

## Influenza degli effetti flessionali.

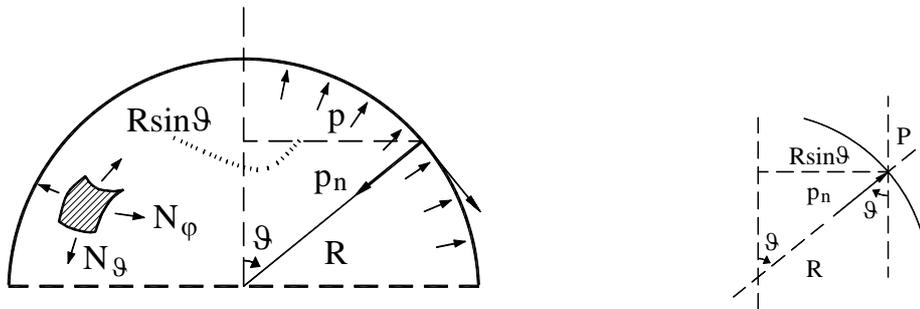
In questa sezione illustriamo l'influenza degli effetti flessionali nelle strutture a guscio sottili e per rendere ragionevolmente autocontenuta la trattazione presentiamo due *casu studio*.

In un primo esempio consideriamo il *guscio sferico in pressione*; la semplicità di questo caso consente di mettere bene in evidenza la *validità del modello membranale confrontando le sollecitazioni membranali con le sollecitazioni flessionali* presenti nel guscio.

In un secondo esempio vogliamo mettere in evidenza l'inadeguatezza della teoria membranale a descrivere gli effetti flessionali che insorgono in zone di discontinuità di carico o discontinuità strutturali, e in che modo questi effetti tendano a smorzarsi rapidamente man mano che ci allontaniamo dalla zona interessata dalla discontinuità.

### Guscio sferico in pressione.

Consideriamo una porzione di guscio sferico sottoposto ad una pressione uniforme  $p$  (ad esempio un serbatoio in pressione, un pallone sonda,...).



Ponendo

$p_n = -p$  e  $R_\theta = R_\phi = R$  nelle equazioni valide per i gusci assialsimmetrici, otteniamo

$$R_e = 2\pi \int_0^\theta (-p \cos \vartheta \sin \vartheta) R^2 d\vartheta = -2\pi R^2 p \frac{\sin^2 \vartheta}{2}$$

Lo stato di sollecitazione nel guscio è *uniforme* in ogni punto e di *trazione*:

$$N_\theta = -\frac{R_e}{2\pi R \sin^2 \vartheta} = +\frac{pR}{2}$$

$$N_\phi = -N_\theta + pR = +\frac{pR}{2}$$

La tensione membranale risulta  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{pR}{2h}$  che, per comodità, la chiamiamo  $\sigma_m \doteq \frac{pR}{2h}$ .

Valutiamo adesso la *deformazione membranale*; usando le *leggi costitutive nel caso di materiale isotropo in coordinate sferiche* (poiché  $\sigma_r = 0$  perché lo spessore è "piccolo") otteniamo

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu(\sigma_\phi + \sigma_r)) = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_\phi)$$

e quindi, essendo lo stato tensionale idrostatico, ponendo  $\sigma_\phi = \sigma_\theta = \sigma_m$  ed anche  $\varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta = \varepsilon_m$  si ha

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} (\sigma_m - \nu\sigma_m) = (1-\nu) \frac{pR}{2Eh}.$$

La deformazione radiale corrisponde ad una variazione del raggio  $R$  della sfera, in altri termini

Dalla congruenza in tal caso ottengo:

$$\varepsilon_\vartheta = \varepsilon_m = \frac{R' d\vartheta - R d\vartheta}{R d\vartheta} = \frac{(R+w) - R}{R} = \frac{w}{R}$$

con  $w$  lo spostamento radiale della superficie media della sfera.

Utilizzando il legame per il solido elastico otteniamo:

$$w = \varepsilon_\vartheta R = \varepsilon_m R = (1-\nu) \frac{pR^2}{2Eh} = \underbrace{R' - R}_{\text{variazione del raggio}}$$

variazione del raggio

e quindi  $R' = R(1 + \varepsilon_m)$  è il raggio della sfera dopo la deformazione.

La variazione di curvatura in seguito alla deformazione è data dalla seguente espressione

$$\kappa = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_m}{R(1 + \varepsilon_m)} \cong \frac{\varepsilon_m}{R} = (1-\nu) \frac{pR}{2Eh}.$$

Si osservi che la presenza della curvatura nella configurazione indeformata richiede di valutare *la variazione di curvatura del guscio* durante la deformazione e non la *semplice curvatura* come per le travi o per le piastre.

Lo sforzo flessionale può essere ora valutato in perfetta analogia con la teoria delle piastre, ponendo:

$$\kappa_\varphi = \kappa_\vartheta = \kappa \quad \text{e} \quad M_\varphi = M_\vartheta = M$$

Perché in tal caso i momenti flettenti (circonferenziale e radiale) sono uguali, positivi ed assumono il valore:

$$M = D(\kappa + \nu\kappa) = D(1 + \nu)\kappa = D(1 - \nu^2) \frac{p}{2Eh}$$

$$\text{Poichè } D := \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \text{ otteniamo } M = \frac{ph^2}{24}.$$

L'andamento della tensione membranale nello spessore, è dato dalla seguente espressione

$$\sigma_m = \frac{M\xi}{J} = \frac{M\xi}{\frac{1}{12}h^3}, \quad \text{con} \quad -\frac{h}{2} < \xi < +\frac{h}{2}.$$

La *tensione flessionale*  $\sigma_f$  assume il massimo valore in corrispondenza delle fibre superiori ed inferiori del guscio, per cui

$$\sigma_f^{\max} = \sigma_f \Big|_{\xi = \pm \frac{h}{2}} = \frac{12M}{h^3} \frac{h}{2} = \frac{12}{h^3} \left( \frac{ph^2}{24} \right) \frac{h}{2} = \frac{p}{4}.$$

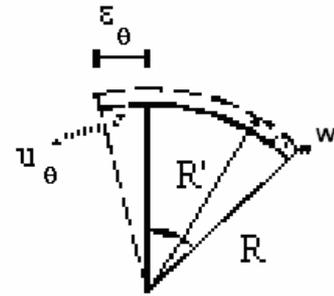
Ricordando l'espressione della tensione membranale otteniamo il *rapporto tra la tensione membranale e la tensione flessionale massima*:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_f} = \frac{pR}{2h} \frac{4}{p} = \frac{2R}{h}.$$

Osserviamo che *lo sforzo di membrana è molto più grande dello sforzo flessionale* perché, nell'ipotesi di guscio sottile, il rapporto tra raggio di curvatura minimo e spessore ( $R/h$ ) è molto grande.

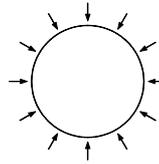
Nel caso, ad esempio, di un guscio con rapporto  $R/h = 20$ , abbiamo  $\sigma_m \cong 40\sigma_f$ .

Sottolineamo che le indicazioni fornite dal seguente caso studio hanno *validità del tutto generale*.



Osservazione: E' bene mettere in evidenza che i gusci sottili possono essere interessati da fenomeni di *instabilità dell'equilibrio* se sottoposti a condizioni di carico di compressione (opposto al nostro caso studio). Per una valutazione del carico critico si può assumere una relazione del tipo:

$$\sigma_{cr} = K \frac{Eh}{R}$$



con K una costante che dipende da vari fattori; un ordine di grandezza significativo per K può essere un valore compreso tra 0.25 e 0.30.

A causa del valore molto piccolo del rapporto tra spessore del guscio ed R *il valore del carico critico è molto basso rispetto alla resistenza a compressione del materiale*. Si veda il seguente esempio.

Esempio numerico: Guscio sferico in lega leggera di alluminio tipo 6061,7075.

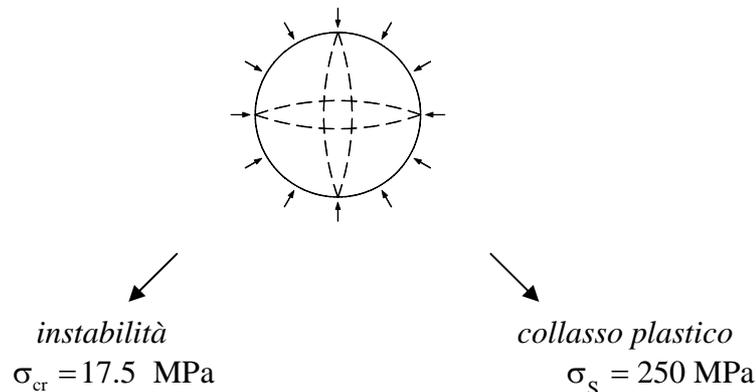
$$E = 70\text{GPa} \quad \sigma_s = 250\text{MPa} \quad \text{e} \quad \frac{h}{R} = 10^{-3}.$$

In questo caso il *carico critico* di compressione vale

$$\sigma_{cr} = 0.25 \times 70 \times 10^9 \times 10^{-3} = 17.5 \text{ MPa} \ll \sigma_s.$$

Il valore del carico critico è molto basso rispetto alla resistenza a compressione della lega leggera.

I gusci *collassano* in genere per *perdita di rigidità della struttura* (instabilità) più che per *perdita di resistenza del materiale* (collasso plastico).



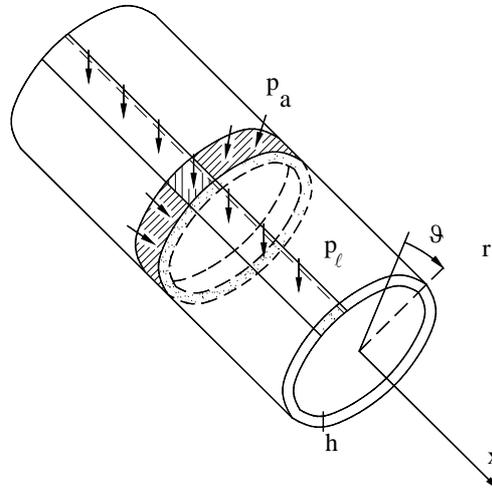
Quindi, nei *gusci sottili in compressione* diventa importante valutare il *valore della pressione* che porta all'instabilità dell'equilibrio elastico:

$$\sigma_{cr} = \frac{pR}{2h} = 17.5 \text{ MPa}$$

$$p_{cr} = 2h \sigma_{cr} = 0.034 \text{ MPa} = 34 \times 10^3 \text{ Pa}$$

**Guscio cilindrico circolare con carico assialsimmetrico.**

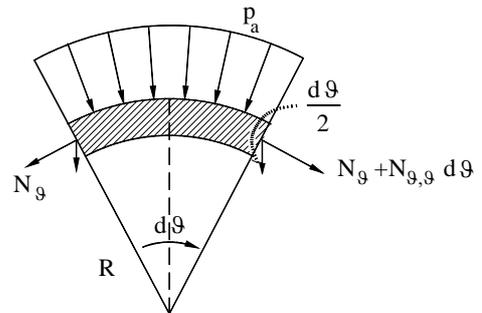
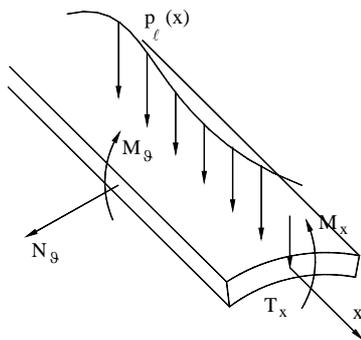
Data la geometria particolare del guscio cilindrico chiuso, nel caso di condizioni di carico simmetriche, deduciamo le *equazioni di campo* seguendo una trattazione più intuitiva dal punto di vista fisico (meccanico) anche se meno rigorosa dal punto di vista matematico.



Assimiliamo il guscio ad un *grigliato* formato da *strisce longitudinali* (tra loro interagenti) ed *anelli trasversali* (tra loro interagenti). Travi longitudinali ed anelli trasversali interagiscono a loro volta tra loro.

Supponiamo di avere una condizione di carico assialsimmetrica  $p(x)$ , in direzione radiale, e *immaginiamo* una quota del carico applicata alle strisce longitudinali  $p_l$  e una quota del carico applicata agli anelli  $p_a$  :

$$p(x) = p_a(x) + p_l(x)$$



Studiamo adesso il comportamento di una striscia longitudinale e di un anello trasversale di *spessori costanti*.

**Striscia longitudinale.**

Trascurando la curvatura trasversale trattiamo la striscia longitudinale con la teoria della piastra inflessa di Kirchhoff. Indichiamo con  $w(x, \theta) \rightarrow w(x)$  lo spostamento in direzione radiale.

Le equazioni costitutive per la piastra omogenea isotropa assialsimmetrica

hanno la seguente forma :

$$M_x = -Dw_{,xx}$$

$$M_\theta = -D\nu w_{,xx} = \nu M_x$$

L'equazione di campo per la striscia longitudinale assume la forma:  $Dw_{,xxxx} = p_l(x)$  .

*Anello trasversale.*

Consideriamo un elemento infinitesimo  $Rd\vartheta$  di un anello trasversale ed imponiamo l'equilibrio in direzione radiale sotto l'azione del carico  $p_a$ .

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore  $o(3)$  abbiamo:

$$p_a R dx d\vartheta + N_\vartheta dx d\vartheta = 0$$

$$p_a R + N_\vartheta = 0$$

Un elemento infinitesimo dell'anello avrà una deformazione circonferenziale

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{(R - R')d\vartheta}{Rd\vartheta} = -\frac{w}{R} \quad (\text{congruenza}) \quad N_\vartheta = Eh\varepsilon_\vartheta = -Eh\frac{w}{R} \quad (\text{legame})$$

che, sostituita nella equazione di equilibrio, assume la forma

$$\frac{Eh}{R^2} w = p_a,$$

che rappresenta *l'equazione di campo per gli anelli trasversali.*

Riprendiamo l'espressione  $p(x) = p_a(x) + p_\ell(x)$  e vi sostituiamo le espressioni trovate precedentemente, ottenendo l'equazione di campo che governa il problema dei gusci cilindrici inflessi nella seguente forma

$$Dw_{,xxxx} + \frac{Eh}{R^2} w = p_\ell.$$

Introducendo il parametro geometrico  $\beta$  di dimensione  $(L)^{-1}$ , otteniamo la seguente equazione differenziale ordinaria del quarto ordine

$$w_{,xxxx} + 4\beta^4 w = \frac{p}{D} \quad \text{con} \quad \beta^4 := \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}.$$

La soluzione di questa equazione differenziale è data dalla somma di due termini: l'integrale generale dell'equazione omogenea associata ed un integrale particolare suggerito dalla condizione di carico.

$$w = w_h + w_p$$

La soluzione dell'*equazione omogenea associata*

$$w_{h,xxxx} + 4\beta^4 w_h = 0.$$

ha la forma

$$w(x) = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x)$$

dove  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sono *costanti di integrazione reali.*

La soluzione particolare dell'equazione di campo  $w_p$  dipende dalla condizione specifica del carico.

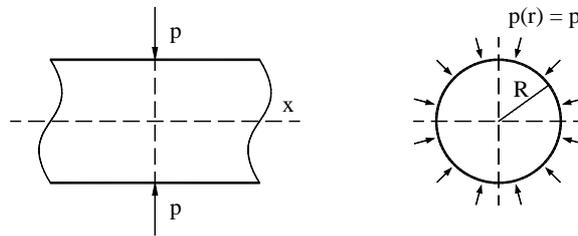
Ricordiamo ora che l'*obiettivo* della presente trattazione è quello di fornire una indicazione di come una discontinuità alteri il regime membranale di un guscio.

A questo scopo consideriamo il caso in cui sul guscio non ci siano condizioni di carico distribuito ma solo *condizioni di carico localizzate* in  $x=0$  come in figura. In altri termini, consideriamo un cilindro di lunghezza  $2\ell$ , grande rispetto al raggio  $R$ , con un carico  $p$  distribuito in modo uniforme lungo una sezione del guscio stesso (condizione di carico localizzato).

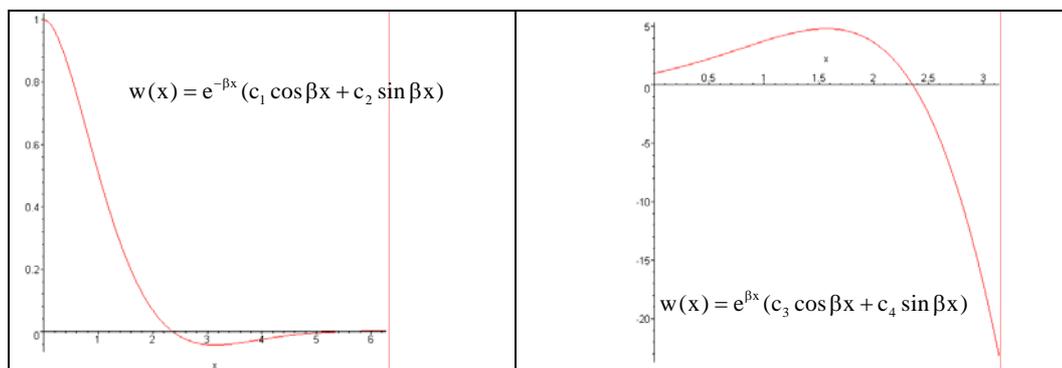
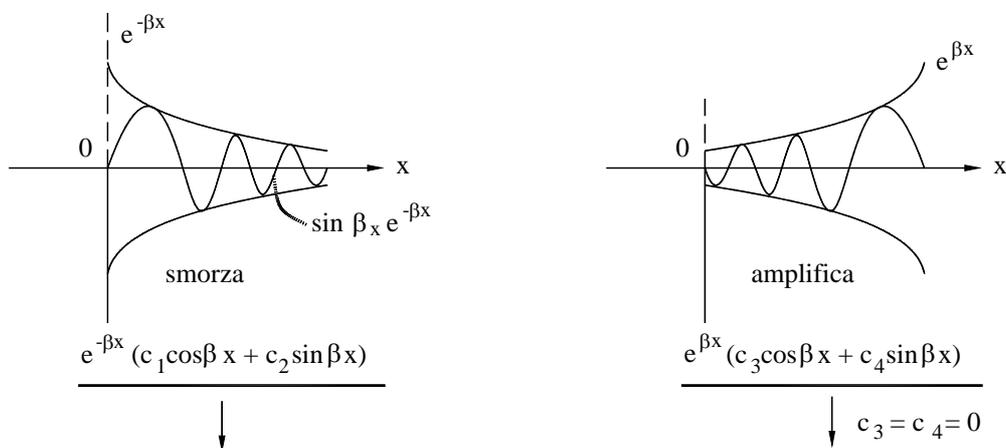
Poiché non c'è pressione distribuita lungo il cilindro e supponiamo che non sia presente il carico assiale ( $N_x = 0$ ), allora l'integrale particolare dell'equazione di campo è:  $w_p(x) = 0$ .

L'equazione che governa il problema del guscio ha quindi la forma omogenea:  $w_{,xxxx} + 4\beta^4 w = 0$ , la cui soluzione è

$$w(x) = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x).$$



Le condizioni di carico localizzate lungo una fascia consentono di affermare che, allontanandoci dal punto di applicazione del carico, le azioni di tipo flessionale tenderanno ad annullarsi (principio di De Saint Venant), in altri termini per  $x \rightarrow \infty$  deve risultare  $w = 0$ .



Nei grafici sono riportati gli andamenti qualitativi delle due funzioni

$$w(x) = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \text{e} \quad w(x) = e^{\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x).$$

Il secondo termine della soluzione tende ad *amplificare* ossia, all'aumentare di  $x$  aumenta il valore dell'inflexione, mentre il primo termine della soluzione *tende a smorzare*, ossia all'aumentare di  $x$  il valore dell'inflexione decresce.

Per la validità del principio di De Saint Venant, i termini che moltiplicano  $e^{\beta x}$  devono annullarsi per cui poniamo  $c_3 = c_4 = 0$  perché il contributo dovuto alla seconda parte della soluzione è inaccettabile.

La soluzione assume quindi la forma

$$w(x) = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

e descrive l'andamento dello spostamento per effetto del carico localizzato.

Per determinare le costanti  $c_1$  e  $c_2$  dobbiamo specificare le condizioni in  $x = 0^+$ . Posso imporre condizioni di tipo:

-cinematico

spostamento  $w(0) \rightarrow c_1$

rotazione  $w'(0) \rightarrow \beta (c_2 - c_1)$

-statico:

momento flettente radiale  $w''(0) \Rightarrow M_x(0) = -Dw''(0) = -2D\beta^2 c_2$

taglio radiale  $w'''(0) \Rightarrow T_x(0) = -Dw'''(0) = 2D\beta^3 (c_1 + c_2)$

condizioni statiche	condizioni cinematiche
$c_1 = -\left(\frac{T_x(0)}{2\beta^3 D} + \frac{M_x(0)}{2\beta^2 D}\right)$	$c_1 = w(0)$
$c_2 = \frac{M_x(0)}{2\beta^2 D}$	$c_2 = w(0) \pm \varphi(0) \frac{1}{\beta}$

I valori delle costanti ci consentono di esprimere spostamenti e rotazioni in  $x=0$  in termini delle caratteristiche di sollecitazione in  $x=0$ :

$$w(0) = -\left(\frac{T_x(0)}{2\beta^3 D} + \frac{M_x(0)}{2\beta^2 D}\right)$$

$$\varphi(0) = \frac{M_x(0)}{\beta D} + \frac{T_x(0)}{2\beta^2 D}$$

Se indichiamo con

$$w(0) = w_0 \quad w'(0) = \varphi_0 \quad T_x(0) = T_0 \quad M_x(0) = M_0$$

si ha

$$w(x) = \frac{M_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) - \frac{T_0}{2\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x$$

(osserviamo che a momento positivo e a taglio positivo in  $x=0$ , corrisponde spostamento negativo), ed analoga sulla rotazione in  $x=0$ ;

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{M_0}{\beta D} e^{-\beta x} \cos \beta x + \frac{T_0}{2\beta^2 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x + \cos \beta x)$$

possiamo allora esprimere in *forma matriciale* il legame tra spostamenti e sollecitazioni:

$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\beta^3 D} & -\frac{1}{2\beta^2 D} \\ -\frac{1}{2\beta^2 D} & \frac{1}{\beta D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -T_0 \\ M_0 \end{Bmatrix}$	
--	--

Per il caso in esame le condizioni al contorno  $x = 0^+$  sono:

$$T_0 = -Dw_{,xxx}(0) = -\frac{P}{2} \quad (\text{ogni metà del cilindro deve portare metà carico})$$

$$w_{,x}(0) = 0 \quad (\text{per simmetria la rotazione deve essere nulla: } c_1 = c_2)$$

la matrice assume la forma

$$\begin{Bmatrix} w_0 \\ \Phi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\beta^3 D} & -\frac{1}{2\beta^2 D} \\ -\frac{1}{2\beta^2 D} & \frac{1}{\beta D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{p}{2} \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad c_1 = c_2 = \frac{p}{8\beta^3 D}.$$

La funzione che mi fornisce la distribuzione dell'inflessione in  $x$  è la seguente:

$$w(x) = \frac{p}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x).$$

L'inflessione ed il momento massimo si realizzano in  $x=0$  e valgono:

$$w_{\max} = w(0) = \frac{p}{8\beta^3 D} \quad M_{\max} = M_x(0) = \frac{p}{4\beta}.$$

|| In che modo possiamo valutare la *rapidità* con cui gli *effetti dei carichi localizzati tendono a smorzarsi* ?

Consideriamo la funzione che esprime l'andamento generale dell'inflessione provocato da forze o coppie radiali agenti lungo un bordo di un cilindro ipotizzato molto lungo:

$$w(x) = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \quad (*)$$

si tratta di una legge di variazione di tipo *sinusoidale smorzata*.

Può essere conveniente introdurre due nuove costanti  $C$  e  $\psi$ :  $C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  e  $\tan \psi = \frac{c_1}{c_2}$

e riscrivere la (\*) nella forma  $w(x) = Ce^{-\beta x} \sin(\beta x + \psi)$ .

La *lunghezza d'onda*  $\lambda$  è definita da  $\beta\lambda = 2\pi$  da cui  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ .

Tale funzione decresce rapidamente in modo oscillatorio al crescere della distanza dal bordo ( $x=0$ ) a causa della funzione moltiplicativa  $e^{-\beta x}$  che regola la *misura dello smorzamento*.

Valutiamo il valore della funzione (\*):

- in  $x = \frac{\pi}{\beta}$  (*mezza lunghezza d'onda*):  $w(\frac{\pi}{\beta}) = c_1 0.04321$  e, poiché  $w(0) = c_1$ , abbiamo che lo

spostamento radiale in  $x = \frac{\pi}{\beta}$  è inferiore al 5% dello spostamento in  $x=0$ ;

- in  $x = \frac{2\pi}{\beta}$  (*una lunghezza d'onda*) si ha  $w(\frac{2\pi}{\beta}) = c_1 0.001867$ .

Perciò lo spostamento nei due punti calcolati diventa molto più piccolo del valore dello spostamento sul bordo in cui sono applicate le forze o i momenti.

Considerazioni analoghe possono essere fatte con l'espressione delle rotazioni, dei tagli e dei momenti. Potremmo dire che, da una certa distanza in poi, l'effetto delle forze localizzate si perde ed il regime flessionale è rappresentato prevalentemente dall'integrale particolare  $w_p$ .

Possiamo allora ritenere che l'effetto del carico tenda ad annullarsi per  $x \geq \frac{2\pi}{\beta}$ .

E' possibile allora definire una lunghezza:

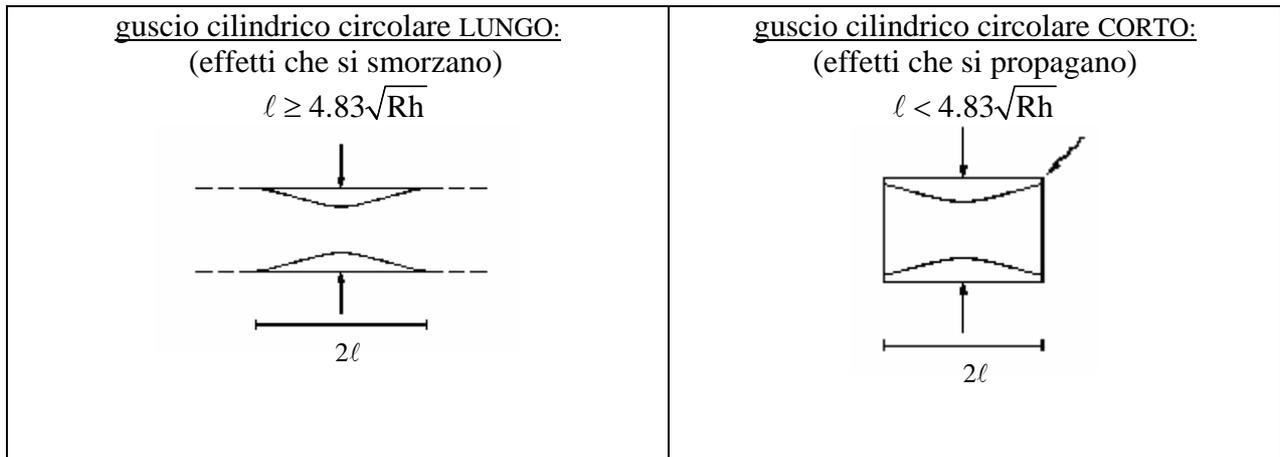
$$\ell^* = \frac{2\pi}{\beta} \cong 4.83\sqrt{Rh}$$

(poiché  $\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} \cong 1.3 \frac{1}{\sqrt{Rh}}$  (per  $\nu = 0.3$ )) per caratterizzare i *gusci cilindrici lunghi o corti*.

Osserviamo che la lunghezza  $\ell^*$  rappresenta la lunghezza d'onda della funzione  $w(x)$  ed è direttamente proporzionale al raggio del cilindro ed al suo spessore. Possiamo allora classificare i gusci cilindrici in corti o lunghi confrontando la loro lunghezza con il parametro  $\ell^*$ .

L'errore che si compie prendendo invece come misura la semilunghezza d'onda  $\ell_{e<5\%}^* = \frac{\pi}{\beta} \cong 2.3\sqrt{Rh}$

è inferiore al 5% e nella pratica viene spesso utilizzata questa misura.



**Osservazione 1:** se il guscio non soddisfa la condizione  $\ell \geq 4.83\sqrt{Rh}$ , dobbiamo considerare l'intera soluzione  $w(x) = e^{-\beta x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{\beta x}(c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x)$

e trovare le costanti d'integrazione  $c_3$  e  $c_4$  ricorrendo alle condizioni al contorno in  $x = \ell$ .

**Osservazione 2:** all'aumentare del parametro geometrico  $\beta$  l'andamento delle funzioni che rappresentano l'inflessione risultano più schiacciate ossia l'effetto flessionale del carico localizzato tende a smorzarsi più rapidamente (poiché  $w(x) = e^{-\beta x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ ).

D'altra parte ad R fissato, all'aumentare di h il parametro  $\beta$  ( $\beta \cong 1.3 \frac{1}{\sqrt{Rh}}$ ) diminuisce ossia, l'effetto dello

smorzamento tende ad essere più lento. L'azione di smorzamento è dovuta all'effetto di contrasto provocato dagli anelli trasversali.

