

Meccanica delle Strutture 1
SOLUZIONI SINTETICHE della prima prova parziale del 21/11/2005

Domanda 1)

La struttura risulta 4 volte iperstatica.

Si considerino le seguenti osservazioni in virtù delle ipotesi indicate nel testo:

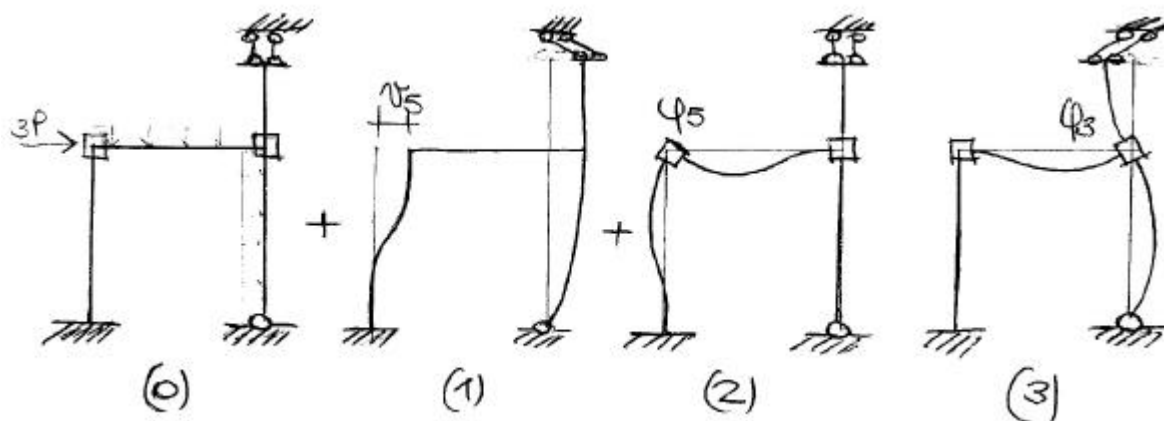
- I nodi 5 e 3 non possono traslare verticalmente poiché EA tende a infinito e tale traslazione comporterebbe invece ad esempio un allungamento/accorciamento dei ritti 1/5 e 2/3;
- I nodi 5 e 3 possono traslare orizzontalmente; ma se traslano, traslano della stessa quantità in virtù della ipotesi che EA tende a infinito per il tratto 5/3;
- I nodi 5 e 3 possono ruotare.

Quindi ne consegue che le incognite cinematiche del problema risultano:

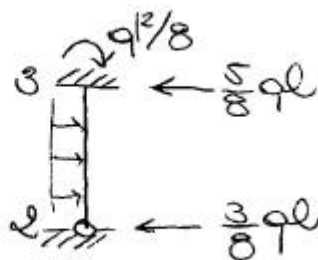
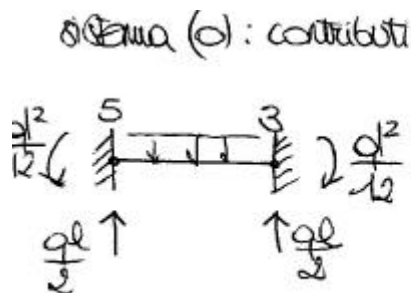
$$v_3 = v_5 = v; \phi_3; \phi_5.$$

Ovviamente in virtù dei vincoli esterni assegnati risultano rilasciati questi ulteriori gradi di libertà: $v_4; \phi_2$.

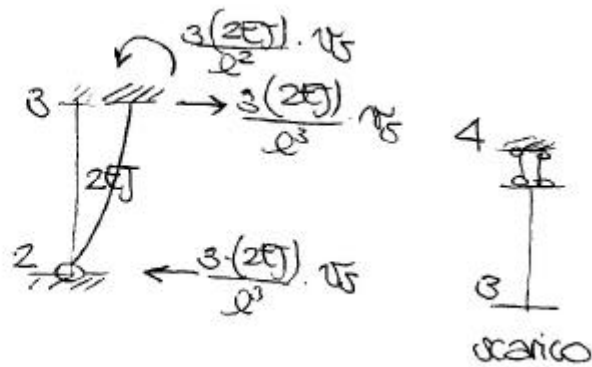
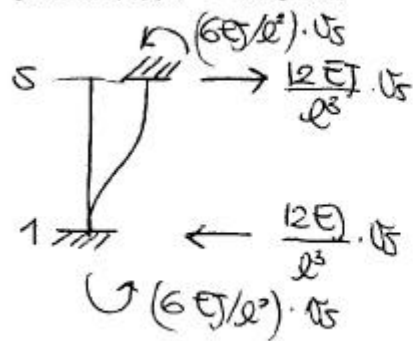
Ne conseguono i seguenti sistemi:



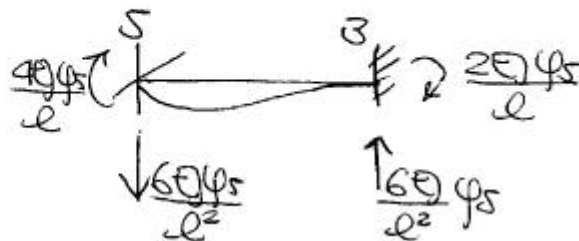
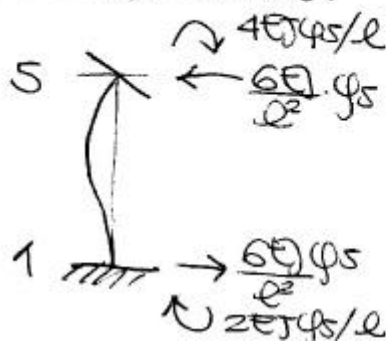
Nel seguito sono riportati i contributi dei singoli sistemi considerati:



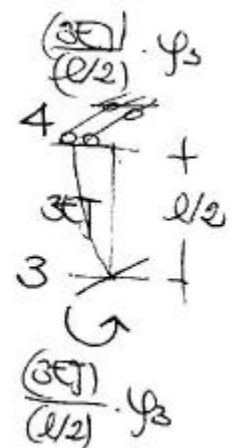
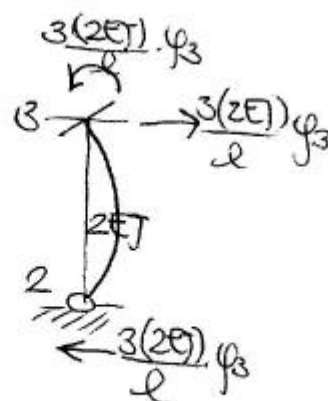
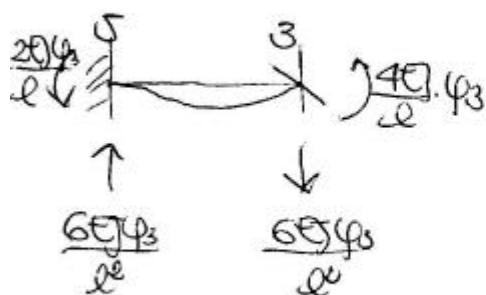
sistema (1): contributi



sistema (2): contributi



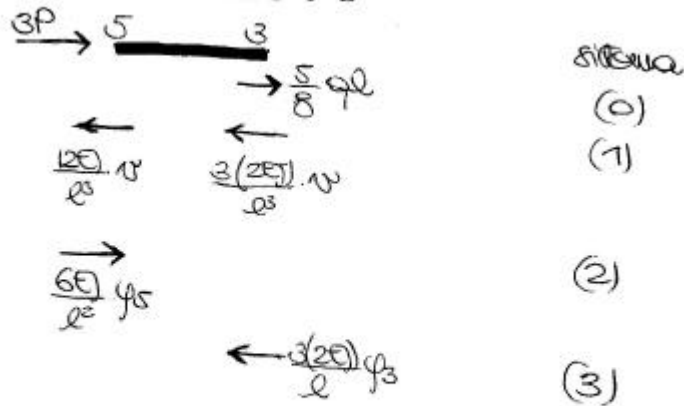
sistema (3): contributi



Si impongono ora le equazioni di equilibrio alla:

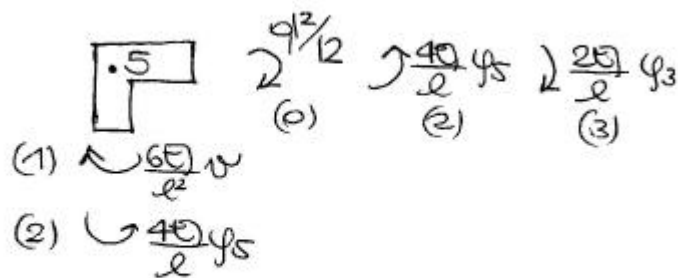
- traslazione orizzontale del traverso 3-5;
- rotazione del nodo 5;
- rotazione del nodo 3.

(a) TRASLAZIONE TRAVERSO 3-5



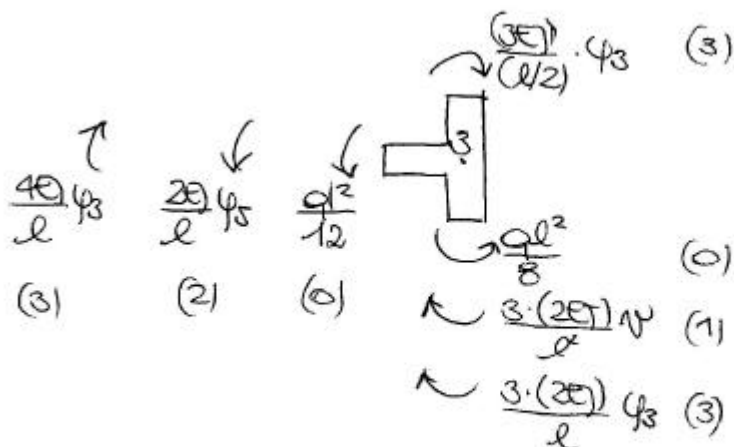
$$-\frac{5}{8} ql + \frac{12EI}{l^3} v + \frac{6EI}{l^3} v - \frac{6EI}{l^2} y_5 + \frac{3EI}{l} y_3 = 3P$$

b) EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE DEL NODO 5



$$-\frac{ql^2}{12} - \frac{6EI}{l^2} v + \frac{4EI}{l} y_5 + \frac{4EI}{l} y_5 - \frac{2EI}{l} y_3 = 0$$

(c) EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE DEL NODO 3



$$\frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{12} - \frac{6EI}{l^3} v + \frac{2EI}{l} y_5 - \frac{4EI}{l} y_3 - \frac{6EI}{l} y_3 - \frac{6EI}{l} y_3 = 0$$

Ponendo a sistema tali equazioni si ha:

$$\begin{aligned} \frac{18EJ}{l^3} v - \frac{6EJ}{l^2} \varphi_5 + \frac{6EJ}{l} \varphi_3 &= 3P + \frac{5}{8} q l \\ -\frac{6EJ}{l^2} v + \frac{8EJ}{l} \varphi_5 - \frac{2EJ}{l} \varphi_3 &= \frac{q l^2}{2} \\ -\frac{6EJ}{l^2} v + \frac{2EJ}{l} \varphi_5 - \frac{16EJ}{l} \varphi_3 &= -\frac{5}{24} q l^2 \end{aligned}$$

Da cui in forma matriciale si ha:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{18EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{6EJ}{l} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{8EJ}{l} & -\frac{2EJ}{l} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & -\frac{16EJ}{l} \end{bmatrix}}_{\text{matrice di rigidezza } [K]} \begin{Bmatrix} v \\ \varphi_5 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3P + \frac{5}{8} q l \\ \frac{q l^2}{2} \\ -\frac{5}{24} q l^2 \end{Bmatrix}$$

Domanda 2)

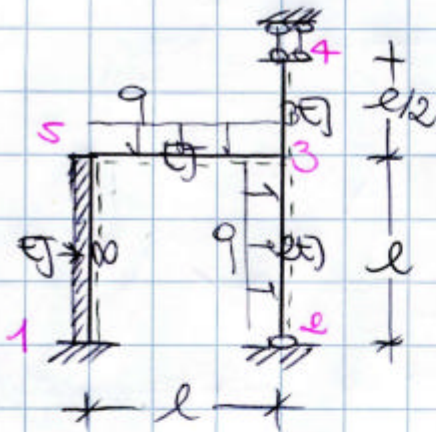
Fatte salve le osservazioni della domanda 1) con le ulteriori ipotesi introdotte risulta:

(2a) Si mantenga l'ipotesi che EA tenda ad infinito per tutti i tratti. Poiché EJ tende ad infinito per il tratto 1-5 il nodo 5 non può ruotare né traslare. Ne consegue che l'unica incognita cinematica risulta la rotazione del nodo 3. (nota: ovviamente il fatto che EJ tenda ad infinito per il tratto 1-5 non implica che ivi siano nulle le caratteristiche di sollecitazione!!!)

(2b) Si mantenga l'ipotesi che EA tenda ad infinito per tutti i tratti. Poiché EJ tende ad infinito per il tratto 5-3 i nodi 5 e 3 non possono ruotare. Ne consegue che l'unica incognita cinematica risulta la traslazione orizzontale v. (nota: ovviamente il fatto che EJ tenda ad infinito per il tratto 5-3 non implica che ivi siano nulle le caratteristiche di sollecitazione!!!)

Osservazione: cosa cambia nell'ipotesi che EA non tenda a infinito? Come cambiano le incognite cinematiche?

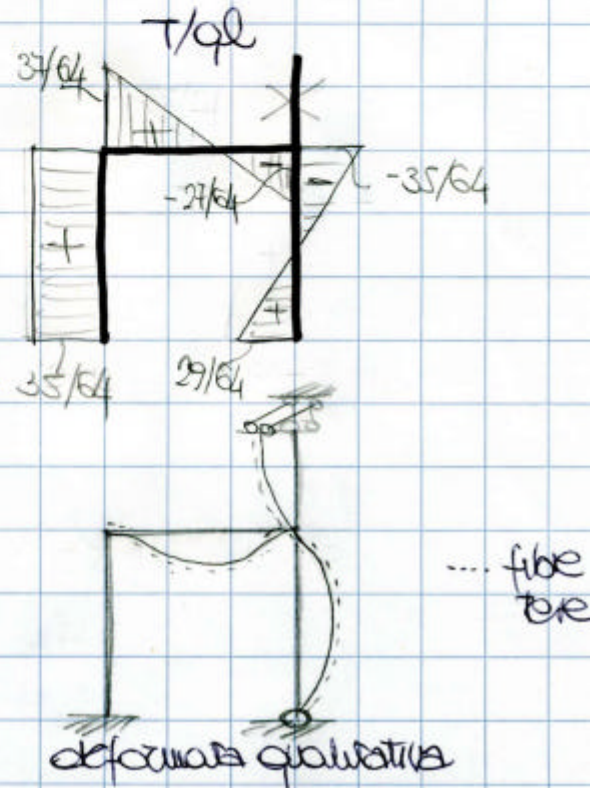
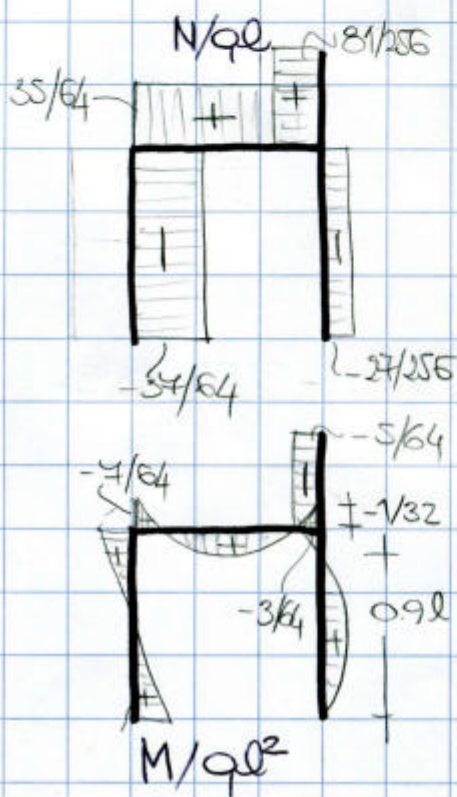
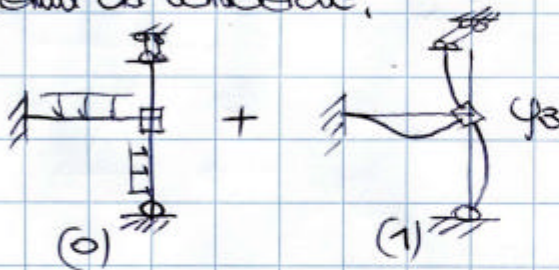
SOLUZIONE PROBLEMA FILA (a)



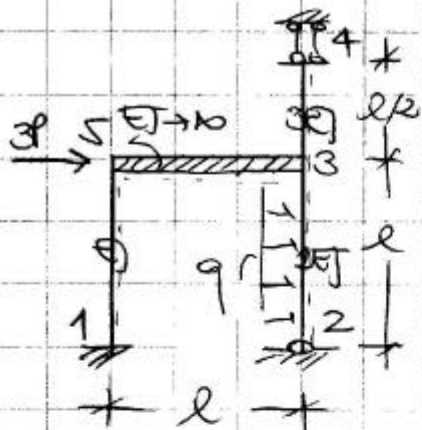
INCOGNITA CINEMATICA: φ_3
(nell'ipotesi $EA \rightarrow \infty$)

$$\varphi_3 = \frac{5}{384} \frac{ql^3}{EI}$$

Il problema è riconducibile a questo schema:
Sistemi da considerare:



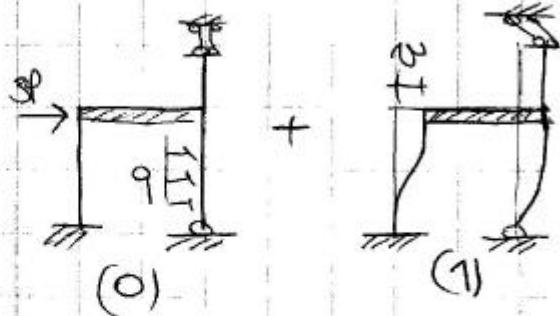
SOLUZIONE PROBLEMA FILA (b)



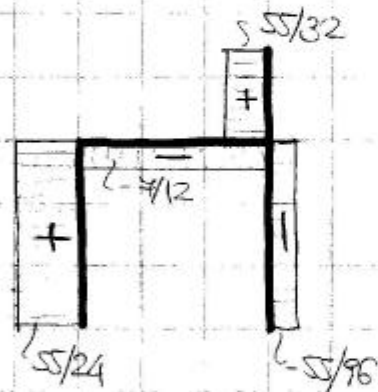
INCOGNITA CINEMATICA: $U_5 = U_3 = U$
(rel'ip $EA \rightarrow \infty$)

$$w = \frac{29}{144} \frac{ql^4}{EI}$$

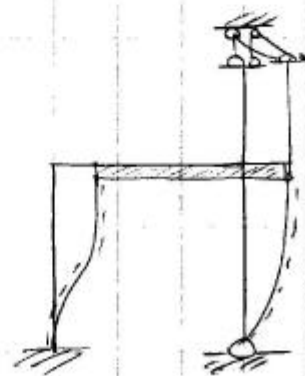
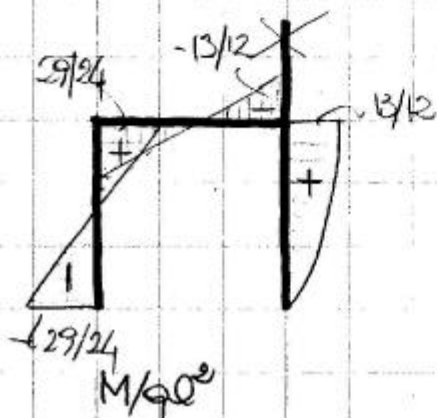
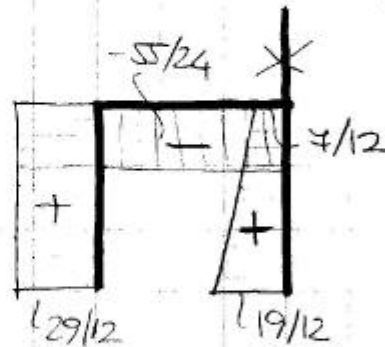
Stemi da considerare;



N/ql



T/ql



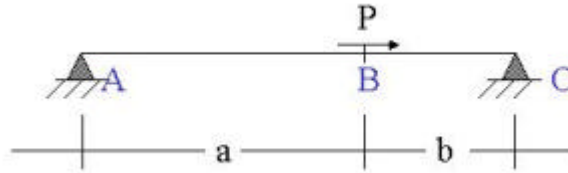
... fibre

deformata operativa

Nota:

Per la risoluzione del problema assiale nei tratti 2-3 e 3-4 fare riferimento alle seguenti osservazioni:

1) problema assiale di riferimento



Assumendo come incognita cinematica o spostamento orizzontale del punto B (w_B) si ha:

$$e_{AB} = \frac{\Delta_{AB}}{l_{AB}^0} = \frac{w_B}{a} \rightarrow N_{AB} = s_{AB} A = EA \frac{w_B}{a}$$

$$e_{BC} = \frac{\Delta_{BC}}{l_{BC}^0} = -\frac{w_B}{b} \rightarrow N_{BC} = s_{BC} A = -EA \frac{w_B}{b}$$

Da cui imponendo l'equilibrio alla traslazione in B si ricava l'incognita cinematica!

Attenzione nel porre correttamente le rigidezze e le lunghezze assegnate per i tratti 2-3 e 3-4!!!!!!

2) Il valore del carico P fare riferimento all'equilibrio del nodo 3 !!!!!!!