra un'altra in posizione piú vicina al convergente. Il fluido compreso fra la prima pala e la nuova pala andrà comunque a urtare la prima pala non andando sprecato. La situazione descritta sinteticamente nelle righe precedenti puó essere ottenuta montando le pale su una ruota

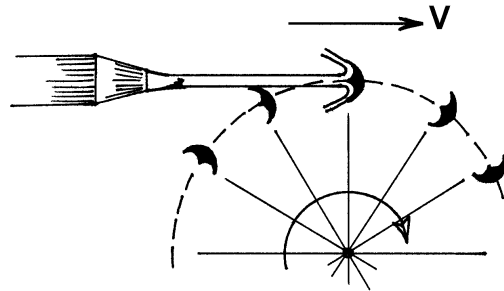


Figure 25.4:

Intuitivamente si puó arrivare al risultato

$$F = \rho U_0 \Omega (U_0 - V) (1 + \cos \theta)$$

essendo  $F$  la forza sull'insieme delle pale (ruota). Il lavoro fatto dal getto sulla ruota nell'unitá di tempo (potenza ceduta dal getto alla ruota) puó essere valutato con l'espressione

$$P_U = FV = \rho U_0 \Omega V (U_0 - V) (1 + \cos \theta)$$

Puó essere utile valutare quale é la velocità  $V$  che rende massima la potenza  $P_U$ . Essa puó essere calcolata trovando i valori di  $V$  che annullano  $dP_U/dV$

$$\begin{aligned} \frac{dP_u}{dV} &= \rho U_0 \Omega (1 + \cos \theta) [U_0 - V - V] \\ \frac{dP_U}{dV} &= 0 \text{ per } V = \frac{U_0}{2} \end{aligned}$$

Segue

$$(P_U)_{max} = \rho U_0 \Omega \frac{U_0^2}{4} (1 + \cos \theta) = \rho \Omega \frac{U_0^3}{4} (1 + \cos \theta)$$

In tal caso il rendimento della ruota, rapporto fra la potenza utilizzata e quella disponibile, risulta

$$\eta = \frac{(P_U)_{max}}{P_d} = \frac{\rho \Omega U_0^3 (1 + \cos \theta)}{4 \rho \Omega U_0^3 / 2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

È evidente che quando  $\theta$  si avvicina a 0, il valore di  $\eta$  si avvicina ad 1. Nel caso reale  $\eta$  è uguale a circa  $0.95 \div 0.97$ . Infatti valori di  $\theta$  nulli non possono essere realizzati in quanto, per  $\theta = 0$ , i getti in uscita interferirebbero con la pala seguente. Inoltre bisogna tener conto che gli effetti viscosi, per quanto piccoli, non sono nulli e quindi la velocità dei getti che lasciano la singola pala è inferiore (anche se di poco) rispetto alla velocità dei getti in arrivo.

La macchina idraulica, il cui funzionamento è stato descritto in forma semplice e sintetica nelle righe precedenti, è detta turbina Pelton.

# Chapter 26

## LO STRATO LIMITE

Se consideriamo un corpo di forma qualsiasi investito da un fluido in moto uniforme (cioé stazionario e unidirezionale), é evidente che, vicino al corpo il gradiente della velocità assumerá valori non nulli poiché' sulla superficie del corpo la velocità deve essere nulla essendo il corpo fermo.

Le caratteristiche del campo di moto che si realizza intorno al corpo dipendono, oltre che dalla forma e dall'orientamento del corpo, anche dal valore del numero di Reynolds<sup>(1)</sup>.

Se il valore del numero di Reynolds é modesto, gli effetti viscosi influenzano una regione vasta attorno al corpo. Se invece il valore del numero di Reynolds é elevato, di norma, si osservano elevate tensioni viscosive solo vicino alla superficie del corpo. Inoltre la regione vicino alla superficie del corpo in cui il gradiente della velocità assume valori significativi, é molto piú piccola rispetto alle dimensioni del corpo ed é detta **strato limite**. Se il corpo é tozzo oppure male orientato rispetto alla direzione del fluido e se il numero di Reynolds é elevato lo strato limite si separa dalla superficie del corpo dando luogo al fenomeno della **separazione dello strato limite**: a valle del corpo si sviluppa una zona, detta **zona di ricircolazione** in cui i valori della pressione sono minori di quelli esterni (figura 26.1). Si può facilmente intuire che la presenza della zona di ricircolazione a valle del corpo genera una resistenza ulteriore rispetto a quella dovuta alla sola viscosità, che tende a trascinare il corpo nella direzione del fluido (resistenza di forma).

Nella zona esterna allo strato limite il moto può essere assimilato a quello di un fluido ideale (vedi capitolo 24) e il teorema di Bernoulli può essere utilizzato per calcolare la pressione una volta noto il campo di velocità.

Lo studio dei moti di fluidi ideali verrà affrontato nell'ambito dei corsi

---

<sup>(1)</sup>In questo contesto il numero di Reynolds é definito utilizzando il modulo della velocità del fluido a grandi distanze dal corpo ( $U_0$ ), la dimensione caratteristica del corpo ( $L$ ) e la viscosità cinematica del fluido.

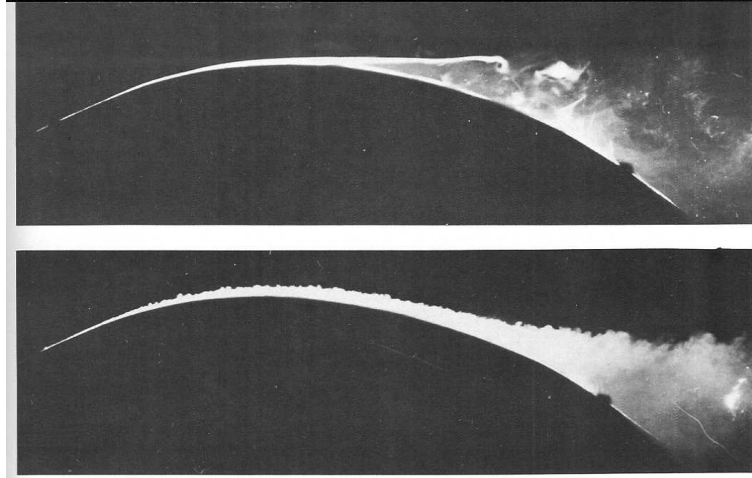


Figure 26.1: strato limite che si separa dalla superficie di un corpo tozzo. Foto in alto: strato limite laminare. Foto in basso: strato limite turbolento

della Laurea Magistrale insieme allo studio approfondito dello strato limite. Tuttavia é opportuno introdurre qui alcuni concetti fondamentali che verranno ripresi e approfonditi nei corsi successivi.

## STRATO LIMITE LAMINARE

Lo strato limite che si sviluppa sulla superficie dei corpi puó essere approssimato, laddove sia assente il fenomeno della separazione, come lo strato limite che si realizza sopra una lastra piana.

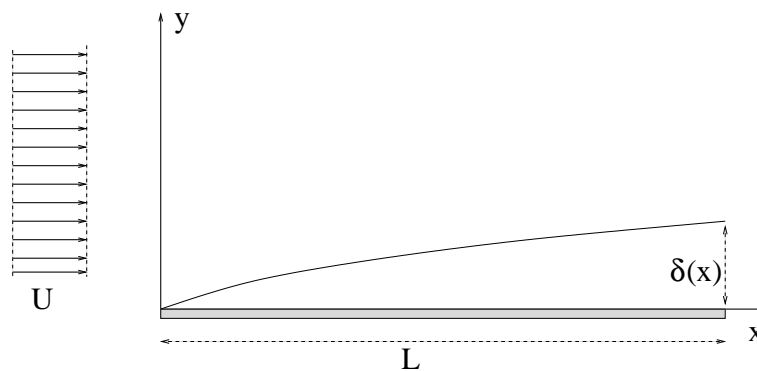


Figure 26.2: Strato limite su lastra piana.



Si consideri dunque una piastra piana, lunga  $L$  e di larghezza unitaria, investita da un fluido di assegnata viscosità ( $\nu$ ) e densità ( $\rho$ ) che si muove tangenzialmente a essa con velocità costante  $U$  (figura 26.2). Se il numero di Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu}$  è elevato sulla piastra si svilupperà uno strato limite di spessore ( $\delta$ ) crescente con la distanza dal bordo di attacco ma comunque piccolo rispetto a  $L$ .

Il fluido eserciterà sulla piastra una tensione la cui componente in direzione tangente alla piastra  $\tau_0$  può essere valutata in prima approssimazione applicando il teorema II. Assumendo che  $\tau_0$  sia funzione di  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $U$  e dalla distanza  $x$  dal bordo di attacco della piastra, il teorema II consente di mostrare che:

$$\tau_0 = \rho U_0^2 f(Re_x)$$

dove  $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ .

Sempre l'applicazione del teorema II consente anche di mostrare che:

$$\delta(x) = L g(Re_x).$$

Per poter conoscere la forma delle funzioni  $f$  e  $g$  è necessario proseguire nell'analisi e utilizzare ad esempio il principio della quantità di moto.

Si consideri il volume ABCD tratteggiato in figura 26.3 e si osservi che mentre la velocità nella sezione AD può essere ritenuta costante e pari a  $(U, 0)$ , sulla sezione BC il valore della velocità varia con  $y$  ( $u = u(y)$ ). L'applicazione del principio della quantità di moto lungo la direzione  $x$  porge:

$$M_{ux} - M_{ix} = \pi_x \quad (26.1)$$

dove

$$M_{ix} = \rho \int_0^\delta U^2 dy \quad (26.2)$$

è il flusso di quantità di moto che entra nel volume di controllo in direzione  $x$ , e

$$M_{ux} = \rho \int_0^\delta u^2 dy + \rho \int_0^\delta U(U - u) dy \quad (26.3)$$

è il flusso di quantità di moto che esce dal volume di controllo in direzione  $x$ . Si noti che il primo termine della 26.3 rappresenta il flusso di quantità di moto che esce dalla superficie BC mentre il secondo termine rappresenta il flusso di quantità di moto associato alla massa che esce da CD ( $\rho \int_0^\delta (U - u) dy$ ). Se la gravità è diretta secondo l'asse  $z$ , la pressione sulla

superficie AD risulta costante e pari a quella che agisce sulla superficie CB, emerge quindi che

$$\Pi_x = - \int_{AB} \tau_0 dx$$

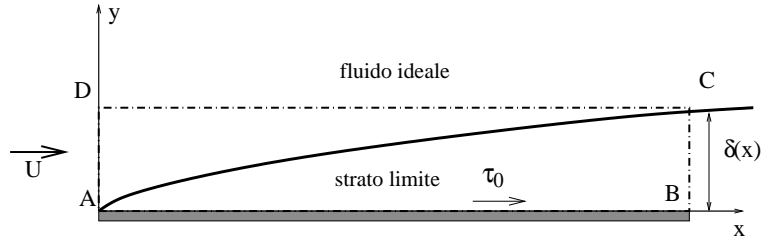


Figure 26.3: volume di controllo per l'applicazione del principio della quantità di moto

L'applicazione del principio della quantità di moto lungo la direzione  $x$  conduce quindi a:

$$\rho U^2 \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^x \tau_0 dx \quad (26.4)$$

Per poter procedere a calcolare  $\delta$ , che dipende da  $x$ , è necessario conoscere il profilo di velocità all'interno dello strato e  $\tau_0$ .

Se il moto all'interno dello strato è in regime laminare<sup>(2)</sup>, il profilo di velocità è ben approssimato dalla relazione:

$$\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (26.5)$$

Inoltre la tensione tangenziale  $\tau_0$  in questa applicazione può essere calcolata utilizzando la relazione già introdotta nel capitolo 10, cioè:

$$\tau_0 = \mu \left[ \frac{du}{dy} \right]_{y=0}$$

Utilizzando la (26.5) è possibile calcolare i termini della (26.4):

$$\int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{2}{15} \delta \quad (26.6)$$

e

$$\tau_0 = 2\mu \frac{U}{\delta} \quad (26.7)$$

<sup>(2)</sup>si rimanda ai corsi di Laurea Magistrale per una definizione precisa del regime di moto laminare e di quello turbolento

Utilizzando le (26.6) e (26.7) é possibile integrare la (26.4) (ricordando che  $\delta$  dipende da  $x$ ) e si ottiene:

$$\left(\frac{\delta(x)}{x}\right)^2 = 30\frac{\nu}{Ux}$$

o, equivalentemente:

$$\frac{\delta(x)}{x} = 5.48(Re_x)^{-\frac{1}{2}}. \quad (26.8)$$

essendo  $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ .

La (26.8) fornisce lo spessore dello strato limite in funzione della distanza dal bordo di attacco della piastra, mentre la tensione tangenziale  $\tau_0$  sulla piastra risulta pari a:

$$\tau_0(x) = \frac{2\mu U}{5.48x\left(\frac{\nu}{Ux}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0.365\rho U^2(Re_x)^{-\frac{1}{2}} \quad (26.9)$$

e, come  $\delta$ , risulta funzione di  $x$ . La forza tangenziale, per unitá di larghezza, esercitata dal fluido su ciascuna faccia della piastra é pari a:

$$F_D = \int_0^L \tau_0(x)dx = 0.73\rho U^2 L\left(\frac{UL}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

che, introducendo il coefficiente di resistenza  $c_R$  é solitamente espressa come:

$$F_D = c_R(Re)\rho\frac{U^2}{2}L$$

dove

$$c_R = \frac{1.46}{\sqrt{Re}} \quad \text{con} \quad Re = \frac{UL}{\nu}.$$

## STRATO LIMITE TURBOLENTO

Quando il numero di Reynolds  $Re_x$  supera un valore critico, pari a circa  $5 \times 10^5$ , i disturbi presenti all'interno del campo di moto cominciano a crescere e si sviluppa il regime di moto turbolento. Se il campo di velocità é turbolento, il profilo di velocità non é piú approssimato dalla (26.5). In presenza di un moto turbolento, si fa riferimento ai valori medi della velocità (nel seguito

indicata come  $\langle u \rangle$  <sup>(3)</sup>). In presenza di uno strato limite turbolento la legge che approssima bene l'andamento della velocità media all'interno dello strato é:

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 8.74 \left( \frac{u_* y}{\nu} \right)^{\frac{1}{7}} \quad \text{con} \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (26.10)$$

dove  $\tau_0$  é la tensione tangenziale sulla piastra e la quantità  $u_*$ , che ha le dimensioni di una velocità, é detta **velocità di attrito**.

Detto  $U$  il valore della velocità sul bordo dello strato, cioè per  $Y = \delta$  dove  $u = U$ , utilizzando la (26.10) é possibile ottenere:

$$\frac{\langle u \rangle}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (26.11)$$

L'applicazione del principio della quantità di moto al volume ABCD di fluido (figura 26.2), analogamente a quanto visto in precedenza, conduce a:

$$\rho U^2 \int_0^\delta \frac{\langle u \rangle}{U} \left( 1 - \frac{\langle u \rangle}{U} \right) dy = \int_0^x \tau_0 dx \quad (26.12)$$

Utilizzando la (26.11) é quindi possibile calcolare l'integrale che appare a sinistra nella (26.12):

$$\int_0^\delta \frac{\langle u \rangle}{U} \left( 1 - \frac{\langle u \rangle}{U} \right) dy = \frac{7}{72} \delta \quad (26.13)$$

Si ottiene quindi:

$$\tau_0 = \frac{7}{72} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}. \quad (26.14)$$

Dalla (26.10), calcolata per  $y = \delta$ , si può calcolare la velocità di attrito:

$$u_* = \left( \frac{U}{8.74} \right)^{\frac{7}{8}} \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{\frac{1}{8}}$$

e quindi la tensione alla parete:

$$\tau_0 = 0.0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{\delta U} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (26.15)$$

che sostituita nella (26.14) consente di ottenere:

$$\delta^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{dx} = 0.231 \left( \frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (26.16)$$

---

<sup>(3)</sup>La definizione di media di un campo di moto turbolento verrà fornita nei corsi successivi. Per il momento e in riferimento alla applicazione considerata, si può confondere la media utilizzata nello studio dei moti turbolenti con la media rispetto al tempo

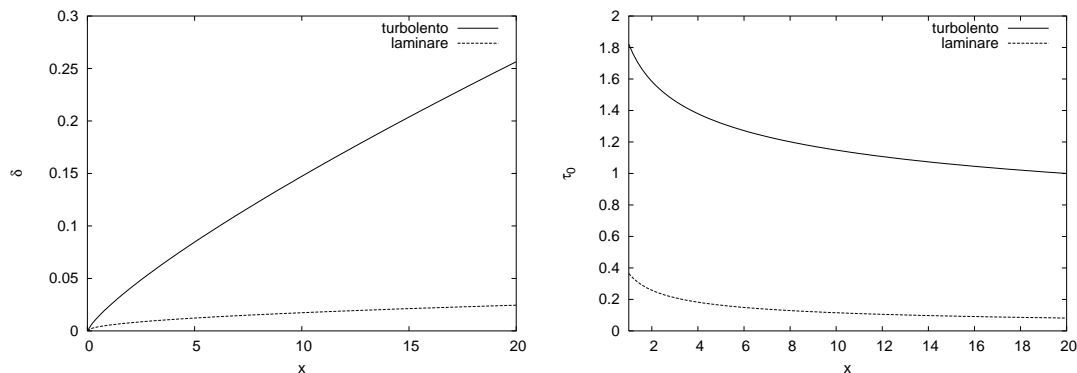


Figure 26.4: sinistra: spessore dello strato limite nei casi laminare e turbolento in funzione di  $x$ ; destra: tensione tangenziale sulla parete in funzione di  $x$ .  $U=1$  m/s, fluido=acqua.

La (26.16) può essere integrata tra la posizione 0 e  $x$ , ottenendo:

$$\delta(x) = 0.37x^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{U}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (26.17)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\delta}{x} = 0.37Re_x^{-\frac{1}{5}}.$$

In figura 26.4 è mostrato l'andamento dello spessore dello strato limite al variare di  $x$ , ottenuto utilizzando la relazione (26.8), valida nel regime di moto laminare, e la (26.17), valida nel regime turbolento. È possibile osservare come lo strato limite turbolento presenti spessori maggiori del corrispondente strato in regime laminare.

Il calcolo della tensione tangenziale, effettuato utilizzando la (26.15) e la (26.17) fornisce:

$$\tau_0 = 0.0577\rho\frac{U^2}{2}Re_x^{-\frac{1}{5}}. \quad (26.18)$$

Un confronto tra le relazioni (26.9) e (26.18), mostrato in figura 26.4 mette in evidenza come le tensioni tangenziali sulla parete generate dal moto turbolento risultino maggiori di quelle che è in grado di sviluppare un moto laminare.

Analogamente al caso laminare è quindi possibile calcolare la resistenza  $F_D$  incontrata da ciascuna faccia della piastra (per unità di larghezza) lunga  $L$ :

$$F_D = \int_0^L \tau_0(x)dx = 0.072\rho\frac{U^2}{2} \left(\frac{\nu}{UL}\right)^{\frac{1}{5}} L$$

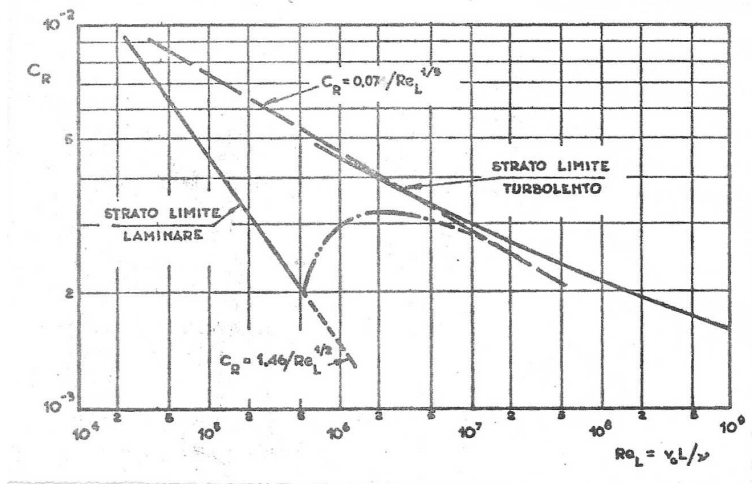


Figure 26.5:

e il coefficiente di resistenza  $c_R$ :

$$c_R = \frac{2F_D}{\rho U^2 L} = 0.072 (Re)^{-\frac{1}{5}} \quad (26.19)$$

In figura 26.5 é mostrato il coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds, insieme alle curve ricavate in precedenza per il regime laminare e turbolento.