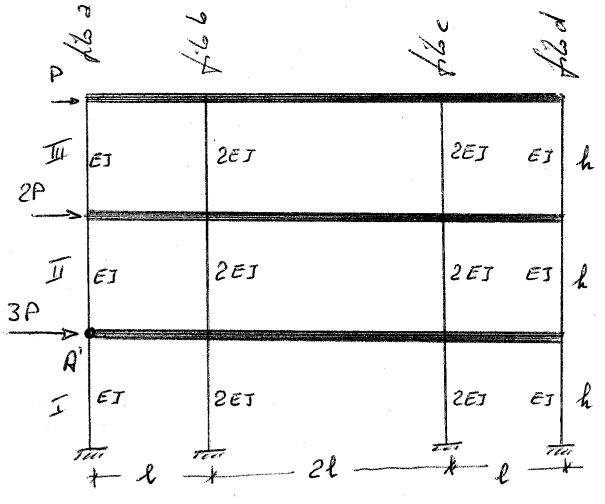
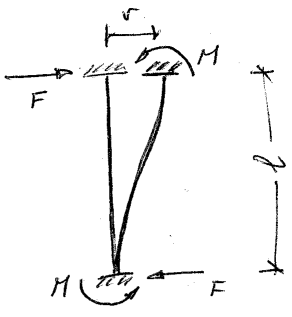
1)

FILA A





$M = \frac{6EJ}{l^2}$

$F = \frac{12EJ}{l^3} v$

Rigidezza dell'ultimo piano: $K_{III} = K_a^{III} + K_b^{III} + K_c^{III} + K_d^{III} =$

$$K_{III} = 12\frac{EJ}{h^3} + 12\frac{2EJ}{h^3} + 12\frac{2EJ}{h^3} + 12\frac{EJ}{h^3} = 72\frac{EJ}{h^3}$$

Spostamento relativo del III livello

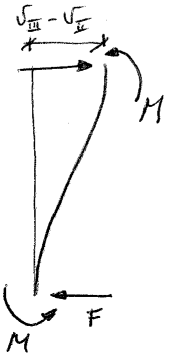
$$v_{III} - v_{II} = P/K_{III} = \frac{Ph^3}{72EJ}$$

Si osserva che la rigidezza è uguale a tutti i livelli $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad v_{II} - v_I = (P+2P)/K_{II} = \frac{3Ph^3}{72EJ}$$

$$v_I = (P+2P+3P)/K_I = \frac{6Ph^3}{72EJ} \Rightarrow v_{II} = \frac{Ph^3}{8EJ} \qquad v_{III} = \frac{5}{36}\frac{Ph^3}{EJ}$$

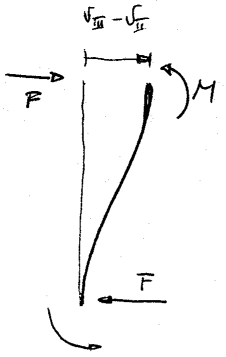
— Ritto del III livello - fila a e d



$$M = \frac{6EJ}{h^2}\frac{Ph^3}{72EJ} = Ph/12$$

$$F = \frac{12EJ}{h^3}\frac{Ph^3}{72EJ} = \frac{P}{6}$$

- Ritto del III livello fib b e fib c



$$F = 12 \frac{2EJ}{h^3} \frac{Ph^3}{72EJ} = \frac{P}{3}$$

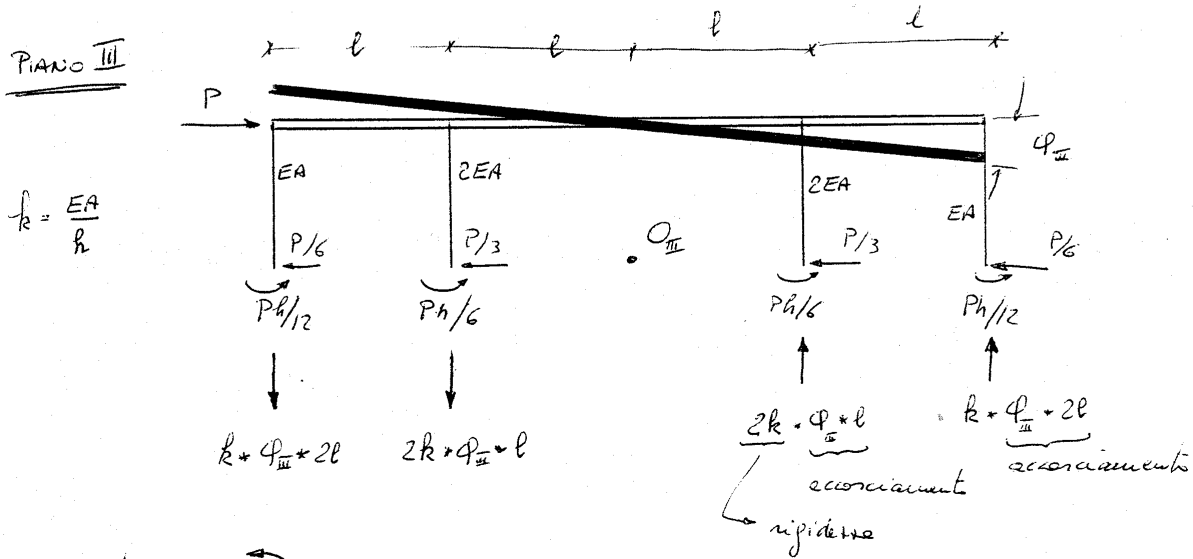
$$M = 6 \frac{2EJ}{h^3} \frac{Ph^3}{72EJ} = \frac{Ph}{6}$$

- Poiché $v_{II} - v_I = 3(v_{III} - v_{II})$ le sollecitazioni nei ritti saranno triple rispetto a quelle del III livello
- Poiché $v_I = 6(v_{III} - v_{II})$ le sollecitazioni al I livello saranno 6 volte quelle del III livello

NOTA Il diagramma del momento nei ritti è lineare.

Per determinare lo sforzo normale nei ritti si deve imporre l'equilibrio alla rotazione dei singoli livelli, non dimenticando i momenti trasmessi dai ritti

PIANO III



ep. rotazione O_{III}

$$Ph = \frac{Ph}{12} + \frac{Ph}{6} + \frac{Ph}{6} + \frac{Ph}{12} + 2k\varphi_{III} l * 2l + 2k\varphi_{III} l * 4l$$

NOTA O_I, O_{II}, O_{III} rappresentano i centri di rigidezza dei vari livelli e coincidono con il centro geometrico delle forze verticali solo per la simmetria geometrica del telaio e per la distribuzione simmetrica delle rigidezze.

NOTA Riassumendo i risultati ai vari livelli

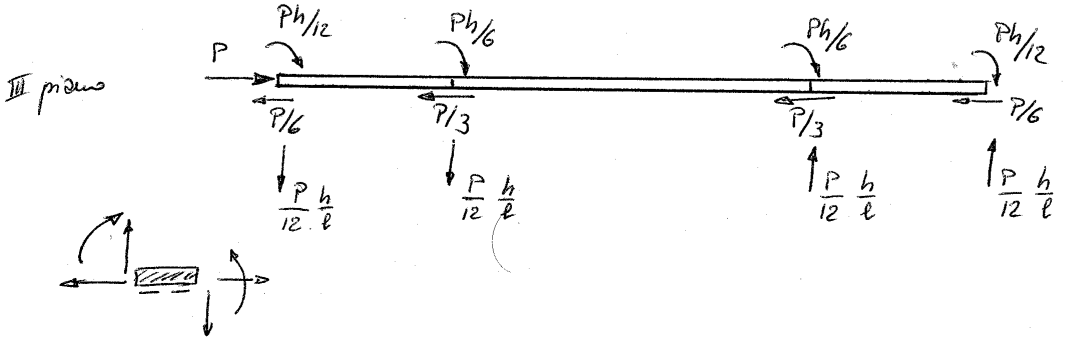
	Momento agente al livello	Rotazione di quel livello	Sforzo normale e quel livello
livello III	$\frac{1}{2} Ph$	$\frac{1}{24} \frac{P}{EA} \frac{h^2}{\ell^2}$	$\frac{1}{12} \frac{Ph}{\ell}$
livello II	$\frac{5}{2} Ph$	$\frac{5}{24} \frac{P}{EA} \frac{h^2}{\ell^2}$	$\frac{5}{12} P \frac{h}{\ell}$
livello I	$\frac{14}{2} Ph$	$\frac{14}{24} \frac{P}{EA} \frac{h^2}{\ell^2}$	$\frac{14}{12} P \frac{h}{\ell}$

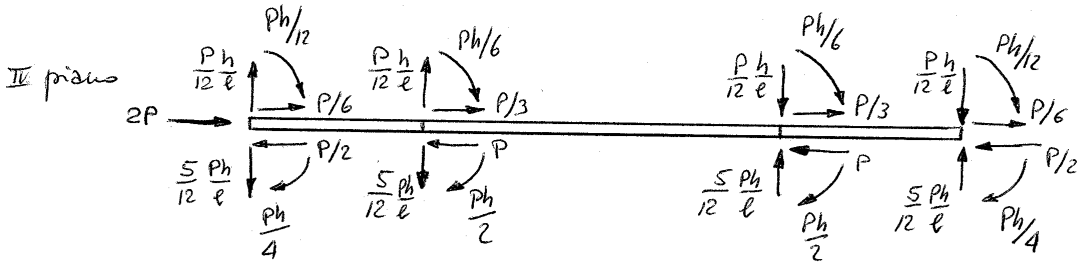
Si osserva che la rigidezza a rotazione di ciascun piano rispetto al baricentro delle rigidezze verticali, pari a $M_{piano}/\varphi_{piano}$, è costante:

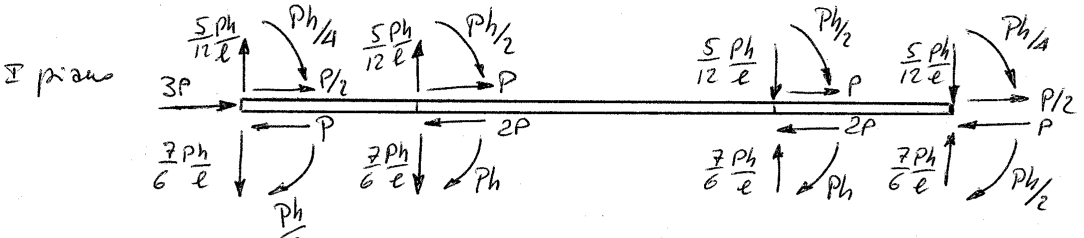
$$K_\varphi = \frac{M_{III}}{\varphi_{III}} = \frac{M_{II}}{\varphi_{II}} = \frac{M_I}{\varphi_I} = 12 \frac{EA}{h} \ell^2$$

K_φ è uguale a tutti i livelli perché non cambia la rigidezza assiale ai vari livelli; il valore numerico è funzione sia della specifica geometria che della distribuzione delle rigidezze assiali.

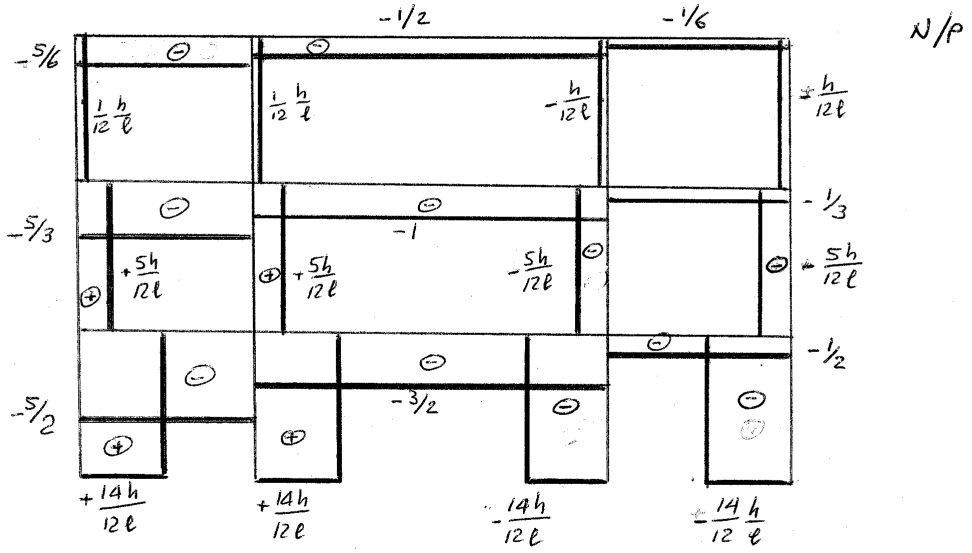
Per determinare le sollecitazioni nei traversi è opportuno isolarli evidenziando le azioni che i nodi trasmettono allo stesso traverso.





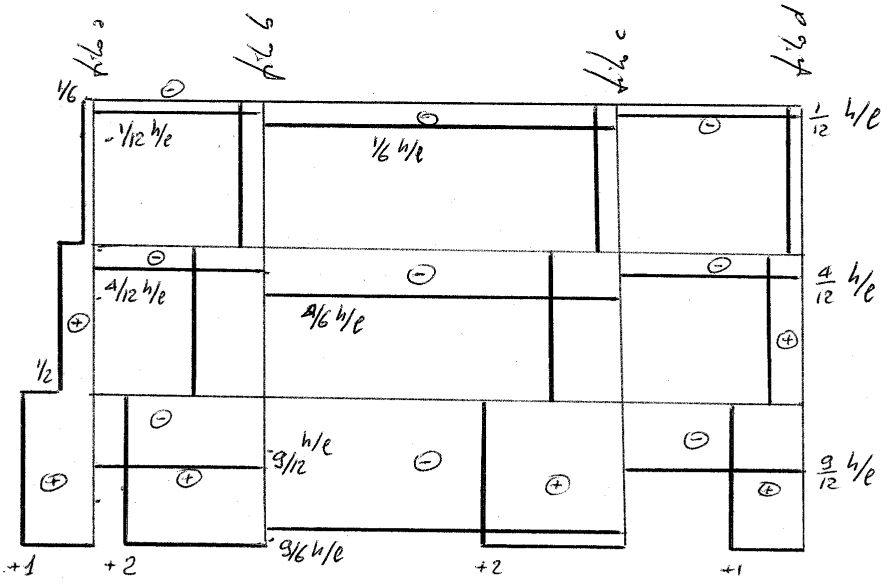


A questo punto è possibile dedurre direttamente i diagrammi di sollecitazione.

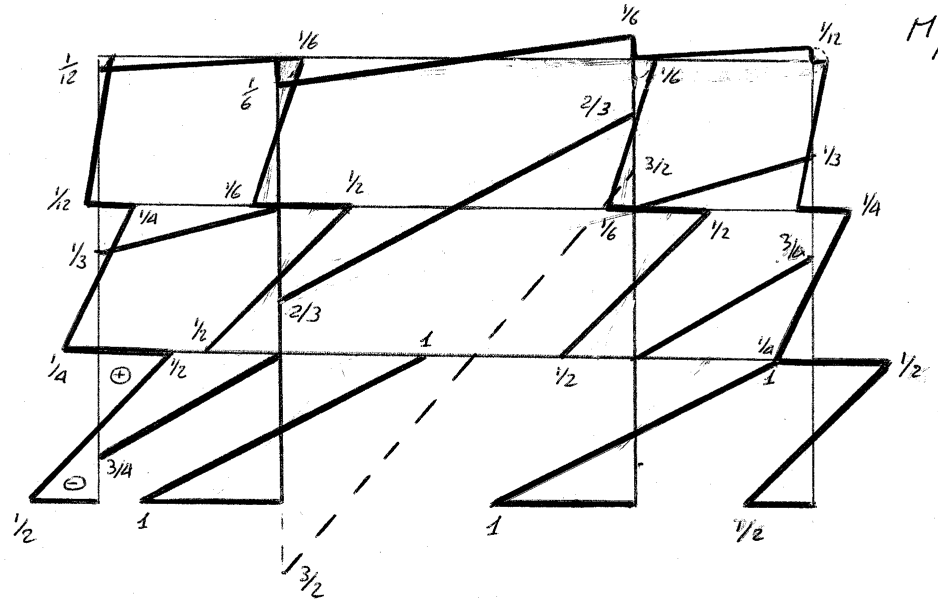


Taglio fil a-d	fib b-c	fib a e fib b: trazione
Livello III	P/6	P/3	fib c e fib d: compressione.
Livello II	P/2	P	
Livello I	P	2P	

T/p



M/ph



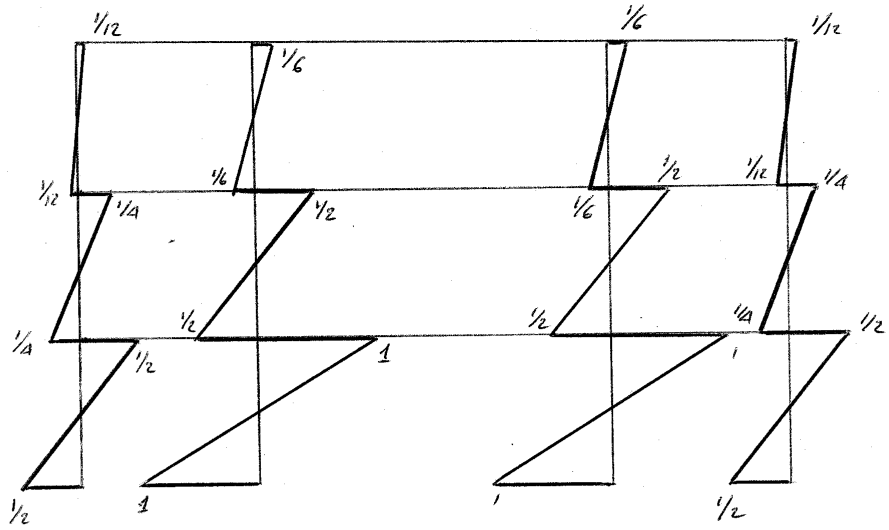
Per maggiore chiarezza si riportano i diagrammi del momento separatamente per traversi e ritti:

NOTA le linee tratteggiate si riferisce al traverso del I piano completo centrale.

/7

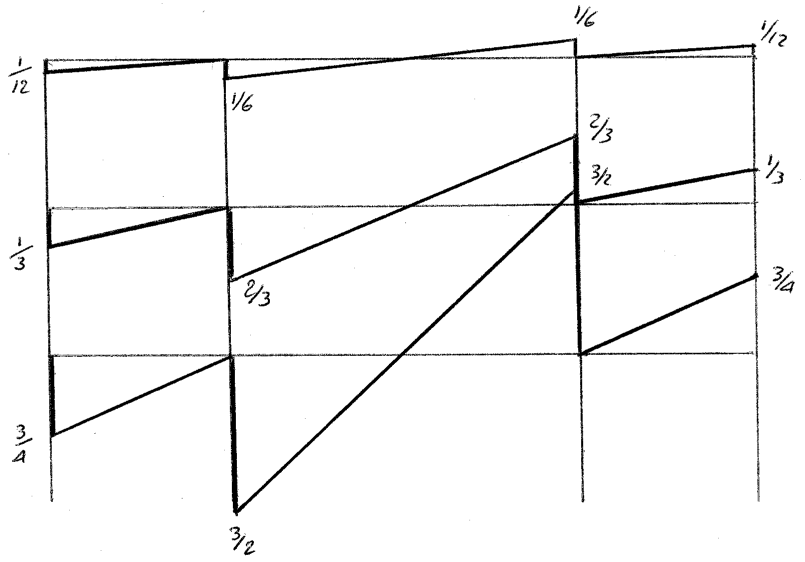
Ritti

M/Ph



Traversi

M/Ph



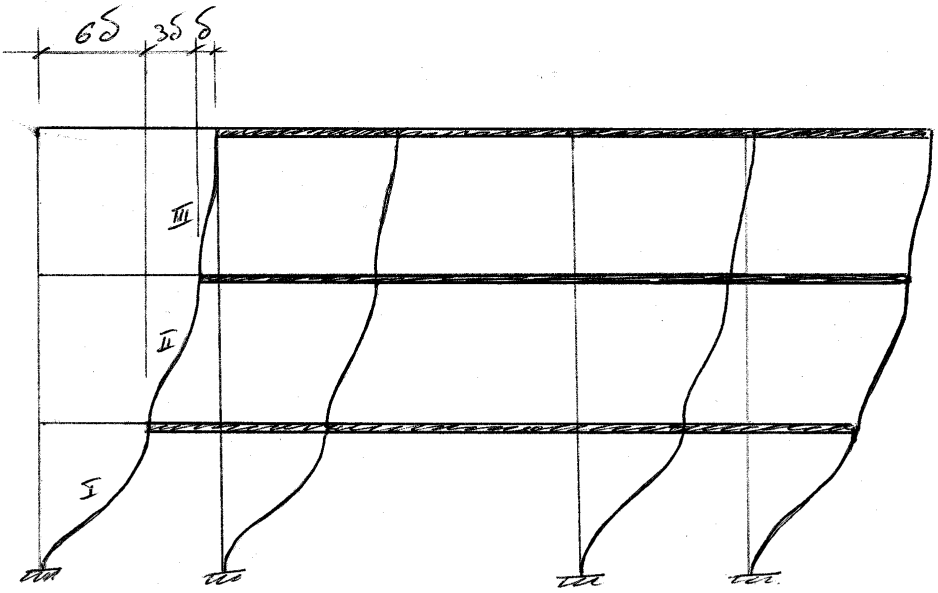
Spostamento orizzontale $A' = \delta_I = \frac{6Ph^3}{72EJ} = \frac{Ph^3}{12EJ}$

Spostamento verticale $A'' = \Phi_I^* 2l = \frac{7}{12}\frac{P}{EA}\frac{h^2}{l^2} 2l = \frac{7}{6}\frac{P}{EA}\frac{h^2}{l}$

A' = allungamento ritto della fib a al = livello

$\varepsilon_{ritto} = \frac{N_I}{EA} = \frac{7}{6}\frac{Ph}{EA}\frac{}{l}$ $\quad \Delta l = \varepsilon_b - \varepsilon_h = \frac{7}{6}\frac{P}{EA}\frac{h^2}{l}$

Deformata



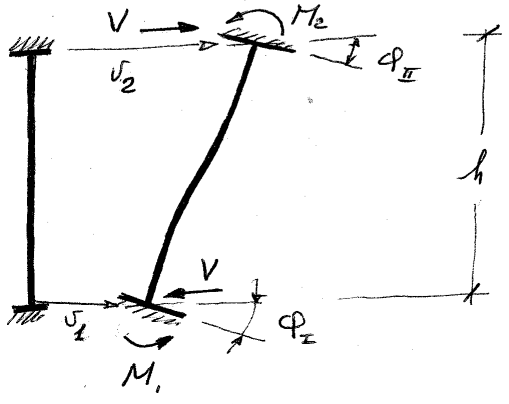
OSSERVAZIONE

Si richiama l'attenzione su due ipotesi che vengono adottate nella soluzione dei telai shear - type:

1) quando si definiscono le incognite cinematiche del problema si suppone che i traversi, infinitamente rigidi, possano solo traslare e non ruotino;
2) per determinare lo sforzo normale nei ritti si ipotizza che il traverso possa ruotare rigidamente attorno al centro delle rigidezze.

Le due ipotesi sono quindi in contraddizione.

Si consideri il ritto perimetrale del II livello tenendo conto anche delle rotazioni φ_I e φ_{II}:



$$V = 12\frac{EJ}{h^3}(v_2 - v_1) - 6\frac{EJ}{h^2}\varphi_{II} - 6\frac{EJ}{h^2}\varphi_I$$

$$M_1 = 6\frac{EJ}{h^2}(v_2 - v_1) - 2\frac{EJ}{h}\varphi_I - 4\frac{EJ}{h}\varphi_I$$

$$M_2 = 6\frac{EJ}{h^2}(v_2 - v_1) - 4\frac{EJ}{h}\varphi_{II} - 2\frac{EJ}{h}\varphi_I$$

Sostituendo i valori trovati per gli spostamenti

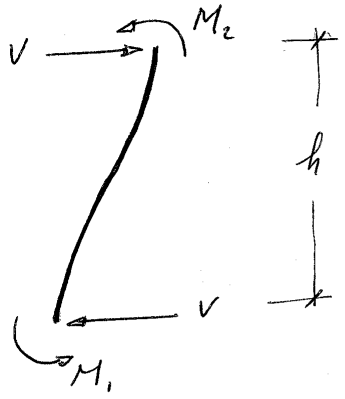
$$v_2 - v_1 = \frac{3}{72}\frac{Ph^3}{EJ} \qquad \varphi_I = \frac{7}{12}\frac{P}{EA}\frac{h^2}{\ell^2} \qquad \varphi_{II} = \frac{5}{24}\frac{P}{EA}\frac{h^2}{\ell^2}$$

si ottengono, agli estremi del ritto:

$$V = \frac{P}{2} - \frac{19}{4} P \frac{J}{A\ell^2}$$

$$M_1 = \frac{Ph}{4} - 2\,Ph\,\frac{J}{A\ell^2}$$

$$M_2 = \frac{Ph}{4} - \frac{33}{12}\,Ph\,\frac{J}{A\ell^2}$$



Il ritto è equilibrato a rotazione ed il taglio trasmesso al traverso dal ritto è inferiore a $P/2$, quindi anche il traverso risulterà non equilibrato. Ammettere due ipotesi, in fasi successive della soluzione, che contraddizione conduce ad una soluzione non equilibrata. Il metodo di soluzione dei telai shear-type è, quindi, un metodo approssimato, tanto più accettabile quanto meno rilevante è l'incidenza della rotazione dei traversi sull'equilibrio dei ritti, ovvero è un metodo accettabile per valori del rapporto $J/A\ell^2$ molto piccoli (i coefficienti numerici sono funzione della specifica geometria di questo telaio).

Per una sezione rettangolare $a \times b$:

$$\frac{J}{A} = \frac{1}{12}\frac{ab^3}{ab} = \frac{b^2}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{J}{A\ell^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{b}{\ell}\right)^2$$ Tipicamente i telai shear-type sono

la schematizzazione bi-dimensionale che viene assunta per l'ossatura in cemento armato degli edifici, per i quali valori medi di b ed l sono:

$$\langle b \rangle = 40 \text{ cm} \qquad \langle l \rangle = 5.5 \text{ m} = 550 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \frac{J}{A l^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{4}{55}\right)^2 = 0.024$$

Questo significa che il procedimento di soluzione dei telai shear type è un metodo approssimato che non rispetta l'equilibrio, con un errore di circa il 2 ÷ 3%. Tale errore è ampiamente accettabile nell'ambito delle costruzioni civili, e non deve stupire in quanto lo stesso schema di TELAIO SHEAR-TYPE è una schematizzazione approssimata di una struttura reale (che avrà EJ molto grande ma di certo non illimitato).

La soluzione rigorosa dovrebbe considerare ogni elemento della struttura con le sue rigidezze effettive, quindi ripetendo il problema a $12 \times 3 = 36$ gradi di libertà.