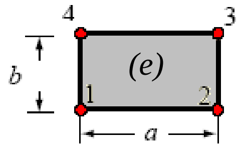
## ELEMENTO FINITO RETTANGOLARE –Modello di piastra di Kirchhoff




**Esempio 1:** Consideriamo una piastra rettangolare che è suddivisa (discretizzata) con un numero finito di *elementi rettangolari* (di dimensioni *a* e *b*) la cui posizione geometrica è definita dai quattro vertici (o nodi) e le linee del contorno che uniscono i nodi. Ad ogni nodo associamo i gradi di libertà: per la piastra con condizioni di carico trasversali al piano medio i gradi di libertà di ogni nodo sono l'inflessione e le due rotazioni (**3DOF** *per ogni nodo*; **12 DOF** *per l'elemento rettangolare*). Introdotto un sistema di coordinate *locale* (*x*, *y*, *z* con centro nel nodo 1), procediamo alla determinazione della matrice di rigidezza dell'elemento partendo dalla scelta delle **funzioni di forma**.
Assumiamo che l'EF sia soggetto a carichi distribuiti trasversali $p(x,y)$ ed in ogni nodo *i*-mo, a forze concentrate nodali esterne $P_i$ e momenti nodali esterni $m_{xi}$ e $m_{yi}$.

Consideriamo un elemento piastra alla Kirchhoff: le rotazioni sono legate all'inflessione tramite la derivata prima per cui, avendo 12 DOF per l'elemento, consideriamo una forma polinomiale con 12 parametri nella forma

$$w(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 x^2+\alpha_5 y^2+\alpha_6 xy+\alpha_7 x^2 y+\alpha_8 xy^2+\alpha_9 x^3+\alpha_{10} y^3+\alpha_{11} x^3 y+\alpha_{12} xy^3$$

Questa espressione polinomiale ovviamente soddisfa l'equazione di campo per le piastre ma non descrive un EF compatibile (detto anche conforme) in quanto devono essere soddisfatte le condizioni di compatibilità tra inflessione e curvatura non solo nei nodi ma anche *nei punti che appartengono alle linee del contorno dell'elemento*. Per avere questa continuità dovremmo introdurre 4 gradi di libertà in ogni nodo e, quindi, una funzione dell'inflessione espressa in funzione di 16 parametri. Il polinomio con 12 parametri garantisce quindi solo parzialmente la continuità tra elementi adiacenti tuttavia, nella pratica si assume ugualmente questa forma polinomiale perché fornisce comunque una buona convergenza della soluzione.

In forma matriciale per l'elemento finito *e* abbiamo:

$$w=\bar{\mathbf{N}}\boldsymbol{\alpha}$$
$$\bar{\mathbf{N}}=\left[1,x,y,x^2,y^2,xy,x^2y,xy^2,x^3,y^3,x^3y,xy^3\right]$$
$$\boldsymbol{\alpha}=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\alpha_8,\alpha_9,\alpha_{10},\alpha_{11},\alpha_{12}\right]^T$$

Indichiamo il vettore degli spostamenti nodali per l'elemento *piastra rettangolare*

$$\mathbf{a}=\left[\underbrace{w_1,w_{,x1},w_{,y1}}_{DOF\ \ nodo1},\underbrace{w_2,w_{,x2},w_{,y2}}_{DOF\ \ nodo2},\underbrace{w_3,w_{,x3},w_{,y3}}_{DOF\ \ nodo3},\underbrace{w_4,w_{,x4},w_{,y4}}_{DOF\ \ nodo4}\right]^T$$

Possiamo ancora scrivere
$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\alpha}$$
da cui
$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{a}$$
con $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ la matrice di trasformazione 12X12 riportata nella pagina successiva.

La forma della matrice delle funzioni di forma si ottiene in tal modo

$$w=\bar{\mathbf{N}}\boldsymbol{\alpha}=\bar{\mathbf{N}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{a}=\mathbf{N}\mathbf{a}$$
$$\mathbf{N}=\bar{\mathbf{N}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$$

$\mathbf{N}$ è la matrice delle **funzione di forma** per l'elemento in esame.

$$
\boldsymbol{\Gamma}^{-1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{a^2} & -\frac{2}{a} & 0 & \frac{3}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & 0 & -\frac{1}{b} \\
-\frac{1}{ab} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & \frac{1}{b} & 0 \\
\frac{3}{a^2b} & \frac{2}{ab} & 0 & -\frac{3}{a^2b} & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{3}{a^2b} & -\frac{1}{ab} & 0 & -\frac{3}{a^2b} & -\frac{2}{ab} & 0 \\
\frac{3}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{2}{ab} & \frac{3}{ab^2} & 0 & -\frac{1}{ab} & -\frac{3}{ab^2} & 0 & \frac{1}{ab} \\
\frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{2}{a^3} & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b^3} & 0 & \frac{1}{b^2} \\
-\frac{2}{a^3b} & -\frac{1}{a^2b} & 0 & \frac{2}{a^3b} & -\frac{1}{a^2b} & 0 & -\frac{2}{a^3b} & \frac{1}{a^2b} & 0 & \frac{2}{a^3b} & \frac{1}{a^2b} & 0 \\
-\frac{2}{ab^3} & 0 & -\frac{1}{ab^2} & \frac{2}{ab^3} & 0 & \frac{1}{ab^2} & -\frac{2}{ab^3} & 0 & \frac{1}{ab^2} & \frac{2}{ab^3} & 0 & -\frac{1}{ab^2}
\end{bmatrix}
$$

Esprimiamo adesso le relazioni di congruenza per la piastra in forma matriciale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = z\boldsymbol{\kappa}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left[\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}\right] \qquad \boldsymbol{\kappa}=\left[\kappa_x,\kappa_y,2\kappa_{xy}\right]^T=\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]^T$$

e troviamo le curvature in termini della funzione polinomiale che descrive l’elemento.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}$$

dove

$$\mathbf{B}=\left[[B]_1,[B]_2,[B]_3,[B]_4\right]$$

con

$$[B]_1=\left[-\frac{\partial^2[N]_1}{\partial x^2},-\frac{\partial^2[N]_1}{\partial y^2},-2\frac{\partial^2[N]_1}{\partial x\partial y}\right]^T;$$

$$[B]_2=\left[-\frac{\partial^2[N]_2}{\partial x^2},-\frac{\partial^2[N]_2}{\partial y^2},-2\frac{\partial^2[N]_2}{\partial x\partial y}\right]^T;...$$

L’introduzione delle equazioni momento-curvatura in forma matriciale (per elemento isotropo):

$$\mathbf{M}=\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}=D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{o simbolicamente } \mathbf{M}=\mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

consente di trovare la matrice di rigidezza dell’elemento:

$$\mathbf{K}=\iint_A \mathbf{B}^T\mathbf{D}\,\mathbf{B}\,dA_e\,.$$

Per completare la trattazione occorre definire il set di forze nodali prescritte in ogni nodo:

$$\mathbf{R}=\left[R_1,R_2,R_3,R_4\right]^T$$

$$\mathbf{R}_1=\left[P_1,m_{x1},m_{y2}\right]^T,......$$

Per *ogni elemento* possiamo scrivere la seguente equazione in forma matriciale (12 equazioni):

$$\mathbf{K}\ \mathbf{a}=\mathbf{R}$$

N.B. Spesso si preferisce utilizzare elementi piastra triangolari; il vantaggio è dato dal fatto che si riesce meglio a discretizzare contorni irregolari o a realizzare infittimenti di mesh per cogliere effetti di tensioni concentrate.