

Il principio dei lavori virtuali nelle travi (PLV)

Dato un sistema di **forze esterne/caratteristiche di sollecitazioni** in *equilibrio* ed un sistema di **spostamenti/caratteristiche di deformazione** *congruenti*, il lavoro esterno compiuto dalle forze esterne per gli spostamenti è uguale al lavoro interno compiuto dalle caratteristiche di sollecitazione per le relative caratteristiche di deformazione

$$\delta L_e = \delta L_i$$

Il principio può' essere formulato nelle due *forme duali*:

- ◆ **degli spostamenti virtuali**: si assume un sistema spostamenti/caratteristiche di deformazione virtuale infinitesimo;
- ◆ **delle forze virtuali**: si assume un sistema forze/caratteristiche di sollecitazione virtuale infinitesimo.

Forma degli forze virtuali		Forma degli spostamenti virtuali	
forze esterne/ caratteristiche di sollecitazione <i>virtuale</i>	spostamenti/ caratteristiche di deformazione <i>effettivo</i>	forze esterne/ caratteristiche di sollecitazione <i>effettivo</i>	spostamenti/ caratteristiche di deformazione <i>virtuale</i>
$\{\delta n(z) \ \delta p(z) \ \delta m(z)\}^T$ $\{\delta N(z) \ \delta T(z) \ \delta M(z)\}^T$ $\{\delta Q_i \ \delta P_i \ \delta M_i\}^T$ forze esterne virtuali concentrate applicate in punti <i>i</i> della struttura (equilibrate)	$\{u(z) \ v(z) \ \varphi(z)\}^T$ $\{\varepsilon(z) \ \gamma(z) \ \kappa(z)\}^T$ $\{\tilde{u}_i \ \tilde{v}_i \ \tilde{\varphi}_i\}^T$ spostamenti nei punti <i>i</i> di applicazione delle forze concentrate	$\{n(z) \ p(z) \ m(z)\}^T$ $\{N(z) \ T(z) \ M(z)\}^T$ $\{Q_i \ P_i \ M_i\}^T$ forze esterne concentrate applicate in punti <i>i</i> della struttura (equilibrate)	$\{\delta u(z) \ \delta v(z) \ \delta \varphi(z)\}^T$ $\{\delta \varepsilon(z) \ \delta \gamma(z) \ \delta \kappa(z)\}^T$ $\{\delta \tilde{u}_i \ \delta \tilde{v}_i \ \delta \tilde{\varphi}_i\}^T$ spostamenti virtuali nei punti <i>i</i> di applicazione delle forze concentrate effettive
equilibrato	congruente	equilibrato	congruente
$\frac{d\delta N}{dz} + \delta n(z) = 0$ $\frac{d\delta T}{dz} + \delta p(z) = 0$ $\frac{d\delta M}{dz} - \delta T + \delta m(z) = 0$	$\varepsilon = \frac{du}{dz}$ $\gamma = \varphi + \frac{dv}{dz}$ $\kappa = \frac{d\varphi}{dz}$	$\frac{dN}{dz} + n(z) = 0$ $\frac{dT}{dz} + p(z) = 0$ $\frac{dM}{dz} - T + m(z) = 0$	$\delta \varepsilon = \frac{d\delta u}{dz}$ $\delta \gamma = \delta \varphi + \frac{d\delta v}{dz}$ $\delta \kappa = \frac{d\delta \varphi}{dz}$
$\delta L_e = \int_S [\delta n(z)u(z) + \delta p(z)v(z) + \delta m(z)\varphi(z)]ds +$ $+ \sum_{i=1}^j [\delta Q_i \tilde{u}_i + \delta P_i \tilde{v}_i + \delta M_i \tilde{\varphi}_i]$ $\delta L_i = \int_S [\delta N(z)\varepsilon(z) + \delta T(z)\gamma(z) + \delta M(z)\kappa(z)]ds$		$\delta L_e = \int_S [n(z)\delta u(z) + p(z)\delta v(z) + m(z)\delta \varphi(z)]ds +$ $+ \sum_{i=1}^j [Q_i \delta \tilde{u}_i + P_i \delta \tilde{v}_i + M_i \delta \tilde{\varphi}_i]$ $\delta L_i = \int_S [N(z)\delta \varepsilon(z) + T(z)\delta \gamma(z) + M(z)\delta \kappa(z)]ds$	
j punti della struttura in cui sono applicate forze concentrate		j punti della struttura in cui sono applicate forze concentrate	

Schema riassuntivo

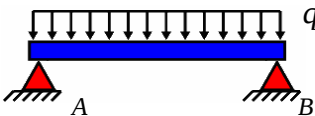
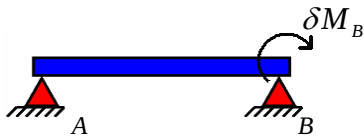
PLV nella forma delle forze virtuali + equilibrio => congruenza

La validità della identità del PLV consente di trovare spostamenti o rotazioni effettive in punti della struttura applicando forze o momenti virtuali nei punti della struttura e nella direzione di cui si vuole conoscere lo spostamento o la rotazione.

PLV forma spostamenti virtuali + congruenza => equilibrio

La validità della identità del PLV consente di trovare forze o momenti effettivi in punti della struttura applicando spostamenti o rotazioni virtuali nei punti della struttura e nella direzione di cui si vuole conoscere la forza o il momento effettivo.

Applicazione del PLV per trovare la rotazione in una sezione di un sistema isostatico.

	<u>Sistema effettivo.</u> Problema: data la trave di lunghezza l rappresentata trovare la rotazione della sezione trasversale nel punto B: $\tilde{\varphi}_B$.
Trovo le reazioni vincolari del sistema effettivo: $V_A = \frac{ql}{2}$ $V_B = \frac{ql}{2}$	Trovo le caratteristiche di sollecitazioni del sistema effettivo: $N(z) = 0$ $T(z) = \frac{ql}{2} - qz$ $M(z) = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2}$
	<u>Sistema virtuale.</u> Associo al sistema effettivo un sistema equilibrato forze/caratteristiche di sollecitazione virtuale come in figura applicando nel punto e nella direzione di cui voglio conoscere spostamento effettivo, un momento virtuale δM_B.
Trovo le reazioni vincolari del sistema virtuale: $V_A = \frac{\delta M}{l}$ $V_B = \frac{\delta M}{l}$	Trovo le caratteristiche di sollecitazioni del sistema virtuale: $\delta N(z) = 0$ $\delta T(z) = -\frac{\delta M_B}{l}$ $\delta M(z) = -\frac{\delta M_B}{l} z$
Scrivo il lavoro compiuto dalle forze esterne virtuali per gli spostamenti effettivi $\delta L_e = \delta M_B \tilde{\varphi}_B$	Scrivo il lavoro compiuto dalle caratteristiche di sollecitazione virtuali per le deformazioni del sistema effettivo $\delta L_i = \int_S [\delta N(z)\varepsilon(z) + \delta T(z)\gamma(z) + \delta M(z)\kappa(z)] ds$ ma ricordo il legame elastico, per cui $\delta L_i = \int_S \left[\frac{\delta N(z)N(z)}{EA} + \frac{\delta T(z)T(z)}{GA^*} + \frac{\delta M(z)M(z)}{EJ} \right] ds =$ $= \int_0^l \left[-\frac{\delta M_B}{l} \left(\frac{ql}{2} - qz \right) \frac{1}{GA^*} - \frac{\delta M_B}{l} z \left(\frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2} \right) \frac{1}{EJ} \right] dz = \delta M_B \left(-\frac{ql^3}{24EJ} \right)$
Poiché vale $\delta L_e = \delta L_i$ $\delta M_B \tilde{\varphi}_B = \delta M_B \left(-\frac{ql^3}{24EJ} \right)$ $\tilde{\varphi}_B = -\frac{ql^3}{24EJ}$ N.B. : se la rotazione risulta negativa il verso della rotazione effettiva è opposto a quello prescelto nel sistema virtuale ed in tal caso risulta positiva in B perché concorde con il segno del momento positivo.	