



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI GENOVA

CORSO DI STUDIO IN INGEGNERIA BIOMEDICA

Relazione finale per il conseguimento del titolo di
Dottore in Ingegneria Biomedica

Meccanica dei fluidi tamponanti in occhi con stafiloma

Chiara Ponte

Marzo 2015

Relatore: Prof. Jan Oscar Pralits

Correlatore: Dott. Rodolfo Repetto

Indice

1	Introduzione	1
2	L'occhio umano	3
2.1	L'anatomia dell'occhio umano	3
2.2	Distacco della retina	5
2.3	Stafiloma	6
2.4	Rimedi chirurgici	7
3	Formulazione del problema	10
3.1	Modello matematico	10
3.1.1	L'algoritmo di bisezione	14
3.2	Metodo numerico	15
3.2.1	Riassunto di <i>OpenFOAM</i> [®]	16
3.2.2	Struttura dei solvers e delle utilities in <i>OpenFOAM</i> [®] .	17
3.2.3	Struttura di un caso in <i>OpenFOAM</i> [®]	18
4	Risultati	22
4.1	Validazione del modello numerico	22
4.2	Caso di studio della geometria realistica dell'occhio	25
4.2.1	Geometria con uno stafiloma	26
5	Conclusione e Sviluppi futuri	29

Elenco delle figure

2.1	Sezione occhio umano	3
2.2	Strati della retina	4
2.3	Distacco della retina	5
2.4	Vitrectomia	7
2.5	Scleral buckling	8
3.1	Esempio di dominio sferico	10
3.2	Caso di un menisco simmetrico rispetto agli assi	13
3.3	Algoritmo di bisezione	14
3.4	Struttura delle due case, utility e solvers	18
3.5	Struttura di una generica cartella <i>case</i>	19
3.6	Confronto di due soluzioni date da mesh differenti	20
3.7	Esempio di generazione di <i>mesh</i> con <i>snappyHexMesh</i>	21
4.1	Geometria del caso sferico	23
4.2	Forma dell'interfaccia nel caso di dominio sferico	24
4.3	(a) Geometria dell'occhio umano ricostruita facendo affidamento asulle misure in figura (b)	25
4.4	Calcolo dell'interfaccia con due gradi di riempimento: (a) $V_{s.o.}/V = 0.623$ e (b) $V_{s.o.}/V = 0.935$	25
4.5	Relazione fra superficie tamponata per unità di superficie $S_{tamponata}/S$ e volume di iniezione $V_{s.o.}/V$	26
4.6	Risultati ottenuti su stafiloma con raggio di curvatura di $r = 0.002m$ (a) e $r = 0.003m$ (b).	27
4.7	Geometria di uno stafiloma con raggio di curvatura $r = 0.004m$	27

Sommario

In questo elaborato di tesi si presenta un modello numerico in grado di predirre il comportamento dell'interfaccia acqua-fluido tamponante all'interno della camera vitrea. Attraverso simulazioni numeriche, si può determinare il legame tra l'effettiva copertura della retina da parte del fluido tamponante iniettato e la forma dell'interfaccia tra i due fluidi immiscibili in relazione al grado di riempimento della cavità vitrea. I risultati ottenuti per mezzo di questo modello sono di significativo interesse clinico, in quanto il chirurgo può conoscere a priori la quantità di fluido tamponante, solitamente un olio di silicone, da inserire nella camera vitrea in relazione alla localizzazione del distacco retinico.

Il particolare caso in cui è presente uno stafiloma, ovvero una protuberanza verso l'esterno della parete oculare, richiede particolare attenzione. Questo perchè le rotture della retina sono spesso localizzate in corrispondenza dello stafiloma e non ovvio quando il fluido tamponante sia in grado di penetrare all'interno dello stafiloma stesso esercitando il ruolo tamponante richiesto.

In un primo momento abbiamo effettuato simulazioni su un dominio sferico in modo da poter confrontare i risultati con le equazioni risolutive ottenute analiticamente per poter eseguire una validazione del modello proposto. Successivamente abbiamo eseguito simulazioni, con diversi gradi di riempimento, sulla geometria più realistica dell'occhio prendendo in analisi sia il caso dell'occhio affetto da stafiloma che quello sano.

Capitolo 1

Introduzione

L'occhio umano ci permette di ottenere informazioni sul mondo circostante attraverso il processo chiamato visione, ovvero, il meccanismo per cui riconosciamo immagini, forme e colori. Tale processo si basa sulla conversione della luce riflessa o emessa dagli oggetti in immagine mentale. Parte di questo meccanismo ha luogo a livello della retina. Nel caso in cui il funzionamento della retina non fosse fisiologico, verrebbero compromesse le funzioni di elaborazione dell'immagine con un conseguente peggioramento della vista.

Esistono interventi chirurgici che prevedono la totale sostituzione dell'umor vitreo con una sostanza, detta *tampone*, che permette di mantenere la retina attaccata al suo sito. In particolare la vitrectomia, ovvero l'operazione chirurgica che prevede l'inserimento nella camera vitrea di un fluido, solitamente un olio di silicone, in grado di premere la retina contro la coroide evitando il progredire del distacco e facilitandone la riadesione. Tale procedura desta particolare interesse per quanto riguarda l'interazione fra i due fluidi presenti nella camera vitrea. Infatti, attraverso un'analisi fluidodinamica possiamo indagare riguardo le configurazioni dell'interfaccia.

Per predire il comportamento dei due fluidi abbiamo proposto un modello numerico basato sul calcolo numerico. Dopo aver effettuato una validazione del modello proposto, abbiamo eseguito delle simulazioni sulla geometria realistica dell'occhio umano. Nel caso in cui sia presente uno stafiloma sia la geometria del caso di studio che le configurazioni dell'interfaccia si compli-

cano. Studi dimostrano che esiste una probabilità molto alta che si verifichi un distacco retinico proprio in corrispondenza dell'estroffessione della parete oculare. Lo scopo delle simulazioni condotte consiste nel verificare che la zona dello stafiloma sia effettivamente tamponata considerando diversi gradi di riempimento di olio di silicone nella cavità vitrea.

Capitolo 2

L'occhio umano

2.1 L'anatomia dell'occhio umano

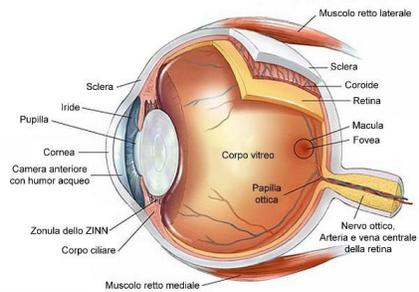


Figura 2.1: Sezione occhio umano

L'occhio umano è l'organo sensoriale che ci permette di conoscere il mondo circostante e di eseguire le più svariate attività. Gli occhi riescono a distinguere forme, colori e dimensioni assorbendo la luce che gli oggetti emettono o riflettono. L'anatomia dell'occhio umano può essere paragonata alla struttura di una macchina fotografica, infatti, la sua funzione è di raccogliere la luce che proviene dal mondo esterno. L'occhio ne regola l'intensità attraverso un diaframma, l'iride, e focalizzarla attraverso un sistema regolabile di lenti (cornea e cristallino) che permette di formare un'immagine a fuoco sulla retina. In questo senso possiamo definire la retina come l'analogo

della pellicola fotografica: essa cattura l'immagine e la converte in impulsi elettrici per mezzo di cellule fotosensibili, i coni e i bastoncelli, e le invia attraverso vie nervose ai centri encefalici specializzati nella sua elaborazione ed interpretazione. L'occhio, altrimenti chiamato bulbo oculare, è composto internamente da due porzioni di sfera giustapposte aventi diverso raggio di curvatura, ed esteriormente da uno spesso tessuto connettivo di colore bianco detto sclera che conferisce forma e rigidità all'occhio. Alla sclera si attaccano i sei muscoli che consentono di muovere l'occhio nelle diverse direzioni dello spazio. La cornea è la più potente lente dell'occhio e, per garantirne la totale trasparenza, essa è priva di vasi sanguigni. Il suo scopo è quello di mettere a fuoco la luce grazie alle sue proprietà di rifrazione, nel momento in cui essa penetra nell'occhio. Subito dietro alla cornea si trova l'iride caratterizzata da un diaframma, detto pupilla, che analogamente a quello di una macchina fotografica può stringersi o allargarsi regolando la quantità di luce che entra nell'occhio.

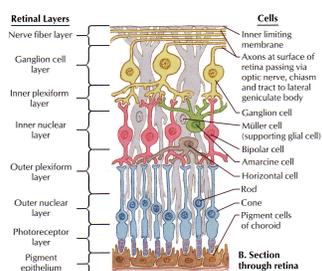


Figura 2.2: Strati della retina

Lo spazio compreso tra il settore sferico corneale e la pupilla, indicato come camera anteriore, è riempito di un liquido trasparente simile all'acqua chiamato umor acqueo che ha il compito di nutrire la cornea e il cristallino, entrambi strutture non vascolarizzate. Nel dettaglio il cristallino è una lente biconvessa, formata soprattutto da collagene ed epitelio, che controlla la messa a fuoco della luce sulla retina attraverso il meccanismo di accomodazione, ovvero la capacità di modificare continuamente la propria forma per migliorare il processo visivo. Lo stretto spazio compreso tra l'iride e il cristallino è chiamato camera posteriore, e insieme alla camera anteriore,

costituisce la cavità anteriore. Posteriormente al cristallino si apre la cavità posteriore, o vitrea, uno spazio riempito da un fluido simile a gel detto umor vitreo che contribuisce a mantenere la forma dell'occhio e facilita il passaggio della luce. La cavità posteriore è avvolta in due strati di tessuto: la coroide e la retina. La coroide è uno strato sottile di tessuto vascolarizzato che separa la retina dalla sclera. Essa è molto pigmentata e per questo assorbe la luce che non viene captata dai fotorecettori ed evita così fenomeni di remissione. La retina, che risulta a diretto contatto con il corpo vitreo, agisce come una pellicola, registrando e trasmettendo segnali nervosi che, attraverso il nervo ottico vengono inviati al cervello. La retina dunque assume un ruolo fondamentale nell'elaborazione e trasmissione delle informazioni visive alla corteccia cerebrale.

2.2 Distacco della retina

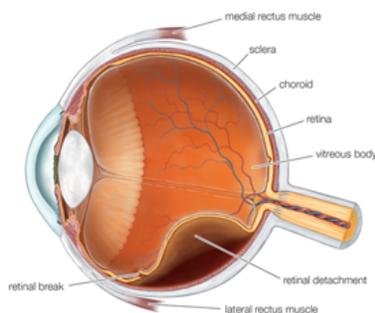


Figura 2.3: Distacco della retina

Le funzioni del sistema visivo dipendono in modo fondamentale anche da fattori biomeccanici: nella cavità vitrea, l'umor vitreo è attaccato alla retina e con l'invecchiamento questo fluido può progressivamente liquefarsi causando una conseguente diminuzione di volume e un distaccamento dalla retina. Tale processo è riconosciuto come distacco posteriore dell'umor vitreo, PVD [3]. In alcuni casi la contrazione dell'umor vitreo produce tra-

zioni sulla retina di entità sufficiente a provocarne la rottura. In presenza di una rottura della retina, l'umor vitreo liquefatto può penetrare attraverso la ferita e progressivamente distaccare la retina dallo strato epiteliale della coroide a cui essa è fisiologicamente attaccata. La retina non può funzionare correttamente se si separa dall'epitelio vascolarizzato della coroide poiché viene meno il trasporto di ossigeno e di nutrienti da quest'ultima verso le cellule della retina, causandone la morte. Queste lacerazioni della retina possono essere attribuite anche ai rapidi movimenti angolari che compiono gli occhi, conosciuti come saccadi [4]. Inoltre anche alcune malattie degli occhi, traumi alla testa, diabete o persino la miopia possono contribuire a ricreare la combinazione di eventi che porta al distacco della retina. Per la diagnosi del distacco retinico l'esperto farà uso dell'oftalmoscopio, uno strumento clinico in grado di esaminare la parete caudale dell'occhio in modo non invasivo, che permette di rintracciare i floaters o direttamente le lesioni a livello della retina.

2.3 Stafiloma

Lo stafiloma è un'ectasia di una porzione della parete oculare, ovvero una protrusione caudale della parete oculare e del suo contenuto. Esso si verifica più spesso come risposta ad un trauma o ad un'infezione che hanno modificato l'architettura della parete oculare: un'eccessiva pressione nel punto della lesione può spingere la parete dalla sua locazione originaria verso l'esterno dell'occhio. Si è dimostrato che lo stafiloma può verificarsi come conseguenza di una miopia avanzata. Ai fini degli studi scientifici è stato fondamentale riuscire ad elaborare una classificazione delle tipologie di stafiloma; per poterlo fare è stata analizzata l'irregolarità della superficie esteriore della sclera. Le tipologie di stafiloma posteriore sono state rinominate in base alla loro posizione e distribuzione in 5 categorie [3]:

1. ampio e maculare
2. stretto e maculare

3. peripapillare
4. nasale
5. inferiore

Ai fini di questo elaborato di tesi la classificazione delle tipologie di stafiloma è alla base della definizione di nuovi domini di lavoro. Infatti, vi sono significative differenze geometriche fra un occhio sano ed uno affetto da stafiloma che rendono più complicata l'analisi fluidodinamica della camera vitrea.

2.4 Rimedi chirurgici



Figura 2.4: Vitrectomia

Procedure chirurgiche a livello del bulbo oculare come la vitrectomia includono la sostituzione dell'umor vitreo, come si può vedere in Figura 2.4, con mezzi fluidi detti tamponanti.

Oltre alla vitrectomia abbiamo altri tipi rimedi chirurgici che prevedono l'utilizzo della tecnologia al laser per risanare la ferita oppure, come si può vedere in Figura 2.5, il cerchiaggio o piombaggio sclerare, che consiste nel deformare, attraverso l'applicazione di una banda di silicone, la forma della sclera al fine di rilassare le trazioni vitreoretiniche e consentire il progressivo riattaccamento della retina.

L'uso di mezzi tamponanti si basa sul concetto che le bolle di gas/-fluido [5] all'interno della cavità posteriore possono bloccare il flusso vitreo

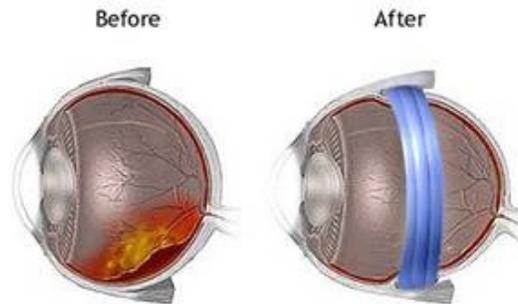


Figura 2.5: Scleral buckling

liquefatto attraverso la ferita sulla retina. Questi tamponi devono generalmente soddisfare alcune caratteristiche e si possono classificare in base alla loro composizione chimica, funzione nel trattamento delle patologie e al tempo di permanenza nell'ambiente intraoculare. Si definiscono infatti tamponi a breve termine i fluidi che risiedono nella camera vitrea per un periodo limitato ma sufficiente per permettere alla retina di riposizionarsi, mentre si definiscono tamponi a lungo termine quelli che rimangono nella camera vitrea per un tempo più lungo.

I requisiti che un mezzo tamponante deve soddisfare sono molteplici. Deve essere trasparente, incolore e con densità e indice rifrattivo paragonabili a quelli del vitreo naturale. Deve essere inoltre sterilizzabile, chimicamente e biologicamente inerte, non tossico, compatibile con i tessuti e con il vitreo residuo e non biodegradabile per garantirne la presenza per il tempo desiderato. Deve essere immiscibile in acqua ed avere con essa un'elevata tensione superficiale per garantire il corretto effetto tamponante. Infine, deve avere proprietà tali da consentire il trasporto necessarie a convogliare metaboliti e proteine all'interno della camera vitrea. Inoltre deve essere preferibilmente iniettabile attraverso piccoli strumenti chirurgici.

I fluidi che al momento sono più adatti ad essere utilizzati come fluidi tamponanti sono gli oli di silicone in quanto caratterizzati da un'elevata tensione superficiale con l'acqua e da un basso peso specifico, che permette loro di galleggiare sul fluido residuo e tornare utili in caso di ferite nella zona superiore della cavità vitrea. La loro natura idrofobica li porta ad

instaurare un debole contatto con la retina che non permette loro di riempire completamente la cavità (sino al 90%). La permanenza nella cavità vitrea per tempi lunghi può creare un'emulsione; in questo caso il paziente avverte un calo dell'acuità visiva e l'olio va rapidamente rimosso dall'occhio.

Lo studio dell'interfaccia fra umor acqueo e olio di silicone è di fondamentale importanza, infatti, grazie ad un'analisi accurata si potrà dedurre la quantità di superficie tamponata. Tale conclusione è di rilevante interesse clinico in quanto permette all'esperto di sapere a priori la quantità di fluido tamponante da inserire in relazione alla localizzazione del distacco retinico.

Capitolo 3

Formulazione del problema

3.1 Modello matematico

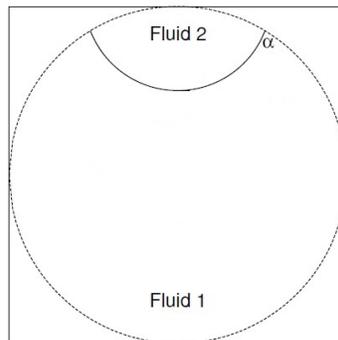


Figura 3.1: Esempio di dominio sferico

Consideriamo il caso di un dominio sferico di raggio R in cui sono presenti due fluidi immiscibili come in figura (fluido(1) acqua, fluido(2) olio di silicone). L'obiettivo è di determinare le configurazioni di equilibrio dell'interfaccia dei due fluidi. Per poterlo fare definiamo l'angolo di contatto α , corrispondente all'angolo formato dall'incontro dell'interfaccia e la parete della retina, e la curvatura dell'interfaccia.

Nel caso di riempimento incompleto della camera vitrea a seguito di una vitrectomia, l'intera area del fluido tamponante è fortemente influenzata dal-

l'angolo di contatto fra lo stesso fluido tamponante e la retina e dalla tensione superficiale tra i due fluidi. Eames et al. [2] proposero un modello teorico in grado di prevedere la forma dell'interfaccia tra due fluidi immiscibili nel caso di dominio sferico. Tale modello risulta essere di forte interesse clinico in quanto lo studio delle configurazioni di equilibrio dell'interfaccia fra olio di silicone e umor acqueo, in una geometria realistica dell'occhio umano, sono fondamentali nell'analisi delle conseguenze cliniche di una vitrectomia.

Consideriamo ora una superficie tridimensionale descritta dall'equazione $f(x) = z - h(x, y) = 0$ e definiamo \mathbf{n} il vettore unitario normale alla superficie, la curvatura locale k si può esprimere come divergenza del vettore \mathbf{n} :

$$k = \nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.1.1)$$

In coordinate cartesiane abbiamo che:

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \quad (3.1.2)$$

Per semplicità consideriamo il caso di una generica superficie bidimensionale espressa dall'equazione $z = h(x)$, possiamo calcolare il valore di k , infatti sapendo che la divergenza di un vettore $\mathbf{u} = (u, v, z)$ è: $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$ allora:

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{h_{xx}}{(h_x^2 + 1)^{3/2}} \quad (3.1.3)$$

L'equazione rappresenta la curvatura media k per una superficie bidimensionale e si può esprimere come segue:

$$k = \frac{1}{f'} \frac{d}{dx} \frac{1}{(1 + f'^2)^{1/2}} \quad (3.1.4)$$

Il nostro obiettivo è di determinare la forma dell'interfaccia fra questi due fluidi. A tal fine prendiamo in considerazione l'equazione di Laplace-Young. Essa permette di mettere in stretta correlazione la curvatura e

le proprietà fisiche dei fluidi. Per ottenere questa relazione assumiamo la tensione superficiale uniforme, il salto di pressione fra i due fluidi è:

$$p^{(1)} - p^{(2)} = 2\gamma k_m \quad (3.1.5)$$

per cui sostituendo la distribuzione delle pressioni parziali dei due fluidi, $p^{(1)} = -\rho_1 g x + c_1$ e $p^{(2)} = -\rho_2 g x + c_2$ otteniamo:

$$-\rho_2 g x + c_2 + \rho_1 g x + c_1 = 2\gamma k_m \quad (3.1.6)$$

Riarrangiando si ottiene l'equazione di Laplace-Young che governa la forma dell'interfaccia nel caso idrostatico:

$$2k_m = -\frac{\Delta\rho g}{\gamma} x_1 + B = -\frac{x_1}{l^2} + B \quad (3.1.7)$$

dove:

- k_m è la curvatura media fra le due fasi;
- $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ è la differenza di densità;
- g è la gravità;
- γ è la tensione superficiale;
- x_1 è l'interfaccia tra due fluidi;
- B è una costante che corrisponde alla curvatura nell'origine;
- $l = (\frac{\gamma}{\Delta\rho g})^{1/2}$ è la lunghezza capillare.

La forma dell'interfaccia deve soddisfare l'equazione (3.1.7) e la condizione sull'angolo di contatto, che viene determinato sperimentalmente.

Supponiamo ora di prendere in analisi un caso tridimensionale in cui si può definire una simmetria rispetto agli assi ed introduciamo l'angolo θ di inclinazione dell'interfaccia.

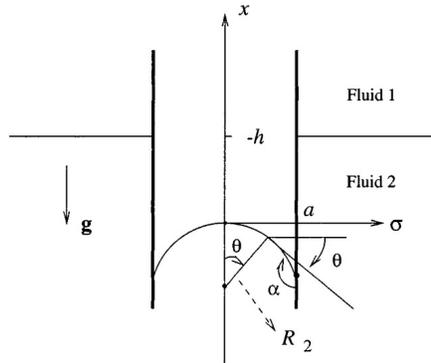


Figura 3.2: Caso di un menisco simmetrico rispetto agli assi

Tale operazione ci permette di sostituire $\tan \theta$ a f' e quindi l'equazione (3.1.7) diventa:

$$k = \frac{1}{f'} \frac{d|\cos \theta|}{d\theta} \quad (3.1.8)$$

Consideriamo il caso di un menisco in un capillare verticale caratterizzato da una simmetria rispetto all'asse verticale, come si può vedere in Figura 4.1. Durante l'analisi dell'interazione tra due fluidi immiscibili, l'angolo di inclinazione dell'interfaccia è un dato noto a priori. Il nostro scopo è di riuscire ad esprimere la curvatura dell'interfaccia in relazione al suo angolo di inclinazione in modo da conoscerne la configurazione.

Riprendendo la curvatura media $k = \frac{k_1+k_2}{2}$ dell'equazione 3.8, si può notare che essa è data da due contributi di curvatura: k_1 curvatura che assume l'interfaccia nel piano σx k_2 curvatura che assume l'interfaccia nel piano ortogonale al precedente.

Come appena dimostrato la curvatura k_1 si può trovare sostituendo nell'equazione (3.1.7):

$$k_1 = -\frac{f''}{(f'^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{f'} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{(1 + f'^2)^{1/2}} = \frac{1}{\tan \theta} \frac{d|\cos \theta|}{d\theta} \quad (3.1.9)$$

Invece si può dimostrare che la curvatura k_2 risulta essere:

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = -\frac{f'}{\sigma(1 + f'^2)^{1/2}} = -\frac{\sin \theta}{\sigma} \quad (3.1.10)$$

dove θ è l'angolo di inclinazione dell'interfaccia ed $f' = \tan \theta$.

Combinando le ultime due ottengo:

$$2k_m = k_1 + k_2 = \frac{1}{\tan \theta} \frac{d|\cos \theta|}{d\theta} - \frac{\sin \theta}{\sigma} = -\cos \theta \frac{d\theta}{d\sigma} - \frac{\sin \theta}{\sigma} \quad (3.1.11)$$

3.1.1 L'algoritmo di bisezione

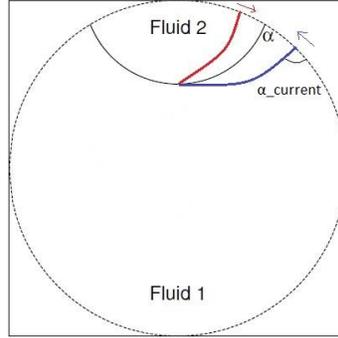


Figura 3.3: Algoritmo di bisezione

Inizialmente la costante B non è nota per cui procediamo al calcolo dell'interfaccia con un metodo iterativo. Nel nostro caso usiamo il metodo di bisezione, ovvero, inizialmente supponiamo due valori distinti di B e al termine di ogni iterazione calcoliamo l'angolo di contatto. Lo scopo è quello di minimizzare la differenza fra l'angolo di contatto attuale α e quello ottenuto durante l'iterazione $\alpha_{current}$. Tale procedimento continua sino a che:

$$f(B) = |\alpha - \alpha_{current}| = 0 \quad (3.1.12)$$

Quindi tale processo si può riassumere il pochi passaggi, bisogna trovare B tale per cui otteniamo la radice di $f(B)$. Per prima cosa si fissano due punti a_1 e b_1 tale per cui $sign(f(a_1) \cdot f(b_1)) = -1$, in questo modo possiamo determinare il punto $c = \frac{a_1+b_1}{2}$, si calcola $f(c)$ e si controlla la convergenza.

A questo punto si possono verificare due diversi casi: se $f(c) = 0$ o $\frac{a_1+b_1}{2} < tol$ allora la radice è $B = c$, dove tol è l'errore ammesso per il calcolo della radice, se una delle condizioni precedenti non è verificata allora si itera il procedimento ricalcolando gli estremi dell'intervallo da considerare come segue:

if $sign(f(c) == f(a_1))$ allora $a_2 := c$

altrimenti $b_2 := c$

e dopo la riassegnazione degli estremi si riparte calcolando un nuovo punto c come già detto, sino a che le condizioni non sono verificate.

3.2 Metodo numerico

In fluidodinamica computazionale, il VOF (*Volume of fluids*) [1] è una tecnica di modellazione di moti bifasici che permette il monitoraggio e la localizzazione di interfacce liquido-liquido. Essa appartiene alla classe dei metodi Euleriani caratterizzati da una maglia, mesh, statica o in movimento in una predeterminata locazione in modo tale da rilevare l'evoluzione della forma dell'interfaccia. Il software utilizzato ai fini di questa tesi, OpenFOAM®, è un software libero che permette di risolvere le equazioni che governano il moto dei fluidi attraverso il metodo dei Volumi Finiti. La finalità della fluidodinamica computazionale è quella di discretizzare i casi presi in esami passando da un dominio continuo ad uno discreto; in questo modo avremo il passaggio da un set di equazioni differenziali alle derivate parziali in un corrispondente sistema di equazioni algebriche discrete che vengono risolte per punti, ossia in determinati istanti di tempo e posizioni spaziali. Il software

che computa queste informazioni ha accesso alle condizioni iniziali del problema e alle condizioni al contorno, entrambe fornite dall'utente in modo che vengano rispettate in corso di elaborazione. Il processo di discretizzazione consta in alcune fasi:

1. discretizzazione del dominio di calcolo;
 - discretizzazione nel tempo;
 - discretizzazione nello spazio;
2. discretizzazione delle equazioni di governo.

La discretizzazione del dominio è la fase in cui viene prodotta la *mesh*, o griglia, e di conseguenza saranno calcolati i punti di spazio e tempo in cui la soluzione verrà calcolata. Per questo motivo si esegue una discretizzazione sia nel dominio temporale, da cui deduciamo la grandezza temporale del passo di calcolo, e in quello spaziale che ci permette di definire un numero finito di volumi di controllo.

3.2.1 Riassunto di *OpenFOAM*[®]

OpenFOAM[®] è un software open source sviluppato da OpenCFD Ltd. e ESI Group e distribuito dalla *OpenFOAM*[®] Foundation. FOAM è l'acronimo di Field Operation And Manipulation: tale dicitura si riferisce alla capacità di questo software di consentire la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali mediante il Metodo dei Volumi Finiti tramite la gestione di strutture specializzate di dati costituite da campi scalari, vettoriali e tensoriali. Più che un software vero e proprio *OpenFOAM*[®] è da considerarsi come una libreria di codici eseguibili scritti in linguaggio C++, definiti applications, distinguibili in due categorie:

- solvers;
- utilities.

I solvers sono deputati alla risoluzione di specifici problemi della meccanica dei continui (Field Operation) mentre le utilities hanno il compito di

manipolare le strutture dati nel pre e post-processing (Field Manipulation). Poiché il linguaggio degli eseguibili è il C++, *OpenFOAM*[®] assimila alcune delle caratteristiche della programmazione orientata agli oggetti: ciò consente di aggiungere o rimuovere parti del programma con relativa semplicità. Il sistema sintattico che permette all'utente di implementare le equazioni costitutive dei problemi in *OpenFOAM*[®] è detto *equation mimicking*: questa sintassi consente di scrivere le equazioni nel codice simulandone la scrittura matematica. Ad esempio:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{U} \mathbf{U} - \nabla \cdot \mu \nabla \mathbf{U} = -\nabla p \quad (3.2.1)$$

la quale rappresenta la forma vettoriale dell'equazione di Navier-Stokes, si può esprimere in codice come segue:

```
solve
(
  fvm::ddt(rho, U)
+ fvm::div(rho, U, U)
- fvm::laplacian(mu, U)
==
- fvc::grad(p)
);
```

dove *fvm* (*finiteVolumeMethod*) e *fvc* (*finiteVolumeCalculus*) sono classi di funzioni, ρ è la densità del fluido considerato, \mathbf{U} la sua velocità, μ la sua viscosità e p la pressione, il gradiente della quale rappresenta appunto la forza dovuta alla pressione.

3.2.2 Struttura dei solvers e delle utilities in *OpenFOAM*[®]

La *directory applications*, contenuta nella cartella di installazione di *OpenFOAM*[®], contiene i *solvers* e le *utilities*. Nella cartella *solverName*, vedi Figura 3.4, possiamo trovare due file:

- il file ***solverName.C***, contiene il codice del solutore (o *source code*)

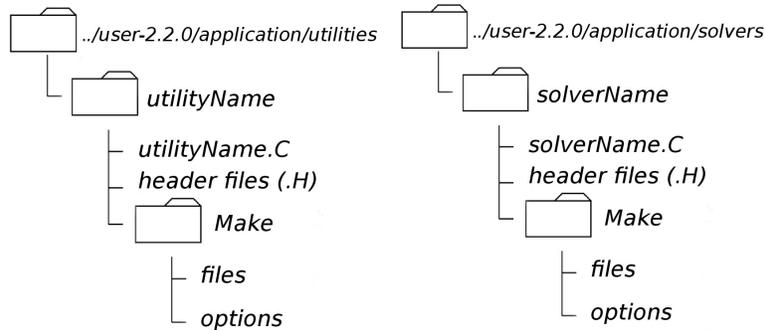


Figura 3.4: Struttura delle due case, utility e solvers

- gli *header files*, aventi estensione **.H**, contenenti le dichiarazioni delle variabili, le equazioni espresse in *equation mimicking* e i comandi di inizializzazione della soluzione.

Sempre all'interno della cartella *solverName* troviamo un'altra directory, *Make*, che contiene invece:

- *files*: nei quali sono specificati il nome del solver, la directory di destinazione e output e l'elenco di tutti i file sorgente utilizzati;
- *options*: invece sono indicate le directories in cui vengono collocati files e libraries che il solver andrà a richiamare.

La directory che contiene la generica utility, *utilityName* in Figura 3.4, è organizzata in modo molto simile a quella contenente un generico solver. Infatti, il file **utilityName.C** contiene il codice sorgente mentre gli *header files* contengono le informazioni necessarie per la compilazione della utility. Anche in questo caso la cartella *Make* contiene le dictionaries files e options già descritte precedentemente.

3.2.3 Struttura di un caso in *OpenFOAM*[®]

Come si vede in figura 3.5 in una generica *case directory* troviamo tre sottocartelle, ciascuna delle quali contiene un numero minimo di directories e di

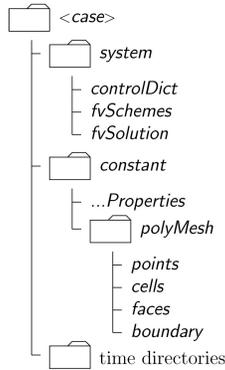


Figura 3.5: Struttura di una generica cartella *case*

dictionaries. La cartella *system* contiene le *dictionaries* di controllo e funzionamento di *utilities* e *solvers*. Le *dictionaries* che di default devono essere incluse in un caso di *OpenFOAM*[®] sono:

- **controlDict**: contiene i parametri di data output, le costanti temporali, il passo di avanzamento oltre che i parametri per il controllo del lancio dell'applicazione;
- **fvSchemes**: contiene l'indicazione degli schemi di integrazione nello spazio e nel tempo utili allo svolgimento della simulazione;
- **fvSolution**: contiene la definizione dei solutori utilizzati per risolvere le equazioni di simulazione, le tolleranze di calcolo e algoritmi di controllo. In questa cartella possono essere contenute anche *dictionaries* relative alla fase di pre-processing, come *setFields* e *decomposePar*.

La cartella *constant* include nella sottocartella *polyMesh* le proprietà della mesh usata nella simulazione, le proprietà fisiche dei fluidi esaminati e le costanti di calcolo per il lancio dei solutori. Le *time directories* comprendono specifici files di particolari campi; il nome di ogni directory temporale è dato dal tempo della simulazione nel quale il dato viene scritto (la directory 0 conterrà quindi le condizioni iniziali e quelle al contorno).

blockMesh

```

surfaceFeatureExtract
rm -r 0/
decomposePar
mpirun -np 10 snappyHexMesh -parallel -overwrite
reconstructParMesh -constant
cp -a 0.org/ 0/
createPatch -overwrite
cp 0/alpha.water.org /alpha.water
renumberMesh -overwrite
rm -r processor *
setFields
decomposePar
mpirun -np 10 interFoam -parallel
reconstructPar

```

In questo script possiamo evidenziare i principali comandi necessari per condurre qualsiasi simulazione. Nel caso specifico dell'analisi effettuata per questo elaborato di tesi, il processo di elaborazione dei dati richiede una notevole quantità di tempo. Per cui al fine di minimizzare la durata del processo di elaborazione, abbiamo utilizzato i comandi: *decomposePar* e *reconstructPar*, che hanno la funzione rispettivamente di ripartire l'elaborazione su 10 processori e di ricostruire una soluzione generale a partire dai risultati di ciascun processore.

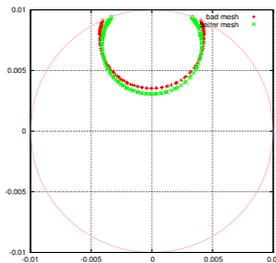


Figura 3.6: Confronto di due soluzioni date da mesh differenti

La qualità della mesh di lavoro è un fattore di fondamentale importanza che può influenzare l'accuratezza e la stabilità di una simulazione come si

vede in Figura 3.6. Nella prima fase di risoluzione del problema è cruciale scegliere una buona *mesh* che soddisfi due criteri:

1. abbastanza fine da poter catturare tutte le strutture del moto;
2. con caratteristiche intrinseche tali da minimizzare gli errori commessi dalle approssimazioni degli schemi numerici;

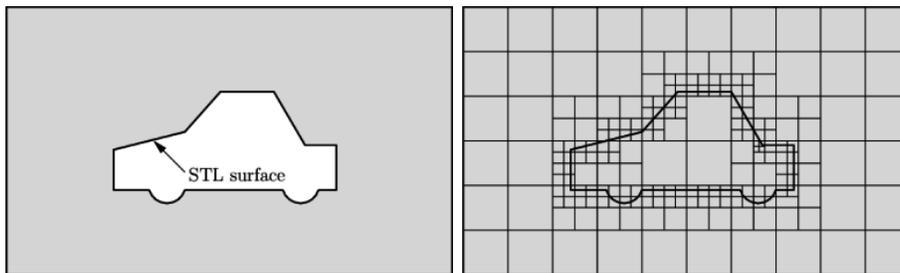


Figura 3.7: Esempio di generazione di *mesh* con *snappyHexMesh*

SnappyHexMesh genera inizialmente una griglia standard di lavoro conforme alla superficie, questa iterativamente verrà resa più fine in prossimità dei confini di lavoro, come si vede in Figura 3.7, dove è necessaria maggiore accuratezza. Una caratteristica fondamentale di questa *utility* risiede nel fatto che si può stabilire in anticipo quanto dovrà essere fine la nostra griglia in corrispondenza dei confini. Inoltre, il funzionamento di *snappyHexMesh* è in parallelo, questo permette di eseguire un bilanciamento del carico ad ogni iterazione.

Nelle ultime righe dello script impostiamo, grazie a *setFields*, le caratteristiche dei due fluidi di cui vogliamo studiare l'interfaccia e lanciamo il solutore *interFoam* per ottenere le soluzioni. Anche in questo caso per facilitare l'elaborazione della soluzione dell'interfaccia frammentiamo il processo su 10 processori per poi ricostruirlo e avere un risultato complessivo.

Capitolo 4

Risultati

4.1 Validazione del modello numerico

Come abbiamo spiegato nel capitolo precedente, per poter eseguire una corretta formulazione del problema possiamo affidarci a due metodi di calcolo: quello matematico e quello numerico. Nel caso specifico di geometria sferica, possiamo ricavare analiticamente le soluzioni del problema e metterle a confronto con i risultati ottenuti attraverso l'approccio numerico. Questo paragone è di fondamentale importanza, infatti, se le due soluzioni coincidono allora possiamo considerare valido il procedimento numerico e di conseguenza affidarci esclusivamente ad esso in casi complicati come la geometria realistica dell'occhio. Nel Capitolo 3 abbiamo ricavato la relazione per la curvatura locale, $2k_m = -\frac{\Delta\rho g}{\gamma}x_1 + B = -\frac{x_1}{l^2} + B$, quindi partendo da questa equazione possiamo passare alla trattazione del caso sferico. E' conveniente usare una rappresentazione parametrica per modellare la forma dell'interfaccia. La forma parametrica è data in termini dell'angolo di inclinazione ϕ : $x = x(\phi); y = y(\phi)$ dove

$$-\tan \phi = \frac{dx}{dy} \quad (4.1.1)$$

Nel sistema di riferimento mostrato in Figura 4.1 la diventa:

$$2k_m = -\frac{1}{\tan \phi} \frac{d|\cos \phi|}{dy} + \frac{\sin \phi}{y} \quad (4.1.2)$$

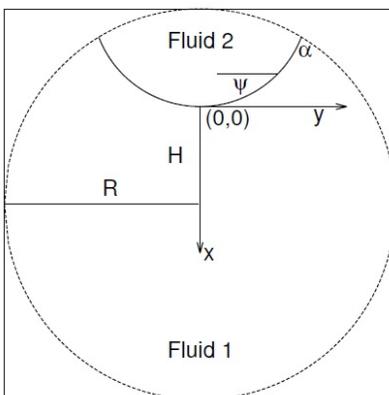


Figura 4.1: Geometria del caso sferico

Combinando la (4.1.2) con la (4.1.1) otteniamo:

$$2k_m = \cos \phi) \frac{d\phi}{dy} + \frac{\sin \phi}{y} \quad (4.1.3)$$

Si può combinare quest'ultima equazione con l'equazione di Laplace-Young per ottenere:

$$\frac{dy}{d\phi} = -\frac{\cos \phi}{Q} \quad (4.1.4)$$

con $\frac{\sin \phi}{y} - \frac{\Delta \rho g}{\gamma} x_1 - B$. Per trovare anche la seconda equazione differenziale che determina il problema consideriamo che $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dy} = -\tan \phi$. Da questa condizione otteniamo che:

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{\sin \phi}{Q} \quad (4.1.5)$$

Le equazioni (4.1.4) e (4.1.5) insieme costituiscono il sistema di equazioni differenziali che determinano il problema, che, come si può vedere dalla figura Figura 4.1, ha le seguenti condizioni iniziali:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0 \quad (4.1.6)$$

Per evitare la divisione per zero nel primo step di integrazione dovuto

alle condizioni iniziali si regolarizzano le equazioni usando l'espansione in serie di Taylor intorno a $\phi = 0$:

$$y(\phi) = y(0) + \phi y'(0) + O(\phi^2); \quad (4.1.7a)$$

$$\sin \phi = \phi + O(\phi^3); \quad (4.1.7b)$$

$$\cos \phi = 1 + O(\phi^2) \quad (4.1.7c)$$

Sostituendo le equazioni (4.1.8), nell'espressione della curvatura (3.1.11) troviamo i valori delle equazioni differenziali nell'origine:

$$\frac{dx}{d\phi} = 0 \quad \frac{dy}{d\phi} = \frac{2}{B} \quad (4.1.8)$$

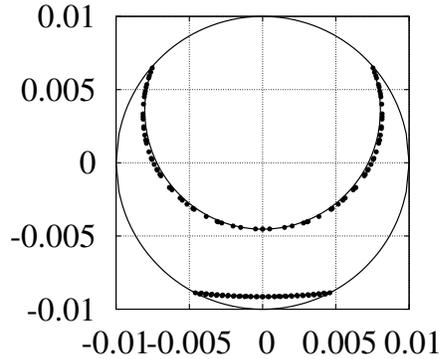


Figura 4.2: Forma dell'interfaccia nel caso di dominio sferico

In Figura 4.2 possiamo vedere il confronto fra le soluzioni dei due metodi di calcolo utilizzati: la linea continua rappresenta la soluzione analitica, mentre i punti sono i risultati delle simulazioni. Da questa rappresentazione quindi dedurre che l'approccio numerico ottiene come risultati valori coerenti al modello matematico. Il dominio sferico non rappresenta correttamente la geometria dell'occhio umano, quindi per condurre un'analisi più dettagliata dovremo definire una geometria più realistica ed effettuare simulazioni con diversi gradi di riempimento della camera vitrea.

4.2 Caso di studio della geometria realistica dell'occhio

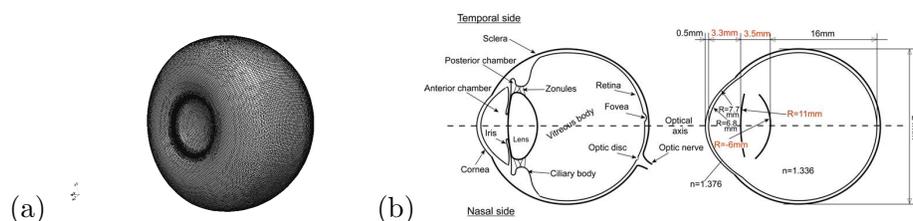


Figura 4.3: (a) Geometria dell'occhio umano ricostruita facendo affidamento sulle misure in figura (b)

Una geometria complessa come l'occhio umano, come vediamo in Figura 4.3 richiede una completa analisi numerica. Infatti lo sviluppo dell'interazione fra i due fluidi non è più prevedibile come nel caso del dominio sferico e richiede uno studio accurato della forma e posizione dell'interfaccia.

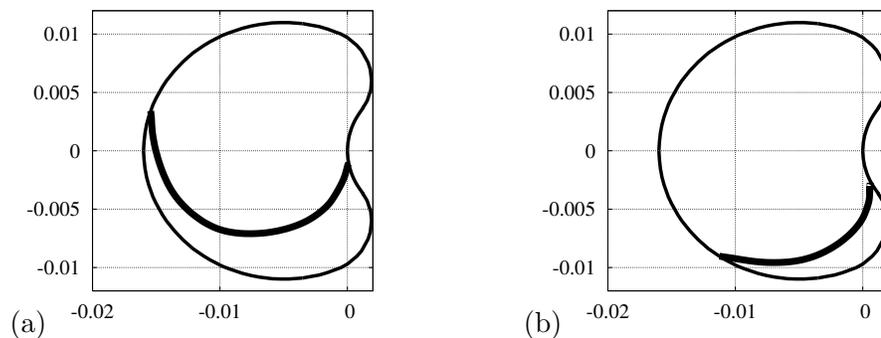


Figura 4.4: Calcolo dell'interfaccia con due gradi di riempimento: (a) $V_{s.o.}/V = 0.623$ e (b) $V_{s.o.}/V = 0.935$.

In Figura 4.4 possiamo vedere i risultati di due simulazioni con diversi gradi di riempimento. In entrambi i casi lo sviluppo della forma dell'interfaccia appare asimmetrico, infatti nella prima figura vediamo che la curva raggiunge una quota maggiore nella regione posteriore del bulbo oculare. Inoltre, nel caso in cui il riempimento sia del 60% la zona della macula

lutea, ovvero quella maggiormente soggetta a distacco retinico, risulta non tamponata; viceversa nel caso in cui il volume iniettato sia del 90%.

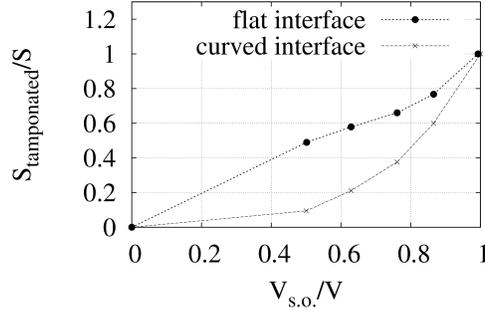


Figura 4.5: Relazione fra superficie tamponata per unità di superficie $S_{tamponated}/S$ e volume di iniezione $V_{s.o.}/V$.

Dal punto di vista clinico, è utile eseguire simulazioni in modo da mettere in evidenza la quantità di superficie tamponata in relazione al grado di riempimento del volume iniettato.

La Figura 4.5 mostra appunto tale relazione nel caso in cui consideriamo una geometria realistica dell'occhio umano. Il grafico è caratterizzato da due linee che rappresentano rispettivamente un'interfaccia piano e uno curvo. Per ottenere l'andamento delle due linee abbiamo eseguito diverse simulazioni considerando diversi gradi di riempimento ($V_{s.o.}/V$). Per ogni volume di iniezione considerato abbiamo calcolato la quantità di superficie tamponata rispetto a quella totale ($S_{tamponated}/S$). Questi risultati sono di notevole interesse clinico in quanto l'esperto chirurgo, nella fase pre-operatoria antecedente ad una vitrectomia, potrà valutare la quantità necessaria e sufficiente per tamponare il distacco retinico del paziente.

4.2.1 Geometria con uno stafiloma

Consideriamo il caso di un occhio umano con raggio $R = 0012m$, come già detto nel Capitolo 2 ci sono 5 tipologie di stafiloma (maculare sia ampio che stretto, nasale, inferiore e peripapillare) le cui dimensioni variano a seconda

della gravità e dell'età del paziente [3]. Per questo motivo abbiamo definito tre casi di lavoro in cui il raggio di curvatura dello stafiloma varia tra: $r = 0.002m$, $r = 0.003m$ e $r = 0.004m$. Successivamente abbiamo eseguito due simulazioni su ogni geometria, impostando il volume di iniezione prima a 60% e poi a 90%.

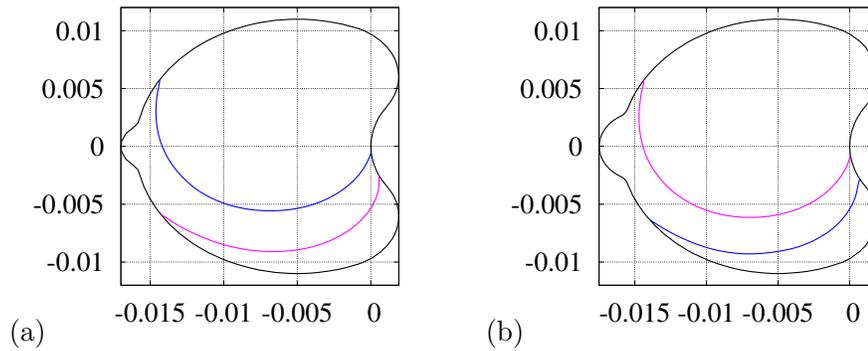


Figura 4.6: Risultati ottenuti su stafiloma con raggio di curvatura di $r = 0.002m$ (a) e $r = 0.003m$ (b).

Da questi due risultati rappresentati in Figura 4.6 deduciamo che nel caso in cui il riempimento sia del 60% allora la zona della macula lutea non sarà tamponata, al contrario, nel caso in cui il volume di iniezione sia del 90% avremo un tamponamento completo.

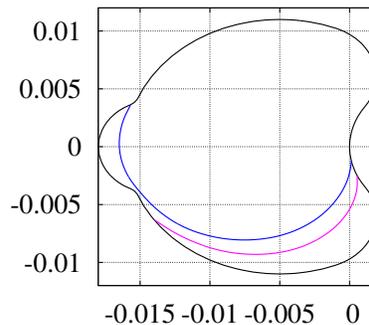


Figura 4.7: Geometria di uno stafiloma con raggio di curvatura $r = 0.004m$.

Il risultato della simulazione rappresentata il Figura 4.7 desta partico-

lare interesse quando il grado di riempimento è di 60%. Infatti in queste circostanze l'interfaccia è localizzato nella regione dello stafiloma impedendo quindi un completo tamponamento della zona interessata.

Dal risultato di questa simulazione si deduce la possibilità che una sacca d'acqua rimanga intrappolata all'interno dello stafiloma stesso, impedendo quindi il completo tamponamento della retina.

Capitolo 5

Conclusione e Sviluppi futuri

Quanto è stato detto e ricercato nel presente elaborato di tesi si inserisce in un contesto piuttosto ampio di indagini scientifiche e può essere utile nello studio dell'equilibrio di due fluidi immiscibili nella camera vitrea. Il modello proposto per condurre uno studio fluidodinamico ci ha permesso di eseguire simulazioni su diversi domini tridimensionali ricostruiti sulla base della geometria realistica dell'occhio umano.

Inizialmente abbiamo dovuto dimostrare la validità del modello numerico proposto, per cui abbiamo definito un dominio di studio sferico e analizzato l'interazione fra i due fluidi attraverso l'approccio numerico e analitico. Quindi sono stati messi a confronto i risultati delle simulazioni eseguite con *OpenFOAM*[®] e le radici delle equazioni differenziali che definiscono il problema dal punto di vista analitico. Come si può vedere in Figura 4.2 del Capitolo precedente, le due soluzioni coincidono e di conseguenza possiamo definire valido il modello proposto.

Nello sviluppo di questo elaborato di tesi abbiamo preso in analisi due domini tridimensionali: la geometria realistica dell'occhio umano sano e quella con uno stafiloma. Abbiamo eseguito diverse simulazioni su entrambi i domini prendendo in considerazione diversi gradi di riempimento della cavità vitrea. I risultati ottenuti dall'analisi computazionale sulla geometria realistica dell'occhio sano hanno messo in evidenza la forma asimmetrica dell'intrefaccia liquido-liquido. Inoltre quando il volume di iniezione corri-

sponde al 60% vediamo che la zona della macula lutea, ovvero la regione maggiormente affetta da distacco retinico, non è tamponata.

Per quanto riguarda invece il caso in cui è presente uno stafiloma posteriore abbiamo definito tre diverse geometrie di studio, queste variano tra di loro in base alla curvatura dell'estroffessione della parete oculare. Nelle simulazioni che hanno interessato il valore di curvatura maggiore, con grado di riempimento del 60%, l'interfaccia risulta essere localizzata all'interno della regione dello stafiloma. Questa considerazione è di significativo interesse clinico, infatti la macula lutea non risulta tamponata. Negli altri due casi per un riempimento del 60% non otteniamo il tamponamento necessario. In tutti e tre i casi, iniettando il 90% di olio di silicone si ottiene un completo effetto tamponante.

Bibliografia

- [1] B.D. Nichols C.W. Hirt. Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *journal of computational physics*, 39:201–225, 1981.
- [2] Ian Eames, Romesh I. Angunawela, G. William Aylward, and Ali Azarbadegan. A theoretical model for predicting interfacial relationships of retinal tamponades. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 51:2243–2247, 2010.
- [3] Kengo Hayashi, Kyoko Ohno-Matsui, Noriaki Shimada, Muka Moriyama, Ariko Kojima, Wakako Hayashi, Kenjiro Yasuzumi, Natsuko Nagaoaka, Natsuko Saka, Takeshi Yoshida, Takashi Tokoro, and Manabu Mochizuki. Long-term pattern of progression of myopic maculopathy: a natural history study. *Ophthalmology*, 117(8):1595–1611, August 2010. PMID: 20207005.
- [4] Jennifer H. Siggers and C. Ross Ethier. Fluid mechanics of the eye. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1):347–372, 2012.
- [5] Tom Chou William J Foster. Physical mechanisms of gas and perflu. June 2004.