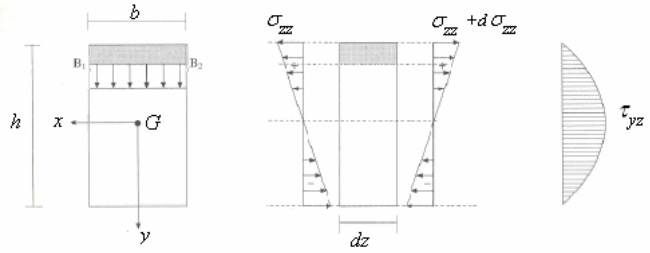
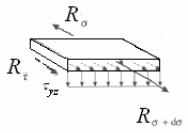
Soluzione approssimata per il taglio (Jourawsky)





elemento
b x dz x (h/2-y)
sul quale imporre l'equilibrio alla traslazione in z

Ipotesi di base: la soluzione esplicita per flessione e taglio di de Saint Venant non si presenta analiticamente agevole ma ha suggerito le ipotesi per condurre un approccio al problema del taglio più semplice che consente di cogliere l'andamento delle tensioni tangenziali in modo approssimato ed adeguato ai fini applicativi. L'ipotesi di base consiste nel cogliere l'andamento del *valore medio* della componente verticale della tensione tangenziale lungo la corda parallela all'asse x. L'approssimazione so compie *identificando le tensioni effettive con il loro valore medio*. Con sole *considerazioni di equilibrio* si stabilisce una relazione tra la tensione tangenziale media ed il taglio cui è soggetta la sezione trasversale.

Soluzione. Consideriamo per semplicità una sezione rettangolare* soggetta all'azione di taglio T_y e, per garantire l'equilibrio, di momento flettente M_x. Dato il tratto infinitesimo dz, sulle facce z e $z+dz$ agiranno le tensioni normali e tangenziali come in figura. Le tensioni normali sono:

$$\sigma_{zz}=\frac{M_x}{J_x}y \qquad \sigma_{zz}+\sigma_{zz,z}dz=\left(\frac{M_x+M_{x,z}dz}{J_x}\right)y=\left(\frac{M_x+T_y dz}{J_x}\right)y\,.$$

e, data una corda parallela all'asse x, definiamo il *valore medio* della tensione tangenziale

$$\overline{\tau}_{yz}=\frac{1}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\tau_{yz}dx\,.$$

Isoliamo una porzione di un tronco infinitesimo di area A' sottesa dalla corda b ed imponiamo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z dell'elemento. Le forze risultanti che agiscono sono:

$$R_\sigma=\int_{A'}\sigma_{zz}dA \qquad R_\sigma+R_{d\sigma}=\int_{A'}\left(\sigma_{zz}+\sigma_{zz,z}dz\right)dA \qquad R_\tau=dz\int_{-b/2}^{b/2}\tau_{yz}dx$$

L'equilibrio stabilisce:

$$R_{d\sigma}+R_\tau=0 \quad \text{in cui} \quad \left.\begin{aligned} R_{d\sigma}&=dz\int_{A'}\sigma_{zz,z}dA=dz\frac{T_y}{J_x}\int_{A'}ydA=dz\frac{T_y S_x^{'}(y)}{J_x}\\ R_\tau&=dz\int_{-b/2}^{b/2}\tau_{yz}dx=dz\;\overline{\tau}_{yz}b\end{aligned}\right\} \quad \overline{\tau}_{yz}=-\frac{T_y S_x^{'}}{J_x b} \qquad \text{formula di Jourawsky}$$

La formula esprime il *valore medio* delle tensioni tangenziali lungo la generica corda b. Il momento statico $S_x^{'}(y)$ è calcolato per la porzione di area A' e rispetto all'asse x.

Nel caso del rettangolo è:

$$S_x^{'}(y)=A'y'_G=-b\left(\frac{h}{2}-y\right)\underbrace{\left(\frac{h}{4}+\frac{y}{2}\right)}_{y'_G}=-b\frac{h^2}{8}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right) \qquad \left(S_x^{'}(y)=\int_{-b/2}^{b/2}dx\int_{-h/2}^{y}ydy=\frac{b}{2}\left(y^2-\frac{h^2}{8}\right)=-b\frac{h^2}{8}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right)\right)^{\bullet} \rightarrow \overline{\tau}_{yz}=\frac{3T_y}{2bh}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right)$$

Le tensioni tangenziali variano in modo parabolico in y *annullandosi sulle fibre estreme* e raggiungendo il *valore massimo in corrispondenza della fibra baricentrica della intera sezione*.

Formula finale. Se identifichiamo il *valore medio*, calcolato con sole considerazioni di equilibrio, con il *valore puntuale* delle tensioni tangenziali lungo la corda stessa otteniamo la soluzione *approssimata*:

$$\tau_{yz}=-\frac{T_y S_x^{'}}{J_x b}$$ Formula di Jourawsky $$\begin{cases}S_x^{'}=S_x^{'}(y)\\ b=b(y)\end{cases}$$ *in generale variano in y il momento statico e la corda b*

La soluzione è dedotta con sole considerazioni di equilibrio. Se confrontiamo la soluzioni esatta di de S.V. per il rettangolo l'andamento delle tensioni tangenziali presenta un picco per $y=0$ e $x=\pm b/2$. L'errore dovuto all'approssimazione *peggiora al crescere del rapporto* b/h ($b/h<0.25$ $e<1\%$, $b/h=1$ $e=12\%$).

* la trattazione può essere generalizzata al caso di sezione di forma qualunque.

• n.b.: se considero l'area complementare A'' e calcolo il corrispondente momento statico ottengo: $S_x^{'}(y)=-S_x^{''}(y)$.