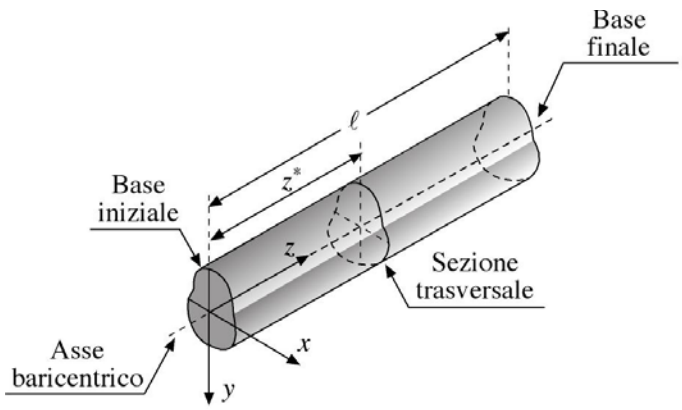
Il problema di de Saint Venant (1855)

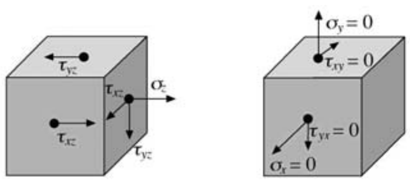
Determinare lo spostamento, la tensione e la deformazione in tutti i punti di un solido elastico di forma cilindrica privo di carichi sulla superficie laterale (mantello) e sollecitato sulle basi da condizioni di carico *globali*.



La conoscenza di informazioni globali porta alla non unicità della soluzione del problema elastico; parleremo allora di "classe di soluzioni equipollenti" che corrispondono al problema nella sua formulazione rilassata. Per affrontare lo studio dell'equilibrio elastico il de Saint Venant introduce un metodo, detto *semi-inverso*, che si avvale dell'assegnazione a priori di alcune proprietà della soluzione.

Ipotesi e congetture alla base della trattazione.

a) la forma del solido considerato (allungato con sezione *compatta*) e l'annullarsi delle componenti di carico sul mantello laterale suscitano l'intuizione che tra le fibre longitudinali del cilindro si esercitino azioni mutue solo nella direzione z delle fibre stesse mentre, nelle altre direzioni, le azioni tra le fibre risultano trascurabili. Poniamo quindi *nulle alcune componenti della tensione*: le tensioni normali lungo x ed y e le relative tensioni tangenziali.



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

forma del tensore delle tensioni

b) la geometria particolare del corpo consente di supporre che la deformazione del cilindro dipenda prevalentemente dalle *forze e dai momenti risultanti sulle basi* e non dalla ripartizione puntuale del carico sulle basi stesse; in altri termini, l'importanza dell'informazione puntuale nella distribuzione del carico sulle basi tende ad annullarsi allontanandosi da esse. Il de Saint Venant espone nel modo seguente la sua congettura:

Il modo di applicazione delle forze sulle facce estreme dei prismi è indifferente agli effetti sensibili prodotti sul resto della loro lunghezza, di sorta che si può sempre, entro sufficiente approssimazione, sostituire le forze che sono applicate, con forze staticamente equivalenti, ossia dotate degli stessi momenti totali e delle medesime risultanti, e distribuite secondo la legge che è imposta dalle formule della trazione, della flessione e della torsione, affinché esse siano perfettamente esatte.

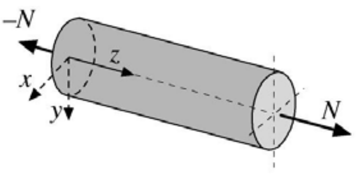
Questa ipotesi, suggerita al de Saint Venant da considerazioni sui risultati sperimentali ed affermata dallo stesso come mera plausibile congettura, ha suscitato da parte di studiosi l' interesse per una formulazione ed una dimostrazione rigorosamente matematica. La congettura di Saint Venant è stata elevata al rango di **Principio di de Saint Venant**.

c) le ipotesi di *linearità* permettono di utilizzare la proprietà di *additività delle soluzioni* del problema elastico e quindi di procedere con una scomposizione dell'analisi dello stato elastico del solido cilindrico in quattro casi semplici: *estensione, flessione pura , torsione, flessione e taglio.*

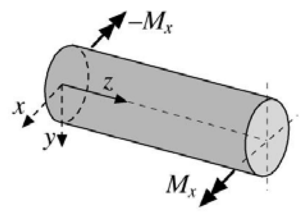
Questa scomposizione permette, per la semplicità dei singoli casi, una analisi più approfondita della natura delle tensioni cui è sottoposto il solido cilindrico ed il calcolo delle caratteristiche meccaniche che interessano il costruttore.

La soluzione generale si ottiene come combinazione dei quattro casi semplici. Per i casi di *estensione* e *flessione pura* la soluzione trovata da de Saint Venant si presenta particolarmente semplice mentre per il caso di *torsione* e *flessione e taglio* la determinazione della soluzione non è molto agevole ad eccezione di forme particolari delle sezioni trasversali.

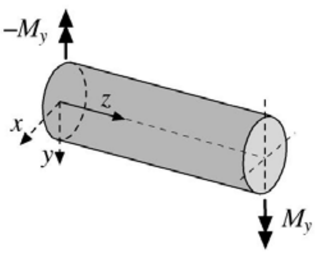
Caso per caso Saint Venant associa alle ipotesi di base (a) delle ipotesi aggiuntive, suggerite dalla particolare condizione di carico, allo scopo di pervenire alle *soluzioni in forma esplicita.*



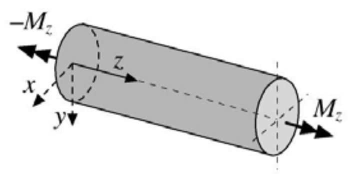
Sforzo assiale N



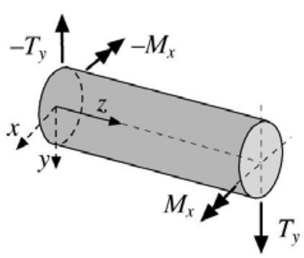
Flessione retta di momento flettente M_x



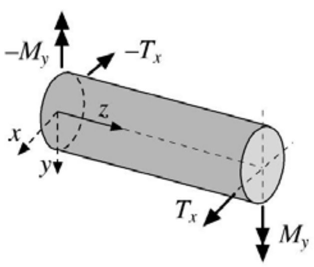
Flessione retta di momento flettente M_y



Torsione di momento torcente M_z



Taglio T_y e momento flettente M_x



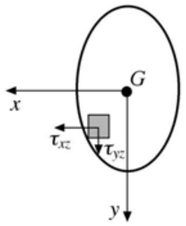
Taglio T_x e momento flettente M_y

Condizioni al contorno

$(a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c)$

Sul mantello:

$$\mathbf{n} = \left[n_x, n_y, 0\right]^T$$



Le equazioni valide sulla superficie laterale (mantello) *scarica* assumono la forma

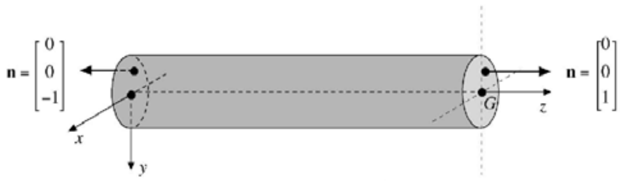
$$\boxed{\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0}.$$

Sul contorno della sezione trasversale la *tensione tangenziale risultante* τ è tangente alla sezione, ossia ha componente nulla secondo la normale.

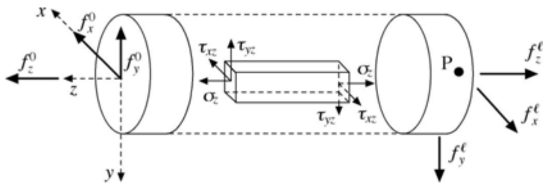
$$\tau = \tau_{yz} n_x - \tau_{xz} n_y$$

Sulle basi:

$$\mathbf{n} = [0,0,-1]^T \qquad \mathbf{n} = [0,0,1]^T$$

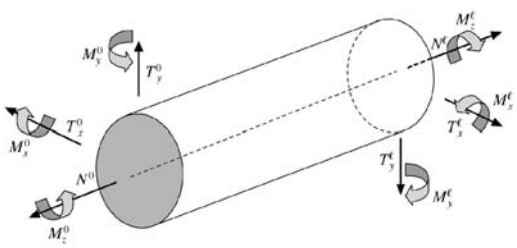


Sistema di carichi *autoequilibrati*



$z = 0$ $\mathbf{n} = [0,0,-1]^T$	$z = l$ $\mathbf{n} = [0,0,1]^T$
$\tau_{xz} = -f_x^0$	$\tau_{xz} = f_x^l$
$\tau_{yz} = -f_y^0$	$\tau_{yz} = f_y^l$
$\sigma_{zz} = -f_z^0$	$\sigma_{zz} = f_z^l$

Caratteristiche di sollecitazione



Sforzo normale: $N = \int_A \sigma_{zz} dA$ Tagli: $T_x = \int_A \tau_{xz} dA$ $T_y = \int_A \sigma_{yz} dA$

Momenti flettenti: $M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA$ $M_y = -\int_A \sigma_{zz} x dA$

Momento torcente: $M_z = \int_A \left(\tau_{yz} x - \tau_{xz} y\right) dA$

L'equilibrio alla traslazione lungo i tre assi ed alla rotazione intorno a z assume la forma:

$N(z) = N^0 \to \text{cost} \quad T_x(z) = T_x^0 \to \text{cost} \quad T_y(z) = T_y^0 \to \text{cost} \quad M_z(z) = M_z^0 \to \text{cost}$

L'equilibrio alla rotazione intorno agli assi x e y assume la forma:

$M_x(z) = M_x^0 + zT_y^0 \qquad M_y(z) = M_y^0 - zT_x^0$

Soluzione analitica in termini di tensioni

Per affrontare la soluzione del problema elastico scriviamo le equazioni indefinite di equilibrio, legame e congruenza introducendo le *ipotesi* a); assumiamo inoltre forze di volume nulle.

Equazioni di equilibrio (E):

$$\begin{aligned}&\sigma_{xx,x}+\tau_{xy,y}+\tau_{xz,z}+b_x=0\\&\tau_{yx,x}+\sigma_{yy,y}+\tau_{yz,z}+b_y=0\\&\tau_{zx,x}+\tau_{zy,y}+\sigma_{zz,z}+b_z=0\end{aligned}\;\rightarrow\;\begin{aligned}&\cancel{\sigma_{xx,x}}+\cancel{\tau_{xy,y}}+\tau_{xz,z}+\cancel{b_x}=0\\&\cancel{\tau_{yx,x}}+\cancel{\sigma_{yy,y}}+\tau_{yz,z}+\cancel{b_y}=0\\&\tau_{zx,x}+\tau_{zy,y}+\sigma_{zz,z}+\cancel{b_z}=0\end{aligned}\;\rightarrow\;\begin{aligned}&\tau_{xz,z}=0\\&\tau_{yz,z}=0\\&\tau_{zx,x}+\tau_{zy,y}+\sigma_{zz,z}=0\end{aligned}\;\rightarrow\;\begin{aligned}&\tau_{xz}=\tau_{xz}(x,y)\\&\tau_{yz}=\tau_{yz}(x,y)\\&\sigma_{zz}=z\sigma_{zz}(x,y)\end{aligned}$$

Equazioni di legame (L):

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{xx}-\nu\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)\right)\\&\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{yy}-\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{zz}\right)\right)\\&\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}-\nu\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}\right)\right)\\&2\varepsilon_{xy}=\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\\&2\varepsilon_{xz}=\gamma_{xz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}\\&2\varepsilon_{yz}=\gamma_{yz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\\&E>0\qquad 0\le\nu<0.5\end{aligned}\;\rightarrow\;\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left(\cancel{\sigma_{xx}}-\nu\left(\cancel{\sigma_{yy}}+\sigma_{zz}\right)\right)\\&\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left(\cancel{\sigma_{yy}}-\nu\left(\cancel{\sigma_{xx}}+\sigma_{zz}\right)\right)\\&\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{zz}-\nu\left(\cancel{\sigma_{xx}}+\cancel{\sigma_{yy}}\right)\right)\\&2\varepsilon_{xy}=\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\cancel{\tau_{xy}}\\&2\varepsilon_{xz}=\gamma_{xz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}\\&2\varepsilon_{yz}=\gamma_{yz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\end{aligned}\;\rightarrow\;\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=-\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}\\&\varepsilon_{yy}=-\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}\\&\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\sigma_{zz}\\&2\varepsilon_{xy}=\gamma_{xy}=0\\&2\varepsilon_{xz}=\gamma_{xz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}\\&2\varepsilon_{yz}=\gamma_{yz}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}\end{aligned}$$

Introduciamo le *equazioni di compatibilità* interna (condizioni di integrabilità) (C):

$$\boxed{\varepsilon_{ij,hk}+\varepsilon_{hk,ij}=\varepsilon_{ik,jh}+\varepsilon_{jh,ik}}$$

$$\begin{aligned}&(i=y,j=z,h=k=x)\rightarrow 2\varepsilon_{xx,yz}=\gamma_{xy,zx}+\gamma_{zx,yx}-\gamma_{yz,xx}\\&(i=x,j=z,h=k=y)\rightarrow 2\varepsilon_{yy,zx}=\gamma_{xy,zy}-\gamma_{zx,yy}+\gamma_{yz,xy}\\&(i=x,j=y,h=k=z)\rightarrow 2\varepsilon_{zz,xy}=-\gamma_{xy,zz}+\gamma_{zx,yz}+\gamma_{yz,xz}\\&(i=j=x,h=k=y)\rightarrow\ \gamma_{xy,xy}=2\varepsilon_{xy,xy}=\varepsilon_{xx,yy}+\varepsilon_{yy,xx}\\&(i=j=x,h=k=z)\rightarrow\ \gamma_{zx,zx}=2\varepsilon_{zx,zx}=\varepsilon_{zz,xx}+\varepsilon_{xx,zz}\\&(i=j=y,h=k=z)\rightarrow\ \gamma_{yz,yz}=2\varepsilon_{yz,yz}=\varepsilon_{yy,zz}+\varepsilon_{zz,yy}\end{aligned}\;\rightarrow\;\begin{aligned}&2\varepsilon_{xx,yz}=\cancel{\gamma_{xy,zx}}+\gamma_{zx,yx}-\gamma_{yz,xx}\\&2\varepsilon_{yy,zx}=\cancel{\gamma_{xy,zy}}-\gamma_{zx,yy}+\gamma_{yz,xy}\\&2\varepsilon_{zz,xy}=-\cancel{\gamma_{xy,zz}}+\cancel{\gamma_{zx,yz}}+\cancel{\gamma_{yz,xz}}\\&2\cancel{\varepsilon_{xy,xy}}=\cancel{\gamma_{xy,xy}}=\varepsilon_{xx,yy}+\varepsilon_{yy,xx}\\&2\cancel{\varepsilon_{zx,zx}}=\cancel{\gamma_{zx,zx}}=\varepsilon_{zz,xx}+\varepsilon_{xx,zz}\\&2\cancel{\varepsilon_{yz,yz}}=\cancel{\gamma_{yz,yz}}==\varepsilon_{yy,zz}+\varepsilon_{zz,yy}\end{aligned}$$

In termini di tensioni:

$$\begin{aligned}&(1+\nu)\left(\tau_{zy,xx}-\tau_{zx,yx}\right)-\nu\left(\sigma_{zz}\right)_{,yz}=0\\&(1+\nu)\left(\tau_{zy,xy}-\tau_{zx,yy}\right)+\nu\left(\sigma_{zz}\right)_{,xz}=0\\&z\sigma_{zz,xy}=0\\&\sigma_{zz,yy}+\sigma_{zz,xx}=0\\&\sigma_{zz,xx}-\nu\cancel{\sigma_{zz,zz}}=0\\&-\nu\cancel{\sigma_{zz,zz}}+\sigma_{zz,yy}=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+\nu)\left(\tau_{zy,xx}-\tau_{zx,yx}\right)-\nu\left(\sigma_{zz}\right)_{,yz}=0\\&(1+\nu)\left(\tau_{zy,xy}-\tau_{zx,yy}\right)+\nu\left(\sigma_{zz}\right)_{,xz}=0\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}&\sigma_{zz,xy}=0\\&\sigma_{zz,zz}=0\\&\sigma_{zz,xx}=0\\&\sigma_{zz,yy}=0\end{aligned}$$

Dalle ultime quattro equazioni di compatibilità possiamo dedurre la forma delle tensioni normali:

$$\boxed{\sigma_{zz}=a+a_1x+a_2y-z\left(b+b_1x+b_2y\right)}$$

con a,a_1,a_2,b,b_1,b_2 costanti di integrazione da determinarsi con le *condizioni al contorno*.

Le equazioni che rimangono (una di equilibrio e due di compatibilità) possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = b + b_1 x + b_2 y$$

$$(1+\nu)\left(\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}\right)_{,x} = -\nu b_2$$

$$(1+\nu)\left(\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}\right)_{,y} = \nu b_1$$

Il termine tra parentesi può essere integrato come segue

$$\left(\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}\right) = \frac{\nu}{1+\nu}\left(b_1 y - b_2 x\right) + c$$

con c una nuova costante di integrazione.

La risoluzione del problema è ricondotta alla soluzione del seguente *sistema lineare di equazioni* differenziali

$$\boxed{\begin{aligned} &\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = b + b_1 x + b_2 y \\ &\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y} = \frac{\nu}{1+\nu}\left(b_1 y - b_2 x\right) + c \end{aligned}}$$

Introduciamo adesso le *condizioni al contorno* per trovare le costanti.

Determinazione delle costanti

$$\left(a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c\right)$$

Il sistema di coordinate cartesiane è *baricentrico* e gli assi sono *assi principali d'inerzia per la sezione*; questa scelta rende particolarmente agevole la determinazione delle costanti.

$$N = \int_A \left(a + a_1 x + a_2 y - z\left(b + b_1 x + b_2 y\right)\right) dA = \left(a - zb\right) A$$

Alcuni degli integrali sono nulli perché momenti statici dell'intera sezione rispetto ad assi baricentrici.

L'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z richiede che lo sforzo normale sia indipendente da z per cui $b=0$.

$$\boxed{a = \frac{N}{A}}$$

In modo analogo:

$$M_x = \int_A \left(a + a_1 x + a_2 y - z\left(b + b_1 x + b_2 y\right)\right) y dA = \left(a_1 - b_1 z\right) \underbrace{\int_A xydA}_{J_{xy}=0} + \left(a_2 - b_2 z\right) \int_A y^2 dA = \left(a_2 - b_2 z\right) J_x$$

$$M_y = -\int_A \left(a + a_1 x + a_2 y - z\left(b + b_1 x + b_2 y\right)\right) x dA = -\left(a_1 - b_1 z\right) \int_A x^2 dA - \left(a_2 - b_2 z\right) \underbrace{\int_A yxdA}_{J_{xy}=0} = -\left(a_1 - b_1 z\right) J_y$$

Per trovare le quattro costanti applico la condizione sulla base $z=0$ alle espressioni

$$M_x = \left(a_2 - b_2 z\right) J_x$$

$$M_y = -\left(a_1 - b_1 z\right) J_y$$

Infatti:

$$M_x^0 = a_2 J_x \qquad M_y^0 = -a_1 J_y$$

da cui

$$\boxed{a_2 = \frac{M_x^0}{J_x} \qquad a_1 = -\frac{M_y^0}{J_y}}$$

Inoltre, l'equilibrio alla rotazione intorno ai due assi x e y comporta

$$M_x = M_x^0 + T_y^0 z = \left(a_2 - b_2 z\right) J_x = M_x^0 - b_2 z J_x$$

$$M_y = M_y^0 - T_x^0 z = -\left(a_1 - b_1 z\right) J_y = M_y^0 + b_1 z J_y$$

da cui

$$\boxed{b_2 = -\frac{T_y^0}{J_x} \qquad b_1 = -\frac{T_x^0}{J_y}}.$$

Le *costanti* dipendono da *un'unica caratteristica di sollecitazione*. Nel caso di assenza di forze taglianti i momenti flettenti si mantengono costanti e l'espressione della tensione normale assume la forma nota anche come *equazione di Navier*.

$$\boxed{\sigma_{zz} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y}$$

Determinazione delle costanti

(b_1, b_2, c)

Passiamo a risolvere il seguente *sistema di equazioni differenziali lineari* in termini delle tensioni tangenziali:

$$\boxed{\begin{aligned}&\tau_{zx,x}+\tau_{zy,y}=b+b_1x+b_2y\\&\tau_{zy,x}-\tau_{zx,y}=\frac{\nu}{1+\nu}(b_1y-b_2x)+c\end{aligned}}$$

sistema da risolvere!!

Poniamo la soluzione di questo sistema come somma di due termini:

$$\tau_{zx}=\tau_{zx}^0+\tilde{\tau}_{zx} \qquad \tau_{zy}=\tau_{zy}^0+\tilde{\tau}_{zy}$$

soluzione del *sistema omogeneo* τ_{zx}^0 e τ_{zy}^0	soluzione particolare del *sistema non omogeneo* $\tilde{\tau}_{zx}$ e $\tilde{\tau}_{zy}$
$\tau_{zx,x}^0+\tau_{zy,y}^0=0$ $\tau_{zy,x}^0-\tau_{zx,y}^0=0$	$\tilde{\tau}_{zx,x}+\tilde{\tau}_{zy,y}=b+b_1x+b_2y$ $\tilde{\tau}_{zy,x}-\tilde{\tau}_{zx,y}=\frac{\nu}{1+\nu}(b_1y-b_2x)+c$

Consideriamo il primo *sistema omogeneo.*

Supponiamo la sezione trasversale *semplicemente connessa**, allora *la seconda equazione* del sistema consente di introdurre una funzione $\varphi\ (x,y)$ tale per cui

$\tau_{zx}^0=\varphi_{,x}$ e $\tau_{zy}^0=\varphi_{,y}$.

La *prima equazione* del sistema stabilisce che la funzione introdotta deve essere *armonica*

$\boxed{\Delta\varphi=\varphi_{,xx}+\ \varphi_{,yy}=0}$ *Equazione di Laplace.*

La condizione al contorno valida sul mantello

$\tau_{zx}n_x+\tau_{zy}n_y=0$, richiede che la funzione introdotta soddisfi la seguente *condizione sul bordo*

$\left(\varphi_{,x}+\tilde{\tau}_{zx}\right)\ n_x+\left(\varphi_{,y}+\tilde{\tau}_{zy}\right)\ n_y=0$ o anche $\varphi_{,x}\ n_x+\varphi_{,y}\ n_y=-\tilde{\tau}_{zx}\ n_x-\tilde{\tau}_{zy}\ n_y$ ed ancora

$\boxed{\frac{d}{dn}\varphi=-\tilde{\tau}_{zx}\ n_x-\tilde{\tau}_{zy}\ n_y}$.

La determinazione delle *tensioni tangenziali* è quindi ricondotta alla ricerca di una *funzione armonica* in un dominio piano (la sezione trasversale del solido) *la cui derivata*, calcolata rispetto alla normale al contorno, *deve assumere un valore prescritto.*

La ricerca della soluzione si pone nella classica forma di Dini-Neumann:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta\varphi=0 && in\ A\\&\frac{d}{dn}\varphi=-\tilde{\tau}_{zx}\ n_x-\tilde{\tau}_{zy}\ n_y && in\ \partial A\end{aligned}}.$$

La funzione $\varphi\ (x,y)$ dipende dalla forma della sezione trasversale!!

Data la linearità del problema e' possibile dimostrare che il problema della ricerca della funzione introdotta può essere scisso in tre problemi distinti cui corrispondono *tre differenti funzioni armoniche*:

$\varphi_1 \rightarrow$ legata alla sollecitazione di taglio T_x : $b_1=-\frac{T_x^0}{J_y}$

$\varphi_2 \rightarrow$ legata alla sollecitazione di taglio T_y : $b_2=-\frac{T_y^0}{J_x}$

$\varphi_t \rightarrow$ legata alla sollecitazione di momento torcente M_z: $c=\frac{2M_z}{\left[J_0+\int_A\left(\varphi_{t,y}x-\varphi_{t,x}y\right)dA\right]}$

Le tensioni tangenziali dipendono dalle forze di taglio e dal momento torcente!!

Introducendo la definizione di momento torcente è possibile dedurre il valore della costante c.

*Un dominio A si dice *semplicemente connesso* se A "non ha buchi"; più formalmente se ogni curva chiusa e regolare in A si può ricondurre ad un punto di A in modo continuo.

Determinazione delle costanti

(c)

$$\boxed{\varphi(x,y) = -\frac{b_1}{2}\varphi_1(x,y) - \frac{b_2}{2}\varphi_2(x,y) + \frac{c}{2}\varphi_t(x,y)}$$

Siccome le costanti b_1 e b_2 sono legate al taglio, nel caso di sola torsione l'unica costante da determinare è la costante *c*.

Quindi consideriamo la funzione potenziale nella forma:

$$\varphi(x,y) = \frac{c}{2}\varphi_t(x,y)$$

Una soluzione particolare del sistema non omogeneo può essere scritta come segue:

$$\tilde{\tau}_{zx} = -\frac{c}{2}y \qquad \tilde{\tau}_{zy} = \frac{c}{2}x$$

per cui il sistema da risolvere

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi = 0 && \text{in } A \\ &\frac{d}{dn}\varphi = -\tilde{\tau}_{zx}\, n_x - \tilde{\tau}_{zy}\, n_y && \text{in } \partial A \end{aligned}$$

diventa

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\varphi_t = 0 && \text{in } A \\ &\frac{d}{dn}\varphi_t = \left(yn_x - xn_y\right) && \text{in } \partial A \end{aligned}}\,.$$

(*) La funzione $\varphi_t\ (x,y)$ dipende dalla forma della sezione trasversale!!

Ricordo che la funzione è legata alle tensioni in tal modo

$$\tau^0_{zx} = \frac{c}{2}\varphi_{t,x} \quad e \quad \tau^0_{zy} = \frac{c}{2}\varphi_{t,y}$$

e quindi la costante c è determinata dalla condizione sul momento torcente come segue:

$$M_z = \int_A \left(\tau_{zy}x - \tau_{zx}y\right)dA = \frac{c}{2}\int_A \left(\varphi_{t,y}x - \varphi_{t,x}y\right)dA + \frac{c}{2}\underbrace{\int_A \left(x^2 + y^2\right)dA}_{J_0}$$

Trovata la funzione $\varphi_t\ (x,y)$ come soluzione del sistema (*), determino la costante c tramite la seguente relazione:

$$c = \frac{2M_z}{\left[J_0 + \int_A \left(\varphi_{t,y}x - \varphi_{t,x}y\right)dA\right]}$$

N.B. Per sezione simmetrica sollecitata, oltre che a torsione, a taglio secondo gli assi di simmetria è valida la relazione sovrastante che lega il momento torcente alla costante *c*.

Troviamo per il caso di sezione circolare la forma della funzione $\varphi_t\ (x,y)$.

In una sezione circolare di raggio r si ha:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta \end{aligned} \quad \text{ed ancora} \quad \begin{aligned} n_x &= \cos\vartheta \\ n_y &= \sin\vartheta \end{aligned} \quad \text{per cui}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\varphi_t = 0 && \text{in } A \\ &\frac{d}{dn}\varphi_t = \left(r\sin\vartheta\cos\vartheta - r\cos\vartheta\sin\vartheta\right) = 0 && \text{in } \partial A \end{aligned}} \qquad \varphi_t \to \text{costante}$$

per cui le soluzioni del sistema omogeneo sono nulle

$$\tau^0_{zx} = 0 \quad e \quad \tau^0_{zy} = 0$$

e rimane solo la soluzione particolare

$$\tilde{\tau}_{zx} = -\frac{c}{2}y \qquad \tilde{\tau}_{zy} = \frac{c}{2}x \qquad \text{con} \qquad c = \frac{2M_z}{J_0} \qquad \text{per cui} \qquad \boxed{\tau_{zx} = -\frac{M_z}{J_0}y \qquad \tau_{zy} = \frac{M_z}{J_0}x}$$

In coordinate polari la tensione lungo ϑ diventa $\boxed{\tau = \frac{M_z}{J_0}r}$