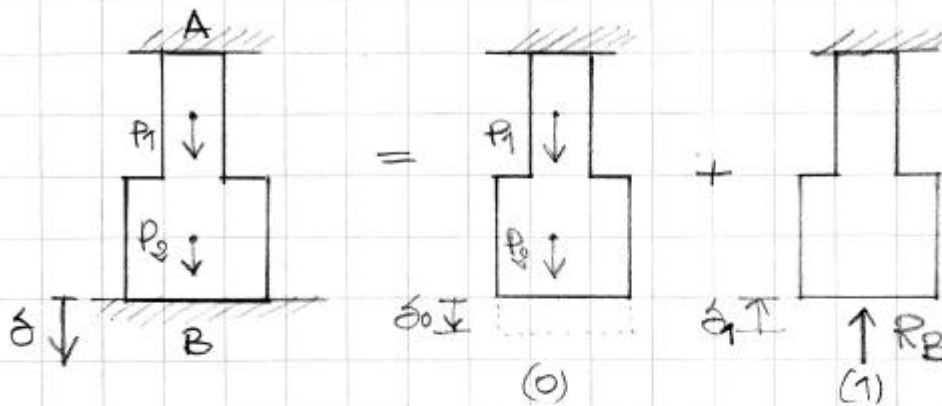


SOLUZIONE SINTETICA DELLA PROVA PARZIALE DEL 15/11/2005

1) SFORZO NORMALE



CONSIDERO, PER LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA IPERSTATICO (1 VOLTA, ASSIALLYMENTE) LA SOVRAPPOSIZIONE DEI 2 SISTEMI: (0) E (1).

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

VALIDA PER ASTA OMOGENEA (E COSTANTE) A SEZIONE TRASVERSALE COSTANTE A E CARICATA SOLO AUE DUE ESTREMITA'.

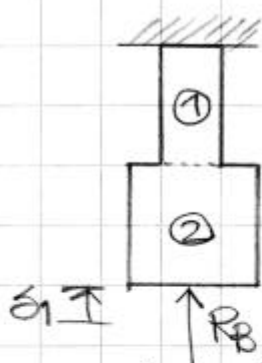
CONSIDERO IL SISTEMA (0):

DATI ASSEGNATI:				
1: L ₁	A ₁	P ₁ ' = P ₁ + P ₂	E ₁	
2: L ₂	A ₂	P ₂ ' = P ₂	E ₂	
3: L ₃	A ₃	P ₃ ' = P ₂	E ₃	
4: L ₄	A ₄	P ₄ ' = 0	E ₄	

QUINDI PER IL SISTEMA (0) SI HA:

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^4 \frac{P_i' L_i}{A_i E_i} = \frac{P_1' L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2' L_2}{A_2 E_2} + \frac{P_3' L_3}{A_3 E_3} + \frac{P_4' L_4}{A_4 E_4}$$

CONSIDERO IL SISTEMA (1)



DATI ASSEGNATI:

1: L_1 A_1 $P'_1 = -R_B$ E_1

2: L_2 A_2 $P'_2 = -R_B$ E_2

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^2 \frac{P'_i L_i}{A_i E_i} = \frac{P'_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P'_2 L_2}{A_2 E_2} = -R_B \left(\frac{L_1}{A_1 E_1} + \frac{L_2}{A_2 E_2} \right)$$

A QUESTO PUNTO SI IMPONE LA CONGRUENZA IN B NEL RISPETTO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO IMPOSTE DAI VINCOLI:

$$\delta_0 + \delta_1 = \delta$$

CEDIMENTO VINCOLARE IMPOSTO NEL VINCOLO B,

SOSTITUENDO I VALORI NUMERICI SI OTTIENE PER LE DIVERSE FILE:

	A1	A2	B1	B2
$\uparrow$ R_A [kN]	733	738	165	810
$\uparrow$ R_B [kN]	167	262	735	90

2) TORSIONE

SI RISOLVA L'ESERCIZIO PROPOSTO NEL CASO IN CUI LA COPPIA TORCENTE SIA APPLICATA ALLA FLANGIA B.

CALCOLIAMO IN PRIMA BATTUTA LA COPPIA TORCENTE NECESSARIA PER CONSENTIRE LA ROTAZIONE CONSENTITA $[\phi_{\text{ass}} (=1.5^\circ)]$ DAI BULLONI;
← ESPRESSO IN RADIANTI

$$\text{POICHÉ } \phi = \frac{M_t L}{J G} \Rightarrow M_{t1}' = \frac{\phi_{\text{ass}} \cdot J_1 \cdot G}{L_1}$$

DOPPO L'APPLICAZIONE DI TALE COPPIA I DUE ALBERI RUOTANO SOLIDAMENTE COME UN CORPO UNICO, DUNQUE QUANDO SOGGETTI A:

$$M_t'' = M_t - M_{t1}'$$

COPPIA TOTALE
ASSEGNATA

QUOTA PARTE DELLA COPPIA CHE
DI FATTO AGISCE SULL'ALBERO 1

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

RUOTANO SOLIDAMENTE (CONGRUENZA!)

$$\frac{M_{t1}'' L_1}{J_1 \cdot G} - \frac{M_{t2}'' \cdot L_2}{J_2 \cdot G} = 0 \rightarrow M_{t1}'' = \frac{L_2 J_1}{L_1 J_2} \cdot M_{t2}''$$

DALL'EQUILIBRIO:

$$M_{t2}'' + M_{t1}'' = M_t''$$

SOSTITUENDO L'ESPRESSIONE RICAVATA (IMPONENDO LA CONGRUENZA)
PER M_{t1}'' SI HA:

$$M_{t2}'' \left(1 + \frac{L_2 J_1}{L_1 J_2} \right) = M_t'' \Rightarrow M_{t2}'' = M_t'' \cdot \left(1 + \frac{L_2 J_1}{L_1 J_2} \right)^{-1}$$

A QUESTO PUNTO NOTI M_{t1}'' , M_{t2}'' e M_{t1}' SI POSSONO RICAVARE
LE TENSIONI NEI PUNTI A E D.

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{J}$$

QUINDI:

$$\tau_A = \frac{r_1}{J_1} \cdot (M_{t1}' + M_{t1}'')$$

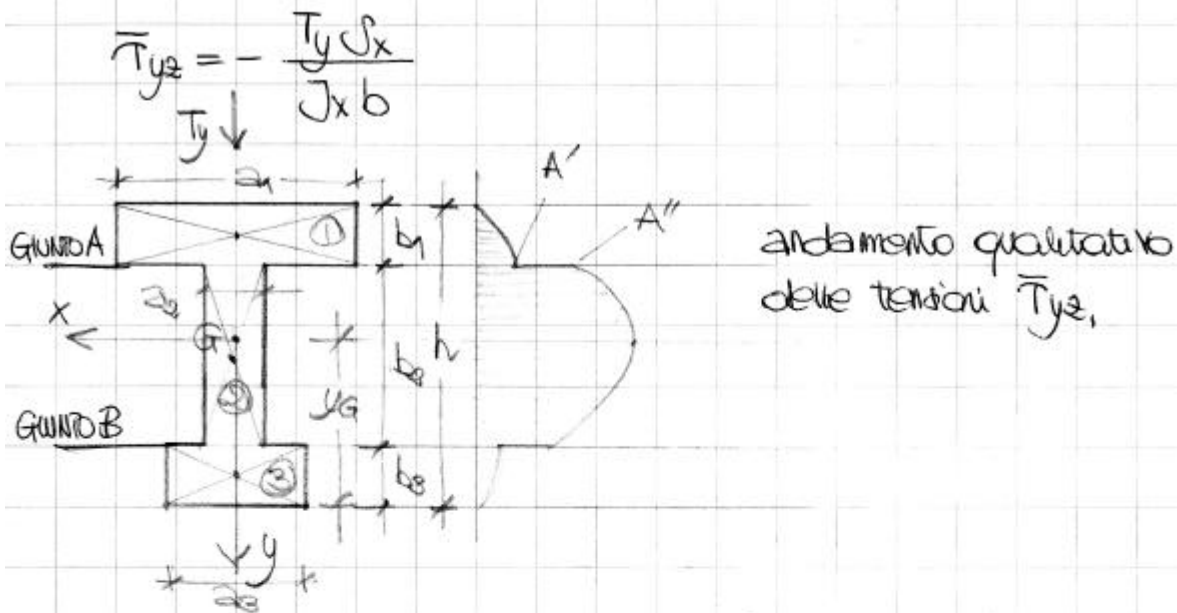
$$\tau_D = \frac{r_2}{J_2} \cdot M_{t2}''$$

OVVIAMENTE NEL CASO IN CUI LA COPPIA TORCENTE FOSSE STATA APPLICATA NELLA FLANGIA C SI SAREBBE RIPERCORSO IL RAGIONAMENTO CALCOLANDO M_{t2}' , M_{t2}'' , M_{t1}'' .

SOSTITUENDO I VALORI NUMERICI SI RICAVALA PER I DATI ASSEGNATI AUE DIVERSE FILE:

	A1	A2	B1	B2
M_{t1} [Nm] (<i>tratto ab</i>)	365	288	55	132
M_{t2} [Nm] (<i>tratto cd</i>)	135	212	445	368
τ_A [MPa]	68.8	93.7	10.3	43.1
τ_B [MPa]	14.7	40.1	48.6	69.4

3) TAGLIO



$$S_x^{(1)} = (a_1 \cdot b_1) \cdot \left(h - y_G - \frac{b_1}{2} \right) ; \quad S_x^{(2)} = (a_2 \cdot b_2) \cdot \left(y_G - b_3 - \frac{b_2}{2} \right)$$

$$S_x^{(3)} = (a_3 \cdot b_3) \cdot \left(y_G - \frac{b_3}{2} \right)$$

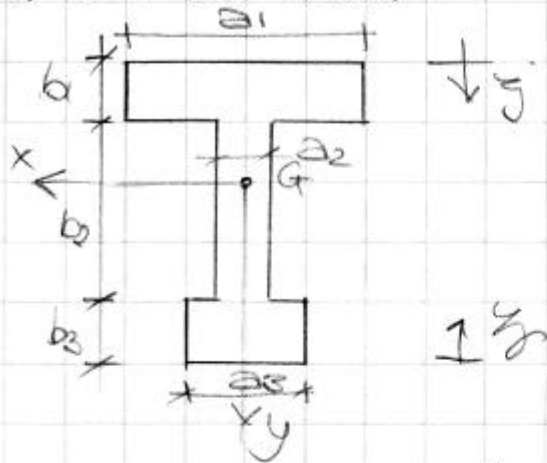
DUNQUE NEL GIUNTO A AVREMO:

$$\bar{T}_{yz} = - \frac{T_y S_x}{J_x b} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in } A' \quad \bar{T}_{yz} = - \frac{T_y}{J_x} (a_1 b_1) \left(h - y_G - \frac{b_1}{2} \right) \cdot \frac{1}{a_1} \\ \text{in } A'' \quad \bar{T}_{yz} = - \frac{T_y}{J_x} (a_1 b_1) \left(h - y_G - \frac{b_1}{2} \right) \cdot \frac{1}{a_2} \end{array} \right.$$

in A'' si OTTIENE DUNQUE LA MASSIMA TENSIONE DEL GIUNTO A.

LA MASSIMA TENSIONE σ REAGITA IN CORRESPONDENZA DELLA COLA BARICENTRICA,

SCRIVIAMO IN FORMA ANALITICA L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO STATICO S_x PER I VARI TRATTI;

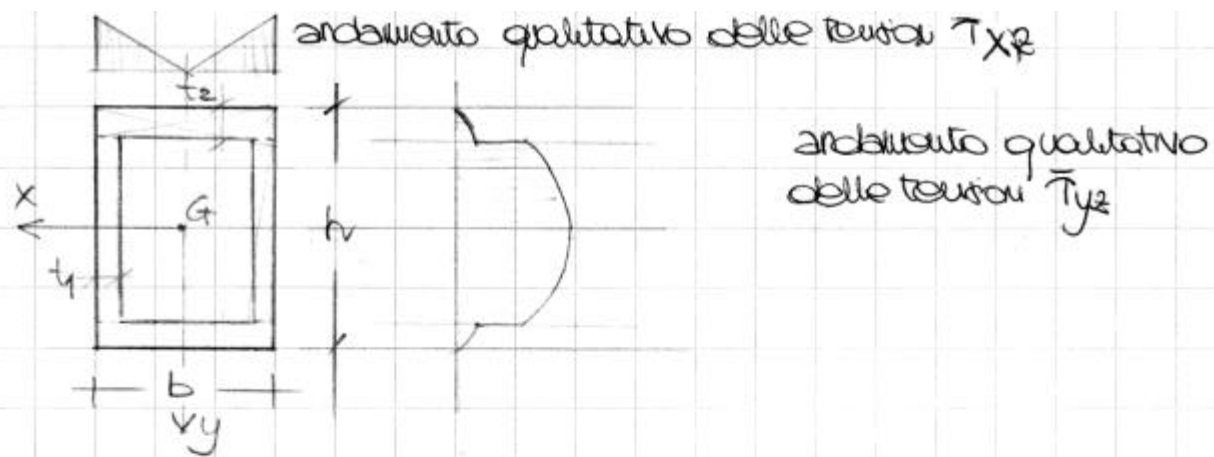


$$\bar{y} \in (0, b_1) \quad S_x = (a_1 b_1) \left(y_G - \frac{\bar{y}}{2} \right)$$

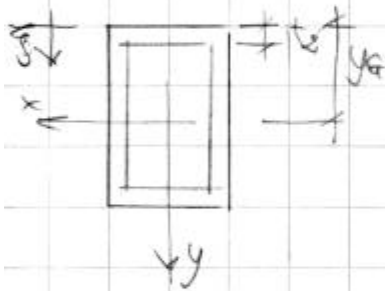
$$\bar{y} \in (b_1, b_1 + b_2) \quad S_x = (a_1 b_1) \left(y_G - \frac{b_1}{2} \right) + (a_2 b_2) \left(y_G - b_1 - \frac{\bar{y}}{2} \right)$$

$$\bar{y} \in (0, b_3) \quad S_x = (a_3 b_3) \left(y_G - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{2} \right)$$

UTILE PER ESPRIMERE L'ANDAMENTO DELLE TENSIONI TANGENZIALI $\bar{\tau}_{yz}$.



CALCOLO DEL MOMENTO STATICO S_x :



PER $\bar{y} \in (0, t_2)$

$$S_x = (b \cdot \bar{y}) \cdot \left(y_G - \frac{\bar{y}}{2} \right)$$

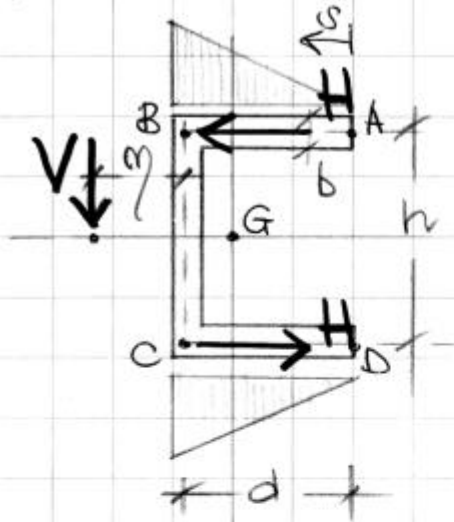
per $\bar{y} \in (t_2, y_G)$

$$S_x = (b \cdot t_2) \left(y_G - \frac{t_2}{2} \right) + 2 \cdot (t_1 \cdot (\bar{y} - t_2)) \cdot \left(y_G - t_2 - \frac{\bar{y}}{2} \right)$$

NOTA: L'ESPRESSIONE DEL MOMENTO STATICO E' IMMEDIATO RICAVARE LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI TANGENZIALI τ_{yz} RICHIESTO.

	A1	A2	B1	B2
$\tau_{giuntoA}$ [kPa]	-821	-661	-450	-535
$\tau_{giuntoB}$ [kPa]	-609	-554	-450	-535

4) CENTRO DI TAGLIO



$V = T_y$
 η = posizione del centro di taglio rispetto alla linea media dell'anima,

$$H = \text{risultante delle tensioni di taglio delle aa} = \int_A^B \frac{T_y \cdot \bar{y}_x''}{I_x} ds = \int_0^d \frac{T_y}{I_x} \cdot \left((s \cdot b) \cdot \frac{h}{2} \right) ds = \frac{T_y b h}{2 I_x} \int_0^d s ds$$

$$H = \frac{T_y \cdot b h d^2}{4 I_x}$$

DALL'EQUILIBRIO DELLA SEZIONE:

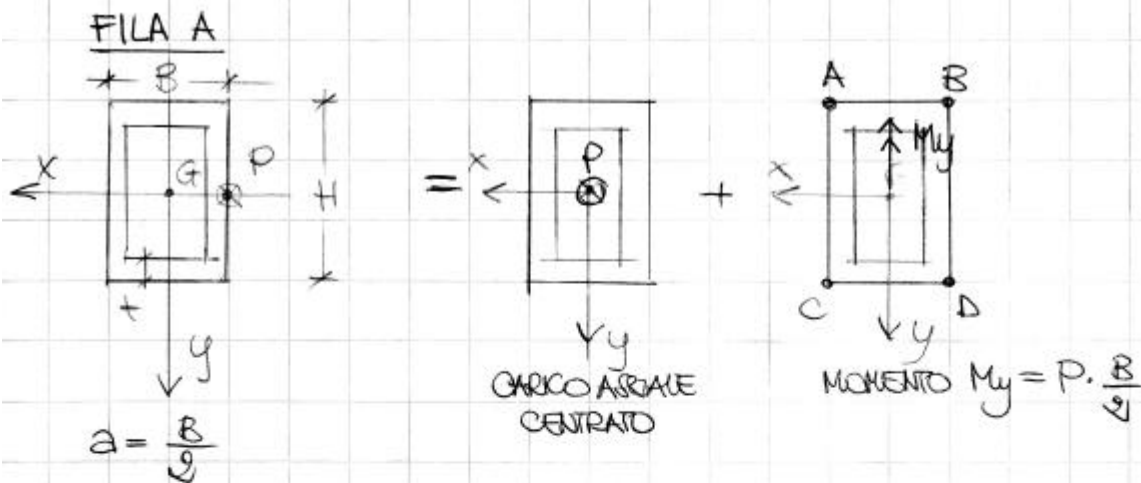
$$H \cdot h = V \cdot \eta \quad \Rightarrow \quad H \cdot h = T_y \cdot \eta$$

$$\eta = \frac{H \cdot h}{T_y} = \frac{\frac{T_y b h d^2}{4 I_x} \cdot \frac{h}{T_y}} = \frac{b h^2 d^2}{4 I_x} = \eta$$

η DIPENDE SOLO DALLA GEOMETRIA DELLA SEZIONE!!

	A1	A2	B1	B2
η [mm]	40	50.2	48	31.5

5) CARICO ASSIALE ECCENTRICO



IN PRIMO LUOGO SI SOSTITUISCE P CON UN SISTEMA EQUIVALENTE DI FORZE APPLICATO NEL BARICENTRO G DELLA SEZIONE.

LA TENSIONE MASSIMA SI REALIZZERA' IN UNO DEI 4 PTI MOSTRATI IN FIGURA.

UN MODO DI PROCEDERE (OVVIAMENTE EQUIVALENTE A QUELLO DI RICORRERE ALLA FORMULA DI NAVIER $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_x} - \frac{M_y x}{J_y}$ DIRETTAMENTE) E' QUELLO DI CALCOLARE IL CONTRIBUTO ALLA TENSIONE FORNITO, PER CIASCUN PUNTO, DA CIASCUNA CONDIZIONE DI CARICO E POI SOMMARLI OPPORTUNAMENTE.

IN VALORE ASSOLUTO ESSI SONO DATI DALLE:

$$\sigma_1 = \left| \frac{P}{A} \right| ; \sigma_2 = \left| \frac{M_x y}{J_x} \right| ; \sigma_3 = \left| \frac{M_y x}{J_y} \right|$$

PER I PUNTI CONSIDERATI ALLORA RISULTA:

$$\sigma_B = \sigma_D = -\sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_A = \sigma_C = -\sigma_1 + \sigma_3$$

DUINQUE IL VALORE MASSIMO DI COMPRESSIONE SI REALIZZA NEI PUNTI B e D.

IL PROBLEMA ASSEGNATO RICHIEDE DI DETERMINARE LA DISTANZA a (DATO IL CARICO P , O IN ALTERNATIVA DI DETERMINARE IL CARICO P ASSEGNATA LA DISTANZA a) IN MODO TALE CHE LA MASSIMA TENSIONE DI COMPRESSIONE SIA PARI AL VALORE ASSEGNATO σ_{amm} , DUNQUE IL PROBLEMA SI PONE IN QUESTI TERMINI:

$$-\left|\frac{P}{A}\right| - \left|\frac{M_y}{J_y} x\right| = -|\sigma_{amm}|$$

OVE $x = x_B = -\frac{B}{2}$ e $M_y = -P \cdot a = -P \cdot \frac{B}{2}$

SI OTTENE DUNQUE:

$$-\frac{P}{A} - \frac{P \cdot a}{J_y} \cdot x_B = -\sigma_{amm}$$

DA CUI SI RICAVALO LE ESPRESSIONI:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \sigma_{amm} / \left(\frac{1}{A} + \frac{a x_B}{J_y} \right) \\ a &= \frac{J_y}{P x_B} \left(\sigma_{amm} - \frac{P}{A} \right) \end{aligned}}$$

CHE CONSENTONO DI RISOLVERE IL PROBLEMA ASSEGNATO.

USANDO DIRETTAMENTE L'EQUAZIONE DI MAXIER:

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} x$$

$\sigma_{zz} = -\sigma_{amm}$; $N = -P$; $M_y = -P \cdot a$; $x = x_B$
 ↑ COMPRESSIONE ↑ COMPRESSIONE ↑ SEGNO MOMENTO!

QUINQUE ANALOGAMENTE

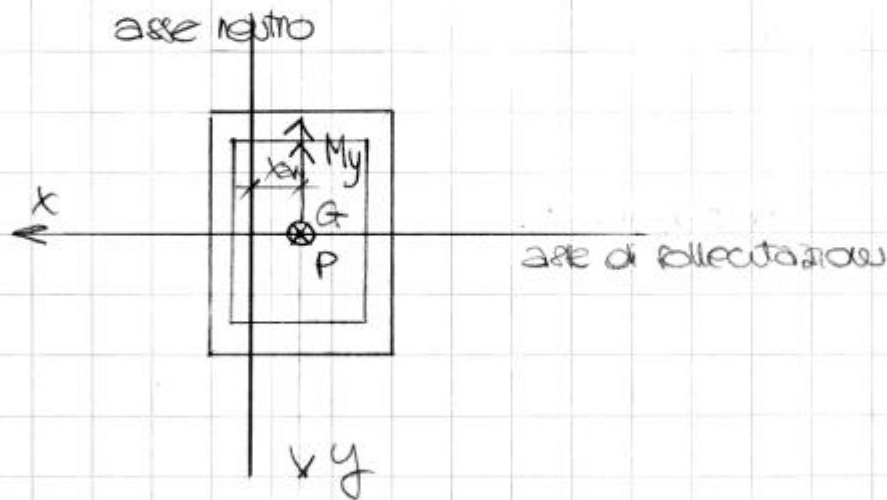
$$-\frac{P}{A} - \frac{P \cdot a}{J_y} \cdot x_B = -\sigma_{amm}$$

($P, a, A, J_y, x_B, \sigma_{amm}$
quantità positive)

NOTI I VALORI DI P E a E' IMMEDIATO RICAVARE ANCHE
L'EQUAZIONE DELL'ASSE NEUTRO AVENDO:

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A} - \frac{M_y}{J_y} \cdot x = 0 \Rightarrow x_{ax} = \frac{P}{A} \cdot \frac{J_y}{M_y}$$

ALMENO DA UN PUNTO DI VISTA QUALITATIVO RISULTA:



NEL CASO DELLA FILA B, A PARTE NATURALMENTE LE SPECIFICITA' RELATIVE ALLA SEZIONE CONSIDERATA, IL PROCEDIMENTO E' DEL TUTTO ANALOGO.

IN TABELLA SI RISPORIANO NUMERICAMENTE LE SOLUZIONI RELATIVE ALLE 4 FILE.

	A1	A2	B1	B2
a [mm]	37.5	49.24	20	25.33
P [kN]	-120.17 (compressione)	-100 (compressione)	93.06 (trazione)	80 (trazione)
x [mm] asse neutro	20.69	15.76	31.7	25