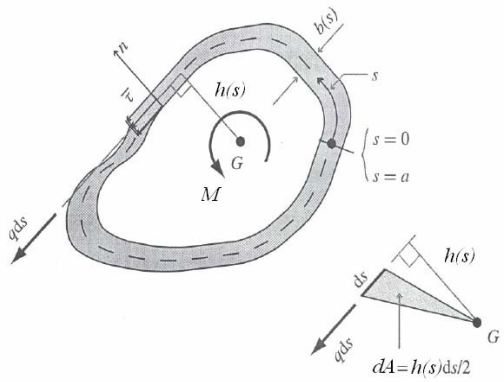
Soluzione per la torsione in profili sottili chiusi (Bredt)

Ipotesi di base: la soluzione esplicita per sezione a corona circolare e l'analogia idrodinamica suggeriscono che, in sezioni con spessore ridotto, le tensioni tangenziali possano essere approssimate con il loro *valore medio*, diretto ovunque secondo la linea media del profilo e definito come la risultante sullo spessore dei valori locali della tensione tangenziale.

Con questa ipotesi semplificativa riusciamo a trovare, con sole *considerazioni di equilibrio*, una relazione tra la tensione tangenziale media ed il momento torcente cui è soggetta la sezione trasversale.



s ascissa curvilinea
h(s) distanza della linea media dal punto G
(ad esempio il baricentro della sezione).

Soluzione.

Introduciamo il concetto di *flusso* q, quantità indipendente dallo spessore b(s) (analogia con la portata costante di un fluido incomprimibile) *:

$$q = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{sz}\, dn \qquad\qquad q = \overline{\tau}(s)\, b(s)$$

Su ogni tratto *ds* della linea media si ha una forza risultante qds diretta lungo la tangente alla linea media stessa γ di lunghezza l_γ. Imponiamo l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse z:

$$M = \int_0^a h(s) q\, ds = q \int_0^a h(s)\, ds = 2Aq\,.$$

Poiché il flusso è costante possiamo tirarlo fuori dall'integrale mentre la restante quantità sotto integrale rappresenta il doppio dell'area racchiusa dalla linea media γ (2A). Risolvendo rispetto al flusso otteniamo:

$q = \dfrac{M}{2A}$ ed il *valore medio delle tensioni* risulta: $\overline{\tau} = \dfrac{q}{b(s)} = \dfrac{M}{2Ab(s)}$.

Se lo spessore è ridotto si può supporre: $\tau \simeq \overline{\tau}$ ed ottenere il valore locale delle tensioni tangenziali.

Formula finale.

$$\tau_{zs}(s) \simeq \overline{\tau} = \frac{M}{2Ab(s)}$$ Formula di Bredt $$\qquad \overline{\tau}_{\max} = \frac{M}{2Ab_{\min}}$$

La tensione tangenziale **massima** si trova dove lo spessore è minimo e si addensano le linee di corrente:

La soluzione è ottenuta con sole considerazioni di equilibrio e non sarà in generale congruente.
Per sezione circolare cava si può dimostrare che per rapporti R/b=10 l'errore che si compie calcolando la tensione tangenziale media con la formula di Bredt rispetto alla soluzione esatta di De Saint Venant è circa del 5% in difetto.
Mediante l'utilizzo del concetto di energia potenziale elastica del sistema è possibile ottenere una relazione che fornisce l'*angolo di torsione* approssimato:

$$\vartheta = \frac{M}{4GA^2} \oint \frac{ds}{b}$$ Seconda Formula di Bredt $$\qquad \vartheta = \frac{M}{4GA^2} \frac{l_\gamma}{b}$$

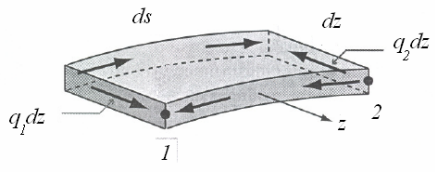
In tal caso l'angolo di torsione fornisce una valutazione lievemente in eccesso rispetto alla valutazione ottenuta con la soluzione esplicita di De Saint Venant.

*Il flusso è indipendente da s.

Consideriamo un elemento ds x dz compreso tra due punti 1 e 2:

$\overline{\tau}_1 \simeq \tau_1 = \tau_{sz}(s_1) = \tau_{zs}(s_1)$ e $\overline{\tau}_2 \simeq \tau_2 = \tau_{sz}(s_2) = \tau_{zs}(s_2)$

(reciprocità)

Se imponiamo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z otteniamo:

$\overline{\tau}_1(s) b_1(s) dz = \overline{\tau}_2(s) b_2(s) dz$ e quindi $q_1 = q_2$ il ***flusso è costante.***