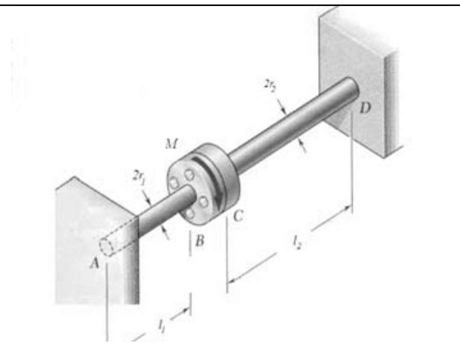
Torsione di alberi cilindrici – Esercizio svolto

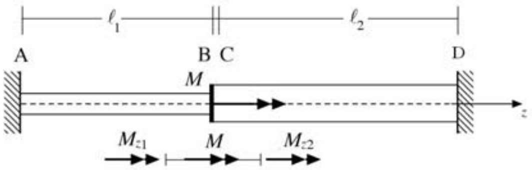
Testo.
Due alberi pieni in acciaio sono saldati a flange a loro volta connesse con bulloni. I bulloni sono leggermente più piccoli e permettono una rotazione relativa di 1.5° di una flangia rispetto all'altra, prima che entrambe ruotino come un corpo unico (perfetta connessione tra i due tratti dopo che è avvenuta la rotazione). Sapendo che G=77 *GPa*, determinare la massima tensione tangenziale in ciascun albero quando una coppia torcente pari a 500*Nm* è applicata alla flangia in B.
(si trascurino le dimensioni delle flange)



Dati: $l_1 = 0.6\ m$ $\quad l_2 = 0.9\ m$ $\quad r_1 = 0.015\ m$ $\quad r_2 = 0.018\ m$
$\vartheta = 1.5°$ $\quad M = 500 Nm$ $\quad G = 77\ GPa$

Incognite: M_{1z} *e* M_{2z} $\quad \tau_{1z}^{max}$ *e* τ_{2z}^{max}

Sistema effettivo)



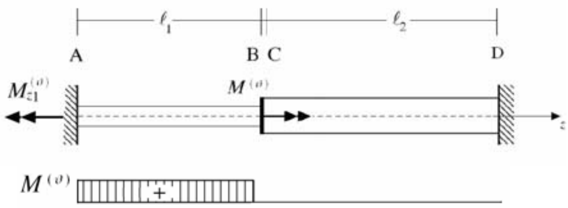
Sistema globale staticamente indeterminato solo a connessione delle flange avvenuta.

$M_{Z1} + M_{Z2} + M = 0$ (equilibrio) con $\quad M = M^{(\vartheta)} + M^{(r)}$

$M^{(\vartheta)}$ momento che produce una rotazione di 1.5°

$M^{(r)}$ momento che agisce sui due tratti a connessione avvenuta.

Sistema A) (*isostatico)*

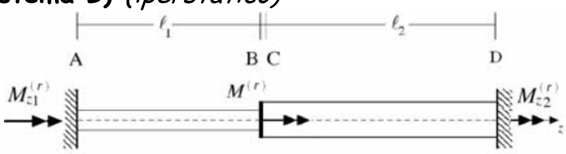


Sistema con la sola rotazione attivata dal momento torcente sul tratto AB. Il tratto AB si presenta staticamente determinato sino al valore della rotazione pari a 1.5°(0.026 rad)
($J_1 = 0.165\ 10^{-6} m^4$ $\quad J_2 = 7.952\ 10^{-6} m^4$).

Calcolo il momento che attiva la rotazione:

$$M^{(\vartheta)} = \frac{\vartheta G J_1}{l_1} = 265\ Nm \qquad M^{(r)} = M - M^{(\vartheta)} = 235\ Nm$$

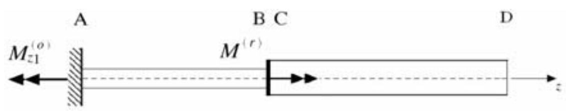
Sistema B) *(iperstatico)*



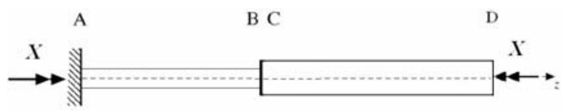
Sistema con i due tratti perfettamente connessi soggetti all'azione del momento $M^{(r)}$.
I tratti AB e CD sono ora perfettamente connessi per cui:

$$\boxed{M_{Z1}^{(r)} + M_{Z2}^{(r)} + M^{(r)} = 0} \quad \textit{equilibrio}$$

Sistema principale con i carichi esterni (sistema 0):



Sistema principale con l'iperstatica incognita X (sistema 1):



Sistema equivalente al sistema (B) risolto:

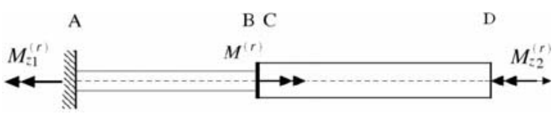
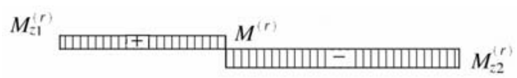


Diagramma del momento torcente del sistema B):



n.b.: Il carico nel sistema B viene assorbito in modo proporzionale alle rigidezze!!

Per trovare le reazioni vincolari del sistema *iperstatico* uso la congruenza (*metodo delle forze*). Scelgo un sistema principale staticamente determinato "declassando ad esempio il vincolo" in D (X rappresenta l'azione del vincolo soppresso). La rotazione nel sistema effettivo deve essere nulla quindi l'equazione di congruenza in D fornisce:

$$\boxed{\vartheta_D^{(0)} + \vartheta_D^{(1)} = 0} \quad \textit{congruenza}$$

$$-\frac{M_{z1}^{(r)} l_1}{G J_1} + X\left(\frac{l_1}{G J_1} + \frac{l_2}{G J_2}\right) = 0 \qquad X = \frac{M_{z1}^{(r)} l_1 J_2}{l_1 J_2 + l_2 J_1} \quad (X = 136 Nm)$$

La soluzione del sistema B è:

$$M_{z1}^{(r)} = M_{z1}^{(0)} - X = 98\ Nm$$
$$M_{z2}^{(r)} = X = -136\ Nm$$

Diagramma finale del momento torcente (A + B):

$$M_{z1} = M_{z1}^{(\vartheta)} + M_{z1}^{(r)} = 364\ Nm \qquad \tau_{1z}^{max} = \frac{M_{z1} r_1}{J_1} = 68.62\ MPa$$

$$M_{z2} = M_{z2}^{(r)} = 136\ Nm \qquad \tau_{2z}^{max} = \frac{M_{z2} r_2}{J_2} = 14.86\ MPa$$