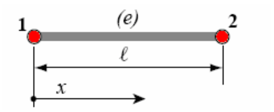
ELEMENTO FINITO ASTA 1D o elemento biella



Esempio 1: modello cinematico lineare – lunghezza l compreso tra i nodi 1 e 2.
L'unica componente di spostamento è quella assiale in ogni punto interno dell'elemento e viene approssimata con un polinomio di primo grado:

$$\boxed{u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{l} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} \end{bmatrix}}_{\bar{N}(x)} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}}$$

ossia

$$\boxed{\bar{\mathbf{N}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} \end{bmatrix}}$$

Agli estremi

$$u_1 = u(0) = \alpha_1 \qquad u_2 = u(l) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Risolvendo il sistema ottengo le costanti in funzione degli spostamenti nodali (infatti il modello di spostamento deve essere tale da dare il valore dello spostamento nodale nel nodo):

$$\alpha_1 = u_1 \qquad \alpha_2 = -u_1 + u_2$$

indicando con $\mathbf{a} = [u_1 \quad u_2]^T$ il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento.

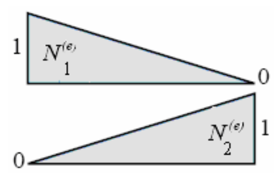
Per cui

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}^{-1}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

da cui

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{l} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\left(1 - \frac{x}{l}\right)}_{N_{u1}(x)} & \underbrace{\left(\frac{x}{l}\right)}_{N_{u2}(x)} \end{bmatrix}}$$



Posso scrivere il modello cinematico in questa forma:

$$u(x) = N_{u1}(x) u_1 + N_{u2}(x) u_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{u1}(x) & N_{u2}(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

con $N_{u1}(x) \quad N_{u2}(x)$ funzioni di forma

Dato il modello

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{l} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} \end{bmatrix}}_{\bar{N}(x)} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

sono in grado di calcolare la *deformazione*

$$\varepsilon(x) = \frac{d}{dx}\left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{l}\right) = \frac{\alpha_2}{l} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}(x)} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{B}}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix}}$$

Da cui risulta

$$\mathbf{B}(x) = \bar{\mathbf{B}}(x) \mathbf{\Gamma}^{-1}$$

Si ha quindi nel caso specifico

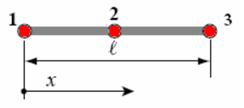
$$\boxed{\mathbf{B}(x) = \bar{\mathbf{B}}(x) \mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Infine, calcoliamo la *matrice di rigidezza dell'elemento*

$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D} \, \mathbf{B} \, dx$$

In questo caso $\mathbf{D} = EA$ per cui $\boxed{\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$ o **matrice di rigidezza dell'EF asta**.

ELEMENTO FINITO ASTA 1D o elemento biella con nodo interno



Esempio 2: modello cinematico di secondo grado – lunghezza l compreso tra i nodi 1 e 3 con nodo interno 2 ad $l/2$.
L'unica componente di spostamento (assiale) in ogni punto interno dell'elemento viene approssimata con un polinomio di secondo grado:

$$\boxed{u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{l} + \alpha_3 \frac{x^2}{l^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} & \frac{x^2}{l^2} \end{bmatrix}}_{\bar{N}(x)} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}}$$

(modello cinematico di secondo grado)

ossia

$$\boxed{\bar{\mathbf{N}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} & \frac{x^2}{l^2} \end{bmatrix}}$$

Agli estremi imponiamo

$$u_1 = u(0) = \alpha_1 \qquad u_2 = u(\frac{l}{2}) = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 \qquad u_3 = u(l) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Risolvendo il sistema ottengo le costanti in funzione degli spostamenti nodali (infatti il modello di spostamento deve essere tale da dare il valore dello spostamento nodale nel nodo):

$$\alpha_1 = u_1 \qquad \alpha_2 = -3u_1 + 4u_2 - u_3 \qquad \alpha_3 = 2u_1 - 4u_2 + 2u_3$$

Il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento è così dato:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^T$$

Per cui

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} & \frac{x^2}{l^2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}} = \left[\left(1 - 3\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) \quad 4\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) \quad \left(-\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) \right]}$$

Si ha poi nel caso specifico

$$\boxed{\mathbf{B}(x) = \frac{1}{l}\left[\left(-3 + 4\frac{x}{l}\right) \quad 4\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \quad \left(-1 + 4\frac{x}{l}\right) \right]}$$

Infine, la *matrice di rigidezza dell'elemento* si ottiene utilizzando la relazione

$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{D}\, \mathbf{B}\, dx$$