



MEMORIE SCELTE DI ENRICO MARCHI

a cura del DICAT
Dipartimento di Ingegneria delle
Costruzioni, dell'Ambiente e del Territorio

Università degli Studi di Genova

SAGEP
EDITORI

Memorie Scelte di Enrico Marchi

DICAT
Dipartimento di Ingegneria
delle Costruzioni, dell'Ambiente e del Territorio
Università degli Studi di Genova



Si ringraziano:

gli Annali di Matematica Pura e Applicata
il Giornale del Genio Civile
il Journal of Hydraulic Research
l'Accademia dei Lincei
l'Accademia delle Scienze di Bologna
l'Energia Elettrica
l'Idrotecnica
l'Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti
Meccanica
per la gentile concessione alla riproduzione
nel presente volume delle memorie già pubblicate

Un particolare ringraziamento:

Consorzio Venezia Nuova
che ha reso possibile la stampa del presente volume

Studio grafico e impaginazione:

Sagep Editori
www.sagep.it

Stampato nel marzo 2010 presso Grafiche G7 - Savignone (GE)
per conto di Sagep Editori

© 2010, DICAT - Università degli Studi di Genova

Enrico Marchi Uomo, Scienziato e Maestro¹

Cenni biografici. Iniziamo il ricordo di Enrico Marchi riportando una osservazione che Egli fece quando nel 2005 ricevette dall'allora Sindaco di Genova il Grifo d'argento. Ringraziando per il prestigioso riconoscimento ricevuto, Marchi tenne a precisare, con forza, che la storia della Sua vita poteva riassumersi in tre città: *Rovigo, Bologna e Genova*, in ordine cronologico e crescente anche come importanza.

In effetti, *Rovigo* è la città dove Egli nacque il 17 aprile del 1925, dove trascorse la Sua adolescenza e dove, nel 1951, assistette, angosciato, alla più grande e drammatica alluvione che abbia mai colpito l'Italia: quella del Polesine. E le Sue radici venete da Lui così orgogliosamente rivendicate hanno senz'altro contribuito a far crescere, sempre più, quell'amore per Venezia che lo portò ad un lungo impegno di lavoro per contribuire a risolvere il problema, non più eludibile, della salvaguardia di quella straordinaria città dalle acque alte.

Bologna è la città dove Egli si laureò in Ingegneria Mineraria nel 1950, dove intraprese poco dopo il Suo percorso universitario come assistente presso l'Istituto di Idraulica e dove iniziò e completò la Sua formazione scientifica. A Bologna trascorse una quindicina d'anni che Egli così ha ricordato. "Quelli - ha detto - furono i migliori anni della mia vita. Perché ero giovane, perché allora mi sposai, perché nacquero le mie due figlie, e perché lì trovai un uomo straordinario, un Maestro indimenticabile: Giulio Supino. Da Lui ho imparato a studiare, ad apprezzare la ricerca, la moralità scientifica, l'intrinseca soddisfazione di un risultato cercato, e soprattutto ho imparato ad amare quella che Lui definiva la professione più nobile del mondo: l'insegnamento. Ho avuto – continuava Marchi – anche altri maestri sebbene non come Giulio Supino; e credo proprio di poter dire che Bologna fu per me la città dei maestri." E a Bologna Marchi fu, a sua volta, un importante punto di riferimento per i Suoi colleghi più giovani, tra i quali merita di essere citato Antonello Rubatta con cui mantenne anche in seguito un rapporto di affetto e di stima che lo portò a redigere con Lui, nel 1980, un trattato, molto apprezzato, di Meccanica dei fluidi.

E infine *Genova* dove Marchi fu chiamato nel 1962 a ricoprire la Cattedra di

¹ Il testo che segue è tratto dalle Commemorazioni di Enrico Marchi effettuate da: Giovanni Seminara, nel Consiglio della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova del 18 Maggio 2007; da Giulio Scarsi, Giovanni Seminara e Sandro Stura sulla rivista *L'Acqua*, Settembre-Ottobre 2007; da Giulio Scarsi, nella Seduta Commemorativa dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, Genova, del 19 Marzo 2008.

Idraulica alla Facoltà di Ingegneria – tenuta sino allora da Marcello Lelli, raffinato idrodinamico – inserendosi in un corpo docente che, già di alto livello, andava ulteriormente qualificandosi con le lungimiranti chiamate volute dall’allora preside Agostino Capocaccia, chiamate che portarono o riportarono a Genova personalità di grande rilievo.

“Genova – ha detto ancora Marchi – è la città che mi ha accolto con fiducia, la città dove ora riposa la persona a me più cara, dove sono cresciute le mie figlie, dove sono nati i miei cinque nipoti. A Genova ho trovato con prodigalità i mugugni, con parsimonia i sorrisi, ma ho potuto apprezzare le virtù civili, la coerenza, il rispetto degli altri, la riservatezza e la discrezione, la franchezza e la lealtà. Qui ho trovato gli allievi. Numerosi, diversi uno dall’altro, eppure tutti da me apprezzati ed amati. Affettuosi, indulgenti, ma talvolta critici nei miei confronti. Gli allievi sono quei personaggi che un giorno diventano colleghi. Ma tra questi restano gli unici dai quali accettiamo di essere superati e (incredibile a dirsi) perfino con soddisfazione. Qui, nella Facoltà di Ingegneria, ho incontrato subito due cari amici, Riccardo Baldacci ed Edoardo Storchi. Furono i primi di una lunga serie. Qui ho imparato ad insegnare. Qui ho apprezzato la focaccia, il pesto e le trenette; qui ho cercato di dare al lavoro mio e dei miei collaboratori l’obiettivo di un’autentica utilità civile e sociale, qui – concludeva Marchi – mi sento cittadino.”

A Genova Enrico Marchi ricoprì numerosi incarichi di prestigio. Fu Direttore dell’Istituto di Idraulica per ben trentasei anni, Componente del Consiglio di Amministrazione dell’Università, Preside della Facoltà di Ingegneria, Presidente dell’Accademia Ligure di Scienze e Lettere, per citarne alcuni.

E a Genova Enrico Marchi si spense il 5 Marzo del 2007.

L’impegno scientifico. Enrico Marchi è stato autore di prestigiosi contributi scientifici, di carattere teorico e sperimentale, che spaziano nei diversi settori dell’Idraulica, dalla Meccanica dei fluidi all’Idraulica applicata.

Il primo contributo, apparso sulla rivista *L’Energia Elettrica*, risale al 1951 mentre uno degli ultimi, esposto a *Venezia* all’Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti, è del 2002, realizzando così un’attività di ricerca di oltre cinquant’anni. È stato relatore invitato a importanti Consessi nazionali e internazionali e, tra le numerose Relazioni che Egli sviluppò, ci piace citare, sia per la straordinaria risonanza che hanno avuto e sia soprattutto per il grande piacere che provava nel ricordarle, quelle che Egli tenne al Convegno Tulla Tagung a *Karlsruhe* nel 1970, al Convegno dell’International Association for Hydraulic Research a *Baden-Baden* nel 1977, e all’International Conference on Coastal Engineering a *Venezia* nel 1992.

Entrando in qualche dettaglio, merita anzitutto ricordare che la formazione scien-

tifica di Marchi è iniziata appena dopo la laurea ed è avvenuta quindi negli anni bolognesi della Sua vita. Quale ricerca si faceva in quegli anni, in particolare nell'ambito dell'Idraulica, con quali strumenti e con quali mezzi? Per rispondere a questa domanda occorre, per prima cosa, collocare la nostra riflessione negli anni del dopoguerra. L'Italia veniva da un periodo buio in cui tuttavia erano state realizzate importanti opere civili, le grandi bonifiche, i grandi impianti idroelettrici. E poi l'alluvione del Polesine del 1951 aveva dato luogo ad una forte mobilitazione politica e culturale. In quegli anni, la ricerca Idraulica, come quella di molti settori dell'Ingegneria, era soprattutto ricerca sperimentale. Non solo per la permanente attualità del motto Leonardesco *'se devi ragionar dell'acqua consulta prima l'esperienza della ragione'* ma, soprattutto, perché la Meccanica dei Fluidi era ed è disciplina di grande complessità, il cui sviluppo è avvenuto con notevole ritardo rispetto ad altre, meno complesse, branche della Fisica Matematica. Basti pensare che, agli inizi del 1900, mentre venivano rivoluzionati gli stessi fondamenti della Fisica classica con la formulazione della teoria della relatività, la Meccanica dei Fluidi (che aveva annoverato scienziati del valore di Stokes, Helmholtz, Navier per citarne solo alcuni), si misurava ancora con il problema di spiegare il paradosso di d'Alembert: quello per cui un corpo che si muove in un fluido ad alte velocità (oggi diremmo per alti valori del numero di Reynolds) non incontrerebbe alcuna resistenza. La teoria dello strato limite di Prandtl, che risolve definitivamente il paradosso, arriverà solo nel 1905. E le fondamenta dell'edificio teorico della turbolenza non saranno poste prima degli anni Quaranta-Cinquanta, con i fondamentali contributi della Scuola russa di Kolmogorov. L'Ingegneria Idraulica si confrontava, quindi, come spesso succede all'Ingegneria nel suo complesso, con un problema teorico formalmente irrisolto. E, in attesa di qualche Medaglia Fields che fornisse un teorema generale di esistenza per le equazioni di Navier Stokes, ha dovuto fare di necessità virtù. Le formulazioni teoriche cui essa faceva riferimento per lo studio del moto dei fluidi si fondavano quasi invariabilmente sul modello uni-dimensionale di "corrente" (l'analogo del "solido di de Saint Venant" della Scienza delle Costruzioni) e la chiusura richiesta per la valutazione delle dissipazioni di energia era semplicemente ottenuta, in quegli anni, utilizzando formulazioni empiriche, basate su osservazioni sperimentali che risalivano addirittura al 1800. Fu proprio la Scuola bolognese, e Marchi in particolare, a cogliere la rilevanza di un filone di ricerca, quello dello studio del ruolo della turbolenza nella determinazione dei processi dissipativi di parete, che si stava sviluppando nel contesto dell'aerodinamica, allora molto lontano da quello dell'Idraulica: un processo che oggi definiremmo di *cross fertilization*. In un lavoro pubblicato nel 1960 sui Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Marchi, reinterpretando appunto i risultati delle classiche esperienze di Nikuradse (un allievo di Ludwig Prandtl), introduceva una correzione

alla classica (e allora considerata universale) legge di distribuzione della velocità caratteristica della turbolenza di parete: una correzione, la cosiddetta funzione di scia, che era stata indipendentemente introdotta da Coles, in un lavoro apparso nel 1956 sul primo numero del *Journal of Fluid Mechanics*. Non meraviglia la distanza temporale fra i due lavori: la circolazione dell'informazione scientifica nel nostro Paese era a quei tempi ristretta spesso al circuito nazionale. Non esisteva il *Citation Index* né il *Web of Science*, che rende oggi la *cross fertilization* uno strumento di ricerca routinario. Ma l'esempio di un giovane ricercatore degli anni '50 aperto alla contaminazione di un mondo scientifico lontano dal contesto da cui proveniva, costituisce anch'esso un'importante eredità: lo stimolo a cercare di guardare il mondo da un punto di vista "altro", non convenzionale, nella consapevolezza che laddove tutti camminano difficilmente cresce l'erba.

Un aspetto della ricerca di Marchi che merita di essere sottolineato è stato l'uso sapiente dell'approssimazione: uso *sapiente*, non *rigoroso*. Perché Marchi era dotato di un'eccellente intuizione fisica, che guidava sempre il suo lavoro, mentre rinunciava senza particolare sofferenza al rigore formale. In altre parole, era più vicino all'uomo x,y,z di G. I. Taylor piuttosto che all'uomo i,j,k alla Batchelor. Numerosi esempi di tale filosofia si ritrovano nella Sua produzione scientifica: in particolare il modello parabolico delle onde lunghe, formulato nel 1956 sulla base di un procedimento approssimato, distinto e indipendente da quello precedente di Hayami, e ancora la teoria delle bocche lagunari, apparsa sui Rendiconti dell'*Accademia Nazionale dei Lincei* nel 1990, in cui Egli forniva una giustificazione teorica di un classico risultato di O' Brien (1948), empiricamente fondato. E qui, purtroppo, non si può non rilevare che quel tipo di cultura del far ricerca è andato progressivamente perdendosi, sostituito da una cultura che può essere definita *tecnologica*: in cui è sempre meno necessario far uso di sapienti approssimazioni fisicamente fondate. Il faticoso, ma profondo, processo di semplificazione della realtà alla ricerca dell'essenza dei processi è sempre meno necessario, a vantaggio della capacità che i potenti mezzi di calcolo odierni hanno di far emergere comportamenti globali attraverso la descrizione dettagliata di sistemi complessi. Un processo certamente inarrestabile e non privo di fascino, che crediamo tuttavia debba essere dominato piuttosto che subito.

Un altro aspetto significativo della ricerca di Marchi è il suo non indulgere alla pubblicazione per se stessa: i contributi di Marchi, anche quelli tecnicamente più eleganti, hanno sempre un legame molto stretto con la realtà e sono invariabilmente finalizzati all'utilizzo ingegneristico. Ne è classico esempio la brillante soluzione, pubblicata nel 1953 sugli *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, per il deflusso irrotazionale attraverso luci di fondo in cui, attraverso una ingegnosa sequenza di trasformazioni conformi, Marchi estendeva un classico risultato di Kirchoff relativo al caso ideale di luce infinita.

Un ulteriore esempio è lo studio teorico del risalto ondulato, pubblicato sul Giornale del Genio Civile nel 1963. Lavori di ricerca di base che figurerebbero oggi degnamente su riviste internazionali con elevato *Impact Factor*, riviste che allora non esistevano o non venivano neppure prese in considerazione in quanto non sufficientemente vicine al mondo delle applicazioni. Non vigeva allora la regola non scritta del *publish or perish* che ha condotto, nei Paesi in cui la competizione scientifica raggiunge livelli ossessivi, allo sviluppo di vere e proprie industrie della pubblicazione, non necessariamente ispirate al principio di far trionfare la Scienza. Anche questa è una riflessione che la vita scientifica di Marchi ci stimola a fare, pur nella consapevolezza che misurarsi con il confronto internazionale nelle sedi più qualificate è oggi pratica non eludibile e certamente fruttuosa: ce lo dimostra lo stesso Marchi che, sessantasettenne, pubblica “On the free overfall” sulla rivista dell’Associazione Internazionale dell’Ingegneria Idraulica (il *Journal* dell’IAHR).

L’impegno scientifico di Enrico Marchi è stato accompagnato da una preziosa e qualificata attività di collaborazione nell’ambito di importanti *organismi tecnici nazionali*, nei quali Egli ha portato le sue alte competenze nei diversi settori dell’ingegneria idraulica e le sue spiccate capacità di schematizzazione e di concretezza che Gli consentivano di pervenire a soluzioni semplici anche per problemi di grande complessità. In particolare, è stato: Membro del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici, Membro del Comitato Tecnico del Magistrato per il Po; Membro del Comitato Tecnico del Magistrato delle Acque di Venezia; Membro dell’Autorità di Bacino del Fiume Po; Responsabile della linea di ricerca di Dinamica fluviale del Progetto finalizzato del CNR, Conservazione del suolo. E, ancora, è stato: Consulente della Società Stretto di Messina per lo studio di fattibilità dell’attraversamento dello Stretto con opere permanenti e Membro, per conto del Ministero dei Lavori Pubblici, del Gruppo di progettazione generale e studio di fattibilità delle opere per la salvaguardia della Laguna di Venezia dalle acque alte. E, in aggiunta, è doveroso ricordare l’intensa attività che Marchi svolse nell’ambito della Commissione De Marchi. Nel 1966, l’Italia subì due eventi catastrofici tra i più dolorosi del secolo: le alluvioni di Firenze e di Venezia. A valle di tali eventi, lo Stato finalmente rispose con serietà a quella che apparve una delle più grandi emergenze del Paese. Di qui nacque la Commissione De Marchi, che prese il nome dal suo Presidente, Giulio De Marchi che si avvalse, come Vicepresidente, di Giulio Supino. De Marchi e Supino rappresentavano le due scuole di Idraulica più autorevoli del tempo e questa circostanza conferiva alla Commissione una grande autorevolezza, che non venne certamente disattesa. E Marchi collaborò intensamente con Supino ai lavori della Commissione, il cui prodotto finale, la cosiddetta Relazione De Marchi, verrà a co-

stituire una pietra miliare nel campo della Difesa del Suolo. Alla Commissione De Marchi fece seguito il già richiamato Progetto Finalizzato Conservazione del Suolo del CNR, ma si dovette aspettare il 1989 per avere nel nostro Paese una moderna legge sulla Difesa del Suolo.

E merita senz'altro sottolineare come Marchi abbia sempre offerto la disponibilità Sua e dell'Istituto da Lui diretto a collaborare con gli *Enti Pubblici genovesi* per la risoluzione di problemi di interesse per la città di Genova. In questo contesto sono da collocare, tra gli altri, le sperimentazioni e gli studi condotti sia per analizzare ed approfondire le diverse soluzioni proposte per la difesa dalle alluvioni del territorio genovese, soprattutto quelle provocate dal Torrente Bisagno, sia per esaminare, dal punto di vista del comportamento idraulico-marittimo, le situazioni connesse con l'evoluzione che ha sperimentato, a partire dal 1960, l'impianto del Porto di Genova per soddisfare le esigenze richieste principalmente dai nuovi sistemi di trasporto.

La scuola creata. Enrico Marchi era, per natura, un maestro: possedeva una profonda cultura, aveva carisma, sapeva suscitare entusiasmo, era disponibile alla discussione. A tali doti ha sempre associato un suo voluto comportamento: cercare di trasmettere agli allievi impostazioni di base e non aspetti di dettaglio ed evitare di intervenire troppo frequentemente e puntualmente sulle attività da loro svolte per non dare luogo a condizionamenti. E tali caratteristiche Gli hanno consentito di creare una scuola dove si sono andate affermando personalità molto spiccate, dotate di caratteristiche peculiari ben precise e talvolta molto differenziate tra loro, in grado di impostare e condurre, in piena autonomia, ricerche anche di notevole impegno. E ci piace sottolineare come Marchi abbia sempre incoraggiato i suoi allievi da un lato ad acquisire specifiche competenze nelle scuole, anche straniere, in grado di offrirle, dall'altro a mettere in conto, come docenti, la possibilità di spostamenti in altre sedi non solo per trasferire a queste le esperienze maturate a Genova ma anche per trarre, dal confronto con altre realtà, motivi per nuovi interessi. E l'incoraggiamento è stato largamente recepito come testimoniano ad esempio, i Dottorati di Ricerca conseguiti all'estero, e le cattedre attualmente ricoperte dai Suoi allievi fuori Genova, a Firenze, a Milano, a Reggio Calabria, a Trento, a Trieste e, sino a qualche tempo fa, anche a L'Aquila, a Perugia e a Potenza.

I riconoscimenti. Il prestigio acquisito da Enrico Marchi si è concretizzato in numerosi alti riconoscimenti. È stato infatti: Professore Emerito nell'Università di Genova; Socio Nazionale della Accademia dei Lincei; Socio dell'Accademia dei Concordi, dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia Ligure di Scienze e Lettere, di cui è stato anche Presidente; Presidente dell'Associazione Ita-

liana di Meccanica Teorica e Applicata; Presidente del Gruppo Nazionale di Idraulica. È stato inoltre insignito della Medaglia d'oro del Ministero della Pubblica Istruzione e, come è già stato ricordato, del Grifo d'argento del Comune di Genova. E l'elenco fatto non è certamente esaustivo.

L'uomo. Desideriamo, a questo punto, soffermarci seppur brevemente sull'Uomo Marchi. Egli possedeva, accanto ad una simpatia immediata e coinvolgente, una specchiata onestà, una profonda lealtà, un'incapacità di provare, e tantomeno serbare, rancore, una capacità di interpretare con discrezione il ruolo di protagonista che si è trovato a svolgere nel corso di molti eventi importanti. E, rimasto orfano del padre ancor giovane, nobilitò il senso della famiglia con sentimenti profondamente radicati: la devozione e il riconoscimento per la mamma Marcella, l'amore e la considerazione per la moglie Fernanda, troppo presto scomparsa, l'affetto e l'orgoglio per le figlie Marcella e Giovanna, la tenerezza e la comprensione per i nipoti Elena, Giulia, Enrico, Claudia e Roberta. E la famiglia è stata, nei suoi confronti, straordinaria manifestandogli, nei momenti di necessità, una assoluta dedizione che è valsa a confortarlo e a dargli serenità anche nell'ultimo difficile periodo della Sua vita nel quale gli è stato di aiuto, in aggiunta, il suo ragionato sentimento religioso.

E per concludere ricorriamo alle belle parole che Ignacio Rodriguez Iturbe, illustre professore dell'Università di Princeton, negli Stati Uniti, ha pronunciato al termine della Sua Relazione generale al Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche di Genova, nel 2000. Adeguate per ricondurle alla situazione attuale in cui Marchi non è più purtroppo con noi, le parole di Iturbe possono essere così riproposte: “Per molte persone il passare degli anni significa avere il sole alle spalle: non così è stato per Enrico Marchi per il quale il sole si è mantenuto costantemente di fronte e lo ha sempre intensamente illuminato! L'esempio di classe, nella vita personale ed accademica, che Egli ci ha lasciato è valido oggi quanto lo era ieri e quanto lo sarà domani; l'insieme dei valori che ha rappresentato non passeranno mai di moda così come non saranno dimenticati il suo ottimismo, la sua allegria e anche i suoi sogni. Dico sempre ai miei studenti che la prima condizione per realizzare grandi progetti è quella di avere una grande capacità di sognare. E in questo mestiere di educare, di formare persone che sappiano sognare, di preparare uomini capaci di far vibrare le loro anime con un sogno affinché nei tempi a venire l'afflato del sogno faccia vibrare il mondo, ebbene in questo, che è la cosa più importante alla quale può aspirare un Maestro, Enrico Marchi è stato uno straordinario esempio.”

Gli Allievi

L'opera scientifica di Enrico Marchi si è sviluppata secondo un percorso molto lineare che ha visto al centro della sua riflessione i problemi della ingegneria: in un'ottica tipica della Sua personalità, che ha sempre privilegiato l'essenzialità e la semplicità dell'analisi, rifuggendo da qualsiasi ridondanza formale. Si tratta di un cammino che si è sviluppato nell'arco di oltre mezzo secolo, in cui l'Idraulica è stata progressivamente traghettata nell'alveo fondamentale della Meccanica dei Fluidi, un processo ancora in atto di cui Marchi è stato un convinto sostenitore. Non ci è parso opportuno sovrapporre alla raccolta delle Sue opere scelte una nostra interpretazione di quel filo invisibile che congiunge i diversi contributi: consapevoli che la ricerca è anzitutto prodotto di quell'impalpabile dote che è la fantasia. I lavori qui raccolti sono quindi presentati in ordine cronologico. Una sola riflessione ci pare tuttavia opportuna.

L'assenza di uno spazio destinato da Marchi alle riflessioni sui fondamenti della disciplina ne testimonia l'estrema vitalità: il ripiegarsi di una disciplina sui suoi fondamenti è infatti un segnale del fatto che i grandi problemi di quella disciplina sono stati risolti.

Elenco delle Memorie Scelte

Sul moto uniforme nelle condotte in pressione, 1951

Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente, 1953

Le onde di regime a lungo periodo (onde di piena), 1956

Un criterio per la verifica alla filtrazione delle arginature in terra, 1957

L'attenuazione delle onde periodiche non di regime (Parti I e II), 1958

Ricerca sperimentale sugli sfioratori a calice (in collab. con A. Rubatta), 1959

Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide (Note I e II), 1960

Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti (Parti I e II), 1961

Contributo allo studio del risalto ondulato, 1963

Open-channel Flow near the Critical Depth, 1966

Resistance to Flow in Fixed-bed Channels with the Influence of Cross-sectional Shape and Free Surface, 1967

Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile dei ponti. Deflusso con transizione attraverso lo stato critico, 1968

Sul moto di correnti miste con bolle in tubi orizzontali, 1968

La propagazione delle onde di piena, 1978

Correnti veloci in curve a 90° molto strette, 1988

Sulla stabilità delle bocche lagunari a marea, 1990

The nappe profile of a free overfall, 1992

On the free overfall, 1993

Il rigurgito dovuto alle pile di ponte di forma circolare, 1994

La difesa di Venezia dalle acque alte, 2002

Elenco delle pubblicazioni

- MARCHI E., 1951. Sul moto uniforme nelle condotte in pressione. *L'Energia Elettrica*, 9.
- MARCHI E., 1952. Die Hochwasserkatastrophe in der Po-Ebene in November 1951. *Die Wasserwirtschaft*, H. 8, J. 1951/52.
- MARCHI E., 1952. Die stationar gleichformige Stromung in Rohrleitungen. Recensione di una memoria presentata da G. SUPINO all'Accademia delle Scienze di Bologna. *Die Wasserwirtschaft*, H. 8, J. 42/1951/52.
- MARCHI E., FRANKE P.G., 1953. Zur Frage des Hochwasserentlastung des Reno. *Die Wasserwirtschaft*, J. 43/1952/53, pag. 229-232.
- MARCHI E., 1953. Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Serie IV, Tomo XXXV.
- MARCHI E., 1954. Efflusso da una luce soggiacente ad una paratoia piana a spigolo vivo. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna*, Serie XI, Tomo I.
- MARCHI E., 1954. Efflusso al di sotto di una traversa piana a spigolo vivo in un canale rettangolare. *Atti del I Convegno di Costruzioni Idrauliche*, Roma.
- MARCHI E., 1956. Le onde di regime a lungo periodo (onde di piena). *L'Energia Elettrica*, 8.
- MARCHI E., 1956. Il movimento uniforme nelle correnti a pelo libero. *La Ricerca Scientifica*, 8.
- MARCHI E., 1957. Esperienze di moto uniforme su correnti a pelo libero in modelli di canali artificialmente scabri. *Atti del V Convegno di Idraulica*, Torino, maggio.
- MARCHI E., 1957. Un criterio per la verifica alla filtrazione delle arginature in terra. *Giornale del Genio Civile*, giugno.
- MARCHI E., 1958. L'attenuazione delle onde periodiche non di regime. Parte I: Indagine teorica. Parte II: Le oscillazioni di periodo breve attraverso un'applicazione numerica ed un confronto sperimentale. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna*, Serie XI, Tomo V.
- MARCHI E., 1958. Ancora sull'efflusso da una luce di fondo. *Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna*, Serie XI, Tomo V.
- MARCHI E., 1958. Alcune considerazioni sulle formule pratiche del moto uniforme. *L'Energia Elettrica*, 9.
- MARCHI E., RUBATTA A., 1959. Ricerca sperimentale sugli sfioratori a calice. *Atti del VI Convegno di Idraulica*, Padova, maggio.
- MARCHI E., 1959. Terza serie di esperienze sul moto uniforme nei canali. *La Ricerca Scientifica*, 12.

- MARCHI E., 1960. Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide. Nota I: *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, vol. XXIX, fasc. 5, novembre. Nota II: *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, vol. XXIX, fasc. 6, dicembre.
- MARCHI E., 1961. Sulla filtrazione attraverso gli argini fluviali. *Atti del VII Convegno di Idraulica*, Palermo, marzo.
- MARCHI E., 1961. Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti. Parte I: Sezione circolare e rettangolare larghissima. *L'Energia Elettrica*, 4.
- MARCHI E., 1961. Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti. Parte II: Sezioni di forma qualunque. *L'Energia Elettrica*, 5.
- MARCHI E., 1961. Il calcolo delle portate di piena nelle reti di fognatura. *Ingegneri, Architetti, Costruttori*, 7, Bologna.
- MARCHI E., 1962. Il calcolo della resistenza al moto uniforme nei canali. *L'Energia Elettrica*, 39, 11.
- MARCHI E., 1963. Contributo allo studio del risalito ondulato. *Giornale del Genio Civile*, 101, 9.
- MARCHI E., GRIMALDI M., 1963. Le esperienze su modello eseguite per studiare la nuova imboccatura di ponente del porto di Genova. *Atti del 1° Convegno degli Ingegneri Idraulici*, Parma, 30 ott.-1 nov.
- MARCHI E., PRINETTI G., 1964. Sui fenomeni ondosi all'attacco di un impianto di pompaggio. *L'Energia Elettrica*, 41, 2.
- MARCHI E., PIVA A.M., 1965. Moto di correnti miste aria-acqua in tubazioni orizzontali. *L'Energia Elettrica*, 42, 1.
- MARCHI E., 1966. Open-channel Flow near the Critical Depth. *Meccanica* 1, 3-4.
- MARCHI E., 1967. Resistance to Flow in Fixed-bed Channels with the Influence of Cross-sectional Shape and Free Surface. *Proc. XIIth Congr. of I.A.H.R.*, Fort Collins (Colorado), September, 11-14.
- MARCHI E., 1967. Problemi della riproduzione in modello di correnti a superficie libera gradualmente variate su fondo fisso e mobile. Relazione generale sul tema 1 al *X Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Cagliari, 3-5 febbraio.
- MARCHI E., 1968. Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile dei ponti. Deflusso con transizione attraverso lo stato critico. *L'Energia Elettrica*, 45, 4.
- MARCHI E., 1968. Sul moto di correnti miste con bolle in tubi orizzontali. *Atti XI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Genova, 25-27 ottobre.
- MARCHI E., 1970. Problems of Po-Regulation and Flood Control. Lecture given at *Tulla-Tagung: Internationale Fachtagung uber Flussregulierungen*. Universitat Karlsruhe, July 9-11.
- MARCHI E., 1970. Sistemazione dei corsi d'acqua. Relazione generale sul tema 1 al *XII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Bari, ottobre.

- MARCHI E., 1971. Sistemazione dei corsi d'acqua del territorio genovese interessati dall'alluvione del 7-8 ottobre 1970. Relazione della Commissione Ministeriale. *Giornale del Genio Civile*, 109, 6.
- MARCHI E., 1972. Correnti liquide con fase gassosa. Relazione generale al *XIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Milano, 21-23 settembre.
- MARCHI E., 1972. Moto bifase di una corrente liquida con bolle gassose in condotte orizzontali. *Atti XIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Milano, 21-23 settembre.
- MARCHI E., 1973. Onde del mare. Conferenza al Seminario sul regime e la conservazione dei litorali, Venezia.
- MARCHI E., BECCHI I., 1973. Bed-load Influence on the Undular Jump. *Proc. XVth Congr. of I.A.H.R.*, Istanbul.
- MARCHI E., 1974. Effetti di dissipazione localizzate sul risalto idraulico. *Atti XIV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Napoli, 10-12 ottobre.
- MARCHI E., RAITERI E., SCARSI G., STURA S., 1975. Storm Wave Pressures on the Breakwater of Genoa Harbor. Measurement station. *Proc. XVIth Congr. of I.A.H.R.*, Sao Paulo, July 29-Aug. 1.
- MARCHI E., STURA S., 1976. Sottopressioni dinamiche alla base di una diga marittima. *Atti XV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Roma, 14-16 ottobre.
- MARCHI E., 1977. Introduzione al Seminario "Misure del trasporto solido nei corsi d'acqua: problemi per una modellistica matematica". Firenze, ottobre.
- MARCHI E., 1977. Problems of Vertical Wall Breakwater Design. Relazione generale sul tema Ca al *Proc. XVIIth Congr. of I.A.H.R.*, Baden Baden, August 15-19.
- MARCHI E., 1978. La propagazione delle onde di piena. *Atti Accademia Nazionale dei Lincei*, Serie VIII, vol. LXIV, fasc. 6, giugno.
- MARCHI E., 1978. Le alluvioni nel bacino del Po. Lettura al Corso di aggiornamento "Acque superficiali e problemi del territorio", Politecnico di Milano, ottobre.
- MARCHI E., 1978. Giulio Supino. Commemorazione tenuta all'*Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere*, 112, novembre.
- MARCHI E., SICCARDI F., 1979. La pianificazione di bacino. Un esempio ligure: il Bisagno. *I quaderni del Sile*, giugno, n. 4.
- MARCHI E., 1979. Gli studi di idraulica fluviale nell'ambito del Progetto Finalizzato Conservazione del Suolo del CNR. *Atti Seminario "Moderne vedute sulla meccanica dei fenomeni fluviali*, Bressanone, ottobre.
- MARCHI E., 1981. *Manuale di Ingegneria Civile*. Ed. Sci. A. Cremonese, Cap. I, II, III, IV, V, VI del settore Idraulica.
- MARCHI E., RUBATTA A., 1981. *Meccanica dei fluidi. Principi e applicazioni idrauliche*. Ed. UTET.

- MARCHI E., 1981. Relazione al Convegno sulla “Sicurezza idraulica”, Rovigo, dicembre.
- MARCHI E., 1982. Per difendere Venezia dalle acque alte. *Le Scienze*, marzo, n. 163.
- MARCHI E., 1982. *Valutazione delle piene*, Premessa e coordinamento del volume. CNR Progetto Finalizzato “Conservazione del Suolo”, maggio.
- MARCHI E., 1982. Relazione sull’attività del sottoprogetto “Dinamica Fluviale” del Progetto Finalizzato “Conservazione del Suolo”. *Atti del Convegno Finale*, Roma, 9-10 giugno.
- MARCHI E., RUBATTA A., 1982. Modelli fluviali a fondo mobile. *Atti XVIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Bologna, 21-23 settembre.
- MARCHI E., 1982. L’utilizzazione delle risorse idriche nella valle padana. Relazione alla 1° Conferenza di Bacino sul “Progetto Po-Agricoltura”, Bologna, 22 novembre, (pubbl. su *Genio Rurale*, Aprile, n. 4, 1983).
- MARCHI E., 1983. Il bacino del Po. Relazione al Convegno su “Sicurezza idraulica ed attività produttive”, Pavia, 19 Febbraio (pubbl. su *Industria Lapidaria*, n. 6, giugno 1983).
- MARCHI E., 1983. Relazione generale sul tema Ambiente e idraulica lagunare nelle prospettive della difesa della Laguna di Venezia dalle acque alte. *Atti Convegno di Studi “Laguna, fiumi, lidi: cinque secoli di gestione delle acque nelle Venezia”*, Venezia, 10-12 giugno.
- AGEMA I., FRASSETTO R., GHETTI A., MARCHI E., MATILDI P., PASSINO R., PEZZOLI G., 1983, Il criterio di progettazione delle opere per la difesa della Laguna di Venezia. *Atti Convegno di Studi “Laguna fiumi, lidi: cinque secoli di gestione delle acque nelle Venezia”*, Venezia, 10-12 giugno.
- MARCHI E., 1984. The Po: a Man-made River. Rep. 2/84 from *International Advanced Course on Water Resources Management*, Perugia, maggio.
- MARCHI E., 1984. Relazione generale sul tema: Utilizzazione e tutela delle acque nel bacino padano ai fini agricoli, civili, industriali e della navigazione interna. *2° Convegno di Idraulica Padana*, Parma, giugno.
- MARCHI E., 1984. Sulle resistenze nelle correnti con trasporto solido e sui problemi di modellazione degli alvei nei confronti della formazione dei meandri. Relazione al *XIX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Pavia, 6-8 settembre.
- MARCHI E., 1984. Relazione sul tema Fenomeni dissipativi nei corsi d’acqua montani. Seminario su “Idraulica del territorio montano”, Bressanone, ottobre.
- MARCHI E., 1984. Introduzione ai problemi del Po. Relazione al Seminario su “Scienza e Ingegneria dei sistemi nella gestione delle acque”. *Accademia Nazionale dei Lincei*, Roma, novembre.
- MARCHI E., 1985. Opening of the Colloquium on *The Dynamic of Alluvial Rivers*, Genova, 25-26 giugno.

- MARCHI E., 1986. Valutazione della velocità nelle bocche lagunari. *Atti XX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Padova, 8-10 settembre.
- MARCHI E., 1987. Opening of the *EUROMECH 215: Mechanics of Sediment Transport in Fluvial and Marine Environments*. S. Margherita Ligure (Genoa), September 15-19.
- MARCHI E., 1987. I problemi di Venezia e della sua Laguna. Conferenza *Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, Genova, 11/12/87.
- MARCHI E., 1988. Grandi rischi: prevenzione e ricerca. Lettura tenuta *all'Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, Genova, 25/2/88.
- MARCHI E., 1988. Opening of the Summer School: *Hydrology as a Physical Science*. Genoa, June.
- MARCHI E., 1988. Sull'insegnamento delle discipline idrauliche. Conferenza di apertura del *XXI Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, L'Aquila, 4-9 settembre.
- MARCHI E., 1988. Correnti veloci in curve a 90° molto strette. *Idrotecnica*, 6, nov-dic., 439-455.
- MARCHI E., SEMINARA G., 1988. Voci Idrostatica e Idrodinamica del *Dizionario delle Scienze Fisiche*. Edito dall'Istituto della Enciclopedia Italiana.
- MARCHI E., SCARSI G., 1988. Voce Onde nei Liquidi del *Dizionario delle Scienze Fisiche*. Edito dall'Istituto della Enciclopedia Italiana.
- MARCHI E., *Manuale di Ingegneria Civile* - II edizione ESAC, 1990, III edizione Zanichelli - ESAC dei cap. I, II, III, IV, V, VI del settore Idraulica.
- MARCHI E., 1990. Sulla stabilità delle bocche lagunari a marea. *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, Roma, Serie IX, 1, 137-150.
- MARCHI E., 1990. Le risorse idriche e la loro gestione. Convegno "Po Acqua Agricoltura Ambiente". Bologna, 22 ottobre (pubbl. su *Navigazione Interna* n. 1, 1991).
- MARCHI E., 1990. Tendenze attuali della ricerca idraulica. Simposio nel centenario della nascita di Giulio De Marchi, Milano, 26 ottobre.
- MARCHI E., 1991. Il Po: stato attuale e prospettive. Convegno di studi "1951-1991. Tra memoria e futuro". Rovigo, 27-28 settembre.
- MARCHI E., 1991. Aspetti idraulici dell'alluvione del Po del 1951. Convegno di Studio "La rotta, il Po, il Polesine", Rovigo, 22-24 novembre.
- MARCHI E., 1992. The nappe profile of a free overfall. *Rend. Mat. Accademia Nazionale dei Lincei*, s. 9, v. 3, Fasc. 2; 131-140.
- MARCHI E., 1992. Rischi nei grandi bacini fluviali italiani. Introduzione ai lavori. *Accademia Nazionale dei Lincei*, 23 aprile '92 (pubbl. 1993).
- MARCHI E., ADAMI A., CAIELLI A., CECCONI G., 1992. Water flow modelling of the Venice Lagoon. *23rd Int. Conf. on Coastal Engineering*, Venice, 4-9 October.

- MARCHI E., 1992. Coastal Engineering in Venice. Opening Lecture 23rd Int. Conf. on Coastal Engineering, Venice, 4-9 October. Stampato nell'originale inglese e nella versione italiana nel volume *Welcome and General Lecture*, marzo 1993.
- MARCHI E., 1993. On the free overfall. *J. of Hydr. Research*, Vol. 31, No. 6, 777-790.
- MARCHI E., 1994. Effetti locali dovuti alla pendenza e alla curvatura del pelo libero in un restringimento. *XXIV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Napoli, 20-22 settembre.
- MARCHI E., 1994. On the free overfall. Discussion by J.S. Montes and reply by the Author. *J. of Hydr. Research*, Vol. 32, No. 5, 792-795.
- MARCHI E., 1994. Il rigurgito dovuto alle pile di ponte di forma circolare. *Idrotecnica*, n. 5, settembre-ottobre, 263-271.
- MARCHI E., 1995. Risorsa Po: un bene da proteggere, un bene da valorizzare. Coordinamento della Tavola Rotonda *Accademia delle Scienze di Torino*, Quaderni, I.
- MARCHI E., ROTH G., SICCARDI F., 1996. The Po: Centuries of river training. *Phys. Chem. Earth*, 20(5-6), 475-478, 1995.
- MARCHI E., ROTH G., SICCARDI F., 1996. Flood control and forecasting in the Po River basin. Int. Seminar on Recent Trends of Floods and their Preventive Measures, 20-21 June, Sapporo, Japan, 73-86.
- MARCHI E., 1996. Interventi per ridurre l'effetto di un restringimento (pile di ponti o altre costruzioni). *XXV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche*, Torino, 16-18 settembre, vol. II, 292-298.
- MARCHI E., 1997. {Stimatissimo Signor Ingegnere,...} da una lettera del 1867 di Pietro Paleocapa. Prolusione alla Inaugurazione dell'Anno Accademico 1996/97 dell'Ateneo Genovese. Università degli Studi di Genova, 15 febbraio, Supplemento al n. 20 di *Genuense Atheneum*, pp. 14-18.
- MARCHI E., 1997. Protection of Venice and of the other inhabited areas in the lagoon from high water. Symposium "Venice and Florence: a complex dialogue with water", Firenze, 24 maggio, pp. 13-26.
- MARCHI E., 1998. Il rischio idrogeologico e la difesa del suolo. Introduzione alla I relazione generale e intervento alla tavola rotonda del *Convegno Linceo*. Roma, 1-2 ottobre (Atti pubbl. 1999).
- MARCHI E., 1999. "Il ruolo - e il fuori ruolo - della ricerca scientifica. Giornata di studio su "La ricerca idraulica e la formazione degli Ingegneri". Napoli, 12 novembre 1999.
- MARCHI E., 1999. Edoardo Benvenuto. Seduta commemorativa dell'*Accademia Ligure di Scienze e Lettere*, 2 giugno '99 (pubbl. 2000).

- BOLLA PITTALUGA M., MARCHI E., 2000. Restringimenti in alvei naturali. XXVII Convegno di “Idraulica e Costruzioni Idrauliche”, Genova, 12-15 settembre, vol. I, 215-224.
- MARCHI E., 2001. Introduzione alla Giornata di Studio “I piani per la sicurezza idraulica dei bacini dell’Alto Adriatico”, *Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti* in collaborazione con l’*Autorità di Bacino*, 2003.
- MARCHI E., 2002. La difesa di Venezia dalle acque alte. *Atti Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, vol. 161, fasc. 2, 2002-2003.
- MARCHI E., 2002. Introduzione all’uso dell’acqua per lo sviluppo, *Atti Convegno Giornata mondiale dell’acqua*, Roma, 22/3/02. *Accademia Nazionale dei Lincei* 188, 2003.

Memorie Scelte

Sul moto uniforme nelle condotte in pressione
L'Energia Elettrica, 1951

Sul moto uniforme nelle condotte in pressione (*)

Somma rio

Dal confronto della formula di Colebrook con diverse serie di risultati sperimentali si è verificato il buon comportamento della formula medesima in tutti i regimi di moto turbolento uniforme e si sono potuti dedurre i valori più appropriati da assegnare alla rugosità assoluta e in vari tipi di tubazioni.

Si dimostra quindi la piccola influenza che variazioni anche notevoli di ϵ hanno sul N . di resistenza λ e si consiglia l'uso di una formula approssimata, dedotta da quella di Colebrook, per il calcolo di λ stesso in regime intermedio (zona di transizione fra regime di tubo « liscio » e regime di tubo « rugoso »).

1. - La nota seguente è una rielaborazione di alcune delle più importanti esperienze sul moto uniforme nelle condotte in pressione, allo scopo di porre in confronto i loro risultati con quelli che si ottengono dalla seguente formula di Colebrook [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log_{10} \left[\frac{\epsilon}{3,715 D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right] \quad (A)$$

A differenza di quelle di Bazin, Kutter, Gaukler-Strickler ecc., questa formula è valida non soltanto in regime assolutamente turbolento ma anche e soprattutto in quel regime, che chiameremo *intermedio*, in cui sono sensibili le influenze sia del N° di Reynolds, sia della scabrezza delle pareti.

È noto che λ diviene indipendente da Re solo quando quest'ultimo supera un certo valore che è tanto più piccolo quanto maggiore è la rugosità relativa della condotta. In tubazioni mediamente scabre occorrono già valori elevatissimi del N° di Reynolds per lo stabilirsi di detto regime (ad esempio in condotti di acciaio trafilato dove ϵ/D può assumersi dell'ordine di 10^{-4} dev'essere $Re > 10^6$).

Le esperienze qui considerate, scelte fra le più importanti e precise sul moto dei fluidi, provano effettivamente l'influenza, in molti casi notevole, del N° di Reynolds sui valori di λ .

L'impiego poco discriminato delle usuali formule idrauliche o di altre da esse derivate conduce naturalmente, quando il moto si presenti in regime intermedio, ad errori in difetto nella determinazione di λ che si riflettono anche sensibilmente sulla valutazione della perdita di carico piezometrico per attrito.

(*) Comunicazione presentata al Convegno di Idraulica di Bologna del 2-3 giugno 1951.

Si veda ad esempio il caso dei metanodotti eseguiti con tubazioni di acciaio trafilato e giunti saldati: anche recentemente, in Italia, per valutare le perdite di pressione, si è fatto uso della formula di Weymouth, derivata da quella di Gaukler-Strickler con $c \approx 117$; in America, per condotti di tipo analogo, è spesso consigliato perfino l'impiego delle formule di « tubo liscio ». Sono due punti di vista diametralmente opposti. È logico che la concordanza dei risultati non si avrà in questi casi che in un campo di valori di Re troppo limitato.

In generale, ferma restando l'utilità d'uso delle formule idrauliche nei tubi scabri percorsi da correnti fortemente turbolente, con diametri tali che i numeri di Reynolds raggiunti siano molto elevati, siamo del parere che in tutti gli altri casi non si possa prescindere dall'influenza del N° di Reynolds, a meno di non accettare le inevitabili approssimazioni che derivano dal sostituire alle curve sperimentali di λ , discendenti con notevole pendenza in funzione di Re , delle rette parallele alle ascisse.

Per tali ragioni riteniamo che il ricorso alla formula di Colebrook, valida in qualunque regime di moto turbolento uniforme, per qualunque fluido ed applicabile, entro certi limiti, a qualunque tipo di condotta possa essere spesso utile, se non necessario. E per questo abbiamo voluto verificare il comportamento di tale formula con il confronto sperimentale di cui si è detto inizialmente.

Faremo vedere più avanti come le difficoltà inerenti alla valutazione di λ , che risulta espresso in forma implicita, si possano superare ricorrendo ad espressioni approssimate di facile calcolo.

2. - Nella formula di Colebrook la scabrezza relativa resta definita come rapporto fra la rugosità assoluta ϵ (altezza media delle asperità della parete) ed il diametro D del tubo.

Non è vero certamente che in tal modo si possa tener conto di tutti i numerosi fattori che influenzano in maniera diversa ed indeterminata la turbolenza, nè, mancando finora un metodo di misura diretta di ϵ , si possano raggiungere vantaggi maggiori di quelli che si hanno con l'uso delle note scale di scabrezza; ciò non toglie che il ricorso a tale lunghezza possa essere fatto ugualmente considerandola come un semplice parametro convenzionale, caratteristico per ogni tipo di condotta e che astrae da qualunque significato fisico reale.

D'altra parte la presenza nelle condotte di brusche accidentalità, come i giunti, che possono essere per numero e per forma diversi da caso a caso e del cui effetto si tien conto globalmente insieme alla resistenza d'attrito determinata dalle pareti dei tubi, giustifica tale posizione.

In tal modo si opera come nelle usuali formule idrauliche ma si conservano i vantaggi di una maggiore aderenza dell'andamento generale delle curve teoriche a quello delle curve sperimentali, come è dimostrato dal confronto che segue.

3. - In diagrammi aventi in ascisse i $\log Re$ ed in ordinate i $\log \lambda$ si sono riportate le curve $\varepsilon/D = \text{cost}$ dedotte dalla formula (A) di Colebrook e le spezzate $D = \text{cost}$ congiungenti i punti rappresentativi delle esperienze considerate. A volte queste ultime sono state sostituite dalle curve interpolari quando i punti medesimi ne consentivano il facile tracciamento.

Oltre a verificare il comportamento della formula di Colebrook, si sono potuti insieme determinare, dal confronto fra curve sperimentali e curve teoriche, i valori più appropriati da assegnare al parametro dimensionale ε nei diversi tipi di condotte.

Allo stesso scopo il confronto con la formula di Colebrook si è esteso anche ad alcune delle più importanti formule empiriche sul moto turbolento dei fluidi, in considerazione del fatto che esse sono in gran parte giustificate dall'esperienza.

A) CONDOTTE IN ACCIAIO CHIODATE E SALDATE.

I) Esperienze eseguite dal *prof. E. Scimemi* [2] (dal n° 1 al n° 10) e dal *prof. M. Marchetti* (dal n° 11 al n° 34) su grandi condotte per impianti industriali in uso da uno o più anni. Commissione presieduta dal *prof. G. De Marchi*.

TABELLA N. 1 (v. Diagramma N. 1).

Tabella riassuntiva dei risultati in ordine di scabrezza crescente.

N.	D in m	ε/D	ε in m	Notizie ed osservazioni (1)
24	1,50	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. I. Verniciata da 1 anno. Acqua limpida.
32	0,80	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	Chiodata T. I.; L. I. Verniciata da ~ 2 anni. Ben conservata. Acqua limpida.
19	0,98	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. 2. Catramata da ~ 3 anni. Ben conservata. Acqua torbida.
1	1,50	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	Chiodata T. I.; L. 2. In esercizio da 27 anni.
29	1,30	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$5,9 \cdot 10^{-4}$	Chiodata T. I.; L. 2. Verniciata da 2 anni. Ben conservata. Acqua limpida.
2	2,00	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	Chiodata T. I.; L. 2. In esercizio da 24 anni.
31	1,25	$5 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. 2. Verniciata da ~ 2 anni. Ben conservata.
25	1,40	$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. I. Verniciata da ~ 1 anno ma non priva di ossidazioni. Acqua limpida.
12	1,70	$4 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	Chiodata T. I.; L. 2. Non verniciata ma senza incrostazioni. Acqua limpida. La curva sperim., ascendente con Re , taglia la corr. curva di Colebrook.

N.	D in m	ε/D	ε in m	Notizie ed osservazioni (1)
26	1,30	$7 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. I. Verniciata da 1 anno. Non priva di ossidazioni. Acqua limpida.
27	1,18	$8 \cdot 10^{-4}$	$9,5 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. 2. Verniciata da ~ 1 anno. Non priva di ossidazioni. Acqua limpida.
21	0,90	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$9,9 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. I. In esercizio da molti anni. Senza incrostazioni. Acqua torbida per limo. Pendenza della curva sperimentale più accentuata di quella della curva di Colebrook.
34	0,55	$2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	Saldata T. I. Verniciata da 2 anni. Ben conservata. Acqua limpida. La curva sperim. ha, per i più piccoli Re , valori di λ più elevati.
22	1,10	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	Saldata T. 2. In esercizio da pochi anni. Senza incrostazioni. Acqua torbida per limo.
23	1,00	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	Saldata T. 2. In esercizio da pochi anni. Senza incrostazioni. Acqua torbida per limo.
4	1,15	$1 \cdot 10^{-3}$ (valor medio)	$1,15 \cdot 10^{-3}$ (valor medio)	Saldata T. 2. In esercizio da due anni. In parte blindata. La curva sperim. si discosta molto da quelle di Colebrook, salvo che per grandi Re (non riportata nel diagramma).
18	1,21	$1 \cdot 10^{-3}$ (valor medio)	$1,2 \cdot 10^{-3}$ (valor medio)	Chiodata T. I.; L. 2. In esercizio da 3 anni. Catramata. Ben conservata. Acqua torbida. V. precedente.
5	1,66	$0,8 \cdot 10^{-3}$ (valor medio)	$1,3 \cdot 10^{-3}$ (valor medio)	Chiodata T. I.; L. I. In esercizio da 1 anno. La curva sperim. taglia le curve di Colebrook in modo fortemente discordante. (Non riportata nel diagramma).
17	0,78	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	Saldata T. 2. In esercizio da molti anni. Fortemente arrugginita. Acqua limpida.
20	0,95	$3 \cdot 10^{-3}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	Chiodata T. I.; L. 6. In esercizio da molti anni. Coprigiunti interni. Senza incrostazioni. Acqua limpida.
16	1,00	$2,5 \div 4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	Saldata T. 2. In esercizio da molti anni. Fortemente arrugginita. Acqua limpida. Si discosta molto dalle curve di Colebrook per i più grandi Re .
6	2,80	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	Chiodata T. 4.; L. 4-6. In esercizio da 5 anni. Coprigiunti interni.
7	2,80	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	Chiodata T. 4.; L. 6. In esercizio da 2 anni.
9	2,60	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$	Chiodata T. 4.; L. 6. In esercizio di 5 anni. Coprigiunti disuguali.

(1) I simboli T. N. ed L. N. indicano rispettivamente il n° di file di chiodi trasversali e di chiodi longitudinali.

II) Esperienze eseguite da *E. Hoock* [3] su grandi condotte per impianti idroelettrici.

TABELLA N. 2 (v. Diagramma N. 1).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
2H	1,150	$3 \cdot 10^{-5}$	$3,45 \cdot 10^{-5}$	Saldata con giunti a manicotto, saldati. Sup. interna molto liscia dopo la revisione. Centrale di Cavaglia. Cond. N. 12.
3H	1,075	$6 \cdot 10^{-5}$	$6,45 \cdot 10^{-5}$	Saldata con giunti saldati Sup. interna molto liscia dopo la revisione. Centrale di Palù. Cond. N. 19.
4H	1,047	$1,20 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{-4}$	Saldata T. 2. Giunti chiodati. Sup. interna liscia. Centrale di Barberine. Cond. N. 7.
1H	0,800	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	Saldata. Giunti a flangia. Sup. interna molto rugosa. Centr. di Ackersand. Cond. N. 1.

III) Esperienze eseguite da *R. Barbe* [4] su condotte nuove in lamiera d'acciaio saldata.

TABELLA N. 3 (v. Diagramma N. 1).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
B	0,80	$0,5 \div 1,0 \cdot 10^{-4}$	$4 \div 8 \cdot 10^{-5}$	Saldata T. 2.; L. I. Giunti senza discontinuità. Tronco rett. lunghezza m 200. Curva sperim. con pend. un po' maggiore della corrispondente curva di Colebrook.

IV) Esperienze di *H. Smith* [5] su condotte in lamiera chiodata e catramata.

TABELLA N. 4 (v. Diagramma N. 1).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
1S	0,278	$1,5 \div 0,8 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \div 2,2 \cdot 10^{-4}$	Concordanza poco buona. Andamento quasi rettilineo della curva sperim. con pend. magg. della curva di Colebrook.
2S	0,322	$1 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	—
3S	0,375	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	Concordanza discreta se si esclude il primo punto sperimentale.

V) Esperienze di *Darcy* [6] su condotte di lamiera e bitume, nuove.

TABELLA N. 5 (v. Diagramma N. 3).

N.	D in mm	ϵ/D (val. estremi)	ϵ in m (val. medi)	Notizie ed osservazioni
1D	27	$6 \div 2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	Pendenza della curva sper. maggiore di quella della curva di Colebrook.
2D	82,6	$1 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	Il primo punto sper. si discosta notevolmente dalla curva di Colebrook.
3D	196	$8 \div 1,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	Curva sper. intrecciata con le curve di Colebrook, con pendenza leggermente maggiore.

Il confronto eseguito mette in evidenza una concordanza discreta e spesso buona fra curve sperimentali e curve teoriche, particolarmente nel caso più importante di condotte di grande diametro in servizio negli impianti idroelettrici. Nelle condotte nuove e soprattutto in quelle di piccolo diametro (Smith e Darcy) le curve sperimentali presentano una pendenza maggiore delle corrispondenti curve teoriche. Adottando per ϵ i valori più grandi fra quelli ottenuti, gli scarti in eccesso forniti dalla formula di Colebrook assicurano un conveniente margine di sicurezza proprio in quei tubi di piccolo diametro nei quali sono relativamente più temibili gli aumenti di perdite di carico per difetti di montaggio.

La scala di scabrezza ottenuta è quella riprodotta nel diagramma N. 1.

Scala di scabrezza delle condotte in acciaio chiodate e saldate.

1) Condotte saldate nuove o revisionate, in ottime condizioni, con giunti saldati o chiodati, molto lisci internamente:

$$\epsilon = \text{da } 5 \cdot 10^{-5} \text{ a } 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

(secondo il grado di levigatezza interna dei giunti (*).

2) Condotte saldate, con giunti senza forti discontinuità. Condotte chiodate longitudinalmente, e trasversalmente con una sola fila di chiodi.

Verniciatura interna. Spessori inferiori ai 10 mm. Buone condizioni.

$$\epsilon = 3 \div 4 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

3) Condotte saldate con chiodatura trasversale semplice o doppia.

Condotte chiodate con chiodatura longitudinale doppia e trasversale semplice.

Verniciate internamente oppure non verniciate ma senza incrostazioni. Spessori intorno ai 10 mm

$$\epsilon = 6 \div 7 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

(*) A valori più piccoli di rugosità porterebbero le esperienze qui non considerate di H. Hickox, A. J. Peterka, R. A. Elder riportate su: « Proceedings Am. Soc. C. E. », aprile 1947, pagg. 451-470.

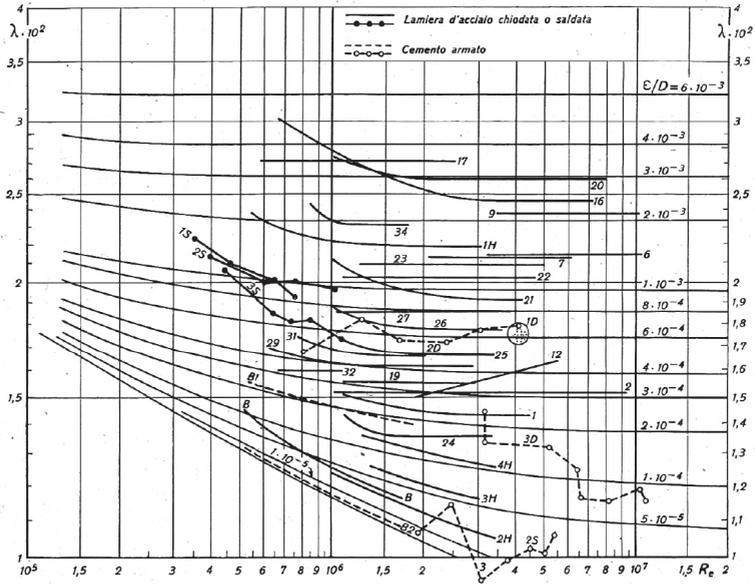


Diagramma N. 1.

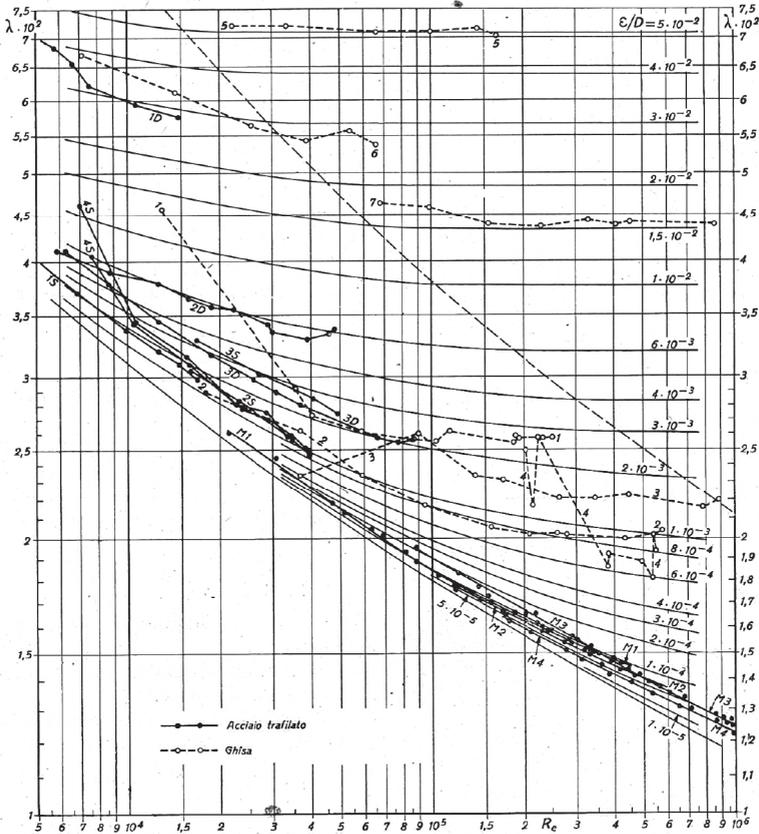


Diagramma N. 2.

4) Condotte saldate con chiodatura trasversale semplice o doppia.

Superficie interna verniciata ma non priva di ossidazioni, oppure senza incrostazioni ma con acqua torbida (in questo caso con chiodatura trasversale semplice)

$$\varepsilon = 9,5 \div 10 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

5) Condotte saldate con chiodatura trasversale doppia, senza incrostazioni ma con acqua torbida.

Condotte chiodate con chiodatura trasversale semplice e longitudinale doppia. Catramate o verniciate internamente. Spessore: 10-20 mm

$$\varepsilon = 1,2 \div 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

6) Condotte saldate con chiodatura trasversale doppia, fortemente arrugginite.

Condotte chiodate con 4-6 file di chiodi longitudinali, in esercizio da molto tempo.

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

7) Condotte chiodate con 4 file di chiodi trasversali e con 6 file di chiodi longitudinali, con coprugiunti interni.

$$\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

8) Condotte in cattive condizioni. Coprugiunti disuguali.

$$\varepsilon \geq 5 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

B) CONDOTTE IN ACCIAIO TRAFILATO.

I) Esperienze eseguite dell'ing. A. Marchetti [7] su anime di acciaio trafilato Mannersmann, nuove, rivestite internamente di bitume centrifugato ed impiegate nella fabbricazione dei tubi di cemento-amianto « Dalmine ».

TABELLA N. 6 (v. Diagramma N. 2).

N.	D in m	ε/D	ε in m	Notizie ed osservazioni
M1	0,0856	$1 \cdot 10^{-4}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	Diametro nominale 100 mm. N. 7 elementi per una lunghezza di metri 41,63.
M2	0,146	$7 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	Diametro nominale 150 mm. N. 6 elementi per una lunghezza di metri 36,06.
M3	0,249	$2 \div 0,5 \cdot 10^{-4}$	$5 \div 1,25 \cdot 10^{-5}$	Diametro nominale 250 mm. N. 5 elementi per una lunghezza di metri 30,00.
M4	0,346	$2 \div 3 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \div 1 \cdot 10^{-5}$	Diametro nominale 350 mm. N. 6 elementi per una lunghezza di metri 36,09.

II) Esperienze di Darcy [6] su condotte nuove in ferro forgiato e trafilato con giunti a vite.

TABELLA N. 7 (v. Diagramma N. 2).

N.	D in m	ε/D	ε in m	Notizie ed osservazioni
1D	0,0122	$4 \div 3 \cdot 10^{-3}$	$6 \div 3,8 \cdot 10^{-4}$	La curva sperim. ha una pendenza un po' maggiore di quella delle curve teoriche.
2D	0,0266	$6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	—
3D	0,0395	$4 \div 2 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \div 0,8 \cdot 10^{-4}$	Pendenza della curva sper. leggermente magg. di quella delle curve teoriche.

III) Esperienze di H. Smith [5] su condotte nuove di ferro trafilato.

TABELLA N. 8 (v. Diagramma N. 2).

N.	D in m	ε/D	ε in m	Notizie ed osservazioni
1S	0,016	$2 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	—
2S	0,0266	$1,6 \div 1,2 \cdot 10^{-3}$	$4,3 \div 3,7 \cdot 10^{-5}$	—
3S	0,0267	$3 \div 2,5 \cdot 10^{-3}$	$8 \div 6,7 \cdot 10^{-5}$	—
4S	0,0268	$3 \div 1,0 \cdot 10^{-3}$	$8,0 \div 2,7 \cdot 10^{-5}$	Due serie di esperienze. In entrambe il primo punto sper. si discosta notevolmente dalle corr. curve di Colebrook.

IV) Esperienze eseguite su tubi di vapore in acciaio trafilato dalla Berliner Kraftund Licht - A. G. (Bewag) e dalla Mitteldeutschen Kraftwerke Magdeburg - A. G. [8].

TABELLA N. 9 (v. Diagramma N. 3).

N.	D in m	ε/D	ε in m	Notizie ed osservazioni
1	0,050	$6,5 \div 6 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$	Concordanza buona fino a $Re = 6 \cdot 10^6$. Poi la curva sper. dà valori di λ più elevati.
2	0,100	$1 \div 2 \cdot 10^{-4}$	$1 \div 2 \cdot 10^{-5}$	V. precedente (fino a $Re \leq 10^6$).
3	0,200	$0,5 \div 1 \cdot 10^{-4}$	$1 \div 2 \cdot 10^{-5}$	Concordanza solo discreta. Pendenza della curva sper. maggiore di quella della curva teorica.
4	0,300	$5 \div 8 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \div 2,4 \cdot 10^{-5}$	
5	0,500	$5 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	Concordanza ottima per $Re > 10^6$.

Come si è visto l'andamento delle curve sperimentali è in buona concordanza con quello delle curve teoriche, salvo una pendenza delle prime in alcuni casi più accentuata.

Le esperienze di Darcy non permettono di ricavare dei valori tecnicamente accettabili per il parametro ϵ , in quanto si riferiscono a tubi attualmente non commerciali.

Prima di riassumere i valori di rugosità ottenuti riportiamo i risultati del confronto della formula di Colebrook con alcune formule empiriche applicate usualmente a fluidi diversi dall'acqua.

II) *Formula di Bradtke-Brabbée* [10].

$$\lambda = \lambda_0' + \frac{0,000029 Re^{0,108}}{D}$$

dove λ_0' è il coeff. d'attrito dei tubi lisci espresso dalla:

$$\lambda_0' = 0,0072 + 0,612 Re^{-0,35}$$

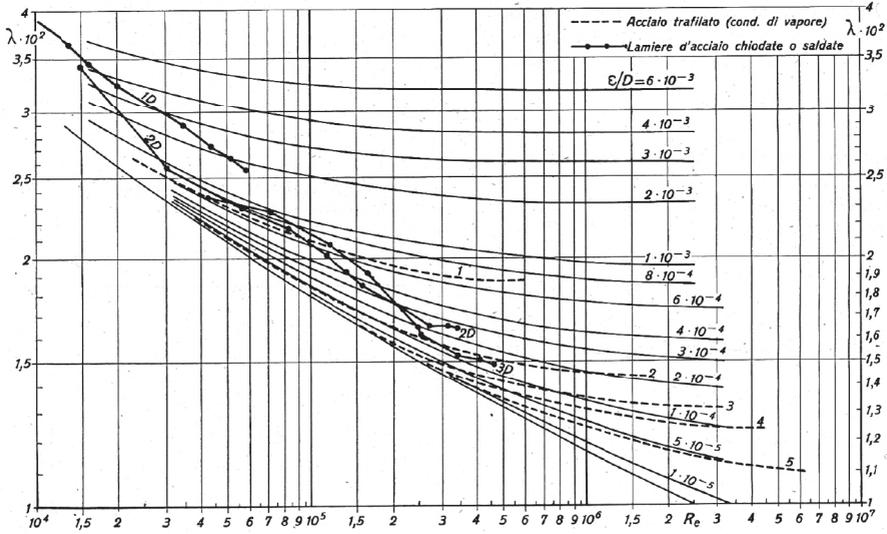


Diagramma N. 3.

I) *Formula di Galavics* [9]

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{0,00086}{D^{0,28}} \left[\log_{10} \frac{Re}{D^{1,1}} - 5,5 \right]^{1,75}$$

TABELLA N. 10 (v. Diagramma N. 4).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
1	0,010	$1 \div 2 \cdot 10^{-3}$	$1 \div 2 \cdot 10^{-5}$	Concordanza sempre buona. I valori di ϵ minori corrispondono ai più piccoli valori di Re , cioè, a parità di diametro, alle più piccole velocità (3).
2	0,025	$6 \div 8 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \div 2 \cdot 10^{-5}$	
3	0,050	$3 \div 4 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \div 2 \cdot 10^{-5}$	
4	0,100	$1 \div 3 \cdot 10^{-4}$	$1 \div 3 \cdot 10^{-5}$	
5	0,200	$0,5 \div 1,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \div 3 \cdot 10^{-5}$	
6	0,500	$1 \div 5 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \div 2,5 \cdot 10^{-5}$	

(3) Nel diagramma n. 4 sono riportate anche alcune rette $D = \text{cost}$ dedotte dalla formula di Wegmouth: $\lambda = \frac{0,0001}{\sqrt[3]{D}}$. Assunto $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ m la concordanza fra queste rette e le corrispondenti curve di Colebrook si verifica solo nei punti segnati con cerchietti. Fuori di essi gli scarti aumentano rapidamente, restando contenuti entro il 10% solo in un campo molto limitato di valori di Re .

TABELLA N. 11 (v. Diagramma N. 5).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
1	0,010	$4 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$	I valori di ϵ trovati sono decrescenti con l'aumentare del diametro. Le variazioni non sono però notevoli e la concordanza rimane buona entro un campo di valori del N° di Reynolds abbastanza vasto.
2	0,020	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$	
3	0,025	$1 \div 0,8 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \div 2,0 \cdot 10^{-5}$	
4	0,050	$6 \div 2 \cdot 10^{-4}$	$1 \div 3 \cdot 10^{-5}$	
5	0,100	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	
6	0,200	$2 \div 5 \cdot 10^{-5}$	$0,4 \div 1 \cdot 10^{-5}$	
7	0,500	$1 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	

Per diametri superiori ai 50 mm questa formula dà valori di scabrezza troppo bassi rispetto a quanto ci si potrebbe aspettare trattandosi di tubi commerciali con giunti a flange, in concordanza con quanto verificato da altri sperimentatori [11].

III) *Formula di Biel* [12].

$$\lambda = 0,0925 \frac{p^{0,023}}{(Re D)^{0,125}} \text{ per gas: } \lambda \approx \frac{0,072}{(Re D)^{0,125}}$$

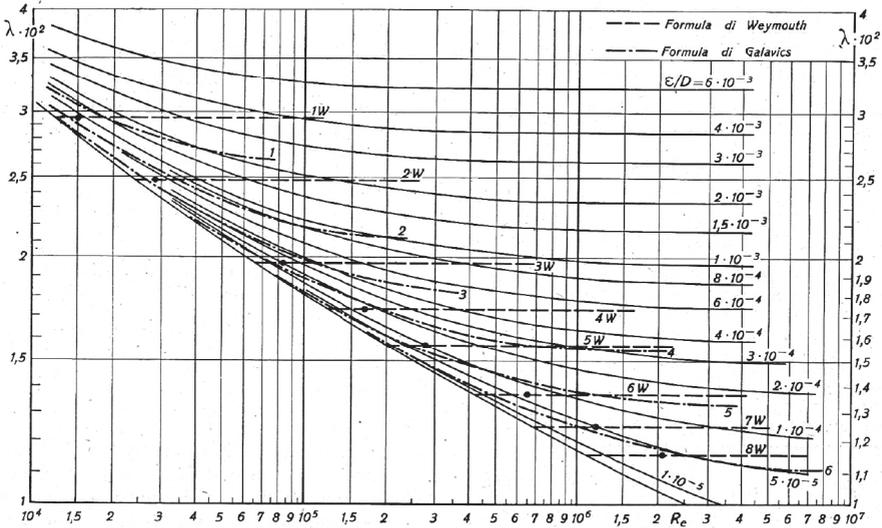


Diagramma N. 4.

TABELLA N. 12 (v. Diagramma N. 5).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservaz.
1B	0,010	$6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	Concordanza abbastanza buona, con scarti entro il 10%, finchè si resta nel regime intermedio dove è valida la formula di Biel. La dipendenza di λ da $\nu^{0,023}$ non è teoricamente giustificata. Infatti essa conduce, in uno stesso tubo e con lo stesso valore di Re , a valori diversi del N° di resistenza per fluidi aventi diversa viscosità.
2B	$0,02 \div 0,025$	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \div 7,5 \cdot 10^{-5}$	
3B	0,050	$\sim 1,2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	
4B	0,100	$7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$	
5B	0,200	$4 \div 3 \cdot 10^{-4}$	$8 \div 6 \cdot 10^{-5}$	
6B	0,500	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	

TABELLA 13 (v. Diagramma N. 2).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservaz.
1	0,0819 ¹	$3 \div 2 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \div 2,5 \cdot 10^{-4}$	Andamento soddisfacente se si esclude il primo punto sperimentale.
2	0,137	$11 \div 8 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \div 1,1 \cdot 10^{-4}$	Concordanza buona, salvo per i primi due punti sper. I punti sper. sono notevolmente dispersi. Il confronto è solo approssimato.
3	0,188	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	
4	0,500	$2 \cdot 10^{-3} \div 7 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3} \div 3,5 \cdot 10^{-4}$	
<i>Ghisa con depositi:</i>				
5	0,0359	$5 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	
6	0,0795	$2,7 \div 3,7 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \div 2,95 \cdot 10^{-3}$	
7	0,0243 ²	$1,75 \div 1,5 \cdot 10^{-2}$	$3,87 \div 3,32 \cdot 10^{-3}$	

Poichè le formule viste sono applicabili tutte ai tubi di acciaio trafilato, possiamo riassumere i valori di rugosità trovati nel seguente quadro:

- Esperienze di A. Marchetti (acciaio trafilato rivestito di bitume centrifugato). $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ m
- Esperienze di H. Smith $\epsilon = 3 \div 8 \cdot 10^{-5}$ »
- Esperienze tedesche (cond. di vapore) $\epsilon = 1 \div 3 \cdot 10^{-5}$ »
- Formula di Galavics (per gas e vapore) $\epsilon = 1 \div 3 \cdot 10^{-5}$ »
- Formula di Bradtke-Brabbée (termosifoni) $\epsilon = 1 \div 4 \cdot 10^{-5}$ »
- Formula di Biel (per gas) $\epsilon = 5 \div 8 \cdot 10^{-5}$ »

Variabilità di ϵ : fra il minimo $\epsilon = 10^{-5}$ m quando il rivestimento interno è particolarmente accurato (bitume centrifugato) al massimo $\epsilon = 7 \div 8 \cdot 10^{-5}$ m nei tubi di acciaio commerciali in servizio corrente.

C) CONDOTTE IN GHISA.

I) Esperienze di Darcy [6] su condotte in ghisa, nuove e con depositi, con giunti a flangia e a bicchiere.

Il confronto eseguito ha messo in evidenza una concordanza sempre buona fra curve sperimentali e curve di Colebrook, particolarmente nel caso di tubi con depositi ed esclusa la sola serie di esperienze N. 4.

Valori della rugosità:

Condotte in ghisa nuova con giunti a flangia o a bicchiere:

$$\epsilon = 1,5 \div 3 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

Condotte in ghisa con depositi, con giunti a flangia o a bicchiere:

$$\epsilon = 2 \div 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

D) CONDOTTE E GALLERIE IN CEMENTO.

I) Esperienze di R. Barbe [4] su condotte a sezione circolare, in cemento armato, assolutamente nuove.

TABELLA N. 14 (v. Diagramma N. 1).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
B1	0,800	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	Condotta in cemento centrifugato.
B2	0,800	« tubo liscio »	« tubo liscio »	Condotta in cemento pre-compresso: sistema Freysenet.

II) Esperienze della Soc. Meridionale di Elettricità [13] su gallerie e condotte in uso.

TABELLA N. 15 (v. Diagramma N. 1).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
1D	2,60	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$1,65 \cdot 10^{-3}$	Gallerie in calcestruzzo: Intonaco di cemento liscio. $L = 2\ 675,9$ m. I punti sper. sono raccolti in uno spazio ristretto intorno alla curva $\epsilon/D = 6,3 \cdot 10^{-4}$ di Colebrook.
2D	2,50	$6 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	Intonaco di cemento liscio. $L = 4\ 190,08$ m.
3D	3,00	$1,6 \cdot 10^{-4} +$ $\div 8 \cdot 10^{-5}$	$\sim 3 \cdot 10^{-4}$	Condotte in cemento armato: Intonaco di gunita lisciata spalmata di cemento plastico Arco. $L = 1\ 443,45$ m. La curva sper. ha pendenza maggiore della corrispondente curva di Colebrook. Si è riportato il valore medio di scabrezza.

III) Esperienze del prof. E. Scimemi [14] su condotte e gallerie in uso.

TABELLA N. 16 (v. Diagramma N. 1).

N.	D in m	ϵ/D	ϵ in m	Notizie ed osservazioni
2S	2,50	$1 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	Galleria in calcestruzzo armato con intonaco liscio. Concordanza discreta.
1S	3,80	« tubo liscio »	« tubo liscio »	Condotta in cem. arm. con intonaco accuratamente lisciato a mano. Curva sper. vicina e un po' al disotto della curva di reg. liscio. (Non riportata nel diagramma).

I risultati ottenuti dal confronto dimostrano un comportamento assai vario delle condotte e delle gallerie in cemento secondo il tipo di intonaco e soprattutto secondo il suo grado di lisciatura. Essi si possono riassumere nella seguente scala di scabrezza:

1) Condotte e gallerie in calcestruzzo armato con intonaco accuratamente lisciato a mano.
Condotte nuove in cemento precompresso.
« Comportamento di tubo liscio o quasi ».

2) Condotte in cemento centrifugato con intonaco liscio, nuove:
 $\epsilon = 1,6 \cdot 10^{-4}$ m.

3) Condotte in cemento armato con intonaco liscio, in esercizio da anni:
 $\epsilon = 2 \div 3 \cdot 10^{-4}$ m (ed anche più).

4) Gallerie a sezione circolare in calcestruzzo, con intonaco di cemento lisciato:
 $\epsilon = 1,5 \div 1,6 \cdot 10^{-3}$ m.

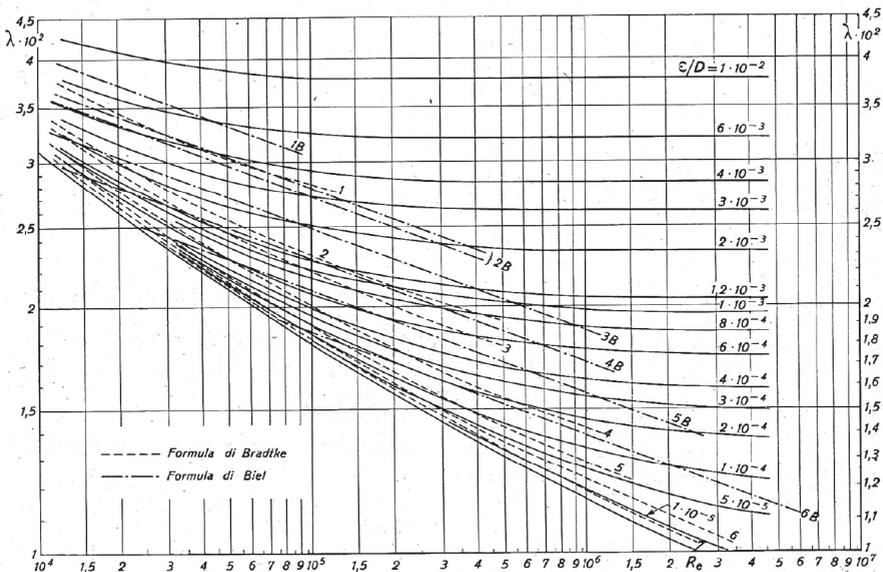


Diagramma N. 5.

4. — Differenziando la *formula di Colebrook* si giunge con facili passaggi alla seguente espressione dell'errore relativo da cui possono essere affetti i valori delle rugosità ε dedotti dai valori sperimentali del N° di resistenza λ :

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{1,15 + \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - \frac{2,51}{Re}} - 1 \right] \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \quad (B)$$

La (B) fornisce i valori di $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$ in funzione di $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$, di λ e di Re . A parità di λ tali valori decrescono con l'aumentare di Re e raggiungono un limite minimo, funzione di λ , quando Re tende all'infinito, cioè in regime di « tubo rugoso » (4).
Risulta infatti:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{0,575}{\sqrt{\lambda}} \cdot \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right) = \frac{\ln 10}{4 \sqrt{\lambda}} \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right) \quad (C)$$

Relazione che si poteva dedurre anche direttamente differenziando la nota *formula di Prandtl-Karman* relativa al regime rugoso.

La (C) mette in evidenza come i più piccoli valori di $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$ si abbiano per i valori più elevati di λ , e precisamente:

per $\lambda = 0,06$	$\Delta \varepsilon/\varepsilon = 2,35 \cdot (\Delta \lambda/\lambda)$
» $\lambda = 0,04$	$\Delta \varepsilon/\varepsilon = 2,9 \cdot (\Delta \lambda/\lambda)$
» $\lambda = 0,02$	$\Delta \varepsilon/\varepsilon \cong 4 \cdot (\Delta \lambda/\lambda)$
» $\lambda = 0,013$	$\Delta \varepsilon/\varepsilon \cong 5 \cdot (\Delta \lambda/\lambda)$

Tali valori aumentano, come abbiamo detto, col diminuire di Re per $\lambda = \text{cost}$, diventano circa doppi in prossimità della curva di tubo liscio e tendono rapidamente all'infinito avvicinandosi ad essa.

Ammissa, come si è soliti fare, un'approssimazione del 10% sui valori sperimentali del coefficiente di Chezy χ e quindi del 20% su λ (6), ne deriva che gli scarti nella determinazione di ε , dedotto da valori noti di λ , non sono mai inferiori al 40% e mediamente superano l'80 ÷ 100% [15]. Ciò quindi riduce l'importanza che gli errori nella valutazione di ε possono avere sul calcolo del coefficiente d'attrito.

Dalla *formula di Bazin* [16] si deduce, con procedimento analogo, la seguente relazione:

$$\frac{\Delta \chi}{\chi} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D}}{4 \chi} \right) \cdot \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)$$

la quale mostra che gli errori nelle deduzioni di χ da valori noti di λ vanno decrescendo con il crescere della scabrezza ε , a parità di quest'ultima, con il diminuire del diametro.

Per condotte pochissimo scabre e con grandi diametri l'approssimazione, ammesse le ipotesi precedenti, non

(4) La (B) si può scrivere anche nella forma:

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 10 + 2 \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} - 10 \cdot 1/2 \sqrt{\lambda}} \cdot \frac{3,715}{\varepsilon/D} - 1 \right] \cdot \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

la quale mette in evidenza come, a parità di λ , $\Delta \varepsilon/\varepsilon$ aumenti con il diminuire di ε/D ossia, come s'è detto, di Re .

(6) Dalla $\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ si deduce facilmente: $\frac{\Delta \chi}{\chi} = 2 \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)$.

scende al disotto dell'80%. Normalmente, con medie scabrosità e diametri inferiori al metro, essa si aggira sul 20 ÷ 30% non potendo diventare mai minore del 10%.

Dalla formula di *Gaukler-Strickler* [17] infine deriva la relazione:

$$\frac{\Delta c}{c} = - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right)$$

dalla quale, ammesse sempre le stesse ipotesi, si deduce che l'approssimazione nei valori di c è, in ogni caso, del 10%.

Le considerazioni precedenti mostrano che i valori di ε , dedotti attraverso rilievi sperimentali della perdita di carico piezometrico, presentano un'incertezza maggiore di quelli del parametro γ di Bazin e soprattutto di quelli del parametro c di Gaukler-Strickler. Questo risultato, mentre non porta attualmente ad alcuna conseguenza temibile, ci assicura che, quando sarà possibile eseguire una misura diretta della scabrezza ε , la precisione richiesta, affinché gli scarti sui valori di λ restino contenuti entro il 20%, non sarà mai superiore al 40%, mediamente del 100% e tanto minore quanto più piccola sarà la rugosità (relativa) da misurare.

Sempre a proposito della scabrezza ci sembra opportuno ricordare che in alcuni casi l'influenza della forma delle asperità della parete può essere tale da modificare profondamente l'andamento delle curve $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$. La nota distinzione fra condotte « rugose » e condotte « con pareti ondulate » introdotta da Hopf e da Fromm [18] in seguito ai risultati delle loro esperienze di laboratorio è stata ripresa recentemente dall'Hoek [3] che ha verificato appunto, in alcune grandi condotte industriali, la presenza al limite di due distinte leggi di resistenza, la prima con λ quasi indipendente da Re , la seconda con λ decrescente al crescere di Re con andamento quasi parallelo alla curva dei tubi lisci. Anche la diversa distribuzione delle asperità porta, nelle sue estreme conseguenze, ad analoghi andamenti del coefficiente di resistenza in regime intermedio. Nikuradse [19] ha infatti dedotto sperimentalmente, in tale regime, il noto andamento di λ inizialmente costante e quindi crescente con Re (curve ad arpa) per tubi con rugosità artificiale « omogenea », mentre Colebrook e White [20] hanno verificato sperimentalmente, nello stesso regime, un andamento di λ quasi parallelo alla curva dei tubi lisci per condotte con rugosità artificiale « eterogenea ».

Pur non escludendo che in alcuni casi si presentino effettivamente tali condizioni limiti, riteniamo, in accordo con le conclusioni di Jorissen [21], che normalmente, per le condotte industriali, nella zona di transizione fra regime liscio e regime rugoso, sia piuttosto una situazione intermedia a verificarsi (s'intende fino a quando la rugosità non risulti troppo elevata, perchè in tal caso sarebbe naturalmente rispettata la legge di resistenza quadratica).

La formula di Colebrook ci sembra tecnicamente consigliabile anche per questo andamento intermedio delle sue curve che tendono assintoticamente alla curva dei tubi lisci, diventando quasi parallele ad essa, dove più piccola è la rugosità relativa (cioè quando la superficie interna della condotta si avvicina al tipo « ondulato ») mentre per elevati valori di ε/D e di Re le stesse curve divengono parallele all'asse delle ascisse, sovrapponendosi alle corrispondenti curve di Nikuradse.

Vi sono certamente delle condotte che, per la particolare forma o distribuzione delle asperità, possono presentare valori di λ discordanti con quelli di Colebrook; ma la mancanza di una teoria completa sul moto turbolento

che, sintetizzando tutte le possibili situazioni, definisca l'influenza dei diversi fattori che in esso intervengono, non sembra permetterci, per ora, una maggiore aderenza ai risultati sperimentali.

5. - A parte la necessità di completare ulteriormente le tabelle di scabrezza precedenti mediante rielaborazione di altre esperienze qui non considerate od esecuzione di nuove, resta ancora qualcosa da dire sulla possibilità di applicazione pratica della formula di Colebrook, nella quale λ compare in forma implicita.

Si può consigliare a tale scopo l'uso di diagrammi del tipo di quelli adoperati nella presente ricerca, oppure si può ricorrere ad una soluzione analitica sufficientemente approssimata.

Ottimi risultati dà la seguente relazione, dedotta dal prof. Supino [22], mediante sviluppo in serie della formula di Colebrook:

$$\lambda = \lambda_0 + 0,17 Re \lambda_0^3 \cdot \varepsilon/D \quad (D)$$

valevole fino a $Re \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot \varepsilon/D < 20$ e, con qualche approssimazione, fino a $25 \div 30$. Praticamente oltre tale limite si entra già in regime di λ indipendente da Re , dove è applicabile la nota formula di Prandtl-Kármán relativa al regime rugoso:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log_{10} \frac{3,715 D}{\varepsilon} \quad (E)$$

Volendo ricordare perfettamente le formule (D) ed (E) si può impiegare la seguente relazione, pure dedotta analiticamente dal prof. Supino con un procedimento analogo a quello usato per ricavare la (D):

$$\lambda = \frac{0,25}{\left(\log_{10} \frac{3,715 D}{\varepsilon}\right)^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{16,2}{Re} \cdot \frac{D}{\varepsilon} \right\} \quad (F)$$

Essa è valida in quel campo di regime intermedio dove $(Re \cdot \sqrt{\lambda_0} \cdot \varepsilon/D)$ è maggiore di 20 e fino a quando λ non diviene indipendente da Re .

La tabella N. 17 che contiene i valori di λ_0 e del fattore $(0,17 \cdot Re \cdot \lambda_0^3)$ in funzione del N° di Reynolds, rende semplice e rapido il calcolo del N° di resistenza λ dalla formula (D).

TABELLA N. 17.

per il calcolo dei valori $\lambda = \lambda_0 + 0,17 Re \lambda_0^3 (\varepsilon/D)$.

Re n° di Reynolds	λ_0 tubi lisci (B) Blasius - (N) Nikuradse	$0,17 Re \lambda_0^3$
3 000	(B) 0,0426	0,930
3 500	(B) 0,0410	0,965
4 000	(B) 0,0400	1,075
5 000	(B) 0,0376	1,190
6 000	(B) 0,0360	1,315
7 000	(B) 0,0344	1,405
8 000	(B) 0,0335	1,522
9 000	(B) 0,0326	1,622
10 000	(B) 0,0316	1,700
12 000	(B) 0,0302	1,855
14 000	(B) 0,0293	2,045
16 000	(B) 0,0282	2,160

Re n° di Reynolds	λ_0 tubi lisci (B) Blasius - (N) Nikuradse	$0,17 Re \lambda_0^3$
18 000	(B) 0,0272	2,263
20 000	(B) 0,0265	2,570
25 000	(B) 0,0252	2,720
30 000	(B) 0,0240	2,940
35 000	(B) 0,0232	3,217
40 000	(B) 0,0224	3,400
45 000	(B) 0,0218	3,638
50 000	(B) 0,0211	3,795
60 000	(B) 0,0202	4,149
70 000	(B) 0,0195	4,525
80 000	(B) 0,0187	4,750
90 000	(B) 0,0182	5,075
100 000	(N) 0,0179	5,440
120 000	(N) 0,0170	5,900
140 000	(N) 0,0165	6,500
160 000	(N) 0,0162	7,160
180 000	(N) 0,0159	7,740
200 000	(N) 0,0155	8,160
250 000	(N) 0,0149	9,450
300 000	(N) 0,0143	10,470
350 000	(N) 0,0139	11,680
400 000	(N) 0,0135	12,39
450 000	(N) 0,0133	13,55
500 000	(N) 0,0131	14,52
600 000	(N) 0,0127	16,42
700 000	(N) 0,0124	18,32
800 000	(N) 0,0120	19,57
900 000	(N) 0,0118	21,30
1 000 000	(N) 0,0116	22,82
1 200 000	(N) 0,0112	25,60
1 500 000	(N) 0,0108	29,85
2 000 000	(N) 0,0100	34,00
3 000 000	(N) 0,00965	47,50

Bologna, giugno 1951.

ENRICO MARCHI.

NOTE E BIBLIOGRAFIA

- [1] C. F. COLEBROOK: *Turbulent flow in pipes. Particular reference to the trans. region between the smooth and rough pipes laws.* - « J. of the Instit. of Civil Engineers », Londra, vol. II, 1938-39.
 O. KIRSCHMER: *Pertes des charge dans les conduites forcées et les canaux decouverts.* - « Revue Générale de l'Hydraulique », N° 51, maggio-giugno 1949.
 STICKNEY: *Friction in pipes.* - « Refrigerating Engineering », febbraio 1947.

I simboli adoperati nelle formule hanno il seguente significato:

λ = n° di resistenza adimensionale, introdotto nella formula della perdita di carico piezometrico i attraverso la nota applicazione del criterio di omogeneità:

$$i = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

λ_0 = N° di resistenza nei tubi lisci, funzione soltanto di Re . (Blasius per $Re < 10^5$, Nikuradse per $Re \geq 10^5$).

U = velocità media in m/sec

D = diametro interno della condotta in m

ε = rugosità assoluta in m

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \text{N° di Reynolds}$$

ρ = densità in $\text{kg m}^{-3} \text{sec}^2$

μ = viscosità in $\text{kg m}^{-2} \text{sec}$

- [2] G. DE MARCHI: *Correnti uniformi entro grandi condotte e grandi canali.* - « L'Energia Elettrica », fasc. VIII, Milano 1936.
 [3] E. HOECK: *Pertes de charge dans les conduites forcées des grandes centrales hydroélectriques.* - « Revue Générale de l'Hydraulique », n. 39-40-41-42, maggio-dicembre 1947.

- [4] R. BARBE: *Pertes de charge dans les conduites industrielles.* - « La Houille Blanche », maggio-giugno 1947.
- [5] I dati sulle esperienze di H. Smith sono stati ricavati da: L. CONTI: *Sul regime uniforme nelle condotte d'acqua a sezione circolare.* - Siena 1910.
V. anche FLAMANT: *Etude sur les formules de l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduit.* - « Annales des Ponts et Chaussées », settembre 1892, pag. 301 e seguenti.
- [6] DARCY: *Recherches experimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux* (Paris 1858). - « Mem. présentes par divers savants à l'Académie des Sciences », Tomo XV.
- [7] A. MARCHETTI: *Perdite di carico per reg. uniforme nelle condotte Dalmine di cemento-amianto con anima d'acciaio.* - « L'Energia Elettrica », fasc. VII-VIII, luglio-agosto 1944.
- [8] ZIMMERMANN: *Druckabfall in Stahlrohrleitungen.* - « V. D. I. », n. 51 - Bd 82 - Berlino 1938.
- [9] ZIMMERMANN: *Druckabfall in Stahlrohrleitungen.* - « V. D. I. », n. 40 - Bd 84 - Berlino 1940.
- [10] H. GRÖBER: *Rietschel, Heinz - und Lüftungstechnik.* - XI Ed. Springer, Berlino 1938.
- [11] E. FOÀ: *Termodinamica: Moto in condotte.* - Man. dell'Ingegneria, Hoepli.
- [12] MORANDI: *Sul calcolo delle condotte per il trasporto del gas a distanza.* - « Il metano », novembre 1942. V. anche memorie originali in: « G. u. W. », 1927, pag. 547 e pag. 623; « G. u. W. », 1938, pag. 57.
- [13] Soc. Merid. di Elettricità: *Determinazione sper. dei coeff. di scabrezza di grandi gallerie e condotte forzate in cemento armato.* - « L'Energia Elettrica », fasc. IV, aprile 1935.
- [14] E. SCIMEMI: *Rilievi sper. sul funzionamento idraulico dei grandi impianti industriali.* - « L'Energia Elettrica », fasc. IX-XI, 1933.
- [15] Un'osservazione qualitativa in questo senso si trova a pag. 253 della memoria già citata [3] di Hoeck.
- [16] La formula di Bazin ha la seguente espressione:
- $$\chi = \frac{87 \sqrt{R}}{\sqrt{R} + \gamma} \quad \text{con} \quad R = \frac{D}{4}$$
- [17] La formula di Manning-Gaukler-Strickler è:
- $$\chi = C R^{1/6} \quad \text{con} \quad R = \frac{D}{4}$$
- [18] FROMM: *Stromungswiderstand in rauhen Rohren.* - « Z.f. angew Math und Mech. », 1923.
HOFF: *Die Messung d. hydraulischen Rauigkeit.* - « Z.f. angew Math und Mech », 1923.
- [19] J. NIKURADSE: *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Rohren.* - « Forschungsheft », 356, 1932.
J. NIKURADSE: *Stromungsgesetze in rauhen Rorhen.* - « Forschungsheft », 361, 1933.
- [20] C. F. COLEBROOK e C. M. WHITE: *Experiments with fluid friction in roughened pipes.* - « Roy. Proc. Soc. », London, 161A, 1937.
- [21] L. JORISSEN: *Pressure Losses in new commercial steel pipes.* - « International Association for Hydraulic Structures Research », Third Meeting, Grenoble Isère 5-6-7 settembre 1949.
- [22] G. SUPINO: *Le formule per il calcolo del moto uniforme nelle tubazioni.* - « Atti della Accademia delle Scienze di Bologna », 1950-1951.

Sui fenomeni di efflusso piano
da luci a battente
Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1953

Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente.

Memoria di ENRICO MARCHI (a Bologna).

Sunto. - Si studia con il metodo della rappresentazione conforme il problema dell'efflusso stazionario attraverso una luce soggiacente ad una paratoia piana a spigolo vivo tenendo conto, sia pure in modo approssimato, dell'influenza della gravità.

I risultati ottenuti nei casi di paratoia verticale e di paratoia inclinata di 30°, 45°, 60° sono posti a confronto con quelli sperimentali di B. GENTILINI e con quelli teorici (in assenza della gravità) di CISOTTI - V. MISES.

1. I problemi di efflusso da luci a battente vengono studiati di solito limitandosi a considerare il moto irrotazionale di un liquido perfetto in campi a due dimensioni (efflusso piano) e facendo astrazione dalle forze di gravità. Tali ipotesi restrittive, e particolarmente l'ultima, se da un lato permettono di applicare con relativa semplicità il metodo della rappresentazione conforme allo studio della forma della vena effluente, almeno in prossimità della bocca, dall'altro limitano l'importanza tecnica dei risultati che con questo procedimento si possono dedurre.

Mi sono proposto pertanto di vedere s'era possibile tener conto dell'influenza della gravità, sia pure in modo approssimato, senza rinunciare ai vantaggi della rappresentazione conforme. È quanto è stato fatto in questa nota nel caso dell'efflusso da una luce soggiacente ad una paratoia a spigolo vivo.

Si sono ottenuti in tal modo valori del coefficiente di contrazione del getto e del coefficiente di portata più vicini a quelli sperimentali di quanto non lo fossero i valori corrispondenti dedotti da CISOTTI ⁽¹⁾ (ed in seguito attraverso un'equazione di forma più semplice da V. MISES ⁽²⁾) in assenza della gravità.

Gli scarti fra i nostri coefficienti di portata e quelli sperimentali (costantemente dello stesso segno e quindi giustificabili con le perdite di energia che accompagnano sempre il processo sperimentale) non superano in nessun caso il 2% (mediante l'1%).

2. Riportiamo brevemente il procedimento risolutivo nel caso predetto di efflusso stazionario attraverso una fessura di altezza a aperta, come mostra

⁽¹⁾ CISOTTI U., *Vene fluenti*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », Tomo XXV, (1908).

⁽²⁾ V. MISES R., *Berechnung von Ausfluss und Ueberfallzahlen*, VDI, (1917).

la fig. 1 nella parete laterale comunque inclinata di un recipiente alto b , largo quanto la fessura e il cui fondo orizzontale AB si prolunga indefinitamente a valle della fessura stessa.

Si suppone che la pressione contro la parete superiore AC sia eguale alla *pressione atmosferica*. In tal caso la parete stessa può essere sostituita

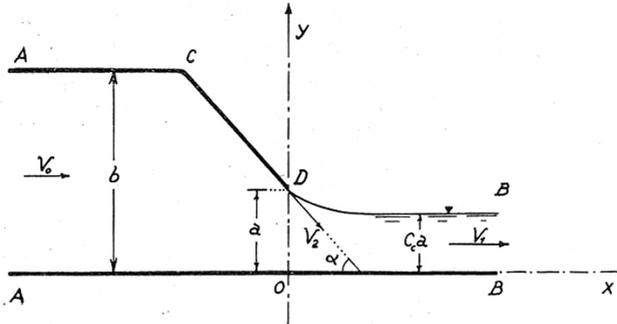


Fig. 1.

senza apprezzabili scostamenti dallo specchio di una corrente a pelo libero di profondità b . Ciò consente di risolvere un problema particolarmente interessante dal punto di vista tecnico, e cioè *l'efflusso al di sotto di una paratoia piana in un canale a pelo libero*.

Per valori non trascurabili di a/b indichiamo con V_0 la velocità della corrente uniforme a monte della luce e con V_1 la velocità nella sezione contratta B della vena. Ammesso il moto piano ed irrotazionale ed il liquido perfetto, si vuole dedurre una relazione fra il coefficiente di contrazione C_c della vena (rapporto fra la profondità del getto nella sezione contratta e l'apertura a della luce) ed il numero b/a (che indicheremo sempre con n).

Nel campo della gravità la velocità lungo il pelo libero DB non si mantiene costante ma varia gradualmente dal valore

$$V_2 = \sqrt{2g \left(b + \frac{V_0^2}{2g} - a \right)}$$

nel punto D , fino al valore

$$V_1 = \sqrt{2g \left(b + \frac{V_0^2}{2g} - C_c a \right)}$$

nel punto B . Si ha perciò, ponendo

$$(1) \quad V_2 = v V_1$$

$$(2) \quad v = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{b + \frac{V_0^2}{2g} - a}{b + \frac{V_0^2}{2g} - C_c a}}$$

Applichiamo il teorema di BERNOULLI nelle sezioni A e B (indicando con $q = V_0 b = V_1 C_c \cdot a$ la portata per m di larghezza):

$$b + \frac{q^2}{2gb^3} = C_c a + \frac{q^2}{2gC_c^2 a^3}$$

di qui segue

$$\frac{b + \frac{V_0^2}{2g} - C_c a}{b + \frac{V_0^2}{2g} - a} = \frac{b + \frac{C_c^2 a^2}{b + C_c a} - a}{\frac{b^2}{b + C_c a}} = 1 - \frac{1 - C_c}{n} - \frac{C_c(1 - C_c)}{n}.$$

Possiamo scrivere perciò la (2) nella forma

$$(3) \quad v = \sqrt{1 - \frac{1 - C_c}{n} - \frac{C_c(1 - C_c)}{n}}$$

($v \rightarrow 1$ per $n \rightarrow \infty$) (3).

3. Indicate con V_x e V_y le componenti della velocità effettiva nelle direzioni degli assi x ed y rispettivamente, precisiamo il campo della velocità complessa

$$V = V_x - iV_y.$$

(3) Qualora esistesse contro AC una pressione p diversa da quella atmosferica il coefficiente di contrazione del getto non dipenderebbe soltanto dal rapporto b/a ma anche dal rapporto $\frac{p}{\gamma b}$ (oppure $\frac{p}{\gamma a}$). Infatti, posto $\frac{p}{\gamma b} = \beta$, la (2) diventa

$$(1') \quad v = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{(1 + \beta)b + \frac{V_0^2}{2g} - a}{(1 + \beta)b + \frac{V_0^2}{2g} - C_c a}}$$

od anche, applicando nelle sezioni A e B il teorema di BERNOULLI

$$(3') \quad v = \sqrt{\frac{(1 + \beta)n + \frac{C_c^2[(1 + \beta)n - C_c] - 1}{n^2 - C_c^2}}{(1 + \beta)n + \frac{C_c^2[(1 + \beta)n - C_c] - C_c}{n^2 - C_c^2}}}$$

Il procedimento che segue resta del tutto inalterato ma evidentemente la presenza di β nella (3') influisce sui valori di v e quindi di C_c anche a parità di n .

Si tratta evidentemente di un settore come quello rappresentato nella fig. 2, dove essendo

$$V_A = |V_0|; \quad V_B = |V_1|; \quad V_C = 0; \quad V_D = |V_2| e^{i\alpha}$$

è indeterminato soltanto l'andamento del contorno DB , odografa del movimento del vettore V lungo il pelo libero. Noti i punti estremi, sappiamo che

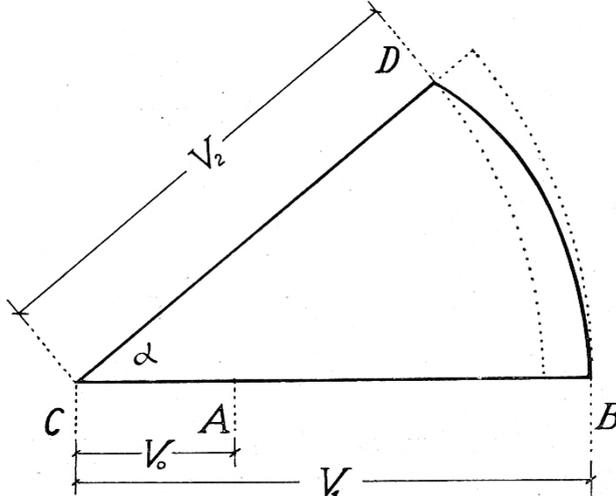


Fig. 2.

tale curva deve essere sempre interna ai due archi di circonferenza aventi raggio V_1 e V_2 .

Operiamo la trasformazione conforme (v. fig. 3)

$$(4) \quad \eta = V^{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

$$\eta_A = |V_0|^{\frac{\pi}{2\alpha}} = |\eta_0|; \quad \eta_B = |V_1|^{\frac{\pi}{2\alpha}} = |\eta_1|; \quad \eta_D = i |V_2|^{\frac{\pi}{2\alpha}} = i |\eta_2|; \quad \eta_C = 0.$$

Data la piccola differenza fra η_1 ed η_2 , almeno finchè n non scende al disotto di 2, possiamo sostituire senza sensibile errore nei risultati alla incognita curva effettiva DB un'altra curva scelta arbitrariamente i cui raggi vettori variino con gradualità dal valore η_2 al valore η_1 . Infatti in ogni caso gli scarti temibili fra queste due curve saranno sempre molto più piccoli di $|\eta_1 - \eta_2|$. Per convenienza di dimostrazione si è scelta la curva che si ottiene invertendo per raggi vettori reciproci un'ellisse di semiassi $1/\eta_1$ e $1/\eta_2$, la quale differisce molto poco essa stessa da un quarto di ellisse (*).

(*) Tale curva ha nel punto D tangente orizzontale, ciò che significa che ad una variazione infinitesima dell'argomento dovrebbe corrispondere una variazione infinitesima di

Definito il campo della velocità complessa è immediata la rappresentazione del campo del potenziale complesso

$$W = \varphi + i\psi$$

con $\varphi = \text{pot. della velocità}$ e $\psi = \text{funzione di corrente}$.

Con la convenzione che la superficie equipotenziale $\varphi = 0$ passi per il

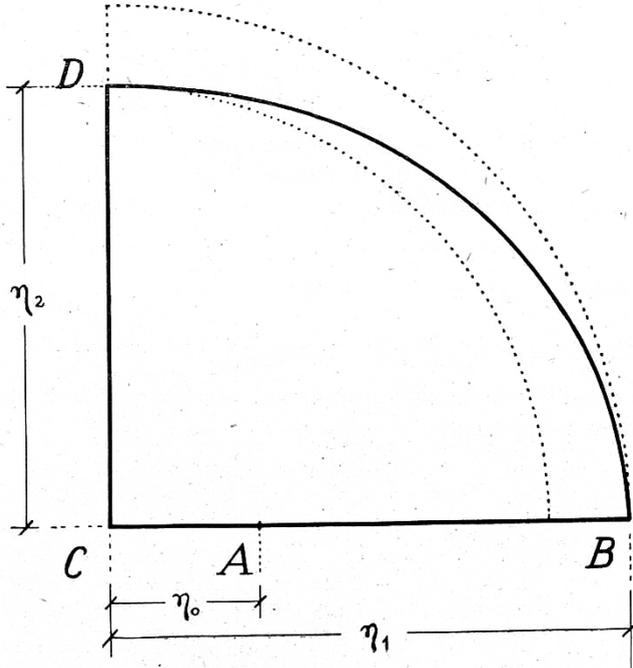


Fig. 3.

punto C , e quindi $\varphi = -\infty$ per A e $\varphi = +\infty$ per B e che il fondo coincida con la linea di corrente $\psi = 0$ (e quindi $\psi = q$ sia la linea $ACDB$) si ottiene subito la striscia compresa fra le rette $\psi = 0$ e $\psi = q$ del piano φ, ψ (v. fig. 4).

ordine superiore nel modulo $|V|$ del vettore velocità, lungo il pelo libero. Causa il rapido aumento della velocità stessa al distacco della parete, l'odografa cercata non soddisferà rigorosamente a questa condizione.

Lo scostamento angolare fra le due tangenti

$$\frac{d|V|}{|V|d\alpha} = \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{2(b-a)}$$

(con $R = \text{raggio di curvatura nel punto considerato}$) si è ritenuto trascurabile per la piccolezza di $R \times \operatorname{sen} \alpha$ in rapporto al denominatore.

4. Per eseguire la trasformazione del campo della funzione V nel campo della W si è operata prima la trasformazione

$$(5) \quad \frac{1}{\eta} = \frac{\eta_m}{\eta_1 \eta_2} \left(\omega - \frac{\varepsilon}{\omega} \right)$$

dove

$$(6) \quad \eta_m = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$$

$$(7) \quad \varepsilon = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2\eta_m} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\pi}{2z}}}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2z}}}$$

In tal modo il campo della η si trasforma nel campo esterno ad un quarto di cerchio di raggio unitario compreso fra la parte positiva dell'asse delle ascisse e quella negativa dell'asse delle ordinate. Evidentemente risulta

$$\omega_B = 1 \quad \omega_C = \infty \quad \omega_D = -i \quad \omega_A = m$$

essendo m (reale e maggiore di 1) definito dalla

$$(8) \quad m - \frac{\varepsilon}{m} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_m \eta_0}$$

Il campo ω si è trasformato quindi nel semipiano ζ delle ordinate negative con la nota relazione

$$(9) \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Quindi

$$\zeta_A = k^2 \quad \zeta_B = 1 \quad \zeta_C = \infty \quad \zeta_D = -1$$

dove

$$(10) \quad k^2 = \frac{1}{2} \left(m^2 + \frac{1}{m^2} \right)$$

($k^2 > 1$ perchè $m > 1$).

Infine il semipiano ζ si trasforma nella striscia della fig. 4 con la

$$(11) \quad W = \frac{q}{\pi} \ln \frac{\zeta - k}{1 - \zeta}$$

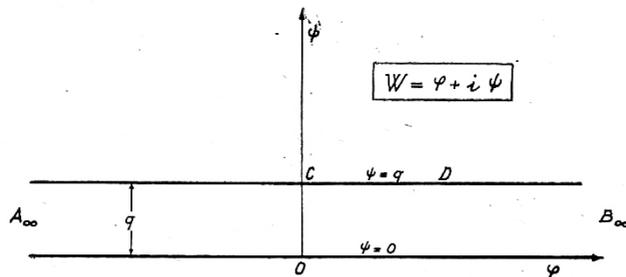


Fig. 4.

5. Per mezzo delle (4), (5), (9) e (11) è possibile eseguire l'integrazione

$$Z = \int \frac{dW}{V} + \text{cost} = \int \frac{dW}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{\eta^{\frac{2\alpha}{\pi}}} + \text{cost.}$$

Con facili calcoli si ottiene

$$(12) \quad Z = \frac{4q}{\pi} (k^2 - 1) \left(\frac{\eta_m}{\eta_1 \eta_2} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \int \frac{\omega \left(\omega - \frac{\varepsilon}{\omega} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} (\omega^2 + 1) d\omega}{(\omega^4 + 1 - 2k^2 \omega^2)(\omega^2 - 1)} + \text{cost.}$$

Sapendo che

$$\frac{q}{\eta_1^{\frac{2\alpha}{\pi}}} = \frac{q}{V_1} = C_c a$$

e

$$\frac{\eta_m}{\eta_2} = \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

e tenendo conto della (10) si ha

$$(13) \quad Z = \frac{4}{\pi} (k^2 - 1) \frac{C_c a}{(1 - \varepsilon)^{\frac{2\alpha}{\pi}}} \int \frac{\omega^{\frac{\pi+2\alpha}{\pi}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} (\omega^2 + 1)}{(\omega^2 - m^2) \left(\omega^2 - \frac{1}{m^2} \right) (\omega^2 - 1)} d\omega + \text{cost.}$$

Poniamo

$$(14) \quad \frac{\pi}{2\alpha} = p.$$

Poichè ε è sempre minore dell'unità ed $\omega \geq 1$, possiamo sviluppare in serie la potenza

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{p}} = 1 - \frac{1}{p} \frac{\varepsilon}{\omega^2} + \left(\frac{1/p}{2} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 - \left(\frac{1/p}{3} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^3 + \dots$$

segue

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= m^2 \int \frac{\omega^{p+1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{p}} (\omega^2 + 1)}{(\omega^2 - m^2)(m^2 \omega^2 - 1)(\omega^2 - 1)} d\omega = \\ &= m^2 \int \frac{\omega^{3+\frac{1}{p}} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{p} \right) \omega^{1+\frac{1}{p}} - \left[\frac{\varepsilon}{p} - \left(\frac{1/p}{2} \right) \varepsilon^2 \right] \omega^{\frac{1}{p}-1} + \dots}{(\omega^2 - m^2)(m^2 \omega^2 - 1)(\omega^2 - 1)} d\omega. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\omega = (-i) \cdot u^p$$

e quindi

$$d\omega = (-i) p u^{p-1} du.$$

Si ha

$$(15) \quad \mathcal{J} = -\sqrt[p]{-i} p m^2 \int \frac{u^{2p} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right) u^{2p} - \left[\frac{\varepsilon}{p} - \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon^2\right] + \dots}{(u^{2p} + m^2)(m^2 u^{2p} + 1)(u^{2p} + 1)} du.$$

L'integrazione per via analitica della (15) risulta in generale piuttosto complicata, ma agli effetti di un confronto numerico può essere sufficiente eseguirla prendendo in considerazione soltanto i casi in cui $2p$ risulta un numero intero.

Anzichè procedere all'integrazione per serie si può limitare il numeratore ai primi tre termini riportati nella (15). In tal modo si trascurano fattori dell'ordine di grandezza minore od uguale a $\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\varepsilon^2}{u^{2p}}$ la cui influenza, rispetto agli altri, non può farsi sentire al massimo che sulla 4^a cifra decimale del coefficiente di contrazione.

Si può scomporre allora la funzione integranda (15) nella somma di tre funzioni razionali semplici. Ossia

$$(16) \quad \mathcal{J} = -\sqrt[p]{-i} p m^2 \left[A' \int \frac{du}{u^{2p} + m^2} + B' \int \frac{du}{m^2 u^{2p} + 1} + C' \int \frac{du}{u^{2p} + 1} \right]$$

dove A' , B' , C' sono costanti che si determinano risolvendo il sistema

$$(17) \quad \begin{cases} A' m^2 + B' + C' m^2 = 1 \\ A'(m^2 + 1) + B'(m^2 + 1) + C'(m^2 + 1) = -1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right) \\ A' + B' m^2 + C' m^2 = -\left[\frac{\varepsilon}{p} - \left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon^2\right]. \end{cases}$$

Infine la (13), tenendo conto della (10) e della (16), diventa:

$$Z = -\frac{2}{\pi} \frac{C_c \alpha}{(1 - \varepsilon)^{1/p}} \sqrt[p]{-i} p \left[A'(m^2 - 1)^2 \int \frac{du}{u^{2p} + m^2} + \right. \\ \left. + B'(m^2 - 1)^2 \int \frac{du}{m^2 u^{2p} + 1} + C'(m^2 - 1)^2 \int \frac{du}{u^{2p} + 1} \right] + \text{cost}$$

od anche

$$(18) \quad Z = -\frac{2}{\pi} \frac{C_c \alpha}{(1 - \varepsilon)^{1/p}} \sqrt[p]{-i} p \left[A \int \frac{du}{u^{2p} + m^2} + \right. \\ \left. + B \int \frac{du}{m^2 u^{2p} + 1} + C \int \frac{du}{u^{2p} + 1} \right] + \text{cost.}$$

La (18) è, come ho detto, facilmente integrabile quando $2p = \frac{\pi}{\alpha}$ è un numero intero. Per procedere alla soluzione in questi casi, calcolato ε con la (8), basta conoscere il valore di m che si ricava dalla (9):

$$(19) \quad m = \left(\frac{n}{C_c}\right)^p (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\frac{C_c}{n}\right)^p$$

ed i coefficienti A , B , C che si ottengono risolvendo il sistema (17):

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = A'(m^2 - 1)^2 = \frac{m^4 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right)m^2 - \left[\frac{\varepsilon}{p} - \left(\frac{1/p}{2}\right)\varepsilon^2\right]}{m^2 + 1} \\ B = B'(m^2 - 1) = -\frac{m^4 \left[\frac{\varepsilon}{p} - \left(\frac{1/p}{2}\right)\varepsilon^2\right] - m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{p}\right) - 1}{m^2 + 1} \\ C = C'(m^2 - 1)^2 = -2 + 2\frac{\varepsilon}{p} + \left(\frac{1/p}{2}\right)\varepsilon^2. \end{array} \right.$$

6. Vediamo alcuni casi particolarmente interessanti.

$$1^\circ \text{ CASO} \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}} \quad p = 1.$$

Allora, applicando la (18), si esegue l'integrazione completa, perchè i termini trascurati sono nulli.

Si ha

$$\varepsilon = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{con} \quad \nu = \sqrt{1 - \frac{1 - C_c}{n} - \frac{C_c}{n} \left(\frac{1 - C_c}{n}\right)}$$

$$m = \frac{n}{C_c} (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{C_c}{n}$$

$$A = m^2 - \varepsilon$$

$$B = -(m^2 \varepsilon - 1)$$

$$C = -2(1 - \varepsilon)$$

e la (18) diventa:

$$\begin{aligned} Z = & \frac{2}{\pi} \cdot \frac{C_c \alpha}{1 - \varepsilon} i \left[(m^2 - \varepsilon) \int \frac{du}{u^2 + m^2} - \right. \\ & \left. - (m^2 \varepsilon - 1) \int \frac{du}{m^2 u^2 + 1} - 2(1 - \varepsilon) \int \frac{du}{u^2 + 1} \right] + \text{cost} \end{aligned}$$

ossia

$$(21) \quad Z = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{C_c a}{1 - \varepsilon} i \left[-\frac{m^2 - \varepsilon}{m} \operatorname{arc tang} \frac{m}{u} + \right. \\ \left. + \frac{m^2 \varepsilon - 1}{m} \operatorname{arc tang} \frac{1}{mu} + 2(1 - \varepsilon) \operatorname{arc tang} \frac{1}{u} \right] + \text{cost.}$$

Poichè nel punto C , dove è $\omega = \infty$ (e quindi $u = \infty$), si ha $Z = ih_0$, dalla (21) segue

$$\text{cost} = ih_0$$

e nel punto D , dove $\omega = -i$ (e quindi $u = 1$), essendo $Z = ia$, la (21) diventa

$$a = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{C_c a}{1 - \varepsilon} \left[2(1 - \varepsilon) \frac{\pi}{4} - \frac{m^2 - \varepsilon}{m} \operatorname{arc tang} m + \frac{m^2 \varepsilon - 1}{m} \operatorname{arc tang} \frac{1}{m} \right] + h_0$$

e dividendo per a :

$$(22) \quad n - 1 = -C_c + \frac{2C_c}{\pi(1 - \varepsilon)} \left\{ \frac{m^2 - \varepsilon}{m} \operatorname{arc tang} m - \frac{m^2 \varepsilon - 1}{m} \operatorname{arc tang} \frac{1}{m} \right\}.$$

Da questa equazione implicita ⁽⁵⁾ si ricavano i seguenti valori di C_c in funzione di n , valori che si sono posti a confronto con quelli C_c' calcolati in assenza della gravità con il procedimento CISOTTI-MISES.

$$\alpha = \pi/2$$

$n =$	1,5	2	3	5	7	10	∞
$C_c =$	0,633	0,612	0,605	0,605	0,606	0,607	0,611
$C_c =$ CISOTTI-MISES	0,677	0,644	0,625	0,616	0,614	0,612	0,611

⁽⁵⁾ La (22) è suscettibile di semplificazioni per $n > 5$. Si arriva facilmente alla

$$(23) \quad \frac{1}{C_c} = 1 + \frac{2}{\pi} \left(m - \frac{1}{m} \right) (1 + 2\varepsilon) \operatorname{arc tang} \frac{1}{m}.$$

$$2^{\circ} \text{ CASO } \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}} \quad p = 2.$$

Si ha

$$\varepsilon = \frac{1 - v^2}{1 + v^2}, \quad v = \sqrt{1 - \frac{1 - C_c}{n} - \frac{C_c}{n} \left(\frac{1 - C_c}{n} \right)}$$

$$m = \left(\frac{n}{C_c} \right)^2 (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\frac{C_c}{n} \right)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m^4 + m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} \right)}{m^2 + 1} \\ B = - \frac{m^4 \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{8} \right) - m^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) - 1}{m^2 + 1} \\ C = -2 + \varepsilon + \varepsilon^2/8. \end{array} \right.$$

Tenendo conto che

$$- \sqrt{-i} \int \frac{du}{u^4 + c^4} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left\{ \frac{1}{4\sqrt{2}c^3} \left(\ln \frac{c + u^2 + u\sqrt{2}c}{c + u^2 - u\sqrt{2}c} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}c^3} \operatorname{arc tang} \frac{u\sqrt{2}c}{u^2 - c} \right\}$$

imponendo le limitazioni precedenti

$$Z = ih_0 \quad \text{per } \omega = \infty (u = \infty)$$

$$Z = ia \quad \text{per } \omega = -i (u = 1)$$

ed uguagliando le parti immaginarie la (18) diventa

$$(24) \quad a = \frac{C_c a}{2\pi(1 - \varepsilon)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{A}{\sqrt{m^3}} + \frac{B}{\sqrt{m}} \right) \ln \frac{m + 1 + \sqrt{2m}}{m + 1 - \sqrt{2m}} + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{A}{\sqrt{m^3}} - \frac{B}{\sqrt{m}} \right) \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{2m}}{m - 1} - 2 \frac{A\pi}{\sqrt{m^3}} - 1,37888 C \right\} + h_0$$

ossia

$$(25) \quad n - 1 = \frac{C_c}{2\pi(1 - \varepsilon)^{1/2}} \left\{ \frac{2A\pi}{\sqrt{m^3}} - \left(\frac{A}{\sqrt{m^3}} + \frac{B}{\sqrt{m}} \right) \ln \frac{m + 1 + \sqrt{2m}}{m + 1 - \sqrt{2m}} - \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{A}{\sqrt{m^3}} - \frac{B}{\sqrt{m}} \right) \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{2m}}{m - 1} + 1,37888 C \right\}.$$

La (25) fornisce i seguenti valori di C_c in funzione di n

$$\alpha = \pi/4$$

$n =$	2	3	5	7	10	∞
$C_c =$	0,715	0,728	0,736	0,740	0,742	0,747
$C'_c =$ CISOTTI-MISES	0,753	0,749	0,749	0,749	0,749	0,747

3° CASO $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$p = 3$ $p = \frac{3}{2}$.

Il procedimento è perfettamente analogo. Basta conoscere l'integrale

$$\int \frac{du}{u^3 - c^3} = \frac{1}{3c^2} \ln \frac{|u - c|}{\sqrt{u^2 + cu + c^2}} - \frac{1}{c^2 \sqrt{3}} \operatorname{arc tang} \frac{2u + c}{c\sqrt{3}}$$

e quindi

$$\int \frac{du}{u^3 + c^3} = \frac{1}{3c^2} \ln \frac{|u + c|}{\sqrt{u^2 - cu + c^2}} + \frac{1}{c^2 \sqrt{3}} \operatorname{arc tang} \frac{2u - c}{c\sqrt{3}}.$$

Essendo inoltre

$$\int \frac{du}{u^6 + c^6} = \int \frac{du}{u^6 - (ic)^6} = \frac{1}{2(ic)^3} \left\{ \int \frac{du}{u^3 - (ic)^3} - \int \frac{du}{u^3 + (ic)^3} \right\}$$

con facili trasformazioni si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^6 + c^6} &= \frac{1}{2(ic)^5} \left[-\frac{1}{3} \ln \frac{u+ic}{u-ic} - \frac{1}{6} \ln \frac{u^2 + (ic)^2 + icu}{u^2 + (ic)^2 - icu} - \frac{1}{2i\sqrt{3}} \ln \frac{(ic)^2 - cu\sqrt{3} - u^2}{(ic)^2 + cu\sqrt{3} - u^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{3c^5} \operatorname{arc tang} \frac{c}{u} - \frac{1}{6c^5} \operatorname{arc tang} \frac{cu}{u^2 - c^2} + \frac{1}{4\sqrt{3}c^5} \ln \frac{u^2 + c^2 + cu\sqrt{3}}{u^2 + c^2 - cu\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Operando come nei casi precedenti, con la solita limitazione, si ottiene:

con $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$(26) \quad n - 1 = \frac{3}{2} \frac{C_c}{\pi(1 - \epsilon)^{2/3}} \left\{ \frac{2}{3} \frac{A\pi}{m^{4/3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{A}{m^{4/3}} + \frac{B}{m^{2/3}} \right) \ln \frac{m^{2/3} + 1}{\sqrt{m^{4/3} - m^{2/3} + 1}} - \right. \\ \left. - \left(\frac{A}{m^{4/3}} - \frac{B}{m^{2/3}} \right) \operatorname{arc tang} \frac{\sqrt{3}}{2m^{2/3} - 1} + 0,64701 C \right\}$$

dove A, B, C si calcolano con le (20) ponendo $p = \frac{3}{2}$.

$$\alpha = \pi/3$$

$n =$	2	3	5	7	10	∞
$C_c =$	0,668	0,674	0,682	0,685	0,686	0,692
$C'_c =$ CISOTTI-MISES	0,708	0,698	0,695	0,694	0,693	0,692

e con $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$(27) \quad n - 1 = \frac{C_c}{\pi(1 - \varepsilon)^{1/3}} \left\{ \frac{A\pi}{m^{5/3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{A}{m^{5/3}} + \frac{B}{m^{1/3}} \right) \ln \frac{m^{2/3} + 1 + \sqrt{3} m^{1/3}}{m^{2/3} + 1 - \sqrt{3} m^{1/3}} - \left(\frac{A}{m^{5/3}} - \frac{B}{m^{1/3}} \right) \operatorname{arc tang} \frac{1}{m^{1/3}} - \frac{1}{2} \left(\frac{A}{m^{5/3}} - \frac{B}{m^{1/3}} \right) \operatorname{arc tang} \frac{m^{1/3}}{m^{2/3} - 1} + 0,43029 C \right\}$$

dove A, B, C si calcolano ponendo $p = 3$ nelle (20).

$$\alpha = \pi/6$$

$n =$	2	3	5	7	10	∞
$C_c =$	0,769	0,795	0,805	0,808	0,809	0,814
$C'_c =$ CISOTTI-MISES	0,815	0,814	0,814	0,814	0,814	0,814

7. Se poniamo come si fa usualmente

$$(28) \quad q = \mu \alpha \sqrt{2gb}$$

il coefficiente di portata μ risulta, attraverso applicazione del teorema di BERNOULLI nelle sezioni A e B

$$(29) \quad \mu = \frac{C_c}{\sqrt{1 + \frac{C_c}{n}}}$$

Nella tabella seguente si riportano i valori di μ calcolati con la (29) adottando i coefficienti di contrazione C_c trovati con il nostro procedimento, i

valori μ' calcolati con i coefficienti di contrazione C_c' di CISOTTI-V. MISES ed i valori μ_s interpolari dei risultati sperimentali di GENTILINI ⁽⁶⁾.

$n =$		2	3	5	7	10	∞
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\mu =$	0,536	0,552	0,571	0,581	0,589	0,611
	$\mu' =$	0,560	0,568	0,581	0,589	0,595	0,611
	$\mu_s =$	0,547(*)	0,563(*)	0,580	0,590	0,598	—
$\alpha = \frac{\pi}{3}$	$\mu =$	0,578	0,609	0,640	0,654	0,664	0,692
	$\mu' =$	0,608	0,628	0,651	0,662	0,671	0,692
	$\mu_s =$	0,583	0,612	0,644	0,659	0,672	—
$\alpha = \frac{\pi}{4}$ (**)	$\mu =$	0,614	0,653	0,687	0,704	0,716	0,747
	$\mu' =$	0,641	0,670	0,699	0,712	0,722	0,747
	$\mu_s =$	0,615	0,654	0,690	0,708	0,722	—
$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\mu =$	0,654	0,707	0,747	0,765	0,778	0,814
	$\mu' =$	0,687	0,722	0,755	0,770	0,783	0,814
	$\mu_s =$	0,659	0,707(*)	0,747	0,767	0,784	—

(*) Questi soli valori interpolari differiscono un poco (al massimo due unità nella 3^a cifra decimale) da quelli presentati da GENTILINI. La modifica ci sembra giustificata dal confronto con i risultati sperimentali.

(**) I valori interpolari μ_s per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ non sono stati esplicitamente assegnati dall'A. Si sono dedotti dalla curva interpolare tracciata dal GENTILINI sulla base dei dati delle esperienze.

⁽⁶⁾ GENTILINI B., *Sui processi di efflusso piano*, «L'Energia Elettrica», aprile 1941; *Efflusso delle luci soggiacenti alle paratoie piane e a settore*, «L'Energia Elettrica», giugno 1941.

Il confronto prova come s'era detto inizialmente, la maggior concordanza dei nostri risultati con quelli sperimentali, particolarmente per piccoli valori del carico in rapporto all'apertura della luce.

Tanto più se si osserva che i valori sperimentati dal coefficiente di contrazione e quindi, in minor misura, anche del coefficiente di portata devono risultare sempre più grandi dei corrispondenti valori teorici (dato che ad un abbassamento della linea dell'energia a valle della bocca corrisponde un innalzamento del pelo libero della vena effluente).

Le onde di regime a lungo periodo (onde di piena)
L'Energia Elettrica, 1956

DOTT. ING. ENRICO MARCHI

Le onde di regime a lungo periodo (onde di piena)

Som m a r i o

Si studiano onde sinusoidali di regime aventi periodo abbastanza lungo perchè l'influenza delle resistenze risulti preponderante rispetto alla non permanenza del moto. Tenendo conto parzialmente anche di quest'ultima, l'equazione dinamica viene ricondotta ad una nuova espressione di scala di deflusso che, associata all'equazione di continuità, consente di studiare l'attenuazione delle onde considerate qualunque sia la loro ampiezza.

NOTAZIONI

- i_f = pendenza del fondo;
 Q_0 = portata di regime-base uniforme;
 $Q = Q_0 + q$ = portata nel regime variabile;
 Ω_0 = sezione di regime-base uniforme;
 $\Omega = \Omega_0 + \omega$ = sezione nel regime variabile;
 Y = profondità dell'acqua nella sezione considerata (Y_0 in regime uniforme);
 U = velocità media dell'acqua (U_0 in regime uniforme);
 b = larghezza del pelo libero nella sezione considerata;
 B = contorno bagnato;
 $R = \Omega/B$ = raggio medio;
 χ = coefficiente di scabrezza di Chézy;
 g = accelerazione di gravità;
 W = celerità dell'onda;
 $i_c = \frac{g}{\chi^2} \frac{B}{b}$ = pendenza critica relativa alla profondità Y ;
 T = periodo dell'onda (avente pulsazione $\eta = \frac{2\pi}{T}$).

I. - PREMESSE.

Le onde di traslazione nei canali si studiano utilizzando (generalmente in forma approssimata) le equazioni dinamica e di continuità dell'idraulica. Con il significato premesso dei simboli queste equazioni si scrivono

$$(1) \quad i_f - \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega} \right)^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega} \right)$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Nel caso particolare di onde a periodo lungo, soggette quindi a variazioni molto gradualmente nel tempo e nello spazio, si suole sostituire, secondo un procedimento indicato dal Boussinesq⁽¹⁾, all'equazione dinamica una scala di deflusso del tipo

$$(3) \quad \boxed{\Omega = K Q^n}$$

dove le costanti K ed n sono dedotte dal confronto fra la (3) e l'equazione di Chézy $Q = \Omega \chi \sqrt{R} i_f$, che si ritiene soddisfatta in ogni sezione istante per istante.

Si ha

$$(4) \quad n = \frac{2}{3} \quad K = \sqrt[3]{\frac{B}{\chi^2 i_f}}$$

se si assume $\chi = \text{cost}$, e

$$(5) \quad n = \frac{3}{5} \quad K = \frac{B^{2/5}}{c^{3/5} i_f^{3/10}}$$

se si pone $\chi = c R^{1/6}$ secondo la formula di Gauckler-Strickler⁽²⁾.

Poichè con il crescere della profondità aumentano generalmente sia B che χ così ci sembra più giustificato, volendo che sia $K = \text{cost}$, assumere in alvei non larghissimi $n = \frac{2}{3}$ piuttosto che $n = \frac{3}{5}$. Il valore più attendibile dell'esponente è generalmente compreso tra questi

(1) BOUSSINESQ: *Essai sur la théorie des eaux courantes*. - 1872, pag. 470 e segg.

(2) Tenendo conto delle resistenze nella forma che deriva dall'applicazione del criterio di omogeneità:

$$i_f = \frac{\lambda}{4R} \cdot \frac{Q^3}{2g\Omega^2} \quad \text{si ha} \quad n = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad K = \sqrt[3]{\frac{B\lambda}{8i_f g}}$$

due e tende a $\frac{3}{5}$ con l'aumentare della larghezza dell'alveo in confronto alla profondità.

La posizione (3), come si vede in relazione al confronto precedente, deriva dall'equazione dinamica (1) considerando trascurabili, in confronto alla pendenza del fondo e alle resistenze, i termini che contengono variazioni della portata o della sezione rispetto a x e rispetto a t (cioè tutto il secondo membro).

Associando la (3) all'equazione di continuità (2) si ottiene subito, per sostituzione, l'equazione lineare alle derivate parziali

$$(6) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + K n Q^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Il risultato interessante che si deduce con questo procedimento di 1^a approssimazione è la velocità di propagazione di uno stesso valore di portata (o di sezione):

$$(7) \quad W_Q = -\frac{\partial Q/\partial t}{\partial Q/\partial x} = \frac{\partial Q/\partial t}{\partial \Omega/\partial t} = \frac{dQ}{d\Omega} = \frac{1}{K n Q^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{Q}{\Omega} = \frac{U}{n}$$

$$\left(W_\Omega = -\frac{\partial \Omega/\partial t}{\partial \Omega/\partial x} = \frac{\partial Q/\partial x}{\partial \Omega/\partial x} = \frac{dQ}{d\Omega} = W_Q \right)$$

ossia W compreso fra $\frac{3}{2} U$ e $\frac{5}{3} U$ e tendente a quest'ultimo valore per $\frac{Y}{b} \rightarrow 0$.

I rilievi sperimentali eseguiti sulla propagazione delle onde di piena in alvei prismatici a debole pendenza hanno confermato da tempo questo risultato.

La (7) mette in evidenza una nota caratteristica delle onde lunghe nei riguardi della loro deformazione: « il colmo dell'onda (dove $U = U_{max}$) deve propagarsi più velocemente della testa e della coda » (3).

La scala di deflusso $\Omega = K Q^n$ fa corrispondere ad ogni valore di portata un unico valore della sezione, lo stesso sia che si consideri Q in fase di aumento sia che la si consideri in fase di diminuzione. Ciò sperimentalmente non è giustificato, se non in forma approssimata. Accettata questa ipotesi manca però qualunque possibilità di studio dell'attenuazione. In tal caso infatti qualunque valore di Q (o di Ω) — e quindi in particolare anche Q_{max} — si propaga *inalterato* con velocità finita e $\neq 0$, come mostra la (7).

Ammesso invece che le ampiezze massime delle funzioni Q ed Ω , rispetto al tempo, diminuiscono con l'aumentare della distanza x dall'origine, si dimostra, con considerazioni elementari derivanti dalla condizione di

continuità (v. ad es. Flamant: « Hydraulique » pag. 396) che detti massimi devono presentarsi in una stessa sezione successivamente nell'ordine: 1^o) max di portata; 2^o) max di sezione. Il passaggio inverso nel tempo comporta necessariamente un'esaltazione dell'onda (4).

In questa nota si vuole mostrare la possibilità di studiare il fenomeno dell'attenuazione di un'onda allungata (onda di piena) su moto-base uniforme tenendo conto parzialmente dei termini trascurati in prima approssimazione nell'equazione dinamica.

Anticipando i risultati osserviamo che per un'onda periodica sinusoidale di regime (cioè avente uguali le velocità di propagazione delle portate e delle altezze d'acqua),

il cui periodo $T = \frac{2\pi}{\eta}$ sia maggiore di un limite determinato in funzione delle caratteristiche dell'alveo e del moto-base uniforme, ciò comporta la sostituzione della (3) con una nuova scala di deflusso del tipo

$$\boxed{\Omega = K Q^n - \alpha \frac{\partial Q}{\partial t}}$$

dove K ed n sono dati sempre dalle (4) e (5) ed α è una nuova costante espressa dalla

$$\alpha = \frac{n^3}{2g i_f} \left(\frac{i_c}{i_f} - 1 + \frac{2n-1}{n^2} \right).$$

Questa espressione è valida qualunque sia l'ampiezza dell'onda e lungo tutto un tratto nel quale risulti trascurabile l'influenza della deformazione.

Sostituendo l'espressione precedente di Ω nell'equazione di continuità si è ricavato il coefficiente di attenuazione $e^{-\gamma x}$ dell'onda pura di regime che procede con velocità maggiore di U_0 . Vedremo che quando la pendenza del fondo supera un valore compreso fra $4 i_c$ e $2,25 i_c$, in relazione alla forma dell'alveo, le formule indicano un'esaltazione della stessa onda secondo il coefficiente $e^{\gamma x}$ con γ uguale, in entrambi i casi, a $\gamma^2 \alpha$.

2. - L'EQUAZIONE DINAMICA PER LE ONDE ALLUNGATE.

Riferiamoci ad un moto-base uniforme di portata Q_0 , velocità U_0 , e sezione Ω_0 , ed imponiamo che le oscillazioni di portata q e di sezione ω rispetto a questo moto varino molto gradualmente nel tempo.

Consideriamo l'equazione (1) nella forma

$$(7) \quad i_f \cdot \Omega^2 \chi^2 R = Q^2 + \Omega^2 \chi^2 R \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega} \right)^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega} \right) \right\}$$

Il termine $i_f \cdot \Omega^2 \chi^2 R$ è, in un alveo di pendenza costante, funzione soltanto di Ω (o della profondità, essendo il ca-

(3) Fer il calcolo della distanza alla quale il vertice superiore teoricamente dovrebbe raggiungere quello inferiore v. M. IELLI: *Sul moto perturbato delle correnti a pelo libero*. - «Annali dei LL.PP.», 1933, Roma.

(4) A questo proposito si vedano anche le osservazioni del SUPINO riportate nel n. 10 della nota: *La propagazione delle onde di traslazione*. - «L'Energia Elettrica», n. 4, 1953.

nale prismatico). Si può scrivere quindi, con K ed n dati dalle (4) o dalle (5):

$$\left(\frac{\Omega}{K}\right)^{2/n} = Q^2 + \left(\frac{\Omega}{K}\right)^{2/n} \cdot \frac{1}{i_f} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\Omega}\right) \right\}$$

od anche

$$(8) \quad \left(\frac{\Omega}{K}\right)^{2/n} = Q^2 + \left(\frac{\Omega}{K}\right)^{2/n} \cdot \frac{1}{i_f} \left\{ \left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g \Omega^3}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{Q}{g \Omega^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{g \Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{g \Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} \right\}.$$

Il 2° termine del secondo membro della (8), diviso per Q^2 , è sempre piccolo in confronto all'unità. Nello studio di prima approssimazione delle onde a lungo periodo (ed il significato di questa lunghezza dipende, come vedremo in seguito, dalla pendenza del fondo) il termine predetto viene trascurato. Noi lo considereremo piccolo del 1° ordine.

Dalla (8), elevando, tutto alla potenza $\frac{n}{2}$ e sviluppando in serie, segue allora:

$$(9) \quad \Omega = K Q^n + \frac{n K Q^n}{2 i_f} \left\{ \left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g \Omega^3}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{Q}{g \Omega^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{g \Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{g \Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} +$$

+ termini del 2° ordine o di ordine superiore.

Riferiamoci ad un'oscillazione della portata avente forma sinusoidale con periodo T (e pulsazione $\eta = \frac{2\pi}{T}$).

Poichè sappiamo, in base ai risultati del procedimento di prima approssimazione, che la velocità di propagazione delle onde lunghe di regime ($= -\frac{\partial Q/\partial t}{\partial Q/\partial x} = -\frac{\partial \Omega/\partial t}{\partial \Omega/\partial x} = \frac{\partial Q/\partial t}{\partial \Omega/\partial t}$, non tenendo conto della attenuazione) è dell'ordine di grandezza della velocità U_0 del moto-base uniforme, segue che i termini

$$\frac{Q^2}{\Omega^3} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x}; \quad \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t}; \quad \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$$

sono tutti di ordine $\leq U_0 \eta \cdot \frac{q_{max}}{Q_0}$

Il termine $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$, per la stessa ragione, risulta di ordine $\leq \frac{U_0 \eta}{U_0} \cdot \frac{q_{max}}{Q_0}$.

Tenuto conto del segno con cui questi fattori compaiono nella (9) si vede che l'ordine di grandezza stabilito per l'ultimo termine della (8) impone che siano piccole dal 1° ordine (rispetto all'unità) le espressioni

$$(10) \quad \frac{\Omega_0 \eta}{b U_0 i_f} \cdot \frac{q_{max}}{Q_0} \quad \text{e} \quad (10') \quad \frac{U_0 \eta}{g i_f} \cdot \frac{q_{max}}{Q_0} \quad (5).$$

La prima limitazione comprende la seconda quando la corrente considerata è lenta, la seconda comprende la prima quando la corrente è veloce. In condizioni critiche le (10) e (10') si equivalgono, essendo allora $\frac{\Omega_0}{b U_0} = \frac{U_0}{g}$.

Restringiamo ora queste limitazioni imponendo che, nel caso di corrente lenta, sia piccolo del 1° ordine il termine $\frac{\Omega_0 \eta}{b U_0} \cdot \frac{q_{max}}{Q_0}$ e, nel caso di corrente veloce, lo sia il termine $\frac{U_0 \eta}{g i_f}$. In tal modo le (10) e (10') non soltanto soddisfano la condizione imposta ma conservano lo stesso ordine di grandezza anche se $\frac{q_{max}}{Q_0}$ risulta prossimo ad 1.

Deriviamo ora la (9) rispetto ad x e rispetto a t e sostituiamo quindi queste derivate nell'espressione fra parentesi della (9) stessa.

Poichè i termini contenenti fattori dell'ordine di $\frac{\Omega_0 \eta}{b U_0 i_f}$ o $\frac{U_0 \eta}{g i_f}$, dopo la sostituzione, diventano piccoli del 2° ordine, è sufficiente considerare le derivate in parola nella forma (6)

$$(11) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = K n Q^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{e} \quad (11') \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = K n Q^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Essendo inoltre per l'equazione di continuità $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ la (9) diventa:

$$(12) \quad \Omega = K Q^n + \frac{n K Q^n}{2 i_f} \left\{ -\left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g \Omega^3}\right) K^2 n^2 Q^{2n-2} - \frac{2 Q}{g \Omega^2} K n Q^{n-1} + \frac{1}{g \Omega} \right\} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Nello stesso ordine di approssimazione si può sostituire nell'ultimo termine della (12) la funzione Ω al po-

(5) Per quanto riguarda la larghezza del pelo libero b che compare nella (10), essa dovrebbe essere assunta uguale al valor minimo possibile nel campo di oscillazione della profondità. Quando però l'escursione non è molto notevole, tenuto anche conto che le limitazioni (10) e (10') si riferiscono soltanto all'ordine di grandezza, si può assumere per b il valore b_0 relativo alla profondità di moto uniforme.

(6) Naturalmente le espressioni semplificate (11) e (11') sono lecite (con l'ordine di approssimazione fissato) soltanto agli effetti della sostituzione nel 2° termine del secondo membro della (9).

sto di $K Q^n$. Quindi

$$(13) \quad \Omega = K Q^n + \frac{n}{2g i_f} \left\{ \left(1 - \frac{\Omega^3 g}{Q^2 b} \right) n^2 - \left(2n - 1 \right) \right\} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

ed inoltre

$$(14) \quad 1 - \frac{\Omega^3 g}{Q^2 b} \approx 1 - \frac{K^3 Q^{3n} g}{Q^2 b} = 1 - \frac{K^3 g}{b} \cdot Q^{3n-2}$$

dato che questo termine è già moltiplicato per uno piccolo del 1° ordine.

L'espressione (14) varia molto poco con Q (l'esponente è compreso infatti fra 0 e $-\frac{1}{5}$). Con $n \approx \frac{2}{3}$ si ha senz'altro

$$(15) \quad 1 - \frac{\Omega^3 g}{Q^2 b} \approx 1 - \frac{K^3 g}{b} = 1 - \frac{i_c}{i_f}$$

dove i_c è la pendenza critica $\left(= \frac{g}{\chi^2} \frac{B}{b} \right)$ calcolata relativamente alla profondità generica. Date le piccole variazioni di i_c con Y questo calcolo può essere eseguito con riferimento alla profondità Y_0 del moto uniforme (come nel procedimento di Bakhmeteff per integrare la equazione dei profili di rigurgito).

Sostituendo nella (13) si ha in definitiva

$$(16) \quad \boxed{\Omega = K Q^n - \alpha \frac{\partial Q}{\partial t}}$$

con

$$(17) \quad \alpha = \frac{n^3}{2g i_f} \left(\frac{i_c}{i_f} - 1 + \frac{2n-1}{n^2} \right)$$

Riassumendo: la (16) con la posizione (17) rappresenta una nuova espressione di scala di deflusso valida per onde sinusoidali di periodo lungo su moto-base uniforme. Essa sostituisce nel nostro caso l'equazione dinamica (1) e dev'essere associata all'equazione di continuità per lo studio della propagazione delle onde in esame (7).

(7) Se le oscillazioni di portata q sono piccole in confronto alla portata Q_0 di moto uniforme (tanto da poterne trascurare i quadrati) la (16) si semplifica ulteriormente.

Sviluppiamo in serie il fattore $KQ = K(Q_0 + q)^n$. Fermandoci al 2° termine si ha

$$(16 a) \quad \Omega = K Q_0^n + n K Q_0^{n-1} \left(q - \beta \frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

dove si è posto

$$\beta = \frac{\alpha}{K n Q_0^{n-1}} = \frac{\alpha}{n} U_0$$

La lunghezza del periodo è determinata dalla condizione che i termini $\frac{2\pi U_0}{T i_f b U_0}$ (nel caso di corrente lenta) e $\frac{2\pi U_0}{T i_f g}$ (nel caso di corrente veloce) siano piccoli in confronto all'unità, tanto da poterne trascurare i quadrati. In particolare, volendo che la (16) approssimi l'equazione dinamica (1) con un errore $\leq 4\%$, deve essere

$$(18) \quad T \geq \frac{10\pi U_0}{b U_0 i_f} \text{ quando la corrente uniforme è lenta}$$

e

$$(18') \quad T \geq \frac{10\pi U_0}{g i_f} \text{ quando la corrente è veloce.}$$

Essendo $\Omega_0 = K Q_0^n$ e $\Omega = \Omega_0 + \omega$, segue

$$(16 b) \quad \omega = n K Q_0^{n-1} \left(q - \beta \frac{\partial q}{\partial t} \right) = \frac{n}{U_0} \left(q - \beta \frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

Ma, per le condizioni imposte circa la lunghezza del periodo, il termine $\frac{\beta \partial q}{\partial t}$ è piccolo del 1° ordine in confronto a q , sicchè con il grado di approssimazione fissato possiamo scrivere

$$(16 c) \quad q_{x,t} - \beta \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{x,t} = q_{x,t} - \beta$$

Dalle (16 b) e (16 c) deriva quindi la

$$(16 d) \quad \boxed{\omega_{x,t} = \frac{n}{U_0} \cdot q_{x,t} - \beta}$$

che è la più semplice espressione di scala di deflusso valida in moto gradualmente variabile quando siano soddisfatte le ipotesi premesse.

La relazione trovata ci consente anche di dimostrare che non vi è contraddizione tra i risultati conseguiti ora con il nostro procedimento ed un metodo proposto alcuni anni fa dal Supino per il calcolo della riduzione delle piene in un tronco fluviale o in una rete di canali di bonifica (cfr. G. SUPINO: *Le reti idrauliche*. - Zanichelli, Bologna 1938 e G. SUPINO: *La riduzione delle piene del Reno da Cento alla Bastia*. - «Giornale del G.C.», fasc. 1-2, gennaio-febbraio 1953).

Indicata con $v = V(t) - V(o)$ la differenza fra i volumi invasati rispettivamente all'istante t e all'istante iniziale, in un tratto di lunghezza x , l'ipotesi base di questo metodo sta nel supporre che v sia proporzionale istante per istante all'area $\omega = \Omega(t) - \Omega(o)$ della sezione terminale. Ma se la lunghezza x non è molto piccola le variazioni di v risultano evidentemente in anticipo rispetto a quelle di ω sicchè si può porre

$$(16 e) \quad v_{x,t} = \text{cost } \omega_{x,t} + \epsilon$$

dove lo sfasamento ϵ è lentamente crescente con x .

D'altra parte l'area ω è funzione della portata q secondo la (16 d) o, cambiando l'origine dei tempi, secondo la

$$(16 f) \quad \omega_{x,t} + \beta = \text{cost } q_{x,t}$$

In un tronco di un corso d'acqua tranquillo i valori di β e di ϵ sono sempre molto piccoli in confronto al periodo dell'onda sicchè, con un'approssimazione certamente maggiore di quella che si dovrebbe fare se fosse valida un'ordinaria scala di deflusso (cioè se fosse $\beta = 0$), possiamo ritenere trascurabile la loro differenza. Ne deriva

$$(16 g) \quad v_{x,t} = K_0 q_{x,t} \quad (\text{con } K_0 = \text{costante})$$

che è l'equazione impiegata nella ricerca predetta.

Le (18) e (18') mostrano che, a parità di profondità e di velocità, T è inversamente proporzionale alla pendenza del fondo, mentre a parità di pendenza e di scabrezza esso aumenta proporzionalmente alla radice della profondità.

A titolo indicativo riportiamo alcuni valori numerici di T calcolati con le precedenti (18) e (18').

1°) In una corrente lenta uniforme, con $U_0 = 1$ m/s ed $\frac{\Omega_0}{b} = 1$ m, un'onda può considerarsi di « periodo lungo » secondo il criterio indicato in precedenza quando è

$$\begin{array}{ll} T \geq 3 \text{ giorni e } 15 \text{ ore} & \text{se } i_f = 1.10^{-4} \\ T \geq 18 \text{ ore} & \text{« } i_f = 5.10^{-4} \\ T \geq 9 \text{ ore} & \text{« } i_f = 1.10^{-3}. \end{array}$$

2°) Se la corrente è veloce ed $U_0 = 2$ m/s, dalla (18') segue analogamente

$$\begin{array}{ll} T \geq 22' & \text{quando } i_f = 5.10^{-3} \\ T \geq 11' & \text{« } i_f = 1.10^{-2} \end{array}$$

Come si vede la limitazione inferiore del periodo risulta sensibile nei corsi d'acqua aventi pendenze del fondo molto piccole (intorno al $0,10/100$). Nelle reti idrografiche, dove sono frequenti pendenze di quest'ordine di grandezza, le onde di piena hanno generalmente durate maggiori dei minimi indicati (che si riferiscono ad un'escursione sinusoidale completa, positiva e negativa). Anche le oscillazioni di portata determinate dall'esercizio intermittente degli impianti idroelettrici, pur avendo periodi di ~ 12 ore, possono ritenersi normalmente onde lunghe — nel senso precisato — in relazione alle maggiori pendenze dei canali di scarico industriali (dell'ordine dell' $10/100$).

Nei canali collettori di bonifica, quando le pendenze sono del $0,2 \sim 0,30/100$, si presentano invece raramente onde di piena con periodi lunghi come quelli calcolati.

3. - L'ATTENUAZIONE DI PORTATA DELLE ONDE ALLUNGATE.

Deriviamo la (16) rispetto al tempo. Si ha

$$(19) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = K n Q^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}.$$

L'ultimo termine della (19) è piccolo del 2° ordine. Per ricavare l'equazione dinamica l'abbiamo trascurato (v. (12)). In quel caso il termine principale era infatti l'unità.

Sostituendo ora la (19) nell'equazione di continuità, dove i termini principali sono già piccoli del 1° ordine, per procedere con lo stesso grado di approssimazione dobbiamo conservare anche il fattore $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$.

Segue quindi, con la sostituzione indicata,

$$(20) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + K n Q^{n-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = + \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}.$$

Poichè è $Q = Q_0 + q$ ed abbiamo posto q funzione sinusoidale del tempo anche in una sezione generica, si ha $\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\eta^2 q$.

I risultati di questo procedimento hanno quindi validità per tutto il tratto del corso d'acqua dove si può ritenere che $q(t)$ vari, almeno approssimativamente, con legge sinusoidale.

La (20) diventa (essendo $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ecc. . . .)

$$(21) \quad \frac{\partial q}{\partial x} + K n Q^{n-1} \frac{\partial q}{\partial t} = -\eta^2 \alpha q$$

il cui integrale è

$$(22) \quad q(x, t) = e^{-\eta^2 \alpha x} f \left\{ t - \int_0^x K n Q^{n-1} dx \right\}.$$

La funzione f è assegnata dalla condizione che nella sezione origine sia $q(0, t) = q_0 \sin \eta t$.

Segue quindi.

$$(23) \quad q(x, t) = q_0 e^{-\eta^2 \alpha x} \sin \eta \left(t - \int_0^x K n Q^{n-1} dx \right)$$

L'espressione $\Omega(x, t)$ deriva subito dall'equazione dinamica (16) sostituendo a Q il valore $Q_0 + q(x, t)$ (8).

La (22) mette in evidenza che una perturbazione sinusoidale di portata si propaga con la velocità $\frac{1}{K n Q^{n-1}}$ ($= \frac{U}{n} (1 + \frac{\alpha}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t})$ nel nostro ordine di approssimazione) e che la sua escursione massima può attenuarsi od esaltarsi secondo il segno del coefficiente α (rispettivamente positivo o negativo).

Come si vede, le velocità di propagazione del massimo e del minimo di portata hanno ancora gli stessi valori trovati con il procedimento di prima approssimazione. Si potrebbero ripetere quindi le osservazioni già richiamate sulla deformazione dell'onda. Ciò giustifica inoltre le considerazioni svolte al n. 2 sull'ordine di grandezza dei termini della (9).

Per quanto riguarda l'attenuazione, essendo per la (17)

$$\alpha = \frac{n^3}{2 g i_f} \left(\frac{i_c}{i_f} - 1 + \frac{2n-1}{n^2} \right)$$

segue che l'onda di regime a lungo periodo (di cui abbiamo precisato i caratteri al n. precedente), *propagantesi sempre con velocità $> U_0$, si attenua fin dalla sezione origine della perturbazione soltanto finchè la pendenza del fondo dell'alveo prismatico è inferiore a $\sim 4 i_c$ (oppure a $2,25 i_c$*

(*) A questo proposito è opportuno notare che il procedimento esposto può essere generalizzato anche ad una variazione periodica qualunque di q (ricorrendo allo sviluppo in serie di Fourier) purchè q_{max}/Q_0 sia abbastanza piccolo da poterne trascurare le potenze superiori ad 1. Allora infatti la $K Q^n$ diventa lineare rispetto a q .

se si assume $n = \frac{3}{5}$, come nel caso di alvei rettangolari larghissimi⁽⁹⁾.

L'attenuazione del colmo di portata (come pure l'esaltazione nel caso $i_r > 4 i_c$ segue, per onde a lungo periodo sinusoidali, la legge esponenziale $e^{-\gamma x}$ con

$$(24) \gamma = + \eta^2 \alpha = \frac{n^3}{2 g i_r} \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2 \left(\frac{i_c}{i_r} - 1 + \frac{2 n - 1}{n^2} \right)$$

essendo $n = \frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$ (secondo la forma dell'alveo).

Negli alvei con pendenza del fondo molto piccola ($\leq 0,5\%$) la (24) si può scrivere con buona approssimazione ($\geq 2\%$):

$$(24') \gamma = \frac{n^3}{2 g i_r} \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{i_c}{i_r} = \frac{n^3}{2 \chi^2 i_r^2} \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2$$

Se si considera un alveo rettangolare molto largo ($n = \frac{3}{5}$) la (24) diventa:

$$(24'') \gamma = \frac{27}{250 i_r} \left(\frac{2 \pi}{T} \right)^2 \left(\frac{1}{\chi^2 i_r} - \frac{4}{9 g} \right)$$

che è l'espressione trovata dal Puppini⁽¹⁰⁾, per onde di piccola ampiezza e di periodo lungo, partendo dalle equazioni dell'idraulica linearizzate.

Il procedimento seguito in questa nota ci consente di aggiungere che, nel tratto in cui l'onda ha forma puramente sinusoidale, il valore (24) o (24'') dell'attenuazione conserva validità anche quando l'ampiezza dell'oscillazione non sia piccola.

4. - L'ATTENUAZIONE DELLA SEZIONE.

Il massimo valore di Ω , in una sezione generica distante x dall'origine (sempre per una variazione sinusoidale di portata) si può calcolare, a meno di termini del 2° ordine, con la

$$\Omega(x)_{max} = K [Q_0 + q(x)_{max}]^n.$$

Ed essendo

$q(x=0)_{max} = q_0$; $q(x)_{max} = q_0 e^{-\gamma x}$; $\Omega_0 = K Q_0^n$ si ottiene mediante sviluppo in serie $\left(\frac{q_{max}}{Q_0} \right)$, per onde sinusoidali, è sempre < 1)

⁽⁹⁾ Per onde linearizzate un risultato perfettamente analogo (con $i_r < 3,3 i_c$) è stato trovato da Bonvicini. Cfr.: *Sulla propagazione delle perturbazioni di regime nei corsi a pelo libero*. - «L'Elettrotecnica», n. 28, 1934. Sempre per le stesse onde, supponendo χ costante, Supino riporta il valore $i_r < 4 i_c$ che coincide con quello trovato nel nostro caso. Cfr. *Lezioni di Idraulica*. Patron, Bologna 1954.

⁽¹⁰⁾ U. PUPPINI. - «Idraulica», pag. 443, ediz. Zanichelli, Bologna 1947.

$$\Omega(x)_{max} = \Omega_0 + K n Q_0^{n-1} q_0 e^{-\gamma x} + \frac{K n (n-1)}{2} Q_0^{n-2} q_0^2 e^{-2\gamma x} + \dots$$

od anche

$$(25) \Omega(x)_{max} = \Omega_0 + n \frac{Q_0}{Q_0} q_0 e^{-\gamma x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{Q_0}{Q_0^2} q_0^2 e^{-2\gamma x} + \dots$$

Il terzo termine della (25) risulta sempre piccolo in confronto al secondo. Per $x=0$ esso è già inferiore ad $\frac{1}{5}$ del precedente e decresce rapidamente con l'aumentare della distanza dall'origine. La (25) mostra quindi che il coefficiente γ rappresenta essenzialmente l'attenua-

TABELLA I. Alveo rettangolare molto largo ($n = 3/5$)

Correnti lente: $Y_0 = 1 \text{ m}$, $\chi = 30$, $i_c \approx 1,1\%$								
T	U_0	i_r	$10^6 \gamma$	$e^{-\gamma x}$				
ore	m/sec		m^{-1}	= 0,95	= 0,90	= 0,80	= 0,70	= 0,50
				dopo	dopo	dopo	dopo	dopo
				km	km	km	km	km
c 40'	2,00	0,0060	17,30	~3	6,1	13	20,6	40
	1	2,00	0,0045	14,80	3,5	7,1	15	24
	2,30	0,0060	7,70	6,7	13,7	29	46,5	90
2 30'	1,50	0,0025	8,42	6,1	12,5	26,5	42,5	82
	2,00	0,0045	2,36	21,7	45	95	—	—
	2,30	0,0060	1,23	42	86	—	—	—
5	1,16	0,0015	6,12	8,4	17	36,5	58,5	—
	1,35	0,0020	3,37	15	31	66	106	—
	1,50	0,0025	2,11	24	50	106	—	—
10	0,95	0,0010	3,53	14,5	30	63	101	—
	1,16	0,0015	1,53	33	69	—	—	—
	1,35	0,0020	0,85	60	—	—	—	—
20	0,74	0,0006	2,50	20	42	90	—	—
	0,95	0,0010	0,88	58	—	—	—	—
40	0,60	0,0004	1,42	36	74	—	—	—
	0,74	0,0006	0,62	83	—	—	—	—

Correnti molto veloci ($i_r > 2,25 i_c$): $Y_0 = 0,50$, $\chi = 50$, $i_c \approx 4\%$								
T	U_0	i_r	$10^6 \gamma$	$e^{-\gamma x}$				
ore	m/sec		m^{-1}	= 1,05	= 1,10	= 1,20	= 1,30	= 1,50
				dopo	dopo	dopo	dopo	dopo
				km	km	km	km	km
0 11'	6,12	0,03	10,45	4,6	9,1	17,4	25	39
0 15'	5,00	0,02	6,65	7,2	14	27,5	40	61
	6,12	0,03	5,61	8,5	17	32,5	47	72
0 30'	3,50	0,01	0,68	70	—	—	—	—
	5,00	0,02	1,66	29	57,5	110	—	—
	6,12	0,03	1,40	34	68	—	—	—

zione anche della sezione (o della profondità in alveo rettangolare) ⁽¹¹⁾.

Nella tab. I riportiamo alcuni valori numerici del coefficiente γ relativi ad onde che si propagano in un alveo rettangolare larghissimo ($n = \frac{3}{5}$, formula (24'')).

Gli spazi lasciati in bianco indicano distanze nettamente superiori ai 100 km.

Se l'alveo rettangolare non è larghissimo l'esponente della scala di deflusso tende ad aumentare, con il diminuire di b_1 fino ad oltre $n = \frac{2}{3}$. Con questo valore, per mezzo della (24), si sono calcolati i coefficienti γ della tab. II. Essi si riferiscono ad un moto-base uniforme

TABELLA II. Alveo rettangolare non larghissimo ($n = 2/3$)

Correnti lente: $Y_0 = 1$ m, $\chi > 30$ (funzione della larghezza), $i_c \approx 1,1^{9/100}$								
T ore	U_0 m/sec	i_f	$10^6 \gamma$ m^{-1}	$e^{-\gamma x} = 0,95$ km	$e^{-\gamma x} = 0,90$ km	$e^{-\gamma x} = 0,80$ km	$e^{-\gamma x} = 0,70$ km	$e^{-\gamma x} = 0,50$ km
0 40'	2,30	0,0060	27,0	1,9	3,9	8,3	13	25,7
1	2,00	0,0045	22,25	2,3	4,7	10	16	31
	2,30	0,0060	12,05	4,3	8,8	18,5	29,6	57,5
2 30'	1,50	0,0025	12,15	4,2	8,7	18,3	29,4	57
	2,00	0,0045	3,56	14,4	30	63	100	—
	2,30	0,0060	1,93	26,5	54,5	—	—	—
5	1,16	0,0015	8,62	5,95	12,2	26	41,5	80,5
	1,35	0,0020	4,80	10,7	22	46,5	74,5	—
	1,50	0,0025	3,03	17	35	74	—	—
10	0,95	0,0010	4,91	10,4	21,4	45	72,5	—
	1,10	0,0015	2,16	24	47	103	—	—
	1,35	0,0020	1,20	43	83	—	—	—
20	0,74	0,0006	3,46	15	30	65	103	—
	0,95	0,0010	1,23	42	86	—	—	—
40	0,60	0,0004	1,96	26	54	114	—	—
	0,74	0,0006	0,86	60	—	—	—	—
Correnti molto veloci ($i_f > 4 i_c$): $Y_0 = 0,50$, $\chi > 50$ (funzione della larghezza), $i_c \approx 4^{9/100}$								
T ore	U_0 m/sec	i_f	$10^6 \gamma$ m^{-1}	$e^{-\gamma x} = 1,05$ km	$e^{-\gamma x} = 1,10$ km	$e^{-\gamma x} = 1,20$ km	$e^{-\gamma x} = 1,30$ km	$e^{-\gamma x} = 1,50$ km
0 11'	6,12	0,03	-2,90	16,5	33	63	90	—
0 15'	5,00	0,02	-1,98	24	48	92	—	—
	6,12	0,03	-1,55	31	61	—	—	—
0 30'	4,45	0,016	0	—	—	—	—	—
	5,00	0,02	-0,50	96	—	—	—	—
	6,12	0,03	-0,39	122	—	—	—	—

(11) Nella trattazione svolta in questi numeri 3 e 4 si è supposta sempre sinusoidale la variazione di q sicché la variazione di ω lo risulta soltanto approssimativamente (e tanto meno quanto maggiore è il rapporto q_{max}/Q_0).

Se si fosse partiti invece dall'ipotesi di variazione sinusoidale della

avente le stesse caratteristiche (velocità e profondità) del caso precedente.

Il confronto fra le due serie di risultati numerici, mostra che, con il restringersi dell'alveo, a parità di caratteristiche del moto-base uniforme, si accentua nelle correnti lente lo smorzamento dell'onda di regime con velocità $> U_0$ mentre si attenua sensibilmente l'esaltazione prevista nelle correnti molto veloci. Sul significato quantitativo di questa esaltazione ritorneremo più avanti.

5. - CELERITÀ DELL'ONDA.

Si è già detto che con il termine « onda di regime » indichiamo, secondo consuetudine, un'onda per la quale entrambe le funzioni Q ed Ω si presentano sempre nella stessa fase ad un osservatore che procede con la velocità W (celerità dell'onda). Un'onda quindi per cui i massimi di Q e di Ω si propagano con la stessa velocità. Il riferimento ai valori massimi diventa utile quanto si tien conto, come nel nostro caso, anche dell'attenuazione.

Dalla (22) risulta che il colmo di portata si propaga con la velocità

$$(28) \quad W_{Q_{max}} = \frac{1}{K n Q_{max}^{n-1}}$$

nei soliti limiti di approssimazione ⁽¹²⁾.

Di sezione (senza imporre nessuna condizione per q) la (21), tenuto conto dell'equazione di continuità, avrebbe conservato la forma precedente con la sola sostituzione della funzione ω al posto della q . Infatti derivando la (16) rispetto ad x si ha

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} - K n Q^{n-1} \frac{\partial q}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} - K n Q^{n-1} \frac{\partial q}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

ed essendo

$$\frac{\partial q}{\partial x} = - \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

segue

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + K n Q^{n-1} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

cioè

$$(21') \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + K n Q^{n-1} \frac{\partial \omega}{\partial t} = - \eta^2 \alpha \omega$$

In questo caso è l'oscillazione di q che risulta solo approssimativamente sinusoidale.

Di conseguenza, purchè si modifichi l'ipotesi iniziale, i risultati e le considerazioni relativi all'attenuazione della portata possono essere trasferiti all'attenuazione della sezione.

Ciò giustifica il confronto fra il nostro γ , che avevamo indicato come coefficiente di attenuazione della portata e l'analoga espressione del Puppini che si riferiva invece allo smorzamento di ampiezza dell'onda.

(12) Il nostro studio si riferisce sempre ad onde periodiche con velocità $> U_0$ (si è visto infatti che è $W = \frac{1}{K n Q^{n-1}} \approx \frac{U}{n}$). Si

può confermare però anche per questa via l'esistenza di un'altra propagazione di regime con celerità $W' < W$ e generalmente $< U_0$.

Infatti le (11) e (11') del n. 2 si possono scrivere nella forma

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{W} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{W} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ricaviamo ora la velocità di propagazione dell'ampiezza massima della sezione. Per definizione è

$$W_{Q_{max}} = - \frac{\partial^2 \Omega / \partial t^2}{\partial^2 \Omega / \partial t \partial x} = \frac{\partial^2 Q / \partial x \partial t}{\partial^2 Q / \partial x^2}$$

Se deriviamo la (21) rispetto ad x e poniamo $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, risulta

$$(29) \quad W_{Q_{max}} = \frac{1}{K n [Q^{n-1}]_{\Omega = \Omega_{max}}}$$

Per quanto detto inizialmente l'onda è di regime se $W_{Q_{max}}$ risulta uguale a $W_{\Omega_{max}}$. Nella (29) il valore di Q deve essere calcolato all'istante in cui è $\Omega = \Omega_{max}$. Esso differisce quindi dal valore Q_{max} che compare nella (28). Dato però che lo sfasamento fra i massimi delle funzioni Q ed Ω è piccolo del 1° ordine, questa differenza risulta piccola del 2° ordine, ossia trascurabile nei nostri limiti di approssimazione.

e la (9) diventa quindi

$$(12') \quad \Omega = K Q^n + \frac{n K Q^n}{2 i_f} \left\{ - \left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g \Omega^3} \right) \frac{1}{W^2} - \frac{2 Q}{g \Omega^2} \frac{1}{W} + \frac{1}{g \Omega} \right\} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Dal confronto fra la (12) del n. 2 e la precedente (12') segue la equazione

$$\left(U^2 - g \frac{\Omega}{b} \right) \frac{1}{W^2} - \frac{2 U}{W} - \left(U^2 - g \frac{\Omega}{b} \right) K^2 n^2 Q^{n-2} + 2 U K n Q^{n-1} = 0$$

le cui soluzioni sono

$$(27) \quad \frac{1}{W} = K n Q^{n-1} \quad (28) \quad \frac{1}{W'} = \frac{2 U}{U^2 - g \frac{\Omega}{b}} - K n Q^{n-1}$$

Il valore (27) è quello noto della celerità dell'onda che si propaga con velocità $> U_0$. Il valore (28) corrisponde alla propagazione dell'onda di regime, con velocità generalmente minore di U_0 , che in corrente lenta procede verso monte e in corrente veloce si propaga sempre verso valle.

In correnti lentissime W' può divenire anche $> U_0$, ma questa ultima assume allora valori praticamente trascurabili. Il valore assoluto di W' è sempre $> W'$; essi tendono ad uguagliarsi soltanto per $\frac{U^2}{g} \frac{b}{\Omega} \rightarrow 0$.

Il Puppini (op. citata pag. 442) aveva trovato per W' (in alveo rettangolare molto largo) il valore

$$\frac{1}{W'} = \frac{2 U_0}{U_0^2 - g Y_0} - \frac{3}{5 U_0}$$

che corrisponde al nostro (27) se si pone

$$n = \frac{3}{5}, \quad U = U_0, \quad Y = Y_0 \quad e \quad K n Q^{n-1} = \frac{\pi}{U_0} = \frac{3}{5 U_0}$$

La sostituzione delle funzioni U ed Y con i valori medi (relativi al moto uniforme) deriva evidentemente dal procedimento seguito dall'A. che, come abbiamo detto, è partito dalle equazioni dell'idraulica linearizzate.

Le onde che si propagano con velocità W' hanno un interesse pratico limitato perchè si dimostra (v. ad es. PUPPINI - op. citata) che la loro attenuazione è sempre molto rapida.

6. - OSSERVAZIONI SULL'ESALTAZIONE DELL'ONDA PURA DI REGIME CHE SI PROPAGA IN UNA CORRENTE MOLTO VELOCE.

Al n. 3 si è detto della possibilità che in un caso le onde a lungo periodo si esaltino propagandosi verso valle.

Alla luce delle considerazioni precedenti quel risultato significa più precisamente che quando i_f è $> 4 i_c$ (o 2,25 i_c , se si pone $n = 3/5$) può esaltarsi l'onda pura di regime più veloce di U_0 , cioè quell'unica onda per la quale Q_{max} ed Ω_{max} si propagano con la stessa celerità

$$W = \frac{1}{K n Q_{max}^{n-1}}$$

E se pensiamo che per ottenere questo tipo di onda è necessario che nella sezione origine l'oscillazione di Ω abbia un determinato anticipo rispetto all'oscillazione di Q , allora il risultato apparentemente strano diventa coerente con le premesse (v. n. 3) (13). Anzi ad esso si poteva giungere molto prima prendendo in considerazione soltanto l'equazione (12).

Gli argomenti finora portati per giustificare l'impossibilità di un'esaltazione — quando si incontra nello studio delle onde di periodo breve — perdono la loro importanza nei confronti del procedimento esposto in questa nota per lo studio delle intumescenze allungate. Infatti, o essi derivano da incertezze sulla validità dell'equazione del moto vario, che nella situazione considerata di movimento quasi uniforme si è ridotta sostanzialmente all'equazione di Chézy (sulla quale in genere non sorgono dubbi) oppure si riferiscono specificamente al processo consueto di linearizzazione (14).

Accertata così la tendenza ad esaltarsi delle onde lunghe di regime che procedono con velocità $> U_0$ negli alvei a forte pendenza, resta da vedere se questa esaltazione può sensibilmente manifestarsi. L'onda infatti si deforma nel suo percorso e di conseguenza, come abbiamo detto, i risultati del nostro procedimento, impostato sulla forma sinusoidale dell'intumescenza e sulla gradualità delle sue variazioni nel tempo, sono validi soltanto in un tratto limitato a partire dall'origine. La lunghezza di questo percorso sarà naturalmente tanto maggiore quanto meno accentuate sono le differenze di velocità fra il vertice superiore e quello inferiore dell'onda.

Per un'indicazione quantitativa — sebbene in eccesso — può servire la conoscenza della distanza D alla quale teoricamente avverrebbe la sovrapposizione dei due vertici.

(13) Su questo argomento si vedano le considerazioni svolte dal SUPINO nel n. 7 della nota: *Propagazione di piccole onde su moto-base permanente*. - « L'Energia Elettrica », n. 6, 1953.

(14) La possibilità di un'esaltazione è stata rilevata anche dal MASSÉ nella nota: *Des intumescences dans les torrents*. - « Rev. gen. de l'Hydraulique », n. 10, novembre-dicembre 1937. - Questo studio, come i precedenti (v. P. MASSÉ: *Hydrodynamique fluviale. Régimes variables*, Paris, Hermann, 1935) si riferisce alla propagazione dell'intumescenza provocata da una variazione *aperiodica* di portata. L'A. deduce che quando la velocità assintotica $3/2 U_0$ supera la velocità del fronte d'onda $U_0 + \sqrt{g Y_0}$ (ossia quando i_f è $> 4 i_c$) l'altezza della perturbazione dovrebbe crescere esponenzialmente e tutta l'intumescenza concentrarsi sul fronte d'onda, « sotto forma di una specie di muro d'acqua ».

Non tenendo conto dell'attenuazione (o dell'esaltazione) si ha, secondo Lelli (cfr. nota ⁽³⁾) la relazione

$$(30) \quad D = \frac{T Q_0^{1-n}}{2 n K \left[\left(\frac{Q_0}{Q_0 - q_0} \right)^{1-n} - \left(\frac{Q_0}{Q_0 + q_0} \right)^{1-n} \right]} = \frac{T U_0}{2 n \left[\left(\frac{Q_0}{Q_0 - q_0} \right)^{1-n} - \left(\frac{Q_0}{Q_0 + q_0} \right)^{1-n} \right]}$$

che è stata scritta impiegando i nostri simboli.

Altrimenti, il calcolo di D dev'essere eseguito partendo dall'equazione

$$K n \left[\int_0^D (Q_0 + q_0 e^{-\gamma x})^{n-1} dx - \int_0^D (Q_0 - q_0 e^{-\gamma x})^{n-1} dx \right] + \frac{T}{2} = 0 \quad (31)$$

Nella tab. III sono riportati alcuni valori di D calcolati con la (31), relativi ad ampiezze totali di oscillazione pari al 60%, 40% e 20% del valore di moto uniforme ⁽¹⁵⁾.

⁽¹⁵⁾ Anche se l'ampiezza totale dell'oscillazione di portata risulta notevole (purchè non superi l'80% del valore di moto uniforme) la (31) si può scrivere, sviluppando in serie le potenze $n-1$:

$$K n Q_0^{n-1} \int_0^D \left[2(n-1) \frac{q_0}{Q_0} e^{-\gamma x} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} \left(\frac{q_0}{Q_0} \right)^3 e^{-3\gamma x} \right] dx + \frac{T}{2} = 0$$

ossia

$$(31') \quad \frac{2 n (1-n)}{\gamma U_0} \cdot \frac{q_0}{Q_0} \left[1 - e^{-\gamma D} + \frac{\left(\frac{q_0}{Q_0} \right)^2 (n-2)(n-3)}{18} (1 - e^{-3\gamma D}) \right] = \frac{T}{2}$$

Con ampiezza totale $\leq 40\%$ la (31') si semplifica ulteriormente nella

$$(31'') \quad e^{-\gamma D} = 1 - \frac{\gamma T U_0}{4 n (1-n) q_0 / Q_0}$$

TABELLA III.

T ore	U ₀ m/sec	i _r	10 ⁶ γ m ⁻¹	Distanza D in km per 2 q ₀ /Q ₀ =		
				60 %	40 %	20 %
Correnti lente in alveo rettangolare larghissimo: Y ₀ = 1 m, n = 3/5, χ = 30						
0 40'	2,30	0,006	17,30	23 (18)	4c (29)	∞ (58)
5	1,16	0,0015	6,12	92 (70)	18c (108)	∞ (220)
10	0,95	0,0010	3,53	150 (113)	28c (175)	∞ (360)
20	0,74	0,0006	2,50	240 (176)	48c (270)	∞ (540)
Correnti molto veloci in alveo rettangolare non larghissimo: Y ₀ = 0,50 m, n = 2/3, χ > 50 (funzione della larghezza)						
0 11'	6,12	0,03	- 2,90	14,5 (14,5)	22 (22)	43 (46)
0 15'	5,00	0,02	- 1,98	16 (16)	25 (25)	49 (52)

Fra parentesi sono indicati i risultati della (30). Nelle correnti lente si è fatto riferimento agli esempi della tab. I (alveo rettangolare molto largo), mentre nelle correnti veloci con $i_r > 4 i_c$, dato ch'esse raramente si presentano in alvei larghissimi, ci si è riferiti agli esempi della tab. II assumendo $n = \frac{2}{3}$.

Tenuto conto che queste distanze, con le caratteristiche di moto uniforme assegnate, sono le minime relative ad ogni pendenza (in quanto il periodo scelto è stato sempre il più breve consentito) il confronto fra i dati delle precedenti tabelle giustifica le seguenti osservazioni.

Da un lato le formule per il calcolo dell'attenuazione delle onde di regime a lungo periodo, che si propagano verso valle nelle correnti lente, possono ritenersi valide in tutto il campo delle ordinarie applicazioni. Dall'altro l'influenza della deformazione si fa sentire più rapidamente della variazione di ampiezza (indicata dalle formule) quando le stesse onde si propagano con velocità $> U_0$ in alvei aventi pendenza del fondo $> 4 i_c$. Ne deriva in questo caso che la tendenza alla deformazione, per onde non piccolissime, ha fin dall'origine lo stesso ordine di grandezza della tendenza all'esaltazione.

ENRICO MARCHI.

Un criterio per la verifica alla filtrazione delle arginature in terra
Giornale del Genio Civile, 1957

UN CRITERIO PER LA VERIFICA ALLA FILTRAZIONE DELLE ARGINATURE IN TERRA

ENRICO MARCHI

SOMMARIO. — Si studia il processo di filtrazione attraverso gli argini fluviali — soggetti a carichi variabili con il regime del corso d'acqua in alveato — utilizzando l'equazione linearizzata del moto gradualmente vario e successivamente (in forma approssimata) anche l'equazione non lineare. Ad una soluzione maggiorante per la linea di saturazione si giunge immediatamente partendo dall'involuppo dell'onda di piena del corso d'acqua con onde rettangolari aperiodiche. Le formule consentono di eseguire con semplicità la verifica, agli effetti della filtrazione, della larghezza arginale.

1. Gli argini in terra dei corsi d'acqua soggetti a regimi variabili, pur presentando un coefficiente di filtrazione molto basso, non possono ritenersi impermeabili, sotto elevate prevalenze, se non in relazione a durate limitate di carico. Evidentemente un'arginatura, ritenuta sufficientemente impermeabile quando il livello del corso d'acqua si mantiene il massimo soltanto per qualche giorno, può diventare insufficiente se lo stesso carico si conserva per un tempo dieci o venti volte maggiore.

Le dimensioni di un argine devono dipendere quindi non soltanto dalle caratteristiche del materiale impiegato per la sua formazione ma anche dal regime del corso d'acqua ch'esso inalvea.

Questa impostazione della filtrazione attraverso gli argini, come fenomeno di moto vario anziché di moto permanente, è stata proposta e seguita dal Supino in una nota recente ⁽¹⁾. In essa l'A., dopo uno studio in regime stazionario sul tracciamento della linea di saturazione nelle dighe in terra (modifica della linea di Kozeny-Casagrande), ha impostato la ricerca in moto vario della linea d'infiltrazione più pericolosa negli argini. Per questa Egli propone di assumere l'involuppo delle curve di pelo libero che si possono tracciare — con prefissate forme d'onda periodiche all'origine — nei diversi istanti del periodo di piena considerato.

Nell'ordine di idee premesso, indichiamo qui un procedimento che, partendo dall'involuppo dell'onda di piena del corso d'acqua con un'onda od eventualmente con una successione di onde aperiodiche rettangolari, consente di determinare immediatamente la linea di saturazione più pericolosa e permette così di eseguire con notevole semplicità la verifica alla filtrazione delle dimensioni arginali.

In questa ricerca utilizzeremo in un primo tempo l'equazione linearizzata del moto vario delle acque filtranti e successivamente anche l'equazione completa non lineare, con il ricorso ad una soluzione maggiorante.

2. Facciamo riferimento allo schema della figura 1.

Indichiamo con AB il limite inferiore della falda freatica (setto argilloso) supposto orizzontale; con CD il pelo libero della falda stessa profonda H_0 e con h_0 il sopraelevamento massimo del livello del corso d'acqua rispetto a CD .

Ammettiamo inoltre che tutto l'ammasso sovrastante AB , nella zona interessata dall'argine, sia omogeneo ed isotropo: abbia cioè un coefficiente di filtrazione K e un coefficiente di porosità λ costanti ⁽²⁾.

Con i simboli della figura 1, dove P indica un punto generico del pelo libero ad un dato istan-

⁽¹⁾ SUPINO, G.: *Die Sickerlinie in Deichen un Staudämmen*. «Die Bautechnik», gennaio 1956.

La pubblicazione dello stesso articolo (in italiano) è in corso di stampa negli «Atti del V Convegno regionale dell'Ass. Idrotecnica Italiana», Milano, 8-9 maggio 1955.

⁽²⁾ Nel caso abbastanza comune che il coefficiente di filtrazione del materiale costituente l'argine sia minore di quello dell'ammasso sottostante, si fa un'ipotesi favorevole alla sicurezza attribuendo a K quest'ultimo valore.

te (3), l'equazione del moto piano di filtrazione, variabile nel tempo, è notoriamente

$$\frac{K}{2} \frac{\partial^2 (H_0 + h)^2}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial h}{\partial t} \quad [1]$$

La [1] deriva dalla legge di Darcy-Ritter e dall'equazione di continuità, sotto la condizione che le superfici di ugual carico siano piane e verticali (ipotesi di Dupuit).

R. Meyer (4) ha dimostrato che questa approssimazione è senz'altro accettabile finchè ci si

riodica. Quest'ultima a parità di forma, dà luogo sempre a sopraelevazioni del pelo libero, a distanza dall'origine, maggiori di una corrispondente oscillazione periodica alternativamente positiva e negativa.

Date le notevoli semplificazioni introdotte inizialmente per riportarci ad uno schema che consentisse una facile interpretazione analitica, non è il caso ora di sottilizzare sulla possibile forma della variazione nel tempo del livello del corso d'acqua. Seguendo un criterio usuale nelle applicazioni di ingegneria, conviene allora adottare

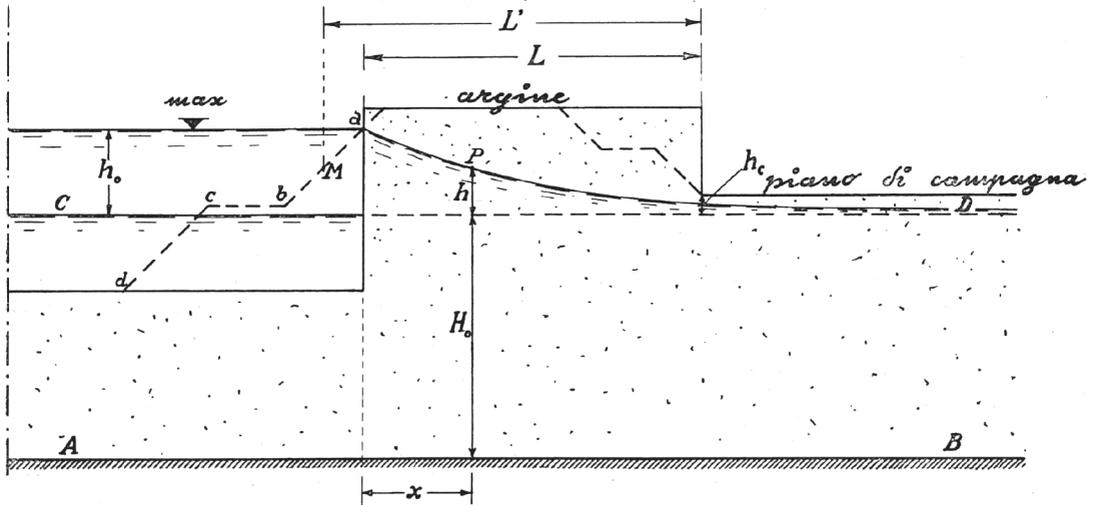


FIG. 1.

pone ad una distanza dal fronte più grande dello spessore della falda. La variazione dei carichi nel tempo dovrebbe inoltre essere piccola. Se questa ultima condizione non è perfettamente soddisfatta all'origine, la sua influenza è però poco sensibile nella zona dove l'ipotesi di Dupuit può ritenersi valida.

Nel casi in cui h sia piccolo in confronto ad H_0 , la relazione precedente si riduce ad una nota equazione lineare alle derivate parziali del 2° ordine

$$K H_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial h}{\partial t} \quad [2]$$

La variazione nel tempo di h per $x = 0$ può essere assegnata come variazione periodica o ape-

riodica. Questa forma d'onda aperiodica rettangolare perchè essa, involupando tutte le possibili intumescenze aventi la stessa ampiezza massima h_0 , fornisce senza dubbio una soluzione maggiorante del nostro problema.

A questo proposito si osservi che, qualunque sia l'impostazione che si vuol dare a questo tipo di ricerca, la larghezza minima dell'argine (dal punto di vista dell'impermeabilità) risulterà sempre funzione di due caratteristiche dell'ammasso: il coefficiente di filtrazione e quello di porosità. Ora, mentre quest'ultimo varia poco e si può determinare generalmente con un errore minore del 10 %, la misura di K presenta sempre un notevole margine di incertezza. Tale da rendere in gran parte illusoria la maggior approssimazione

(3) La linea passante per P nella figura 1 rappresenta in generale la curva $p = O$ (cioè a pressione costante uguale a quella atmosferica). Essa coincide con il pelo libero in assenza di fenomeni di capillarità (ritenuti qui trascurabili) e colla linea dei carichi piezometrici sul fondo AB se le superfici di ugual carico possono confondersi con piani verticali normali al piano del moto.

Sugli andamenti sperimentali di queste linee si vedano le ricerche di Ehrenberger, Muskat-Wyckoff-Botset, e Russo Spena.

(4) MEYER, R.: *Quelques résultats théoriques récents concernant les écoulements des nappes d'eau souterraines* (1ª parte). « La Houille Blanche », gennaio-febbraio 1955, pagg. 86-108.

delle formule che si potrebbero ottenere partendo da ipotesi meno semplici di quelle assunte.

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{3. Sotto le condizioni che:} \\
 \text{nell'istante } t = 0 \\
 \text{sia } h = 0 \quad \text{per } x \geq 0; \\
 \text{nella sezione } x = 0 \\
 \text{sia } h = h_0 = \text{cost. per } 0 < t < T \\
 \quad \quad \quad h = 0 \quad \text{per } t > T \\
 \text{e che per } x \rightarrow \infty \\
 \text{sia } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x, t) = 0
 \end{array} \right\} [3]$$

la [2] si può integrare facilmente, ad esempio per mezzo della trasformazione di Fourier. (Si tratta di una soluzione ben nota nella propagazione del calore; V. ad es. N. SNEDDON: *Fourier Transforms*, London, 1951, pagg. 166 e seguenti).

Si ha:

$$h(x, t) = h_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0 t}} \right) \right] \text{ per } 0 < t \leq T \quad [4]$$

$$\begin{aligned}
 h(x, t) = h_0 \left[\Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0(t-T)}} \right) - \right. \\
 \left. - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0 t}} \right) \right] \text{ per } t \geq T \quad [5]
 \end{aligned}$$

dove si è indicato con $\Phi(\xi)$ la funzione di errore

$$\text{di Gauss } \Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\eta^2} d\eta.$$

La [4] raggiunge, per una data ascissa x , il suo valore massimo quando è $t = T$. Il massimo assoluto di h dovrebbe trovarsi però fra i valori della [5] perchè fra questi vi è anche il massimo precedente.

Al nostro scopo è sufficiente calcolare il valore di h per $t = T$. Dopo questo istante infatti un eventuale superamento dall'argine non desta serie preoccupazioni dato che il pelo libero all'alimentazione è già tornato al livello primitivo.

Dalla formula [4], indicando per semplicità di scrittura con h_{\max} il valore di h per $t = T$, segue

$$h_{\max} = h_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0 T}} \right) \right] \quad [6]$$

Possiamo allora dedurre il valore L di x per cui la sopraelevazione in corrispondenza all'unghia verso campagna dell'argine diventa minore od uguale ad un limite h_c ritenuto accettabile. Segue infatti dalla [6]

$$\Phi \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0 T}} \right) \cong 1 - \frac{h_c}{h_0} \quad [7]$$

e da questa relazione, fissato h_c , si può calcolare facilmente L , disponendo di una tabella di valori della funzione Φ (v. tab. A tratta da JAHNKE-EMDE: *Funktionentafeln*, 1933, p. 98).

Ad esempio, volendo che la sopraelevazione rispetto al livello della falda freatica, in corrispondenza dell'unghia a valle dell'argine, non superi il 10 % di quella all'origine (cioè $h_c/h_0 \leq 0,10$), si ha dalla [7]

$$\Phi \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0 T}} \right) \cong 0,90.$$

La tabella indicata fornisce in corrispondenza a $\Phi = 0,90$ il valore dell'argomento:

$$\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_0 T}} = 1,163.$$

Di qui

$$L \cong 2,326 \sqrt{\frac{KH_0 T}{\lambda}} \quad [8]$$

Per un confronto, vediamo quali differenze nei risultati porterebbe l'ipotesi che la variazione $h(t)$ nell'origine fosse sinusoidale, di ampiezza massima h_0 e di semiperiodo T .

Alla distanza x sarebbe allora

$$\frac{h_{\max}(x)}{h_0} = e^{-\beta x} \quad [9]$$

con

$$\beta = \sqrt{\frac{\lambda \pi}{2KH_0 T}} \quad [10]$$

$$\text{Posto come in precedenza } \frac{h_{\max}(L)}{h_0} = \frac{h_c}{h_0} \leq 0,10,$$

si ha

$$e^{-\beta L} \leq 0,10 \quad ; \quad \beta L = \sqrt{\frac{\lambda \pi}{2KH_0 T}} \cdot L \cong 2,303$$

e quindi

$$L \cong 1,838 \sqrt{\frac{KH_0 T}{\lambda}} \quad [11]$$

con una differenza dalla [8] del 25 % circa.

Questo scarto decresce ovviamente con il diminuire della profondità massima consentita alla distanza L . Quanto più restrittive sono le condizioni imposte a valle, tanto minore importanza assume la forma della funzione $h(t)$ all'origine.

Il confronto dà anche un'idea del margine di sicurezza che deriva dall'ipotesi di onda aperiodica rettangolare.

Funzione di errore $\Phi (\xi)$

TABELLA A

ξ		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0	000	113	226	338	451	564	676	789	901	013
1	0,1	125	236	348	459	569	680	790	900	009	118
2	0,2	227	335	443	550	657	763	869	974	079	183
3	0,3	286	389	491	593	694	794	893	992	090	187
4	0,4	284	380	475	569	662	755	847	937	027	117
5	0,5	205	292	379	465	549	633	716	798	879	959
6	0,6	039	117	194	270	346	420	497	566	638	708
7		778	847	914	981	047	112	175	238	300	361
8	0,7	421	480	538	595	651	707	761	814	867	918
9		969	019	068	116	163	209	254	299	342	385
1,0	0,8	427	468	508	548	586	624	661	698	733	768
1		802	835	868	900	931	961	991	020	048	076
2	0,9	103	130	155	181	205	229	252	275	297	319
3		340	361	381	400	419	438	456	473	490	507
4	0,95	23	39	54	69	83	97	11	24	37	49
5	0,96	61	73	84	95	06	16	26	36	45	55
6	0,97	63	72	80	88	96	04	11	18	25	32
7	0,98	38	44	50	56	61	67	72	77	82	86
8		91	95	99	03	07	11	15	18	22	25
9	0,99	28	31	34	37	39	42	44	47	49	51
2,0	0,995	32	52	72	91	09	26	42	58	73	88
1	0,997	02	15	28	41	53	64	75	85	95	05
2	0,998	14	22	31	39	46	54	61	67	74	80
3		86	91	97	02	06	11	15	20	24	28
4	0,999	31	35	38	41	44	47	50	52	55	57
5		59	61	63	65	67	69	71	72	74	75
6		76	78	79	80	81	82	83	84	85	86
7		87	87	88	89	89	90	91	91	92	92
8	0,0999	25	29	33	37	41	44	48	51	54	56
9		59	61	64	66	68	70	72	73	75	77

4. Aggiungiamo qualche chiarimento per una corretta applicazione dei risultati precedenti.

Le oscillazioni periodiche a lunghissimo periodo del livello del corso d'acqua (variazioni stagionali, annue o semestrali) non si prestano bene alle nostre considerazioni perchè il moto di filtrazione all'interno dell'argine ha in tal caso il tempo per assumere un assetto quasi-permanente. D'altra parte le ampiezze di queste oscillazioni si mantengono sempre piccole salvo alcune punte (vere e proprie piene) che interessano periodi relativamente brevi.

Per una prudente applicazione del criterio indicato sono da considerare appunto queste piene,

assumendo come pelo libero della falda freatica (CD nella fig. 1) il massimo registrato nella località. Qualora il livello del corso d'acqua all'inizio della piena, sia già sensibilmente più alto del massimo livello freatico, occorre prendere in considerazione un periodo più lungo di quello corrispondente al fenomeno accentuato di piena e schematizzare quindi l'onda con più gradini rettangolari, come si vedrà al n. 6.

È nota, rispetto al livello della falda freatica, l'altezza massima h_0 delle onde di piena che rappresentano i casi più critici verificatisi nel periodo di osservazione e se ne conosce la relativa durata (dell'ordine di alcuni giorni; decrescente con l'au-

mentare di h_0). Bisogna scegliere fra tutte quella che darà luogo al maggior valore della distanza x alla quale si verificherà una sopraelevazione uguale a quella consentita h_c .

Ciò si ottiene con pochi tentativi in quanto le onde che possono causare le situazioni temibili si riducono subito a pochi casi.

Partendo dalla [7]

$$1 - \frac{h_c}{h_0} = \Phi(\xi) \quad [12]$$

si determinano i valori di $\Phi = f(h_0)$ relativi a ciascuna di queste onde e quindi quelli di ξ impiegando una tabella della funzione di errore di Gauss.

Con questi valori si ricavano infine le relative distanze $x = 2 \xi \sqrt{\frac{KH_0T}{\lambda}}$. La più grande rappresenta il limite inferiore consentito per la larghezza L dell'argine in corrispondenza al piano di campagna. Ossia dev'essere

$$L \geq 2 \sqrt{\frac{K}{\lambda}} \cdot \left[\xi \sqrt{H_0T} \right]_{\max} \quad [13]$$

Questa larghezza, per tener conto delle scarpate arginali, può essere intesa (V. fig. 1) prudenzialmente come distanza orizzontale fra il punto più alto raggiunto dal pelo libero del corso d'acqua sul paramento interno e l'unghia arginale sul piano di campagna (5).

È superfluo aggiungere ch'essa rappresenta, come abbiamo premesso, la minima larghezza agli effetti dell'insormontabilità dell'argine per filtrazione. Resta sempre da eseguire la verifica dell'opera alla stabilità, ma per questa rimandiamo alle trattazioni particolari sull'argomento.

5. Vediamo un esempio numerico.

Siano date le seguenti onde di piena, con riferimento ad un livello freatico costante di quota $H_0 = 10$ m.

	Ampiezza h_0	Durata T
I	m 3	5 giorni = 432.000 sec
II	m 2	10 giorni = 864.000 sec
III	m 1	15 giorni = 1.296.000 sec

Fissando sempre $h_c = 0,2$ m. si ha:

	h_c/h_0	$\Phi(\xi)$	ξ	$\xi \sqrt{T}$
I	0,067	0,933	1,296	851 sec ^{1/2}
II	0,10	0,900	1,163	1081 »
III	0,20	0,800	0,906	1031 »

L'onda più pericolosa è perciò la II.

Posto $\lambda = 0,30$ (coeff. di porosità), segue che per quest'onda dev'essere

$$L \geq 2 \xi \sqrt{\frac{TH_0}{\lambda}} \cdot \sqrt{K} = 12,500 \sqrt{K}$$

In relazione a diversi valori del coefficiente di filtrazione si ottengono le seguenti larghezze:

	$K = [6]$	$L \geq$
Sabbia fine	10^{-3} m/sec	395 m
Sabbia finissima	$2 \cdot 10^{-4} - 10^{-4}$ »	177-125 »
Sabbia limosa	$10^{-4} - 10^{-5}$ »	125-39,5 »
Löss	$10^{-5} - 10^{-6}$ »	39,5-12,5 »
Limo, argilla sabbiosa	$10^{-6} - 10^{-7}$ »	12,5-3,95 »
Argilla	10^{-8}	1,25

Questi risultati mettono in evidenza che la verifica alla filtrazione, superflua quando il materiale costituente l'argine è prevalentemente argilloso, diventa necessaria e spesso determinante quando fra i componenti predomina la sabbia.

Il procedimento esposto consente anche il rapido tracciamento della linea di saturazione corrispondente all'istante $t = T$.

L'andamento di questa linea è riportato nel diagramma della figura 2 in unità adimensionali.

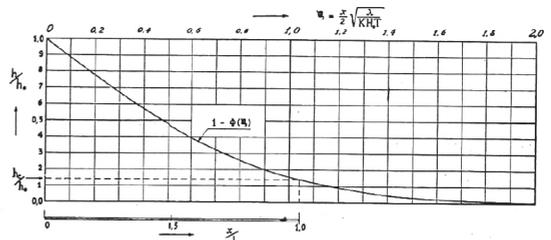


FIG. 2.

(5) Se l'argine ha dimensioni notevoli (con varie banchine), si può ritenere che il valore fornito dalla [13] rappresenti la larghezza indicata con L' nella figura 1. In tal modo si tien conto parzialmente della resistenza offerta alla filtrazione dalla unghia interna $a b c d$ (M è il punto medio di ab).

(6) Questi valori di K sono riportati dal: « Taschenbuch für Bauingenieure » Stringer-Verlag, 1955, II vol., pag. 9.

È sufficiente modificare caso per caso la quota dell'orizzontale h_c/h_o , in base al valore h_o fissato ed al valore in esame h_o , per ottenere immediatamente la scala delle ascisse x/L .

Lo stesso diagramma naturalmente può servire, al posto della tabella, per la ricerca dell'onda più pericolosa. Per questo si porta in ordinate il rapporto h_c/h_o e si trova, sulla curva $1 - \Phi(\xi)$, l'ascissa corrispondente $\xi = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_o T}}$ che va letta nella scala riportata sul lato superiore del diagramma. È facile quindi calcolare la larghezza x relativa ad ogni onda esaminata e scegliere fra questi valori il massimo.

6. Studiamo ora una situazione che differisce un poco dalla precedente. Essa si verifica quando il livello del corso d'acqua, al momento in cui ha inizio il fenomeno di piena in forma accentuata, è già a quota più elevata del piano di campagna.

La figura 3 illustra schematicamente questa situazione. È chiaro che in tal caso non si può ritenere orizzontale il pelo libero della falda freatica prima dell'onda di piena. Il suo andamento, trattandosi sempre di un regime non permanente, va però ricercato con un procedimento analogo a quello seguito prima.

Infatti, finchè si può ammettere che il moto vario di filtrazione sia retto da un'equazione li-

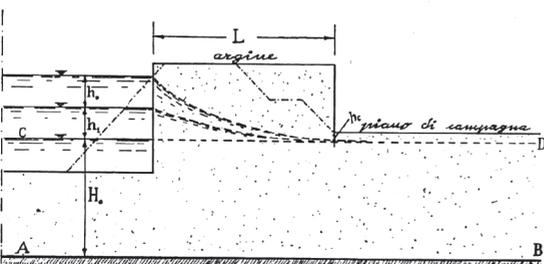


FIG. 3.

neare, resta il vantaggio di poter sommare le funzioni integrali.

Bisogna allora prendere in considerazione non soltanto il periodo T dell'onda di piena di altezza massima h_o , ma anche il periodo precedente, durante il quale il livello nel corso d'acqua è passato da una quota inferiore ad una quota superiore a quella del piano di campagna. Indichiamo allora con h_1 questa elevazione e con T_o la durata complessiva del fenomeno di piena.

La figura 4 mostra l'andamento della funzione h al variare del tempo nella sezione origine. La linea intera indica lo schema assunto mentre la

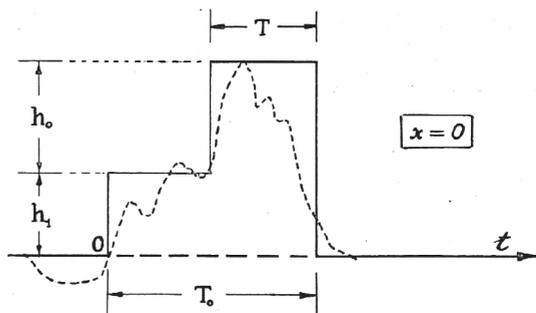


FIG. 4.

linea tratteggiata rappresenta un rilievo sperimentale (Arno a Pisa - 21-30 novembre 1949).

Sotto le condizioni:

$$\begin{aligned} h(x,t) &= 0 && \text{per } t = 0 \\ h(0,t) &= h_1 && \text{per } 0 < t < T_o - T \\ h(0,t) &= h_1 + h_o && \text{per } T_o - T < t < T_o \\ h(0,t) &= 0 && \text{per } t > T_o \end{aligned}$$

e che per $x \rightarrow \infty$ sia sempre $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x,t) = 0$, l'integrale della [2]

$$KH_o \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial h}{\partial t} \quad [2]$$

risulta

$$h(x,t) = h_1 \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right) \right] \text{ per } 0 < t \leq T_o - T \quad [14]$$

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h_1 \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right) \right] + \\ &+ h_o \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t - (T_o - T)}} \right) \right] \text{ per } T_o - T \leq t \leq T_o. \end{aligned} \quad [15]$$

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h_1 \left[\Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t - T_o}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} \right) \right] + \\ &+ h_o \left[\Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t - T_o}} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{t - (T_o - T)}} \right) \right] \text{ per } t \geq T_o. \end{aligned} \quad [16]$$

$$\text{con } \alpha = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_o}}.$$

Il massimo di h per una data ascissa si verifica sempre ad un istante $t > T_o$ ma il valore più pericoloso va ricercato per $t = T_o$ (perchè, dopo questo istante, ripetiamo, il livello del corso d'acqua si è già riabbassato).

Dalla [15], o dalla [16], si ricava quindi l'equazione della linea di saturazione per $t = T_o$.

$$\begin{aligned} h(x, T_o) &= h_1 \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_o T_o}} \right) \right] + \\ &+ h_o \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{KH_o T}} \right) \right] \end{aligned} \quad [17]$$

La [17], come la [4] del n. 3, si può utilmente impiegare per la verifica, nei confronti della filtrazione, di una prefissata larghezza arginale.

Abbiamo limitato le nostre considerazioni ad un caso abbastanza semplice, ma potremmo proseguire, senza difficoltà concettuali, studiando onde rettangolari anche a più gradini. Le formule che si ottengono, sebbene più complesse delle precedenti, presentano sempre il vantaggio di essere rapidamente calcolabili.

L'esempio precedente, più che un risultato, vuole infatti indicare un criterio mediante il quale si può studiare, in maniera relativamente semplice, qualunque situazione del problema in esame.

7. Ci resta da considerare il caso in cui le sopraelevazioni h del pelo libero, almeno in vicinanza dell'origine, non sono piccole in confronto alla profondità H_0 della falda freatica.

Per questa ricerca dovremmo servirci dell'equazione non lineare [1], di cui si conoscono alcuni integrali particolari che non soddisfano però alle condizioni ai limiti imposte dal nostro problema.

Vogliamo mostrare qui come sia possibile trovare una soluzione maggiorante della [1] (e dello stesso tipo delle precedenti) quando nella sezione origine e nell'istante iniziale siano fissate le condizioni [3] già viste.

Posto

$$Y(x,t) = H_0 + h(x,t) \quad [18]$$

dev'essere quindi

$$\begin{aligned} Y(x,t) &= H_0 && \text{per } t = 0 \\ Y(0,t) &= H_0 + h_0 = Y_0 && \text{per } 0 < t < T \\ Y(0,t) &= H_0 && \text{per } t > T \\ \text{e } \lim_{x \rightarrow \infty} Y(x,t) &= H_0 && \text{per qualunque } t \end{aligned} \quad [19]$$

Moltiplicando entrambi i membri per Y (sempre $\geq H_0$), la [1] diventa

$$Y \frac{\partial^2 Y^2}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{K} \cdot \frac{\partial Y^2}{\partial t} \quad [20]$$

Consideriamo ora l'equazione

$$Y_0 \frac{\partial^2 Y^2}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{K} \cdot \frac{\partial Y^2}{\partial t} \quad [21]$$

la cui soluzione, sotto le condizioni [19], è

$$Y^2 = (Y_0^2 - H_0^2) \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{K Y_0 t}} \right) \right] + H_0^2 \quad [22]$$

per qualunque valore di t compreso fra 0 e T .

Dividiamo l'asse x in tratti Δx piccoli ma non infinitesimi e calcoliamo la pendenza media in uno di questi tratti della curva [22], nell'istante $t = T$. Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y^2}{\Delta x} &= \\ &= (Y_0^2 - H_0^2) \left(- \frac{e^{-\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\lambda}{4K Y_0 T}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{K Y_0 T}} \right) \quad [23] \end{aligned}$$

In ogni tratto Δx possiamo approssimativamente sostituire alla [20] un'equazione del tipo [21] ponendo al posto dell' Y non differenziato il valore medio $\bar{Y} = \text{cost}$ nell'intervallo considerato. Per analogia con la [23] segue quindi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y^2}{\Delta x} &= \\ &= (Y_0^2 - H_0^2) \left(- \frac{e^{-\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\lambda}{4K \bar{Y} T}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda}{K \bar{Y} T}} \right) \quad [24] \end{aligned}$$

Nella [24] i valori \bar{Y} sono a priori incogniti; sappiamo però che nel tempo $t \leq T$ essi non possono raggiungere Y_0 , nè essere inferiori ad H_0 , per ogni $x > 0$.

I valori della [24], per $x = \text{cost}$, dipendono dalla funzione

$$F(Y) = e^{-\frac{x^2 \lambda}{4 K Y T}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y}} \quad [25]$$

rappresentata nella figura 5, dove si è riportato in ordinate $F\sqrt{H_0}$, anzichè F , per ottenere una

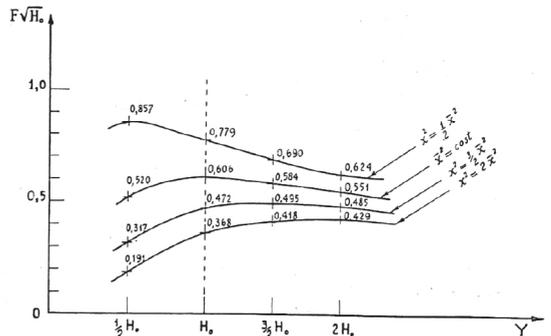


FIG. 5.

grandezza adimensionale. In ascisse sono indicati i valori di Y in rapporto ad un dato H_0 .

Al diminuire di Y (maggiore di H_0) verso H_0 , la F [e quindi in valore assoluto la pendenza

della curva $Y^2(x)$] aumenta sicuramente fino a quando

$$\frac{x^2}{4} \cdot \frac{\lambda}{KH_oT} \leq \frac{1}{2} \quad [26]$$

come si verifica derivando la [25] rispetto ad Y .

Allora fino a che

$$x \leq \bar{x} = \sqrt{\frac{2KH_oT}{\lambda}} \quad [27]$$

la curva $Y^2(x, t = T)$, soluzione della [20], ha pendenza rispetto all'asse x negativa e più grande in valore assoluto di quella della corrispondente curva $Y^2(x, t = T)$ soluzione della [21]. Poichè entrambe le curve partono dal punto $x = 0$, $Y^2 = Y_o^2$, ciò significa che la prima curva resta al di sotto della seconda per tutti gli $x \leq \bar{x}$.

Dopo quest'ascissa la pendenza [23] può divenire inferiore alla [24] ma le relative curve non possono tagliarsi perchè per $x \rightarrow \infty$ esse devono essere entrambe asintotiche alla stessa retta orizzontale $Y = H_o$ e la differenza fra le loro pendenze, dopo essere divenuta negativa, non cambia più di segno.

Quindi la soluzione della [20], all'istante $t = T$ che c'interessa particolarmente, conserva in tutto il campo $x > 0$ ordinate maggiori della soluzione della [21] nello stesso istante.

8. Dalla [22] segue, scrivendo sempre h_{\max} per indicare la sopraelevazione sul livello di quota H_o all'istante T e tenendo conto della [18],

$$\begin{aligned} & (H_o + h_{\max})^2 = \\ & = H_o^2 \left\{ 1 + \frac{2H_o h_o + h_o^2}{H_o^2} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{K(H_o + h_o)T}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad [28]$$

da cui, estraendo la radice,

$$\begin{aligned} & H_o + h_{\max} = H_o \left\{ 1 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{h_o}{H_o} + \frac{1}{2} \left(\frac{h_o}{H_o} \right)^2 \right] \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{K(H_o + h_o)T}} \right) \right] \dots \right\} \end{aligned} \quad [29]$$

Bologna, Istituto di Idraulica, marzo 1957.

(7) Uno scarto del 20% su h_{\max} comporta un errore del 4-5% nella determinazione di L , partendo da valori di h_{\max}/h_o intorno a 0,10.

ossia

$$h_{\max} \lesssim h_o \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_o}{H_o} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{K(H_o + h_o)T}} \right) \right] \right) \quad [30]$$

Se h_o è minore di $1/2 H_o$, con un errore in difetto su h_{\max} inferiore al 20% circa (7) rispetto alla [28], si può scrivere semplicemente

$$h_{\max} \gtrsim h_o \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{K(H_o + h_o)T}} \right) \right] \quad [31]$$

La [30] e la [31] si possono utilizzare, nel modo già visto in precedenza, per la verifica di un argine alla filtrazione.

Riprendiamo l'esempio dato al n. 5.

Essendo per l'onda più pericolosa $h_o = 2$ m, $H_o = 10$ m possiamo utilizzare senz'altro la [31].

Allora le conclusioni sono immediate. Le larghezze L risultano aumentate nel rapporto $\frac{\sqrt{H_o + h_o}}{\sqrt{H_o}} = 1,183$ (cioè del 18% circa).

Il confronto fra la [31] e la [6] mette in evidenza come si possa eseguire il calcolo di h_{\max} , ad una distanza L alla quale esso è ridotto ad una piccola frazione della sopraelevazione h_o all'origine, usando sempre la stessa formula

$$h_{\max} = h_o [1 - \Phi(\xi)]$$

salvo modificare, caso per caso, l'argomento ξ della funzione integrale di errore.

Nell'espressione di ξ figurerà infatti H_o quando quest'ultimo prevale sensibilmente su h_o e non è consigliabile una limitazione più prudenziale. Oppure $H_o + h_o$ quando queste due profondità sono fra loro paragonabili.

Resta naturalmente al progettista la possibilità di impiegare anche un valore intermedio quando la conoscenza del problema specifico lo consigli sulla base delle indicazioni precedenti.

L'attenuazione delle onde periodiche non di regime
Parti I e II
Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 1958

L'ATTENUAZIONE DELLE ONDE PERIODICHE NON DI REGIME

Nota di ENRICO MARCHI

presentata (*) dall'Accademico Benedettino GIULIO SUPINO

PARTE I. - INDAGINE TEORICA

1. - PREMESSE.

Lo studio delle onde periodiche notevolmente lunghe in confronto alla loro ampiezza massima si può eseguire ⁽¹⁾ associando all'equazione di continuità una scala di deflusso, scritta ad esempio nella forma

$$(A) \quad \Omega_{x,t} = \text{cost} \cdot Q_{x,t}^n.$$

L'esponente n dipende dalla forma della sezione e dalla legge con cui si esprime il coefficiente χ di Chèzy. Esso assume valori generalmente compresi fra $3/5$ e $2/3$, ma può in qualche caso superare anche quest'ultimo valore.

Quando le oscillazioni ω e q della sezione e della portata sono molto piccole rispetto ai valori Ω_0 e Q_0 relativi al moto-base uniforme (tanto da poterne trascurare i prodotti del II° ordine) la (A) si riduce alla forma

$$(B) \quad \omega_{x,t} = \frac{n}{U_0} q_{x,t}.$$

Dalla (B) segue facilmente, tenendo conto dell'equazione di continuità, che la velocità di propagazione dell'onda vale U_0/n , ossia circa $3/2 \sim 5/3 U_0$.

Con questo procedimento di prima approssimazione non si giustifica l'attenuazione dell'onda.

Riprendendo in esame l'equazione dinamica del moto vario e tenendo conto parzialmente anche dei termini che derivano dalla non

(*) Nella seduta del 1° dicembre 1957.

(1) BOUSSINESQ. - *Essai sur la théorie des eaux courantes* - 1872 - pag. 470 e segg.

permanenza del moto, ho dimostrato in una precedente ricerca ⁽²⁾ che alla (A) può sostituirsi una nuova scala di deflusso del tipo

$$(C) \quad \Omega_{x,t} = \text{cost } Q_{x,t}^n - \alpha \frac{\partial Q}{\partial t}$$

che, nel caso di piccole oscillazioni, si riconduce alla

$$(D) \quad \omega_{x,t} = \frac{n}{U_0} q_{x,t-\tau}$$

cioè ad una relazione dello stesso tipo della (B) fra le funzioni periodicamente oscillanti ω e q , sfasate però di un tempo τ (positivo quando ω è in ritardo rispetto a q).

La (D), come le precedenti, interpreta una propagazione di regime; una propagazione caratterizzata cioè da uguali celerità per le oscillazioni di portata e di sezione. In questa situazione, la soluzione del sistema formato dalla (D) con l'equazione di continuità mostra che la velocità di propagazione ha sempre il valore U_0/n e che l'attenuazione dipende esponenzialmente da τ e dalla pulsazione η secondo l'espressione

$$(E) \quad \frac{\omega_{\max}(x)}{\omega_0} = \frac{q_{\max}(x)}{q_0} = e^{-\eta^2 \frac{n}{U_0} \tau x}$$

Il valore dello sfasamento τ in condizioni di regime è sempre molto piccolo in confronto al periodo dell'onda e si può calcolare in funzione delle caratteristiche dell'alveo e del moto base uniforme. Si ha, in alveo rettangolare,

$$(F) \quad \tau = \frac{U_0 n^2}{2g i_f} \left(\frac{2n-1}{n^2} - 1 + \frac{g Y_0}{U_0^2} \right)$$

Questa relazione mostra che se il rapporto $\frac{U_0^2}{g Y_0} = \frac{i_f}{i_c}$ supera un multiplo m della pendenza critica, generalmente compreso fra 4 e 2,25, τ assume valori negativi corrispondenti, secondo la (5), ad un'esaltazione dell'onda.

Per quanto riguarda la condizione di regime, aggiungiamo ch'essa o è realizzata fin dall'origine oppure rappresenta la situazione limite cui tende qualunque propagazione periodica allontanandosi dall'origine della perturbazione. Allo stesso modo un profilo di moto uniforme

⁽²⁾ E. MARCHI - *Le onde di regime a lungo periodo* - « L'Energia Elettrica », n. 8, 1956.

è teoricamente possibile solo se ai limiti le condizioni sono già di moto uniforme; ma esso rappresenta d'altra parte la situazione cui asintoticamente tende qualunque profilo di regime permanente se all'origine è realizzata una corrente che, pur non essendo uniforme, è dello stesso tipo (lenta o veloce) della corrente uniforme.

In vicinanza della sezione origine i fenomeni che accompagnano una propagazione ondosia possono però presentare delle caratteristiche assolutamente differenti da quelle di regime. Di questi fenomeni intendiamo particolarmente occuparci in questa nota.

2. - IMPOSTAZIONE ED OBIETTIVI DELLA PRESENTE RICERCA.

Con un procedimento approssimato che utilizza ancora una relazione del tipo (*D*), cioè

(1)

$$\omega_{x,t} = Kq_{x,t-\tau}$$

studiamo in questa nota la propagazione di onde aventi periodo relativamente lungo⁽³⁾ e ampiezze piccole, in condizioni differenti da quelle di regime.

Precisamente consideriamo la situazione che si presenta in un corso torrentizio ($i_f > i_c$) quando l'escursione della sezione, assegnata nella sezione origine della perturbazione insieme a quella della portata, ha

(3) Perchè il consueto processo di linearizzazione della equazione dinamica del moto gradualmente variabile sia corretto quando *si tien conto anche del termine delle resistenze*, è necessaria una limitazione nei confronti non soltanto dell'ampiezza dell'onda riferita alla profondità della corrente, ma anche di quest'ultima in rapporto alla lunghezza d'onda.

Essa deriva dalla condizione che il termine dovuto alle resistenze (nell'equazione linearizzata) sia confrontabile, come ordine di grandezza, con gli altri conservati. E poichè questo termine dipende linearmente da $(2 - \sqrt{i_f/i_c})$ segue che la limitazione inferiore della lunghezza d'onda è tanto meno restrittiva quanto più la pendenza del fondo si discosta dal valore $4 i_c$ (o in generale da mi_c).

Occorre aggiungere che la limitazione precedente è l'unica necessaria per le onde qui considerate. Nell'articolo citato (2) la (*D*) era stata dedotta come caso particolare dalla relazione più generale (*C*) e pertanto risultava soggetta alle stesse limitazioni di periodo di quest'ultima. Se si pone però, come attualmente, la condizione di piccole oscillazioni fin dall'inizio del procedimento, si può partire senz'altro dalle equazioni linearizzate e si giunge allora alla (*D*) imponendo solo le *limitazioni richieste dalla linearizzazione*. A conferma si veda il calcolo sviluppato nei n° 4 e 5.

nella stessa sezione uno sfasamento ed eventualmente un'ampiezza diversi dai valori di regime.

La propagazione inizia con celerità differenti per le oscillazioni di sezione e per quelle di portata. Dopo un certo percorso è prevedibile che la situazione di regime, o almeno una situazione molto prossima a questa, possa essere raggiunta qualunque sia la posizione iniziale. Scopo della nostra ricerca è appunto di determinare la lunghezza di questo percorso e l'entità delle attenuazioni o delle esaltazioni che in esso possono verificarsi per effetto essenzialmente della posizione all'origine.

Nel campo delle propagazioni che non hanno carattere di regime uno studio recente è stato compiuto dal SUPINO (*). L'A. ha risolto il sistema di equazioni differenziali, costituito dall'equazione dinamica e da quella di continuità linearizzate, con un metodo che deriva dal calcolo dei limiti di Cauchy. La soluzione presenta il vantaggio di una assoluta libertà nella scelta delle condizioni iniziali. Essendo espressa però in forma di serie, essa non si presta ad una rapida indicazione sull'andamento delle ampiezze d'onda a distanza dall'origine.

Il procedimento che qui esporremo concorda perfettamente con il precedente per quanto riguarda i risultati quantitativi; in più esso consente però anche una visione generale dei fenomeni che accompagnano le propagazioni periodiche non di regime.

Se il periodo dell'onda supera il valore $\frac{10\pi U_0}{g i_f}$ (1/2 ora circa in condizioni pratiche normali), si possono valutare abbastanza facilmente le variazioni di ampiezza in funzione delle variazioni di sfasamento fra ω e q , o della distanza dall'origine della perturbazione.

Vedremo che, mentre l'oscillazione della portata si propaga rimanendo praticamente inalterata, quella della sezione può subire delle notevoli modifiche in un tratto breve a partire dall'origine (qualche centinaio di metri al massimo); successivamente, però, procedendo verso valle, essa assume sempre un'ampiezza massima proporzionale a quella della portata secondo il coefficiente n/U_0 previsto in condizioni di regime.

Se il periodo dell'onda è inferiore al valore predetto $\left(\frac{10\pi U_0}{g i_f}\right)$, gli effetti dovuti alla non permanenza del moto diventano particolarmente sensibili. Pur essendo possibile ancora dedurre una relazione analitica fra l'ampiezza di oscillazione della sezione e lo sfasamento, occorre poi procedere con metodi grafici o numerici per ricavarne la

(*) G. SUPINO - *La propagazione delle onde di traslazione* - « L'Energia Elettrica » n. 4, 1953.

dipendenza dalla distanza dall'origine. La II parte della presente ricerca sarà dedicata appunto allo studio di un caso particolare di questa situazione, scelto in modo da poter essere riprodotto sperimentalmente in laboratorio. Di ciò diremo allora dettagliatamente.

3. - SCHEMA DEL PROCEDIMENTO.

Ecco il procedimento che seguiremo.

Nella sezione origine della perturbazione sono assegnate le funzioni ω e q sinusoidali ⁽⁵⁾ di pulsazione $\eta = \frac{2\pi}{T}$, sfasate di un tempo costante τ_0 :

$$(2) \quad q(0, t) = q_0 \text{ sen } \eta t$$

$$(3) \quad \omega(0, t) = \omega_0 \text{ sen } \eta(t - \tau_0).$$

Indichiamo con K_0 il rapporto fra le ampiezze massime all'origine ω_0 e q_0 , piccole per ipotesi rispetto a Ω_0 e Q_0 . Sia cioè

(4)

$$\boxed{\omega_0 = K_0 q_0}$$

Se le funzioni globali

$$(5) \quad \begin{cases} Q(0, t) = Q_0 + q(0, t) \\ \Omega(0, t) = \Omega_0 + \omega(0, t) \end{cases}$$

avessero nell'istante t e rispettivamente $t + \tau_0$ i valori relativi al moto uniforme, il coefficiente K_0 si potrebbe calcolare partendo dalla scala di deflusso $\Omega_{t+\tau_0} = \text{cost. } Q_t^n$.

In tale situazione si avrebbe:

$$\Omega_0 + \omega_0 \text{ sen } \eta t = \text{cost} (Q_0 + q_0 \text{ sen } \eta t)^n.$$

Essendo valida per le funzioni caratteristiche del moto-base uniforme la relazione

$$(6) \quad \Omega_0 = \text{cost. } Q_0^n$$

⁽⁵⁾ L'ipotesi di onde sinusoidali all'origine non limita la generalità del procedimento perchè ci siamo posti nella condizione che il fenomeno sia retto da un'equazione lineare. Sviluppate le funzioni ω e q in serie di Fourier, lo stesso procedimento può essere ovviamente applicato a ciascuna armonica.

e tenuto conto della piccolezza di q_0 in confronto a Q_0 , segue

$$(7) \quad \omega_0 = \frac{n}{U_0} q_0$$

cioè, indicando con K_u questo particolare valore del coefficiente di proporzionalità fra ω_{\max} e q_{\max}

$$(8) \quad \boxed{K_u = \frac{n}{U_0}}$$

Qualunque sia il valore iniziale di K_0 , al valore (8) del rapporto fra le oscillazioni massime di sezione e di portata si deve pervenire, per quanto si è detto al n. 1, se la propagazione raggiunge le condizioni di regime.

Introducendo al posto del tempo τ lo sfasamento angolare $\varepsilon = \eta\tau$ (all'origine $\varepsilon_0 = \eta\tau_0$), le condizioni (2) e (3) si scrivono

$$(9) \quad \begin{cases} q(0, t) = q_0 \operatorname{sen} \eta t \\ \omega(0, t) = \omega_0 \operatorname{sen} (\eta t - \varepsilon_0). \end{cases}$$

Nella sezione origine della perturbazione è valida perciò una relazione del tipo (1)

$$\omega(0, t) = K_0 q(0, \eta t - \varepsilon_0)$$

con uno sfasamento angolare ε_0 costante nel tempo ma diverso dal valore di regime ε_r , e con un coefficiente K_0 che in generale può essere anch'esso diverso dal valore di regime $K_u = \frac{n}{U_0}$.

In una sezione generica poniamo ancora

$$(10) \quad \omega(x, t) = K q(x, \eta t - \varepsilon)$$

con K ed ε funzioni soltanto di x (decescente quest'ultima se ε_0 è $> \varepsilon_r$, crescente in caso contrario).

Prescindendo dalla eventuale deformazione dell'onda, riteniamo q , e di conseguenza ω , funzioni sempre sinusoidali di pulsazione η . Possiamo scrivere allora la (10) nella forma

$$(11) \quad \omega_{x,t} = K \left(q_{x,t} \cos \varepsilon - \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\eta} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \right).$$

La dipendenza del coefficiente K e dello sfasamento ε da x resta determinata dalla condizione che la (11) soddisfi le equazioni linearizzate del moto vario dell'idraulica.

L'equazione di continuità consente quindi di calcolare l'attenuazione (o l'esaltazione) delle ampiezze massime delle funzioni ω e q in un tratto di lunghezza assegnata.

4. - LE ESPRESSIONI DELLE FUNZIONI ω E q A DISTANZA DALL'ORIGINE.

Sviluppiamo i calcoli. Derivando la (11) rispetto a t e tenendo conto che $\partial^2 q / \partial t^2 = -\eta^2 q$ per la sinusoidalità di q e che $\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$ per la condizione di continuità, segue

$$(12) \quad \frac{\partial q}{\partial x} + K \cos \varepsilon \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = -(\eta K \operatorname{sen} \varepsilon) q$$

L'integrale della (12), con la condizione all'origine (9), è

$$(13) \quad q(x, t) = q_0 e^{-\eta \int_0^x K \operatorname{sen} \varepsilon dx} \operatorname{sen} \eta \left[t - \int_0^x K \cos \varepsilon dx \right].$$

Analogamente, derivando la (11) rispetto ad x e tenendo conto che: $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \omega}{\partial t}$ e $\frac{1}{\eta} \frac{\partial \omega}{\partial t} = K \left(\frac{\partial q}{\partial t} \frac{\cos \varepsilon}{\eta} + q \operatorname{sen} \varepsilon \right)$ per quanto detto in precedenza e $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = -\eta^2 \omega$ per la sinusoidalità di ω , segue

$$(14) \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \left(K \cos \varepsilon + \frac{1}{\eta} \frac{d\varepsilon}{dx} \right) = - \left(\eta K \operatorname{sen} \varepsilon - \frac{1}{K} \frac{dK}{dx} \right) \omega.$$

Con la condizione all'origine espressa dalla seconda delle (9), l'integrale della (14) risulta

$$(15) \quad \omega(x, t) = \omega_0 \varepsilon^{-\eta \int_0^x \left(K \operatorname{sen} \varepsilon - \frac{1}{\eta K} \frac{dK}{dx} \right) dx} \operatorname{sen} \eta \left[t - \frac{\varepsilon_0}{\eta} - \int_0^x \left(K \cos \varepsilon + \frac{1}{\eta} \frac{d\varepsilon}{dx} \right) dx \right]$$

od anche, essendo

$$\int_0^x \frac{d\varepsilon}{dx} dx = \varepsilon - \varepsilon_0$$

$$\int_0^x \frac{1}{K} \frac{dK}{dx} dx = \ln \frac{K}{K_0}$$

segue

$$(16) \quad \omega(x, t) = \frac{K}{K_0} \omega_0 e^{-\eta \int_0^x K \operatorname{sen} \varepsilon dx} \operatorname{sen} \eta \left[t - \int_0^x K \cos \varepsilon dx - \frac{\varepsilon}{\eta} \right].$$

Più concisamente la (13) e la (16) si possono scrivere

$$(17) \quad q = q_0 e^{-\gamma} \operatorname{sen} u$$

$$(18) \quad \omega = \frac{K}{K_0} \omega_0 e^{-\gamma} \operatorname{sen} (u - \varepsilon)$$

avendo posto

$$(19) \quad u = \eta \left(t - \int_0^x K \cos \varepsilon dx \right)$$

$$(20) \quad \gamma = \eta \int_0^x K \operatorname{sen} \varepsilon dx.$$

Il coefficiente γ rappresenta il coefficiente di attenuazione della oscillazione di portata, nel senso che ad una data ascissa x si ha

$$(21) \quad \frac{q_{\max}(x)}{q_0} = e^{-\gamma(x)}.$$

Ricordando che con $K_u = \frac{n}{U_0}$ abbiamo indicato il valore di K relativo alle condizioni di regime, poniamo ancora:

$$(22) \quad Z = \frac{K}{K_u} \quad \text{e} \quad (23) \quad Z_0 = \frac{K_0}{K_u}.$$

L'attenuazione della sezione dipende da γ e dalle variazioni di K . Con le posizioni precedenti si ha:

$$(24) \quad \frac{\omega_{\max}(x)}{\omega_0} = \frac{K(x)}{K_0} e^{-\gamma(x)} = \frac{Z(x)}{Z_0} e^{-\gamma(x)}.$$

Per il calcolo della (21) e della (24) è necessario determinare le funzioni $K = K(x)$ e $\gamma = \gamma(x)$, ossia la dipendenza di Z e di ε da x .

5. - LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CHE DEFINISCONO $\varepsilon(x)$ E $Z(x)$.

Si è già detto che le relazioni $\varepsilon = \varepsilon(x)$ e $Z = Z(x)$ derivano dalla condizione che la (11) o le equazioni (17) e (18) da essa derivate attraverso la condizione di continuità, soddisfino l'equazione dinamica dell'idraulica

$$(25) \quad i_f - \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = \left(\frac{1}{b} - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{Q}{g\Omega^2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{Q}{g\Omega^2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{g\Omega} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Seguendo un procedimento impiegato anche nella memoria citata [1], poniamo

$$(26) \quad \Omega \chi \sqrt{R i_f} = \left(\frac{\Omega}{\text{cost.}} \right)^{1/n}$$

con i consueti valori di n , di cui si è detto al n. 1.

Si ha

$$i_f - \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = i_f \left[1 - \frac{Q^2}{(\Omega/\text{cost})^{2/n}} \right] = i_f \left[1 - \left(\frac{\text{cost } Q^n}{\Omega} \right)^{2/n} \right].$$

Tenuto conto che $Q = Q_0 + q$, $\Omega = \Omega_0 + \omega$, che le oscillazioni q ed ω sono molto piccole in confronto a Q_0 e ad Ω_0 , e che per la legge del moto uniforme (6) è $\Omega_0 = \text{cost } Q_0^n$, segue

$$i_f - \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = i_f \left[1 - \left(1 + n \frac{q}{Q_0} - \frac{\omega}{\Omega_0} \right)^{2/n} \right] = - \frac{2i_f}{Q_0} \left(q - \frac{U_0}{n} \omega \right)$$

ossia, essendo $K_u = \frac{n}{U_0}$,

$$(27) \quad i_f - \frac{Q^2}{\Omega^2 \chi^2 R} = - \frac{2i_f}{Q_0} \left(q - \frac{\omega}{K_u} \right).$$

Sostituiamo questa espressione nel primo membro della (25), linearizzando contemporaneamente il secondo membro nel modo consueto. Si ha

$$(28) \quad - \frac{2i_f}{Q_0} \left(q - \frac{\omega}{K_u} \right) = \left(\frac{1}{b_0} - \frac{Q_0^2}{g\Omega_0^3} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{Q_0}{g\Omega_0^2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{Q_0}{g\Omega_0^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{g\Omega_0} \cdot \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Di qui, con l'introduzione delle (17) e (18), dividendo tutto per $q_0 e^{-\gamma}$ (uguale per la (4) a $\frac{\omega_0}{K_0} e^{-\gamma}$) segue

$$(29) \quad \frac{2i_f}{Q_0} \left[\operatorname{sen} u - \frac{K}{K_u} \operatorname{sen} (u - \varepsilon) \right] - \left(\frac{Q_0^2}{g\Omega_0^2} - \frac{1}{b_0} \right) \left[\frac{dK}{dx} \operatorname{sen} (u - \varepsilon) - \right. \\ \left. - \eta K^2 \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (u - \varepsilon) - \eta K^2 \cos \varepsilon \cos (u - \varepsilon) - \frac{d\varepsilon}{dx} K \cos (u - \varepsilon) \right] - \\ - \frac{2Q_0}{g\Omega_0^2} \eta K \cos (u - \varepsilon) + \frac{\eta}{g\Omega_0} \cos u = 0.$$

Indichiamo con:

$$(30') \quad A = \frac{1}{K_u} \cdot \frac{2i_f}{\frac{Q_0}{b_0} \left(\frac{U_0^2 b_0}{g\Omega_0} - 1 \right)};$$

$$(30'') \quad B = \frac{2Q_0/b_0}{g \frac{\Omega_0^2}{b_0^2} \left(\frac{U_0^2 b_0}{g\Omega_0} - 1 \right)} \cdot \eta;$$

$$(30''') \quad C = \frac{1}{K_u} \cdot \frac{\eta}{g \frac{\Omega_0}{b_0} \left(\frac{U_0^2 b_0}{g\Omega_0} - 1 \right)};$$

$$(30) \quad D = \eta K_u.$$

Nel caso di *alveo rettangolare*, essendo $Y_0 = \frac{\Omega_0}{b_0}$ la profondità del moto uniforme ed $F = \frac{U_0^2}{gY_0}$ il n. di Froude, le espressioni precedenti diventano

$$(31') \quad A = \frac{2i_f}{nY_0(F-1)}; \quad (31'') \quad B = \frac{2\eta U_0}{gY_0(F-1)}$$

$$(31''') \quad C = \frac{\eta U_0}{gY_0(F-1)} = \frac{B}{2n}; \quad (31''''') \quad D = \eta \frac{n}{U_0}.$$

Dividiamo la (29) per K_u . Tenendo presente la posizione (22) $Z = \frac{K}{K_u}$ e sostituendo le espressioni (30) (o le (31) se l'alveo è rettan-

golare), si ottiene

$$(32) \quad A [\text{sen } u - \text{sen } (u - \varepsilon)] - \frac{dZ}{dx} \text{sen } (u - \varepsilon) + DZ^2 \text{sen } \varepsilon \text{sen } (u - \varepsilon) + \\ + DZ^2 \cos \varepsilon \cos (u - \varepsilon) + \frac{d\varepsilon}{dx} Z \cos (u - \varepsilon) - BZ \cos (u - \varepsilon) + \\ + C \cos u = 0.$$

La (32) dev'essere soddisfatta per qualunque valore di t , e quindi di u (che dipende linearmente da t) o di $u - \varepsilon$. Dalle condizioni $u - \varepsilon = 0$ ed $u - \varepsilon = \pi/2$ segue allora il sistema di equazioni differenziali

$$(33) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{A}{Z} \text{sen } \varepsilon + B - \left(\frac{C}{Z} + DZ\right) \cos \varepsilon$$

$$(34) \quad \frac{dZ}{dx} = A \cos \varepsilon - AZ - (C - DZ^2) \text{sen } \varepsilon.$$

In condizioni di regime dev'essere $\frac{d\varepsilon}{dx} = 0$ e $Z = \frac{K_u}{K_u} = 1$. Data la piccolezza di ε in questa situazione, dalla (33) segue

$$(35) \quad \varepsilon_r = \frac{B - C - D}{A}$$

od anche, con i valori (31) (relativi ad alveo rettangolare),

$$(36) \quad \varepsilon_r = \frac{\eta U_0 n^2}{2g i_r} \left(\frac{2n - 1}{n^2} - 1 + \frac{g Y_0}{U_0^2} \right).$$

Questa espressione coincide naturalmente con quella trovata per lo sfasamento di regime nella ricerca precedentemente citata (Cfr. [2] tenendo presente che con riferimento ai simboli adottati in quella nota è $\varepsilon_r = \eta \frac{U_0}{n} \alpha$).

6. - LE EQUAZIONI SEMPLIFICATE.

Il sistema formato dalle equazioni differenziali (33) e (34) può essere semplificato in base a considerazioni sui valori di A , B , C , D , che riferiremo per semplicità al caso di alveo rettangolare (v. formule (31)).

I coefficienti B e C differiscono evidentemente molto poco fra loro (pur essendo B sempre $> C$); B e D stanno invece nel rapporto

$$(37) \quad \frac{B}{D} = \frac{3F}{F-1},$$

e, se il numero di Froude F non supera il valore 3, come accade generalmente in pratica, il coefficiente D risulta $\leq \frac{1}{4} B$.

Tenuto conto che il coefficiente A è nelle stesse condizioni più grande degli altri, essendo l'unico che non dipende dalla pulsazione $\eta = \frac{2\pi}{T}$, si può sostituire con buona approssimazione al sistema dato il seguente:

$$(38) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{A}{Z} \sin \varepsilon + C - \frac{C}{Z} \cos \varepsilon$$

$$(39) \quad \frac{dZ}{dx} = A \cos \varepsilon - AZ - C \sin \varepsilon.$$

Con questa semplificazione il valore dello sfasamento di regime si è ridotto a zero (V. 35)); cioè si è implicitamente ammesso che la propagazione, raggiunta tale condizione, proceda senza alterazioni di ampiezza. Ed effettivamente quest'ultima influenza è senz'altro trascurabile, a parità di lunghezza, rispetto alle variazioni di ampiezza che derivano da un sensibile sfasamento fra ω e q all'origine.

Per quanto riguarda la relazione fra i coefficienti C ed A si è già premesso che quest'ultimo, indipendente dal periodo, è generalmente maggiore del primo. Basta infatti che sia verificata la disuguaglianza

$$(40) \quad T > \frac{\pi U_0}{g i_f}$$

perchè C , inversamente proporzionale al periodo secondo la (31''), diventi più piccolo di A .

Anche con $i_f = 1\%$, $U_0 = 5$ m/sec, il secondo membro della (40) vale

$$\frac{\pi U_0}{g i_f} = 160'' = 2'40''.$$

È sufficiente quindi un periodo maggiore di qualche primo perchè risulti $A > C$ anche nelle condizioni meno favorevoli.

Se poi il periodo è almeno 10 volte più grande del limite trovato (1/2 ora circa nella situazione predetta), ossia se risulta

$$(41) \quad T > \frac{10\pi U_0}{g v_f}$$

il coefficiente C può ritenersi senz'altro trascurabile in confronto ad A .

Allora il sistema (38) e (39) può ulteriormente semplificarsi come segue

$$(42) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{A}{Z} \operatorname{sen} \varepsilon$$

$$(43) \quad \frac{dZ}{dx} = A \cos \varepsilon - AZ.$$

7. - LA FUNZIONE $Z = Z(\varepsilon)$.

Riprendiamo il sistema delle equazioni differenziali (38) e (39) e dividiamo la seconda per la prima. Si ha

$$(44) \quad \frac{dZ}{d\varepsilon} = \frac{Z(A \cos \varepsilon - AZ - C \operatorname{sen} \varepsilon)}{-A \operatorname{sen} \varepsilon - C \cos \varepsilon + CZ}.$$

La (44) ha un punto singolare (nodo) per $\varepsilon = 0$ e $Z = 1$, cioè nella situazione che corrisponde alle condizioni di regime.

Ponendo

$$(45) \quad \operatorname{tang} \gamma_0 = \frac{A}{C}$$

la (44) diventa

$$(46) \quad \frac{dZ}{d\varepsilon} = \frac{Z [\operatorname{sen}(\gamma_0 - \varepsilon) - Z \operatorname{sen} \gamma_0]}{Z \cos \gamma_0 - \cos(\gamma_0 - \varepsilon)}.$$

Tralasciando il procedimento di integrazione della (46), che è sviluppato in appendice, riportiamo qui la soluzione che si può rappresentare con le relazioni:

$$(47) \quad Z = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \varepsilon)}{\operatorname{sen} \beta}$$

$$(48) \quad e^{\beta \frac{A}{C}} \operatorname{sen} \beta = k e^{\varepsilon \frac{A}{C}} \operatorname{sen} \varepsilon.$$

Il valore all'origine della variabile ausiliaria β è determinato dalla condizione che per $\varepsilon = \varepsilon_0$ ($x = 0$) sia $Z = Z_0$. Quindi

$$(49) \quad \text{tang } \beta_0 = \frac{\text{sen } \varepsilon_0}{\cos \varepsilon_0 - Z_0}.$$

Noto β_0 , dalla (48) si può dedurre il valore della costante k

$$(50) \quad k = e^{\frac{A}{C}(\beta_0 - \varepsilon_0)} \frac{\text{sen } \beta_0}{\text{sen } \varepsilon_0}.$$

Prima di proseguire conviene distinguere i due casi:

$$T \leq \frac{10\pi U_0}{g i_f} \quad \text{e} \quad T > \frac{10\pi U_0}{g i_f}.$$

a) Il primo si riferisce ad onde di periodo breve, dell'ordine al massimo di alcuni minuti primi.

Questa brevità va intesa naturalmente con le limitazioni imposte dal procedimento di linearizzazione e di cui si è detto nella nota [3]. Perchè il periodo sia breve quanto richiesto e contemporaneamente l'onda abbia una lunghezza notevole rispetto alla profondità del moto-base uniforme, occorre che quest'ultima sia molto piccola, dell'ordine di qualche decina di centimetri al massimo. In questa situazione le onde interessanti sono quindi praticamente quelle realizzabili in laboratorio.

Le (47) e (48) consentono di calcolare Z in funzione di ε . Poichè però la relazione fra ε e la variabile ausiliaria β è espressa in forma implicita dalla (48), la dipendenza di ε e di Z da x , definita dalle equazioni differenziali (38) e (39), si può esprimere in termini finiti soltanto con una costruzione grafica o con metodi numerici.

Di questo procedimento, come abbiamo detto, si vedrà un'applicazione nella II parte della presente ricerca.

b) Il secondo caso riguarda le propagazioni di *oscillazioni lente*, con periodo in genere maggiore di mezz'ora. Si tratta della situazione più interessante dal punto di vista pratico, e per essa è possibile giungere ad una soluzione analitica completa, che riportiamo nei n . seguenti.

8. - L'AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI CON PERIODO $T > \frac{10\pi U_0}{gi_f}$, IN FUNZIONE DELLO SFASAMENTO.

L'equazione (44), essendo C trascurabile rispetto ad A , si riduce alla

$$(51) \quad \frac{dZ}{d\varepsilon} = \frac{Z(Z - \cos \varepsilon)}{\sin \varepsilon}.$$

La (51) è quindi un caso particolare della (44) (o della 46) e la sua soluzione si ricava dalle (47) e (48) ponendo, come nella (51), $C = 0$.

Dalla (48), tenuto conto della (50), segue

$$\frac{A}{C}(\beta - \varepsilon) + \ln \frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} = \frac{A}{C}(\beta_0 - \varepsilon_0) + \ln \frac{\sin \beta_0}{\sin \varepsilon_0}$$

e quindi, essendo $C = 0$.

$$(52) \quad \beta - \varepsilon = \beta_0 - \varepsilon_0.$$

Posto $\beta_0 - \varepsilon_0 = \alpha_0$, ossia per la (49)

$$(53) \quad \text{tang } \alpha_0 = \frac{Z_0 \sin \varepsilon_0}{1 - Z_0 \cos \varepsilon_0}$$

segue dalla (47)

$$(54) \quad \boxed{Z = \frac{\sin \alpha_0}{\sin(\varepsilon + \alpha_0)}}$$

La (54) definisce esplicitamente Z in funzione della variabile ε e della costante α_0 , che a sua volta dipende secondo la (53) dalle condizioni all'origine.

Nella fig. 1 sono rappresentate alcune curve $Z = Z(\varepsilon)$ per dati valori di α_0 . I valori *positivi* di α_0 corrispondono a valori pure *positivi* di ε_0 , cioè ad oscillazioni della sezione *in ritardo* rispetto a quelle della portata; quelli *negativi* ad $\varepsilon_0 < 0$, cioè ad oscillazioni della sezione *in anticipo* su quelle di portata.

I valori di Z sono indipendenti dal segno di ε_0 ed il minimo si verifica quando $\varepsilon = \pm(\pi/2 - \alpha_0)$:

$$(55) \quad Z_{\min} = |\sin \alpha_0| = \left| \frac{Z_0 \sin \varepsilon_0}{\sqrt{1 - 2Z_0 \cos \varepsilon_0 + Z_0^2}} \right|.$$

Se $Z_0 = 1$ (cioè $K_0 = K_u = n/U_0$) ed $\varepsilon_0 = \pm \pi/2$ si ha dalla (55) $Z_{\min} = 0,707$.

Il valor minimo di Z , dato Z_0 , è tanto più piccolo quanto più grande

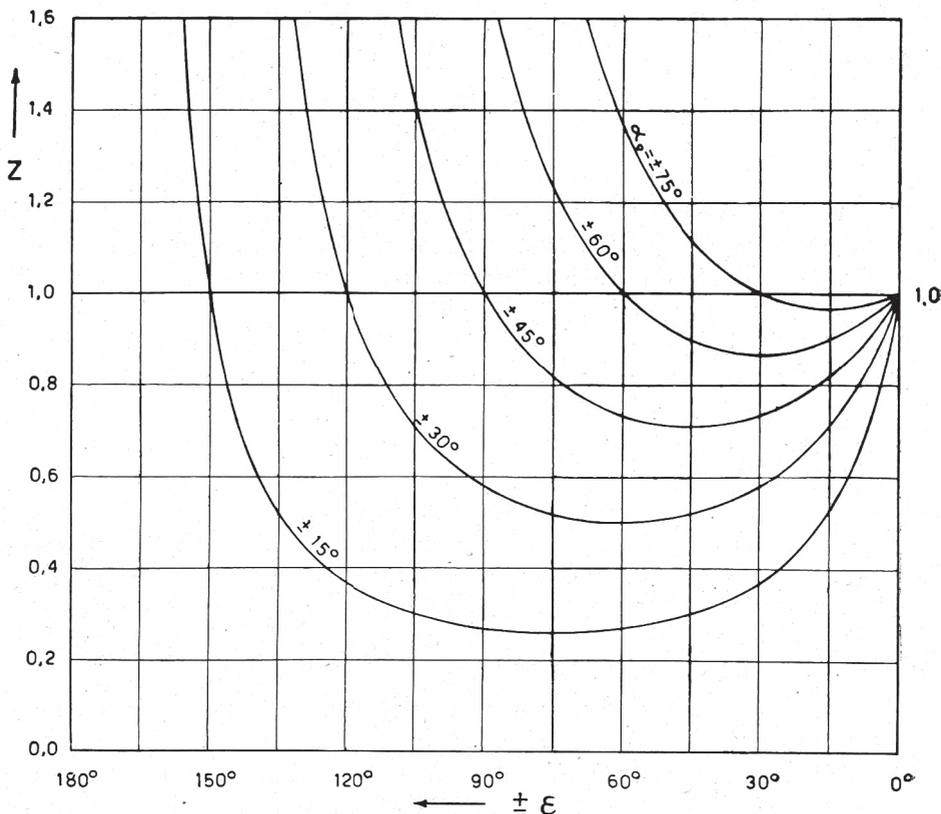


Fig. 1. - La funzione $Z = Z(\varepsilon)$ per dati α_0 .

è ε_0 , in valore assoluto, da 0 a π . Per $\varepsilon_0 \rightarrow \pm \pi$ l'oscillazione della sezione dovrebbe teoricamente annullarsi.

Per il calcolo della (54) in funzione della distanza x , occorre naturalmente determinare la relazione $\varepsilon = \varepsilon(x)$.

9. - L'AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI CON PERIODO $T > \frac{10\pi U_0}{g^i_f}$, IN FUNZIONE DELLA DISTANZA ALL'ORIGINE.

Sostituiamo nella (42) a Z l'espressione trovata (54). Segue

$$(56) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{A \operatorname{sen}(\varepsilon + \alpha_0) \operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \alpha_0}$$

e separando le variabili

$$(57) \quad \frac{A}{\operatorname{sen} \alpha_0} \int_0^x dx = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} (\varepsilon + \alpha_0)}$$

Il secondo membro, con facili trasformazioni trigonometriche, si riduce a

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_0} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d(\operatorname{cotg} \varepsilon)}{\operatorname{cotg} \alpha_0 + \operatorname{cotg} \varepsilon}$$

e quindi integrando

$$(58) \quad x = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{\operatorname{cotg} \alpha_0 + \operatorname{cotg} \varepsilon}{\operatorname{cotg} \alpha_0 + \operatorname{cotg} \varepsilon_0} \right|$$

od anche

$$(59) \quad \boxed{\operatorname{cotg} \varepsilon = e^{Ax} (\operatorname{cotg} \alpha_0 + \operatorname{cotg} \varepsilon_0) - \operatorname{cotg} \alpha_0}.$$

Queste formule mostrano che le *condizioni di regime* (caratterizzate con le nostre semplificazioni dal valore $\varepsilon = 0$) non possono essere raggiunte che *per* $x \rightarrow \infty$.

Con i dati $Z_0 = 1$ ed $\varepsilon_0 = \pi/2$, dalla (66) deriva che alla distanza $x = \frac{2}{A}$ è

$$\operatorname{cotg} \varepsilon = e^2 - 1 \quad \text{e quindi} \quad \varepsilon = 0,155 \simeq \frac{1}{10} (\pi/2).$$

A valori ancora più piccoli si riduce naturalmente lo sfasamento se all'origine è $Z_0 < 1$, oppure $\varepsilon_0 < \pi/2$.

Per esempio, con $i_f = 1\%$, $U_0 = 5\text{m/sec}$, $n = \frac{2}{3}$, $T = 30'$, si ha

$$A = \frac{2i_f}{nY_0(F-1)} = 0,0193 \quad \text{e quindi} \quad \frac{2}{A} = 104 \text{ metri.}$$

Perciò pur potendosi teoricamente annullare solo per $x \rightarrow \infty$, lo sfasamento si riduce a valori abbastanza piccoli, da poterne ritenere trascurabili gli effetti, già a breve distanza dall'origine, poco mag-

giore di $\frac{2}{A} = \frac{nY_0(F-1)}{i_f}$. Questa distanza, come si è visto, è dell'ordine di qualche centinaio di metri al massimo.

La fig. 2 mostra l'andamento di ε con x per diversi valori costanti di α_0 . In corrispondenza dell'origine delle ascisse sono indicati i valori di ε_0 . Essi si riferiscono al caso $Z_0 = 1$.

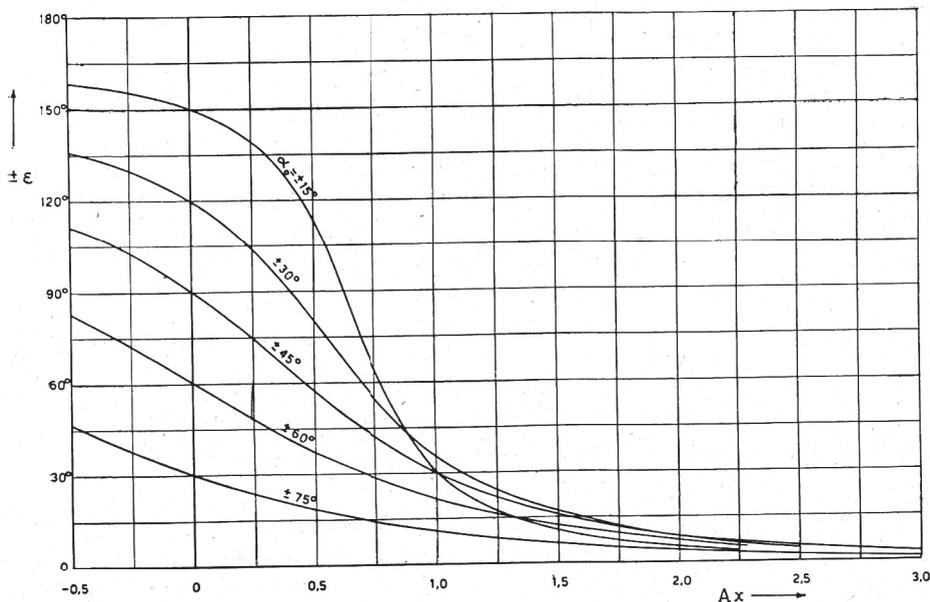


Fig. 2. - La funzione $\varepsilon = \varepsilon(x)$ per dati α_0 ($Z_0 = 1$).

Le stesse curve rappresentano però la dipendenza di ε da x anche per differenti Z_0 , cioè per differenti coppie di valori ε_0, α_0 . Basta infatti spostare l'origine delle ascisse sul punto che ha come ordinata relativa alla curva $\alpha_0 = \text{cost}$ il valore assegnato ε_0 .

Note ora le funzioni $Z = Z(\varepsilon)$, espressa dalla (54), ed $\varepsilon = \varepsilon(x)$, espressa dalla (59), è immediata la relazione $Z = Z(x)$. Rinunciamo a scrivere questa relazione perchè essa assume una forma piuttosto complessa; la dipendenza analitica di Z da x resta comunque determinata passando attraverso il calcolo di ε . Più rapidamente si può procedere per via grafica utilizzando il diagramma della fig. 3, che è stato dedotto evidentemente da quelli delle figg. 1 e 2.

In esso le curve $\alpha_0 = \text{cost}$ rappresentano l'andamento di Z in funzione di x nel caso $Z_0 = 1$. Le stesse curve possono però, come nella figura precedente, indicare l'andamento di Z anche per un valore Z_0 diverso da 1, purchè si dia una traslazione alla scala delle ascisse fino a

portarne l'origine in corrispondenza del punto che ha, sulla data curva $\alpha_0 = \text{cost}$, un'ordinata uguale all'assegnato valore Z_0 .

Nella fig. 4 sono riuniti i tre precedenti diagrammi ed è indicato con un segno marcato, a titolo di esempio, l'andamento delle funzioni $Z = Z(\varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon(x)$ e $Z = Z(x)$ nel caso $Z_0 = 0,733$ ed $\varepsilon_0 = \pm 60^\circ$.

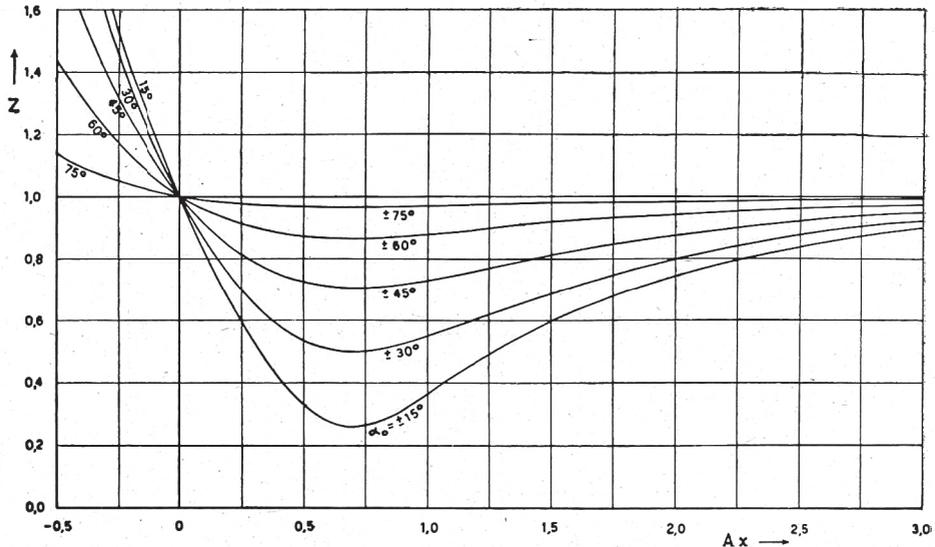


Fig. 3. - La funzione $Z = Z(x)$ per dati α_0 ($Z_0 = 1$).

Per dare maggior chiarezza al procedimento non sono state riportate le altre curve $\alpha_0 = \text{cost}$.

Per quanto riguarda infine la dipendenza del coefficiente γ da x , dalle (54) e (59), tenuto conto della (53) si ha

$$(60) \quad z \sin \varepsilon = e^{-Ax} Z_0 \sin \varepsilon_0$$

e quindi dalla (20)

$$(61) \quad \gamma = \eta K_u \int_0^x Z \sin \varepsilon dx = \eta K_0 \sin \varepsilon_0 \int_0^x e^{-Ax} dx$$

ossia

$$(62) \quad \boxed{\gamma = \frac{\eta K_0}{A} \sin \varepsilon_0 (1 - e^{-Ax}).}$$

Il coefficiente γ è positivo o negativo in concordanza con il segno dello sfasamento all'origine ε_0 . Il suo valor massimo, se ε_0 è > 0 , (od il minimo se $\varepsilon_0 < 0$) si verifica per $x \rightarrow \infty$ e vale $\eta \frac{K_0}{A} \sin \varepsilon_0$.

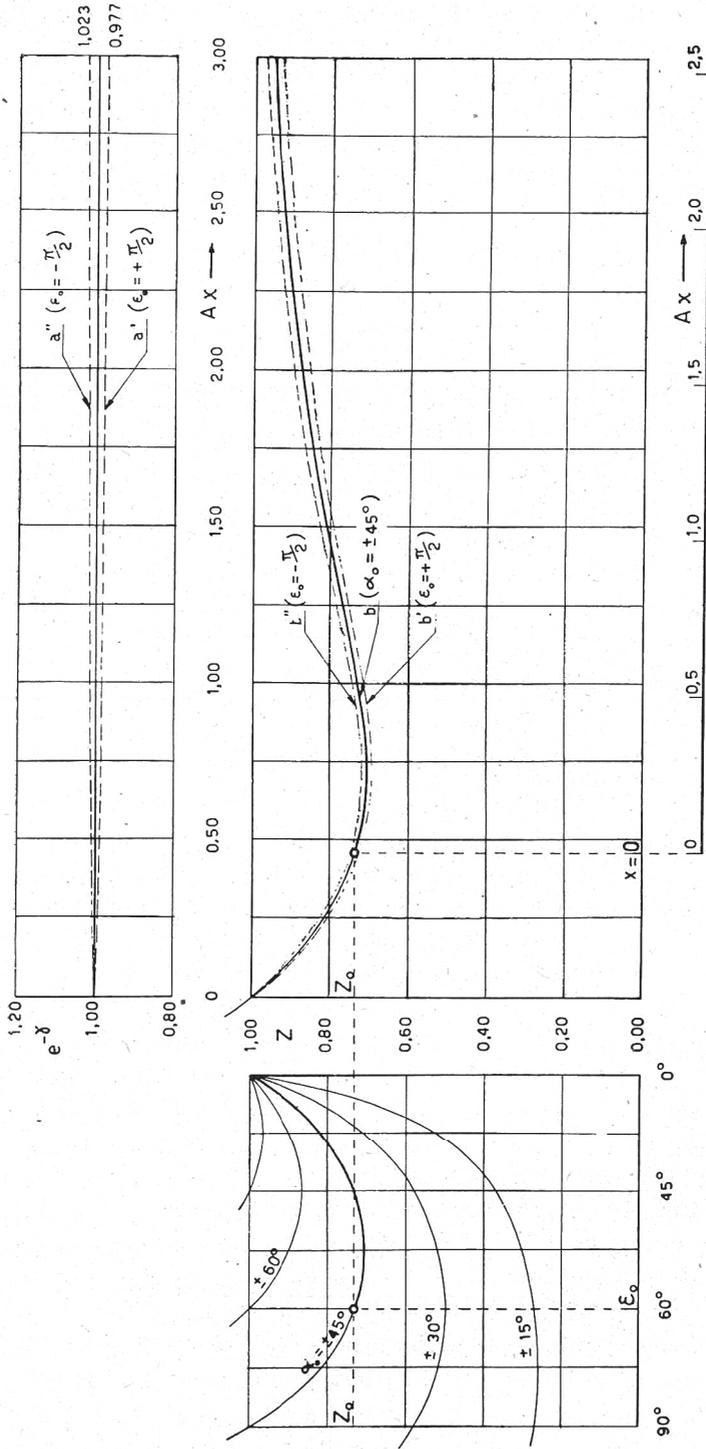


Fig. 4.

Quando ε_0 è uguale a $\pi/2$, γ raggiunge il massimo assoluto, cioè

$$(63) \quad \gamma_{\max} = \frac{\eta K_0}{A}$$

Con i dati dell'esempio precedente: $A = 0,0193$, $T = 30'$, $Z_0 = 1$ e quindi $K_0 = K_u = \frac{\eta}{U_0} = 0,133$, si ha

$$\text{nel caso } \varepsilon_0 = \pi/2 \quad \gamma_{\max} = 0,024; \quad [e^{-\gamma}]_{\chi \rightarrow \infty} = e^{-0,024} = 0,976$$

$$\text{nel caso } \varepsilon_0 = -\pi/2 \quad \gamma_{\min} = -0,024; \quad [e^{-\gamma}]_{\chi \rightarrow \infty} = e^{+0,024} = 1,025.$$

Questo calcolo mostra che le attenuazioni o le esaltazioni dell'onda di portata, funzioni soltanto di γ , sono generalmente trascurabili.

10. - OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.

Nella stessa fig. 4 sono indicati con linee tratteggiate anche gli andamenti della funzione $e^{-\gamma(x)}$ (curve a' ed a'') e della $\frac{Z(x)}{Z_0} e^{-\gamma(x)}$ (curve b' e b'') nell'ipotesi:

$$i_f = 1\%, \quad U_0 = 5 \text{ m/sec}, \quad T = 30', \quad Z_0 = 1 \quad \text{ed} \quad \varepsilon_0 = \pm \pi/2.$$

Questa figura mette in evidenza gli aspetti fondamentali della propagazione non di regime delle onde con periodo relativamente lungo ($> \frac{10\pi U_0}{g i_f}$).

Dalle (21) e (24) che riscriviamo

$$(21) \quad \frac{q_{\max}(x)}{q_0} = e^{-\gamma(x)}; \quad (24) \quad \frac{\omega_{\max}(x)}{\omega_0} = \frac{Z(x)}{Z_0} e^{-\gamma(x)}$$

si vede infatti che le curve a' ed a'' rappresentano la variazione, con la distanza dall'origine, dell'ampiezza massima delle oscillazioni di portata e le curve b' e b'' le corrispondenti variazioni dell'ampiezza massima delle oscillazioni di sezione.

Abbiamo già avuto occasione di ricordare nella nota citata inizialmente (Cfr. [1], n. 1) il risultato di un procedimento, basato sull'equazione di continuità (FLAMANT - «Hydraulique» pag. 296), mediante il quale si dimostra che un'onda si attenua quando il massimo di sezione segue nel tempo il massimo di portata e si esalta quando lo precede.

Occorre aggiungere qui una precisazione: l'onda per cui sono sempre valide le considerazioni precedenti è *soltanto quella di portata*. Ciò si verifica facilmente seguendo l'impostazione di quel procedimento.

L'escursione massima della sezione può modificarsi in maniera del tutto differente. Soltanto in condizioni di regime le due oscillazioni seguono lo stesso andamento, dato che in tal caso si mantiene costante il rapporto fra le ampiezze massime delle due onde.

Effettivamente la fig. 4 mostra che al valore positivo dello sfasamento all'origine ($\varepsilon_0 = +\pi/2$), cioè ad un'oscillazione di ω in ritardo rispetto a quella di q , corrisponde la curva a' ad ordinate decrescenti, mentre al valore negativo dello sfasamento ($\varepsilon_0 = -\pi/2$) corrisponde la curva a'' ad ordinate crescenti.

Possiamo dire che questo è l'effetto essenzialmente dovuto alla non-permanenza del moto. Esso è evidente anche sulle variazioni di ampiezza della oscillazione di sezione osservando nella fig. 4 il passaggio dalla curva b a tratto intero alle curve b' e b'' tratteggiate. Sull'ampiezza di queste oscillazioni di sezione, nelle condizioni di periodo previste, è però assolutamente predominante l'effetto dovuto alla sovrapposizione di successivi profili di rigurgito, che risulta *indipendente dal segno dello sfasamento* (curva b).

Si noti che se le condizioni all'origine non sono di regime soltanto per quel che riguarda lo sfasamento, la propagazione inizia sempre con una contrazione di ampiezza. Questo fenomeno può quindi mascherare anche l'eventuale esaltazione che sarebbe prevista, in condizioni di regime, quando la pendenza del fondo supera $4i_c$.

Concludiamo osservando che un procedimento perfettamente analogo dal punto di vista analitico si può sviluppare anche nel caso di *corso tranquillo*, a partire però da una sezione di valle e procedendo verso monte con x negative. I fenomeni sono gli stessi salvo una maggior lunghezza del tronco interessato che, essendo sempre dell'ordine di $\frac{nY_0(1-F)}{i_f}$, può raggiungere anche qualche chilometro con valori molto piccoli di i_f .

La difficoltà in questo caso sta nell'applicazione dei risultati perchè occorrerebbe che nella sezione terminale — considerata come origine della perturbazione — fossero assegnate le oscillazioni periodiche non soltanto della sezione ma anche della portata.

Dal punto di vista pratico si può dire peraltro che — escluso un primo tronco di qualche centinaio di metri in alveo torrentizio od un tronco terminale di qualche chilometro in alveo tranquillo — lo studio di una propagazione ondosa periodica con $T > \frac{10\pi U_0}{gi_f}$ si può eseguire con buona approssimazione supponendo sempre realizzate le condizioni di regime, qualunque sia la posizione all'origine della perturbazione.

PARTE II.

LE OSCILLAZIONI DI PERIODO BREVE ATTRAVERSO
UN'APPLICAZIONE NUMERICA ED UN CONFRONTO SPERIMENTALE

1. - RIASSUNTO DEI RISULTATI TEORICI.

Nella I parte di questa nota si è svolta un'indagine teorica di carattere generale sulla propagazione delle oscillazioni periodiche non di regime e si è sviluppato particolarmente lo studio delle onde con periodo $T > \frac{10\pi U_0}{gi_f}$.

Ci proponiamo ora di esaminare il comportamento delle stesse perturbazioni nel caso $T \leq \frac{10\pi U_0}{gi_f}$.

Riassumiamo brevemente le ipotesi di partenza e le equazioni che, secondo il nostro schema, interpretano queste propagazioni ondose non di regime. Indicheremo le formule richiamate con gli stessi numeri con cui sono state indicate nella I parte.

In un corso torrentizio ($i_f > i_c$) sono assegnate le oscillazioni della portata e della sezione all'origine della perturbazione ($x = 0$)

$$(9) \quad \begin{cases} q(0, t) = q_0 \text{ sen } \eta t \\ \omega(0, t) = \omega_0 \text{ sen } (\eta t - \varepsilon_0) \end{cases}$$

in maniera che le ampiezze massime ω_0 e q_0 siano piccole rispetto ai valori Ω_0 e Q_0 relativi al moto-base uniforme (al punto da rendere trascurabili i prodotti del 2° ordine).

Indicato con n l'esponente della scala di deflusso $\Omega = \text{cost } Q^n$, con ε lo sfasamento angolare fra le funzioni ω e q in una sezione generica e con Z il corrispondente rapporto fra le ampiezze massime delle stesse funzioni, misurato adimensionalmente assumendo come unità di misura il valore $K_u = \frac{n}{U_0}$ dello stesso rapporto in condizioni di regime, nella sezione origine è evidentemente

$$(4) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \frac{\omega_0}{q_0} = K_0 = K_u Z_0.$$

Posto

$$(20) \quad \gamma = \eta K_u \int_0^x Z \operatorname{sen} \varepsilon \, dx$$

risulta in una sezione generica, distante x dall'origine,

$$(21) \quad \frac{q_{\max}(x)}{q_0} = e^{-\gamma}; \quad (24) \quad \frac{\omega_{\max}(x)}{\omega^0} = \frac{Z}{Z_0} \cdot e^{-\gamma}.$$

La conoscenza delle funzioni $\varepsilon(x)$ e $Z(x)$ consente quindi il calcolo delle ampiezze massime delle escursioni di portata e di sezione ad una generica ascissa.

Con riferimento ad un alveo di sezione rettangolare, di profondità Y_0 e n° di Froude $\frac{U_0^2}{gY_0} = F$, e detti

$$(31') \quad A = \frac{2i_f}{nY_0(F-1)}; \quad (31'') \quad B = \frac{2\eta U_0}{gY_0(F-1)}$$

$$(31''') \quad C = \frac{B}{2n}; \quad (31'''') \quad D = \eta \frac{n}{U_0}$$

si ha in generale il sistema

$$(33) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{A}{Z} \operatorname{sen} \varepsilon + B - \left(\frac{C}{Z} + DZ \right) \cos \varepsilon$$

$$(34) \quad \frac{dZ}{dx} = A \cos \varepsilon - AZ - (C - DZ^2) \operatorname{sen} \varepsilon$$

con le condizioni all'origine $Z = Z_0$ ed $\varepsilon = \varepsilon_0$ per $x = 0$.

Se F è < 3 , al sistema (33) e (34) si può sostituire il seguente semplificato

$$(38) \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{A}{Z} \operatorname{sen} \varepsilon + C - \frac{C}{Z} \cos \varepsilon$$

$$(39) \quad \frac{dZ}{dx} = A \cos \varepsilon - AZ - C \operatorname{sen} \varepsilon.$$

Di qui deriva l'espressione di Z

$$(47) \quad Z = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \varepsilon)}{\operatorname{sen} \beta}$$

in funzione di ε e di una variabile ausiliaria β definita dalla relazione

$$(48) \quad e^{\beta \frac{A}{C}} \operatorname{sen} \beta = k e^{\varepsilon \frac{A}{C}} \operatorname{sen} \varepsilon.$$

Poichè la (48) definisce implicitamente β in funzione di ε , le funzioni $\varepsilon(x)$, $Z(x)$, e naturalmente $\gamma(x)$, si possono calcolare solo numericamente o graficamente per mezzo delle (38), (39) e (20).

2. - CARATTERISTICHE DELLE ONDE E DEL MOTO-BASE UNIFORME CONSIDERATI NELLE ESPERIENZE.

Mostriamo un'applicazione del procedimento esposto considerando una perturbazione di periodo abbastanza breve da rendere ben evidente l'effetto della non permanenza del moto.

Per poter eseguire un confronto sperimentale facciamo riferimento ad una situazione realizzabile in laboratorio. Ossia:

a) Alveo rettangolare di larghezza $b_0 = 11,75$ cm, con pareti e fondo lisci.

b) Moto base uniforme con pendenza $i_f = 3\%$, profondità $Y_0 = 4,0$ cm, sezione $\Omega_0 = 47,0$ cm², portata $Q_0 = 8,20$ l/sec, velocità media $U_0 = 1,737$ m/sec, n. di Froude $F = 7,76$.

c) All'origine: oscillazione sinuscoidale della profondità di semi-ampiezza massima $y_0 = 0,5$ cm ($\omega_0 = 5,875$ cm²), e della portata di semi-ampiezza massima $q_0 = 1,55$ l/sec. Periodo di entrambe le oscillazioni $T = 36$ sec, pulsazione $\eta = 0,1745$.

Si considerano due situazioni: ω in quadratura in ritardo rispetto a q (sfasamento $\varepsilon_0 = +\pi/2$) e ω in quadratura in anticipo rispetto a q ($\varepsilon_0 = -\pi/2$).

Al calcolo dell'esponente n della scala di deflusso $\Omega = \text{cost. } Q^n$ si è proceduto come segue.

Sviluppiamo in serie la relazione precedente e trascuriamo i termini piccoli del II ordine; si ha:

$$\Omega_0 \left(1 + \frac{\omega}{\Omega_0}\right) = \text{cost. } Q_0^n \left(1 + n \frac{q}{Q_0}\right)$$

ossia, essendo $\Omega_0 = \text{cost. } Q_0^n$,

$$(1) \quad \omega = \frac{n}{U_0} q.$$

D'altra parte l'equazione del moto uniforme, con $\chi = cR^{1/6}$, si scrive

$$Q^2 = c^2 i_f \frac{\Omega^{10/3}}{B^{4/3}}.$$

Tenendo conto delle piccole variazioni di Q , di Ω e di B con la profondità, variazioni che in alveo rettangolare di larghezza b_0 si scrivono

$$Q = Q_0 + q \quad \Omega = \Omega_0 + \omega \quad B = B_0 + 2 \frac{\omega}{b_0}$$

segue

$$Q_0^2 \left(1 + \frac{2q}{Q_0}\right) = c^2 i_f \frac{\Omega_0^{10/3}}{B_0^{4/3}} \left(1 + \frac{10}{3} \frac{\omega}{\Omega_0}\right) \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\omega}{b_0 B_0}\right).$$

Di qui, in conseguenza della relazione di moto uniforme che lega fra loro le grandezze contrassegnate con l'indice 0, deriva

$$\frac{q}{Q_0} = \frac{\omega}{\Omega_0} \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3} \frac{\Omega_0}{B_0 b_0}\right)$$

e quindi per confronto con la (1)

$$(64) \quad n = \frac{1}{\frac{5}{3} - \frac{4}{3} \frac{Y_0}{B_0}}.$$

Con i valori assegnati prima si ha dalla (64):

$$(65) \quad n = 0,715$$

e

$$(66) \quad K_u = \frac{n}{U_0} = 0,410 \text{ m}^{-1} \text{ sec}.$$

All'origine risulta perciò

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} + \pi/2 & \text{(I situazione)} \\ - \pi/2 & \text{(II situazione)} \end{cases}$$

e dalla (4)

$$K_0 = \frac{\omega_0}{q_0} = \frac{5,875 \times 10^{-4}}{1,55 \times 10^{-3}} = 0,379 \text{ m}^{-1} \text{ sec}$$

cioè

$$Z_0 = \frac{K_0}{K_u} = \frac{0,379}{0,410} = 0,925 \text{ (}^{\circ}\text{)}.$$

(^o) Inizialmente si pensava di operare con $Z_0 = 1$ ma i valori all'origine, al momento di eseguire le prime esperienze, furono assegnati ritenendo in prima approssimazione $n = 2/3$. Piuttosto che modificare le scale già predisposte si è preferito lasciare inalterati i dati precedenti ed assumere all'origine il valore $Z_0 = 0,925$ che deriva dal calcolo esposto.

3. - RICERCA TEORICA DELL'ATTENUAZIONE.

Il numero di Froude $F = 7,76$, imposto dalla necessità che le onde sperimentali fossero brevi pur rientrando nelle condizioni di validità del processo di linearizzazione, supera notevolmente il limite posto per la sostituzione del sistema (33) (34) con il (38) (39).

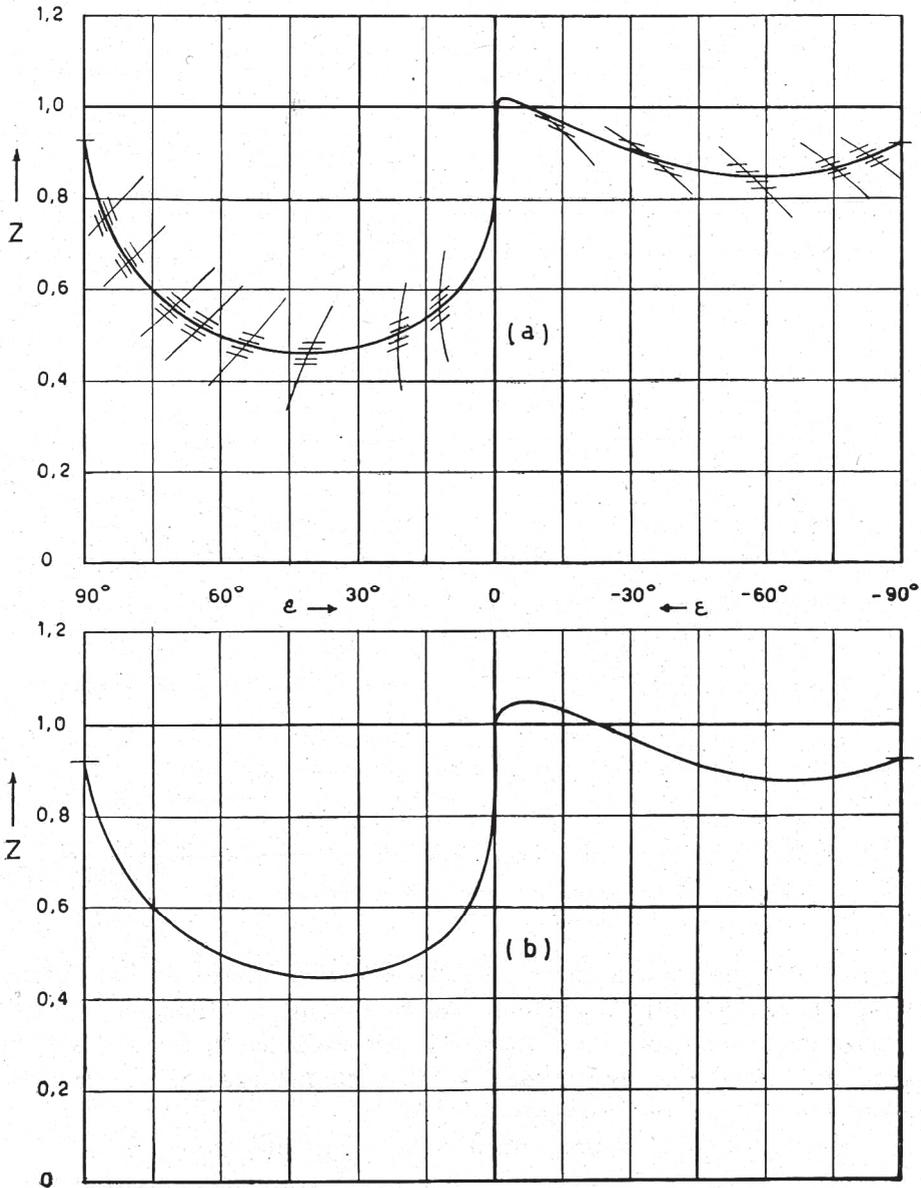


Fig. 5. - La funzione $Z = Z(\epsilon)$.

Nel diagramma (a) della fig. 5 è rappresentata la relazione $Z = Z(\varepsilon)$ ottenuta mediante integrazione con il metodo delle isocline dell'equazione differenziale $\frac{d\varepsilon}{dZ} = f(\varepsilon, Z)$, che deriva dal rapporto fra le equazioni complete (33) e (34).

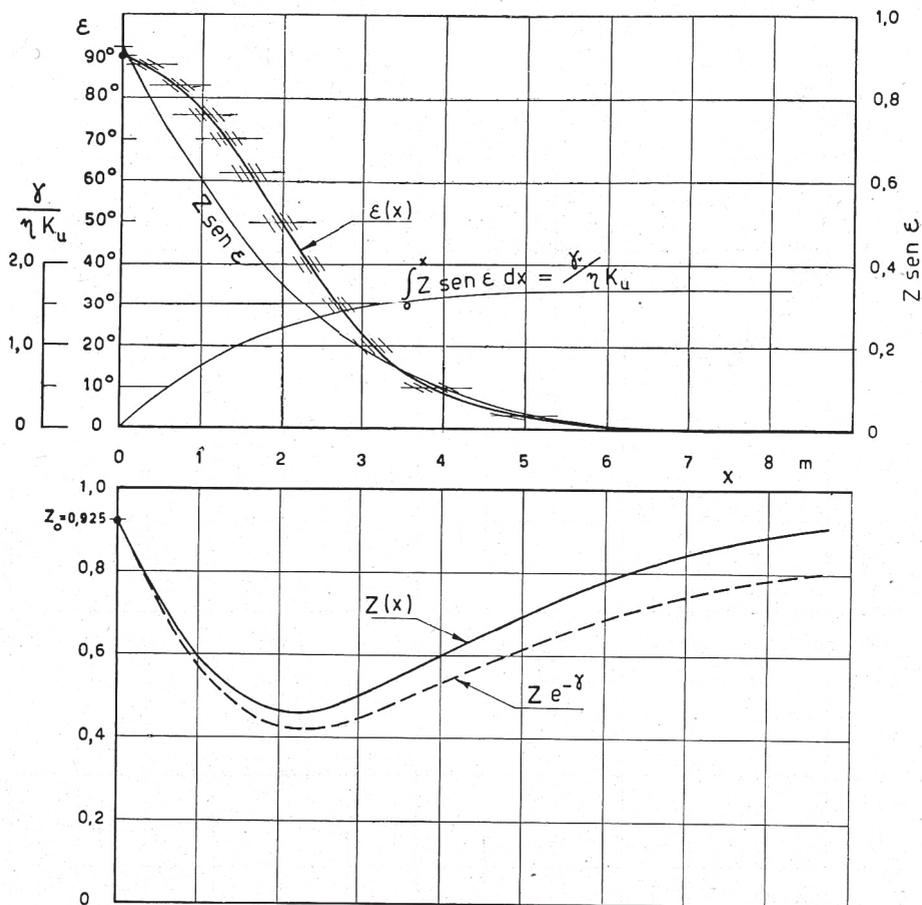


Fig. 6. - Le funzioni $\varepsilon = \varepsilon(x)$ e $Z = Z(x)$ nel caso $\varepsilon_0 = \pi/2$.

In (b) è riportata la curva (47) che si ottiene partendo dal sistema semplificato (38) (39). È evidente, anche in questa situazione, caratterizzata da un elevato valore di F , che gli scostamenti fra le due soluzioni $Z = Z(\varepsilon)$ sono molto piccoli. Soltanto nel caso $\varepsilon_0 = -\pi/2$ essi assumono valori non trascurabili.

Nella fig. 6 sono rappresentate nella prima situazione ($\varepsilon_0 = +\pi/2$) le curve $\varepsilon = \varepsilon(x)$ e $Z = Z(x)$ dedotte rispettivamente dalle equazioni (33) e (34) sempre con il metodo delle isocline, assegnati ormai i valori

$Z = Z(\varepsilon)$ dal diagramma (a) della fig. 5. Nella stessa fig. 6, al di sopra dell'asse delle x , si è tracciata per i punti la curva $Z \text{ sen } \varepsilon$ e si è eseguito graficamente l'integrale $\int_0^x Z \text{ sen } \varepsilon \, dx$.

Nota quindi in diverse ascisse il coefficiente

$$\gamma = \eta K_u \int_0^x Z \text{ sen } \varepsilon \, dx,$$

si è trovata per i punti la curva tratteggiata $Z e^{-\gamma}$.

Analogamente si è operato nella fig. 7 per il caso $\varepsilon_0 = -\pi/2$ (7).

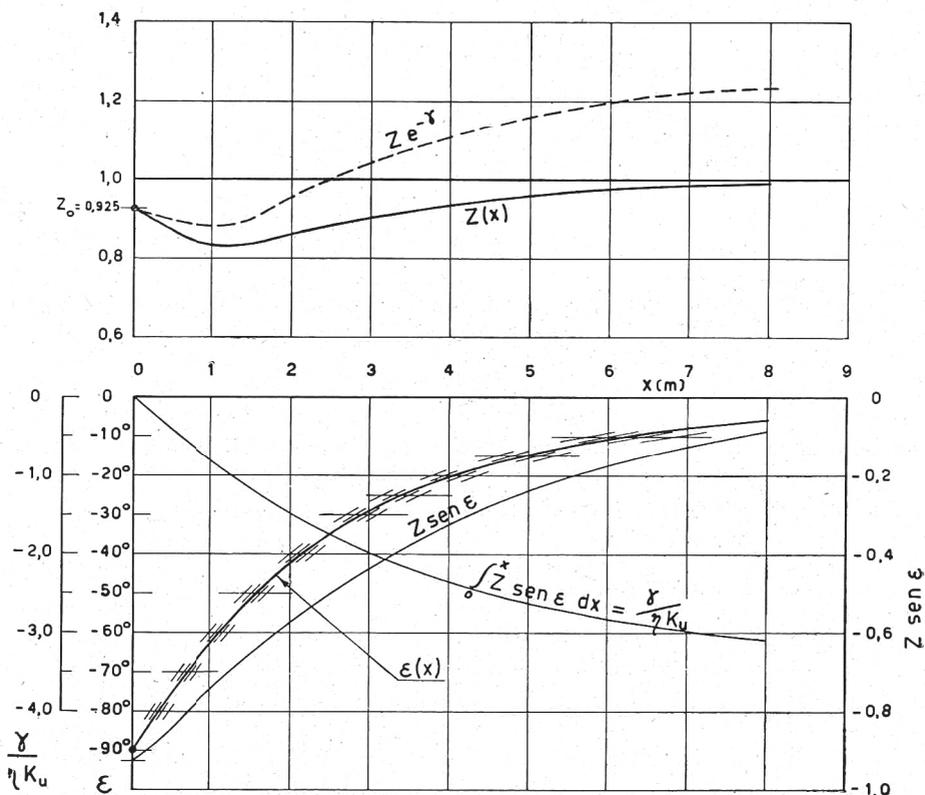


Fig. 7. - Le funzioni $\varepsilon = \varepsilon(x)$ e $Z = Z(x)$ nel caso $\varepsilon_0 = -\pi/2$.

(7) Agli stessi risultati quantitativi si poteva giungere, come si è già detto, impiegando la soluzione assegnata in forma di serie dal prof. SUPINO. Questa concordanza di risultati deriva ovviamente dall'identità delle equazioni fondamentali e delle ipotesi semplificative poste alla base dei due procedimenti.

A titolo di esempio possiamo eseguire il confronto, che si presenta semplice, fra le attenuazioni all'origine nel caso $\varepsilon_0 = +\pi/2$.

Secondo il procedimento del prof. SUPINO, e con i simboli impiegati dallo stesso

Abbiamo già detto che la situazione considerata non si prestava alla sostituzione del sistema completo con quello semplificato a causa dell'elevato valore di F . Malgrado ciò, se si fossero ugualmente utilizzate le equazioni (38) e (39) partendo dalla relazione analitica $Z = Z(\varepsilon)$ espressa dalla (47) (diagramma (b) della fig. 5), gli scarti sui valori di $Z e^{-\gamma}$ sarebbero stati, alla distanza $x = 6m$, appena del 2% in difetto nel caso $\varepsilon_0 = +\pi/2$ e del 5% in eccesso nel caso $\varepsilon_0 = -\pi/2$.

A nella nota citata (⁴), risulta

$$[y]_{x=0} = A_1 \text{ sen } \eta t$$

$$\left[\frac{q}{b} \right]_{x=0} = -A_0 \text{ cos } \eta t$$

con

$$A_0 = \frac{q_0}{b}, \quad A_1 = y_0, \quad B_0 = B_1 = 0$$

e

$$A_2 = \frac{1}{2(1-\sigma)} \cdot \left\{ \frac{U_0^2}{\chi^2 Y_0} \left(\frac{3}{R_0} - \frac{2}{b} \right) A_1 - \frac{\eta}{g Y_0} A_0 \right\}$$

con $\sigma = n$. di Froude. Per quanto riguarda l'attenuazione delle altezze d'acqua risulta

$$\left[\frac{dy_{\max}}{dx} \right]_{x=0} = 2A_2$$

e quindi, indicando ora il numero di Froude con F e con B il contorno bagnato

$$(a) \quad \left[\frac{d\omega_{\max}}{dx} \right]_{x=0} = 2A_2 b = -\frac{1}{F-1} \left\{ \left(\frac{3}{Y_0} - \frac{2}{B} \right) i_f \omega_0 + \frac{\eta}{g Y_0} q_0 \right\}.$$

Con il nostro metodo risulta

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\omega_{\max}}{dx} \right]_{x=0} &= \frac{1}{Z_0} \left(\frac{dZ}{dx} \right)_{x=0} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = - \left(A + \frac{C}{Z_0} \right) \omega_0 = \\ &= -\frac{1}{F-1} \left\{ \frac{2}{n Y_0} i_f \omega_0 + \frac{\eta}{g Y_0} q_0 \right\}. \end{aligned}$$

Il confronto fra la (a) e la (b) mostra una piccola differenza derivante dai termini $\frac{3}{Y_0} - \frac{2}{B} \cong 65$ e $\frac{2}{n Y_0} \cong 70$.

Essa è conseguenza del fatto che l'espressione del coefficiente A_2 è stata dedotta, nella nota del prof. SUPINO ponendo $\chi = \text{cost}$. Adottando, come nel nostro caso, la relazione $\chi = cR^{1/6}$ deriva, senza particolari difficoltà, che a quel termine deve sostituirsi

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{Y_0} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{B} \cong 70$$

coincidente perfettamente con il nostro.

4. - OSSERVAZIONI SULLA PROPAGAZIONE DELLE ONDE NON DI REGIME
 DI PERIODO $T \leq \frac{10\pi U_0}{g v_f}$.

Abbiamo riportato nella fig. 8 le curve $e^{-\gamma(x)}$ e $\frac{Z(x)}{Z_0} e^{-\gamma(x)}$ per $\varepsilon_0 = \pm \pi/2$ che si deducono immediatamente dalle figg. 6 e 7. Esse

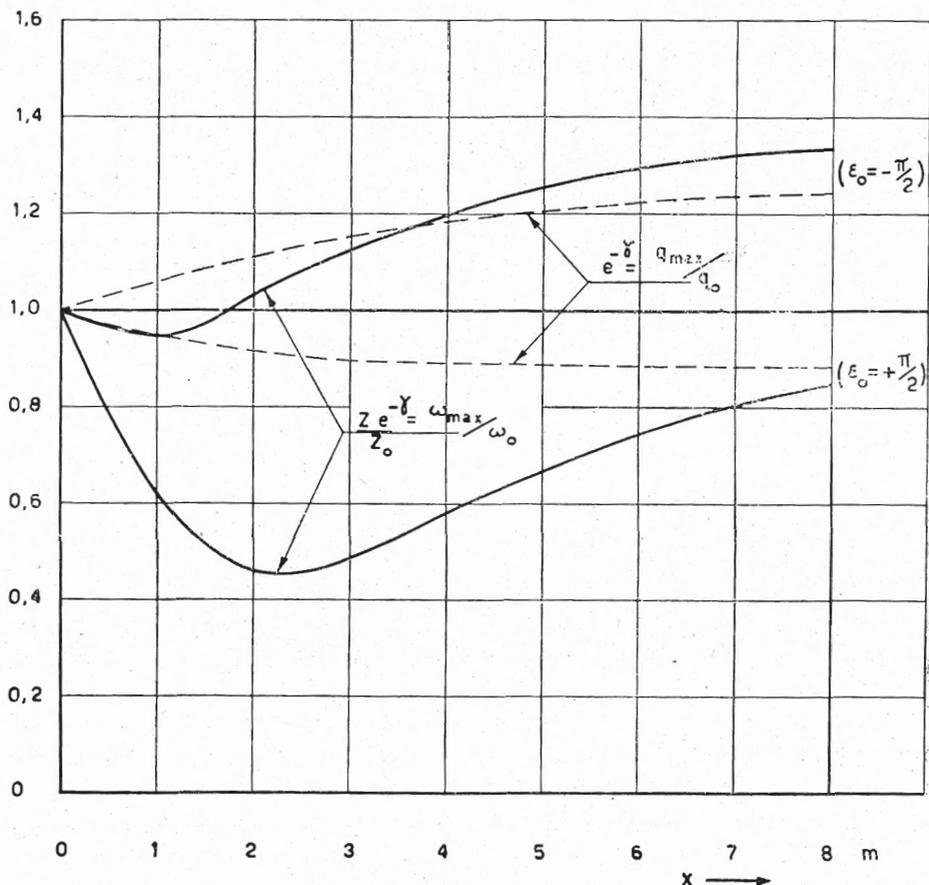


Fig. 8. - Le variazioni delle ampiezze massime di sezione e di portata con la distanza dall'origine.

rappresentano, in relazione alle (21) e (24), le variazioni dell'ampiezza massima dell'oscillazione di portata e rispettivamente di sezione.

Per quanto riguarda la prima, resta confermato il risultato già visto nel caso delle oscillazioni lente e prevedibile teoricamente, come si è ricordato al n. 10 della I parte, attraverso semplici considerazioni che derivano dalla condizione di continuità. Nel caso $\varepsilon_0 = +\pi/2$, cioè ω

in ritardo rispetto a q , le ampiezze massime dell'oscillazione di portata sono decrescenti esponenzialmente con x , nell'altro caso crescono con la stessa legge (ma con valori differenti dall'esponente) al crescere della distanza. Nella situazione attuale le variazioni di ampiezza dell'onda di portata sono solo molto più sensibili di quelle viste nella I parte in conseguenza della minor durata del periodo.

Differenze sostanziali presenta invece l'andamento con x dell'ampiezza massima della sezione. Già nella fig. 5 si era visto che la funzione $Z(\varepsilon)$ non era più la stessa nei casi $\varepsilon_0 = +\pi/2$ ed $\varepsilon_0 = -\pi/2$, come accadeva per $T > \frac{10\pi U_0}{g i_f}$. Nel primo caso l'attenuazione risulta infatti accentuata rispetto alla precedente, nel secondo essa compare, molto ridotta, soltanto fino a quando lo sfasamento è ancora notevole e lascia il posto, per i più piccoli valori di ε , ad una esaltazione che si conserva fino al raggiungimento delle condizioni di regime.

Aggiungendosi a questi effetti quelli non più trascurabili dovuti al coefficiente $e^{-\gamma}$ ne deriva una funzione $\frac{Z}{Z_0} e^{-\gamma}$ per la quale risultano accentuate tanto le attenuazioni nel caso $\varepsilon_0 = \pi/2$ quanto le esaltazioni nel caso $\varepsilon_0 = -\pi/2$.

Concludendo, nella situazione qui considerata di oscillazioni periodiche non di regime di periodo breve, partendo dalle stesse escursioni iniziali di sezione e di portata e modificando soltanto le condizioni di sfasamento all'origine, si possono ottenere in un primo tratto sia onde che si attenuano sia onde che si esaltano su profilo di moto uniforme (*).

5. - L'APPARATO SPERIMENTALE.

Le esperienze si sono eseguite utilizzando una canaletta di sezione rettangolare, larga cm 11,75, avente pareti di vetro e fondo metallico ricoperto con uno strato di nitromastice essiccante liscio accuratamente. Questa canaletta fa parte delle attrezzature stabili del Laboratorio dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Bologna (V. fig. 9).

Era noto che questa canaletta, già utilizzata per una serie di esperienze sulle correnti uniformi a pelo libero, poteva considerarsi liscia. Come tale si è infatti riconfermata nelle prove che abbiamo eseguito preliminarmente.

La distanza massima dalla sezione origine della perturbazione alla

(*) Su profilo di moto permanente il prof. SUPINO aveva già dimostrato teoricamente e verificato sperimentalmente la possibilità di amplificare un'onda partendo da un'ampiezza iniziale nulla. Vedi G. SUPINO - *Onde di ampiezza crescente su moto-base permanente* - « L'Energia Elettrica » - fasc. n. 11, 1956.

quale era consentita una lettura istantanea della profondità era di circa 6 metri.

La canaletta era alimentata, attraverso una luce di fondo soggiacente ad una paratoia piana a spigolo vivo, da un pozzetto che a sua volta riceveva l'acqua da una condotta di 150 mm di diametro. Quest'ultima collegava il pozzetto con il più alto serbatoio di carico, a livello costante, del laboratorio.

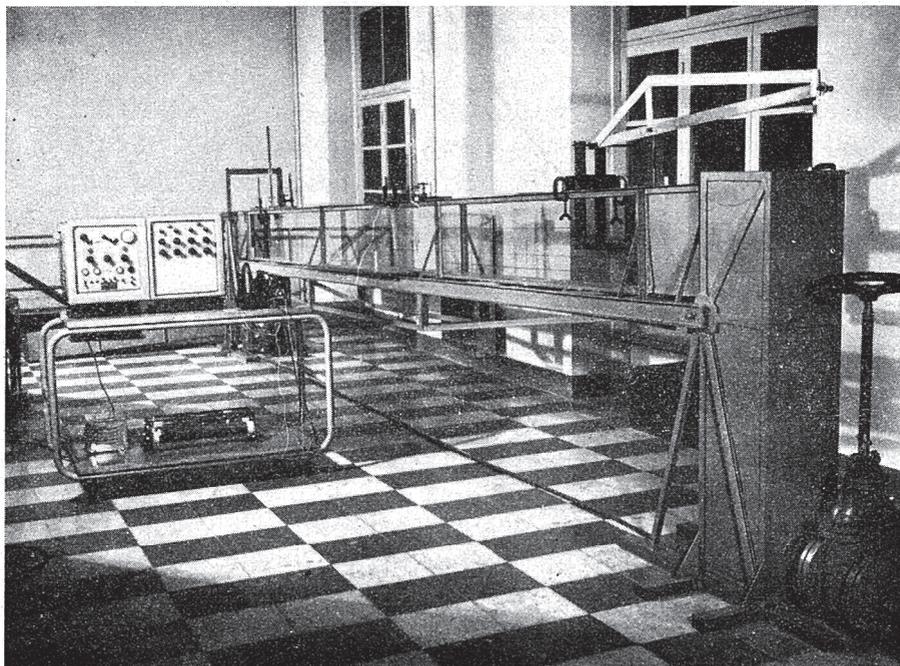


Fig. 9. - L'apparato sperimentale.

Una saracinesca, inserita nella condotta subito a monte del pozzetto consentiva di regolare la portata osservando contemporaneamente il livello dell'acqua nel pozzetto.

Per la misura della portata si è utilizzato un boccaglio tarato, del diametro di 80 mm, posto fra il serbatoio di carico e la condotta di alimentazione. Anche questo apparato di misura fa parte delle apparecchiature fisse del Laboratorio.

6. - LA FORMAZIONE DEL MOTO ONDOSO NELLA SEZIONE ORIGINE.

Al n. 2 sono già stati riportati i dati relativi al moto-base uniforme e alle oscillazioni nell'origine della portata e della sezione.

Volendo che le onde avessero forma sinusoidale con ampiezza totale

massima $2y_0 = 10$ mm, restò determinata l'apertura della luce di fondo, a monte della canaletta, in funzione del tempo. Una paratoia piana, posta a ~ 60 cm dal pozzetto e sostenuta con un sistema a cerniera, poteva essere sollevata ed abbassata facilmente per mezzo di una leva.

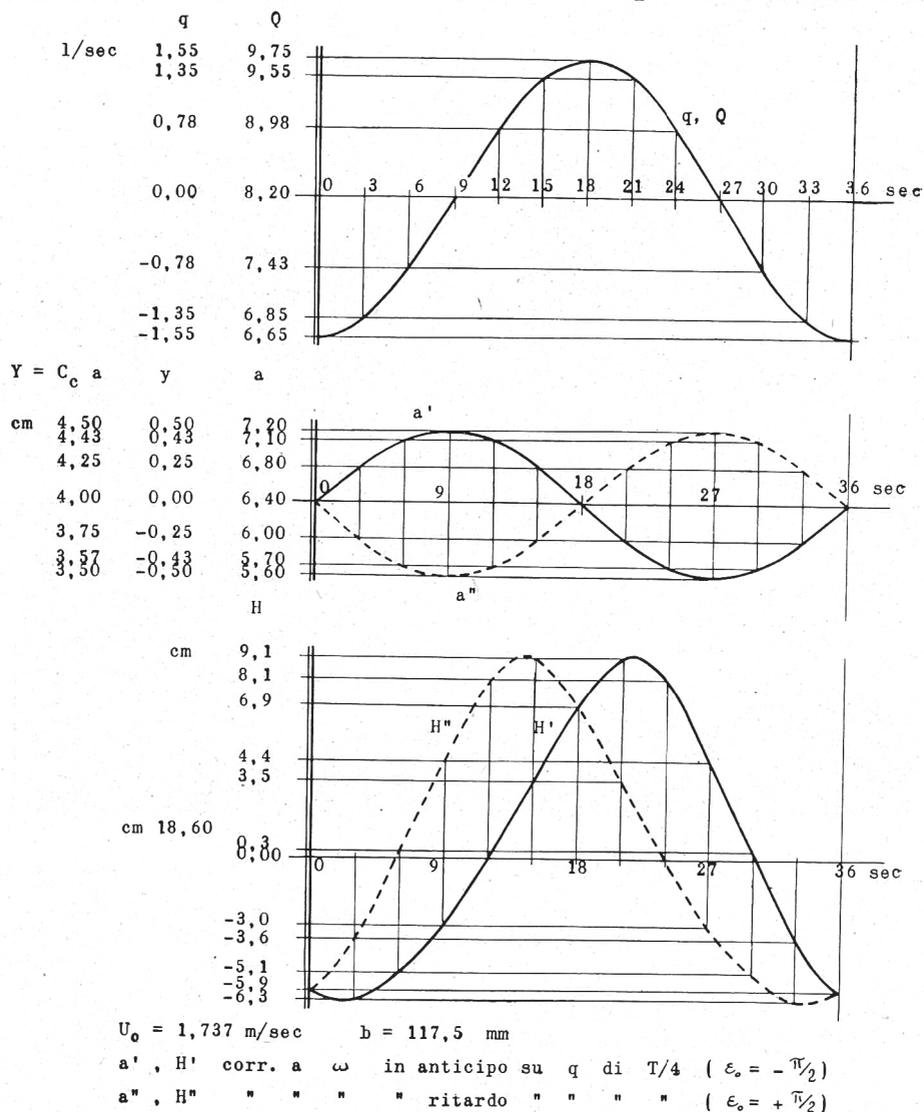


Fig. 10. - Le oscillazioni assegnate nella sezione origine.

Il braccio della stessa leva scorreva con un indice su di una guida, sulla quale era tracciata una scala graduata. I tratti di questa scala indicavano la posizione che doveva avere l'indice, ad intervalli di tempo costanti, perchè la paratoia eseguisse un'oscillazione sinusoidale di ampiezza to-

tale massima $2y_0/C_c$. Prove preliminari consigliarono il valore costante del coefficiente di contrazione $C_c = 0,625$.

Per quanto riguarda le oscillazioni di portata esse vennero ricondotte ad oscillazioni del carico nel pozzetto, in relazione alle corrispondenti aperture della luce di fondo, mediante prove sperimentali in regime stazionario. La gradualità delle oscillazioni consentiva infatti di considerare il fenomeno vario di efflusso come una successione di stati permanenti.

Furono raccolti così gli elementi per rappresentare, come mostra la fig. 10, in funzione del tempo, le oscillazioni della paratoia, della portata e del carico nel pozzetto.

Un'altra particolare scala graduata, fissata nell'interno del pozzetto, indicava i livelli che nei diversi istanti, corrispondenti a quelli previsti per l'oscillazione della paratoia, doveva assumere il pelo libero dell'acqua a monte della luce.

L'intervallo di tempo scelto fra tratto e tratto è stato di 3 secondi in relazione al periodo $T = 36$ sec.

La manovra della paratoia era affidata ad un operatore che muoveva il braccio della leva in modo che l'indice si trovasse in corrispondenza dei diversi tratti agli istanti precedentemente fissati. Un secondo operatore manovrava contemporaneamente la saracinesca in maniera che il livello nel pozzetto seguisse analogamente le graduazioni della scala predisposta.

La contemporaneità delle operazioni era assicurata dal comando intermittente, di secondo in secondo, di un metronomo con trillo ogni 3 secondi. Le letture di ampiezza dell'oscillazione sono state fatte ripetendo più volte, con ritmo periodico, le prove.

7. - LA MISURA DELL'AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI DI PROFONDITÀ.

Per la misura istantanea delle oscillazioni del pelo libero si è utilizzata un'apparecchiatura elettrica atta a rilevare le variazioni di resistenza fra due elettrodi immersi in acqua al variare della lunghezza della loro parte sommersa.

Lo schema della fig. 11 spiega il funzionamento dell'apparato. Una sonda S (v. anche fig. 12) portava per mezzo di due piastrine isolanti gli elettrodi, costituiti da due fili di platino del diametro $\Phi = \text{mm } 0,25$ tesi alla distanza costante di 5 mm su di un piano normale alla direzione del moto dell'acqua. Dato che le esperienze dovevano essere eseguite in corrente veloce, la perturbazione provocata dai tendifili della sonda, posti a valle degli elettrodi, non poteva risentirsi nella sezione di misura.

Le resistenze R_1 ed R_2 , dell'ordine di 50Ω , servivano a ricavare dalla rete a 120 V una tensione alternata sufficientemente bassa per evitare fenomeni di polarizzazione. Un oscillografo Askania-Sörensen ad equi-

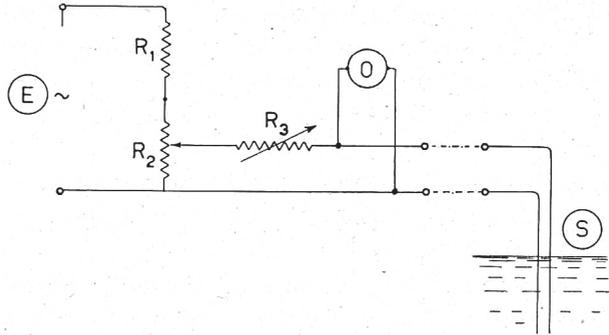


Fig. 11. - Schema dell'apparato elettrico per la misura istantanea dell'ampiezza dell'onda.

paggi galvanometrici 0 (visibile nella fig. 9) registrava fotograficamente il valore della tensione fra gli elettrodi, funzione decrescente della profondità dell'acqua. Agendo sulla resistenza R_3 , dell'ordine di 1000Ω , si portava ad un valore conveniente, in relazione al nostro scopo e alle dimensioni della carta, l'ampiezza delle oscillazioni di questa registrazione.

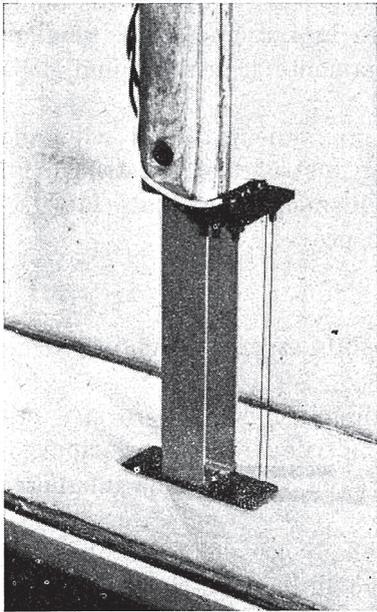


Fig. 12. - Sonda con elettrodi.

La formazione di bolle d'aria stabili a valle dei fili costrinse ad eseguire la taratura dell'apparecchio nelle stesse condizioni in cui avrebbe funzionato durante le prove; registrando cioè il passaggio di diverse correnti uniformi veloci con pendenza $i_f = 3\%$ e profondità letta ogni volta per mezzo di idrometri a punta. L'approssimazione delle misure eseguite con il nostro apparecchio non poteva quindi superare quella di una lettura eseguita con quest'ultimo mezzo; ritenendo possibile un errore di $0,3 \div 0,4$ mm su ciascuna lettura idrometrica e quindi di $0,5 \div 0,6$ mm sul dislivello complessivo fra la massima e la minima profondità dell'onda, ne deriva un errore temibile massimo a priori del 6% circa su onde di ampiezza dell'ordine di 10 mm.

Una taratura eseguita con diverse profondità fra cm 3,20 e cm 4,80

dimostrò che in questo campo la relazione fra variazioni di resistenza e variazioni di profondità si poteva ritenere lineare (proporzionalità inversa). Causa la sensibilità dell'apparecchio all'ambiente immediatamente circostante, come alla presenza o meno di parti metalliche in vicinanza del fondo o delle pareti, la taratura dovette ripetersi in ogni sezione dove fu posta la sonda. Per la determinazione della ampiezza massima della perturbazione nella sezione considerata bastò però ese-

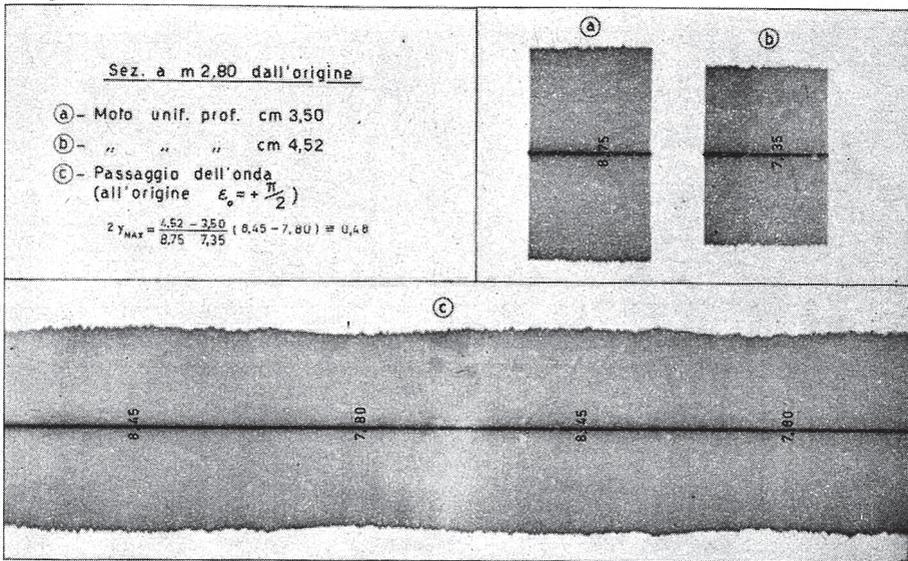


Fig. 13.

guire in precedenza la registrazione del passaggio di due correnti uniformi con profondità nota e vicina rispettivamente alla massima e alla minima prevedibili per l'onda.

8. - RISULTATI SPERIMENTALI.

Le figure 13 e 14 riportano due esempi di registrazione, relativi il primo alla maggiore attenuazione sperimentale (nel caso $\epsilon_0 = +\pi/2$) ed il secondo alla maggiore esaltazione (nel caso $\epsilon_0 = -\pi/2$) scelte fra le 12 misure eseguite nel tronco di canale avente una lunghezza utile di m 6.

Gli altri rilievi sono stati fatti nelle sezioni a distanza m 0,90 - 1,80 - 2,80 - 3,80 - 4,80 - 5,80 dall'origine della perturbazione. La scelta di queste sezioni è stata fatta in base al criterio di distribuire con uniformità i punti sperimentali nel tronco di canale interessato evi-

tando le sezioni a m 2,0 - 4,0 - 6,0 dall'origine dove erano situati i tralici metallici di sostegno delle pareti di vetro.

I risultati delle esperienze, eseguite con le due note posizioni all'origine, sono riportati nella tab. A e nella fig. 15 insieme ai valori teorici determinati in precedenza.

Il confronto con i risultati sperimentali conferma l'andamento delle attenuazioni e delle esaltazioni previste teoricamente nel tronco di

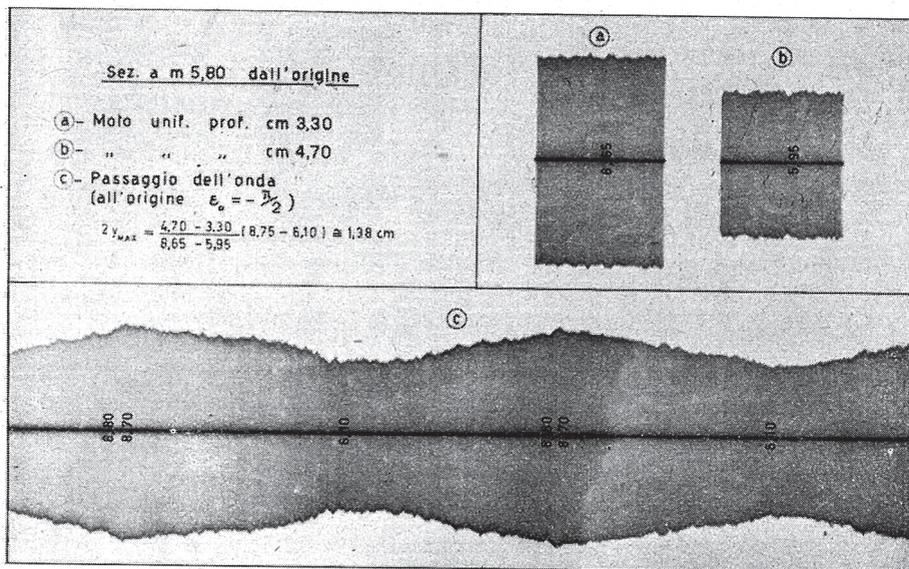


Fig. 14.

canale considerato, con scarti che sono dello stesso ordine dell'approssimazione delle esperienze.

Da notare che questi scostamenti risultano sempre dello stesso segno. Precisamente i valori sperimentali sono in eccesso di alcune unità per cento su quelli teorici.

Ritengo che la causa principale debba ricercarsi nel sistema di lettura degli oscillogrammi. La loro taratura era eseguita, come si è detto, con riferimento all'ampiezza media delle strisce rilevate in regime stazionario, mentre le ampiezze d'onda dovevano essere determinate per differenza fra massimi e minimi i cui valori, interessando sempre piccole zone, non potevano essere mediati con altrettanta sicurezza. Causa il frastagliamento ai bordi degli oscillogrammi, è molto probabile che da ciò derivasse un eccesso nelle letture dei massimi e un difetto nei minimi.

TABELLA A

Ampiezza totale delle oscillazioni a distanza dall'origine

Distanza dall'origine m	Situazione all'origine			
	ω in anticipo su q di $T/4$ ($\varepsilon_0 = -\pi/2$)		ω in ritardo su q di $T/4$ ($\varepsilon_0 = +\pi/2$)	
	Val. teorici mm	Val. sperim. mm	Val. teorici mm	Val. sperim. mm
0	10,0	—	10,0	—
0,90	9,5	10,4	6,6	7,2
1,80	10,15	10,5	4,8	5,0
2,80	11,15	11,3	4,7	4,8
3,80	11,85	12,5	5,6	6,0
4,80	12,5	13,0	6,5	6,9
5,80	12,9	13,8	7,35	7,7

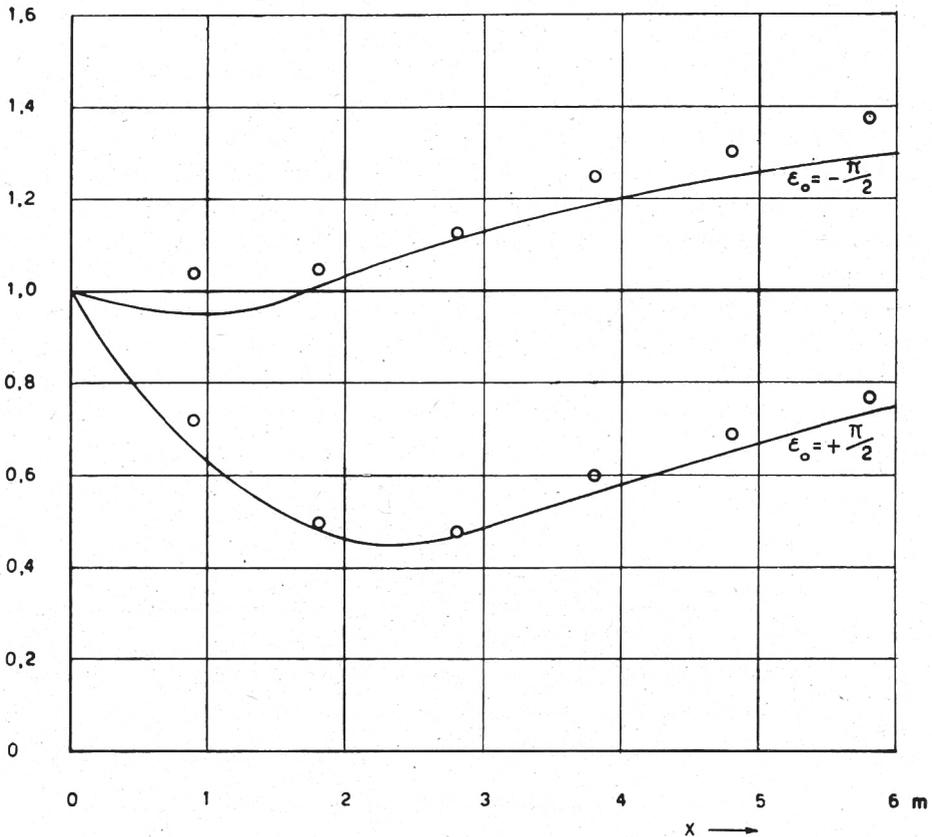


Fig. 15. - I risultati sperimentali, in forma di rapporto fra ampiezza massima dell'oscillazione rilevata ad una data ascissa e ampiezza massima all'origine, a confronto con le curve dedotte teoricamente.

A questo deve aggiungersi la possibilità che le ampiezze d'onda all'origine fossero di qualche per cento più grandi di quelle previste teoricamente, dato che un controllo accurato in quella sezione, durante l'esecuzione del moto vario, era impossibile per la presenza delle aste di guida e di sostegno della paratoia mobile.

9. - Il confronto sperimentale precedente conferma le osservazioni suggerite dai risultati teorici; in particolare l'importanza dello sfasamento all'origine fra le oscillazioni della portata e le oscillazioni della sezione nelle perturbazioni di periodo breve su corso torrentizio. Si è visto infatti come, modificando soltanto questo fattore, un'onda della stessa ampiezza iniziale possa, almeno in un primo tratto, esaltarsi oppure attenuarsi notevolmente.

Ma da questa conferma sperimentale deriva anche una considerazione di carattere più generale: l'accettabilità cioè dei risultati che si ottengono dalle equazioni dell'idraulica linearizzate anche quando la pendenza del fondo supera decisamente il valore $4i_c$.

L'importanza di questa osservazione sta nel fatto che la soluzione considerata contiene come caso particolare (e come valore asintotico) la soluzione di regime. Poichè non vi sono differenze teoriche che giustifichino diversità di comportamento, anche i risultati che si riferiscono alle onde di regime possono ritenersi accettabili nelle stesse condizioni di pendenza ($i_f > 4i_c$). Fra questi, in particolare, l'esaltazione dell'onda.

Quest'effetto non si mette facilmente in evidenza mediante un'esperienza di laboratorio; ma ciò dipende soltanto dalla minor rapidità di esaltazione dell'onda di regime nei confronti di quella qui considerata, cui corrispondeva il notevole sfasamento all'origine $\varepsilon_0 = -\pi/2$.

NOTAZIONI

i_f, i_c	= pendenza del fondo e rispettivamente pendenza critica relativa alla portata Q_0 .
Y_0, Ω_0, U_0, Q_0	= profondità, sezione, velocità e portata del moto uniforme.
n	= esponente della scala di deflusso $\Omega = \text{cost } Q^n$.
ω, q	= oscillazioni della sezione e della portata rispetto a Ω_0 e Q_0 .
$T, \eta = \frac{2\pi}{T}$	= periodo e pulsazione delle oscillazioni sinusoidali ω e q .
$\varepsilon = \eta\tau$	= (sfasamento angolare fra le funzioni ω e q (> 0 se ω è in ritardo rispetto a q)).
$\varepsilon_0, \varepsilon_r$	= sfasamento all'origine e rispettivamente in condizioni di regime.

$K = \frac{\omega_{\max}}{q_{\max}}$ = rapporto fra le ampiezze max delle escursioni di sezione e di portata (nell'origine $K_0 = \frac{\omega_0}{q_0}$).

$K_u = \frac{n}{U_0}$ = lo stesso rapporto in condizioni di regime.

$Z = \frac{K}{K_u}$ = variabile adimensionale (nell'origine $Z_0 = \frac{K_0}{Z_u}$).

γ = coeff. di attenuazione ($e^{-\gamma} = \frac{q_{\max}(x)}{q_0}$; $\frac{Z}{Z_0} e^{-\gamma} = \frac{\omega_{\max}(x)}{\omega}$).

$F = \frac{U_0^2}{gY_0}$ = n° di Froude.

$A = \frac{2i_f}{nY_0(F-1)}$ = coeff. dimensionale (m^{-1}) che caratterizza le oscillazioni lente in alveo di sezione rettangolare (per alveo generico V. (30')).

A P P E N D I C E

A) - Ingradazione dell'equazione

$$(1) \quad \frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{Z[\text{sen}(\gamma_0 - \varepsilon) - Z \text{sen} \gamma_0]}{Z \cos \gamma_0 - \cos(\gamma_0 - \varepsilon)}$$

con la condizione all'origine $Z = Z_0$ per $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Ponendo

$$\varepsilon' = \gamma_0 - \varepsilon$$

la (1) diventa

$$(2) \quad (Z \cos \gamma_0 - \cos \varepsilon') \frac{dZ}{d\varepsilon'} = Z^2 \text{sen} \gamma_0 - Z \text{sen} \varepsilon'.$$

La (2) è un'equazione di Abel del II tipo (V. ad es. E. KAMKE: *Differential Gleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen* - Vol. I - Leipzig 1956).

Introducendo la trasformazione

$$(3) \quad W = \frac{\cos \gamma_0}{Z \cos \gamma_0 - \cos \varepsilon'}$$

si ha

$$(4) \quad \frac{dW}{d\varepsilon'} = -\frac{W^3}{\cos^3 \gamma_0} \cos \varepsilon' \text{sen}(\gamma_0 - \varepsilon') - W^2 \cos \varepsilon' \left(\frac{2 \text{tang} \gamma_0}{\cos \gamma_0} \right) - W \text{tang} \gamma_0.$$

Con la nuova trasformazione

$$(5) \quad W = e^{-\varepsilon' \text{tang} \gamma_0} \varphi(\xi)$$

dove si è posto

$$(6) \quad \xi = -\frac{2 \text{tang} \gamma_0}{\cos \gamma_0} \int e^{-\varepsilon' \text{tang} \gamma_0} \cos \varepsilon' d\varepsilon' = 2 \text{tang} \gamma_0 e^{-\varepsilon' \text{tang} \gamma_0} \text{sen}(\gamma_0 - \varepsilon')$$

segue dalla (4)

$$(7) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = g\varphi^3 + \varphi^2$$

con

$$(8) \quad g = \frac{e^{-\varepsilon' \operatorname{tg} \gamma_0} \operatorname{sen}(\gamma_0 - \varepsilon')}{2 \operatorname{sen} \gamma_0 \cos \gamma_0}.$$

Tenuto conto della (6) si ha ancora

$$(9) \quad g = \frac{\xi}{4 \operatorname{sen}^2 \gamma_0}$$

e quindi, sostituendo nella (7),

$$(10) \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi \varphi^3}{4 \operatorname{sen}^2 \gamma_0} + \varphi^2.$$

Attraverso la posizione

$$(11) \quad \frac{d\xi}{dv} = -\frac{1}{v\varphi(\xi)}$$

la (10) diventa

$$(12) \quad v^2 \frac{d^2 \xi}{dv^2} + \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \gamma_0} \cdot \xi = 0$$

il cui integrale generale è

$$(13) \quad \xi(v) = \sqrt{v} \left[C_1 \cos \left(\frac{\ln v}{2 \operatorname{tg} \gamma_0} \right) + C_2 \operatorname{sen} \left(\frac{\ln v}{2 \operatorname{tg} \gamma_0} \right) \right].$$

Posto

$$(14) \quad \beta = \frac{\ln v}{2 \operatorname{tang} \gamma_0}$$

dalla (6) e dalla (13) segue una relazione fra ε' e β , cioè

$$(15) \quad 2 \operatorname{tang} \gamma_0 e^{-\varepsilon' \operatorname{tang} \gamma_0} \operatorname{sen}(\gamma_0 - \varepsilon') = e^{\beta \operatorname{tang} \gamma_0} (C_1 \cos \beta + C_2 \operatorname{sen} \beta).$$

Tenendo presente che si è posto $\varepsilon' = \gamma_0 - \varepsilon$, che il valore di una delle costanti è arbitrario (sicchè possiamo porre $C_1 = 0$) e indicando con k il valore costante $\frac{2 \operatorname{tg} \gamma_0}{C_2 e^{\gamma_0 \operatorname{tg} \gamma_0}}$, si ha

$$(16) \quad \boxed{e^{\beta \operatorname{tang} \gamma_0} \operatorname{sen} \beta = k e^{\varepsilon \operatorname{tg} \gamma_0} \operatorname{sen} \varepsilon}.$$

Una seconda relazione fra Z , ε , β si ricava partendo dalla (3)

$$Z = \frac{\cos \varepsilon'}{\cos \gamma_0} + \frac{1}{W}.$$

Per la (5) e per la (11), segue

$$Z = \frac{\cos \varepsilon'}{\cos \gamma_0} + \frac{e^{\varepsilon' \operatorname{tg} \gamma_0}}{\varphi} = \frac{\cos \varepsilon'}{\cos \gamma_0} - e^{\varepsilon' \operatorname{tg} \gamma_0} v \frac{d\xi}{dv}.$$

Da questa, per la (13) con $C_1 = 0$, si ha

$$Z = \frac{\cos \varepsilon'}{\cos \gamma_0} - \frac{e^{\varepsilon' \operatorname{tg} \gamma_0} C_2 \sqrt{v}}{2} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\ln v}{2 \operatorname{tg} \gamma_0} \right) + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_0} \cos \left(\frac{\ln v}{2 \operatorname{tg} \gamma_0} \right) \right].$$

Tenuto conto della posizione (14) e della $\varepsilon' = \gamma_0 - \varepsilon$ segue

$$Z = \frac{\cos (\gamma_0 - \varepsilon)}{\cos \gamma_0} - \frac{1}{2} e^{(\gamma_0 - \varepsilon) \operatorname{tg} \gamma_0} C_2 e^{\beta \operatorname{tg} \gamma_0} \left(\operatorname{sen} \beta + \frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \gamma_0} \right)$$

ossia, per la (16)

$$Z = \frac{\cos (\gamma_0 - \varepsilon)}{\cos \gamma_0} - \frac{1}{2} C_2 e^{\gamma_0 \operatorname{tg} \gamma_0} k \operatorname{sen} \varepsilon \left(1 + \frac{\operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma_0} \right).$$

Essendo $k = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma_0}{C_2 e^{\gamma_0 \operatorname{tg} \gamma_0}}$, ne deriva ancora

$$Z = \frac{\cos (\gamma_0 - \varepsilon)}{\cos \gamma_0} - \operatorname{tang} \gamma_0 \operatorname{sen} \varepsilon - \operatorname{cotg} \beta \operatorname{sen} \varepsilon$$

e infine

$$(17) \quad \boxed{Z = \cos \varepsilon - \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{cotg} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\beta - \varepsilon)}{\operatorname{sen} \beta}}.$$

Dovendo essere $Z = Z_0$ per $\varepsilon = \varepsilon_0$, resta determinato il corrispondente valore di β all'origine e quindi dalla (16) la costante k .

Ricerca sperimentale sugli sfioratori a calice
Atti del VI Convegno di Idraulica, 1959

PROF. ING. E. MARCHI - DOTT. ING. A. RUBATTA (*)

Ricerca sperimentale sugli sfioratori a calice (1° contributo)

MODEL RESEARCHES ON "MORNING GLORY" SPILLWAYS

Sommario

Dopo una premessa sullo scopo della nostra indagine — che si riassume nell'analisi sperimentale dell'attitudine di due condizioni limitative ad individuare il dimensionamento più conveniente degli sfioratori a calice (morning-glory spillway) — si riportano i risultati delle misure di portata e di pressione eseguite su due dei quattro modelli previsti.

I. - PREMESSE.

Alla fine dello scorso anno, sotto la direzione del prof. Supino, sono state eseguite nel Laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Bologna alcune prove su modello per le opere di scarico del serbatoio sul fiume Eleutero. In tale occasione gli AA. ebbero ad occuparsi anche del funzionamento dello scarico di superficie, previsto del tipo « a calice », o « a pozzo » (*morning-glory spillway*), con diametro in corrispondenza della soglia di 20 m, diametro alla base di 4,75 m ed altezza di 20 m.

Le osservazioni fatte durante quelle prove — fra cui in particolare quella della formazione di un vistoso rigurgito per carichi relativamente piccoli (dell'ordine di 2 m) e il rilievo di valori del coefficiente di portata piuttosto bassi (0,38 ÷ 0,43) — misero in evidenza l'opportunità di eseguire alcune serie di esperienze sistematiche su questi tipi di sfioratori.

È norma comunemente applicata, nel progetto degli sfioratori a calice e di tutte le dighe tracimanti in genere, sagomare la sezione meridiana con riferimento alla curva sperimentale che rappresenta il profilo inferiore del getto effluente da uno stramazzo a spigolo vivo avente portata uguale a quella massima prevista. Precisamente si fa in modo che il paramento della diga coincida con tale profilo o se ne mantenga costantemente più alto, così da garantire l'aderenza della lama stramazante al corpo della diga senza depressioni.

L'equazione del profilo inferiore della vena libera generalmente impiegata a questo scopo è quella notissima di Scimemi. Benchè dedotta da esperienze su stramazzi rettilinei, essa viene spesso utilizzata anche per sfioratori

a pianta circolare. Riferita ad un sistema di assi ortogonali avente origine nel punto del colmo, ed espressa in coordinate adimensionali rapportate al carico sulla soglia, essa è:

$$(1) \quad \frac{y}{h} = 0,50 \left(\frac{x}{h} \right)^{1,85}$$

Per stramazzi a pianta circolare, Lazzari, attraverso un'accurata indagine sull'argomento (*Ricerca sperimentale sullo sfioratore a pianta circolare*, « L'E. E. », n. 11, 1954) ha assegnato, più propriamente, l'equazione:

$$\frac{y}{h} = 6 \left(\frac{x}{3,4 h} \right)^c$$

dove l'esponente c dipende dal rapporto h/R , ma varia assai poco finchè h/R si mantiene minore di 0,30; in questo campo si può mediatamente assumere:

$$(2) \quad \frac{y}{h} = 0,608 \left(\frac{x}{h} \right)^{1,87}$$

Nella presente ricerca si è ritenuto sufficiente far riferimento ad un'equazione di forma più semplice, del tipo quadratico:

$$(3) \quad \frac{y}{h} = 0,45 \left(\frac{x}{h} \right)^2$$

la quale dà luogo ad una curva che, oltre ad essere molto vicina a quelle rappresentate dalle (1) e (2), è compresa fra di esse.

Va tenuto presente che la scelta della più adeguata equazione del profilo non era fra i compiti che gli AA. si erano prefissi. Essa richiederebbe eventualmente una successiva ricerca sperimentale, impostata con criteri un po' diversi dagli attuali. Uno studio in questo senso è stato d'altra parte già annunciato, nella citata memoria, dal Lazzari.

Lo scopo della nostra indagine era di individuare, fra le possibili soluzioni di sfioratore a calice in grado di smaltire un'assegnata portata massima, quella più conveniente dal punto di vista idraulico. Perché le esperienze consentissero un effettivo confronto, atto a mettere in luce l'influenza di un differente dimensionamento, è stato così necessario fissare alcuni parametri in modo unico. Si sono scelti: la lunghezza l del calice, fissata in 20,0 cm, ed il raggio $r_0 = 5,0$ cm del suo cerchio di base in corrispondenza del raccordo con la condotta cilindrica, mentre si è lasciato variabile il valore del raggio R della soglia. Inoltre, per il profilo meridiano del calice si è adottata l'equazione:

$$(4) \quad \frac{y}{l} = \left(\frac{R-r}{R-r_0} \right)^2,$$

che deriva imponendo alla (3) la condizione di essere soddisfatta per la coppia di valori $y=l$, $x=R-r_0$. Così facendo, il profilo stesso riesce coincidente con quello (3) quando il carico sulla soglia è:

$$(5) \quad h = 0,45 \frac{(R-r_0)^2}{l}.$$

Per carichi inferiori, la lama stramazante dovrebbe perciò sicuramente aderire al paramento dello sfioratore. Al carico h corrisponde una portata sfiorata:

$$(6) \quad Q = 2 \pi R \mu h \sqrt{2gh},$$

precisabile numericamente solo dopo la determinazione sperimentale dell'andamento del coefficiente μ , ma che comunque deve risultare maggiore od uguale ad un valore prefissato Q_m (portata max di progetto). Questa condizione determina perciò una limitazione inferiore al carico massimo h , e di conseguenza, tramite la (5), una limitazione pure inferiore ai valori di R che possono adottarsi.

Ma, per il regolare funzionamento dello sfioratore, non è sufficiente garantire l'aderenza della lama stramazante. Altre limitazioni provengono dalle condizioni idrauliche di valle. Se, ad esempio, si vuole che il deflusso non sia rigurgitato, occorre che la portata da sfiorare Q_m sia, al più, uguale a quella effettivamente convogliabile sotto il carico ad essa corrispondente, attraverso la sezione di raggio r_0 (1), al raccordo del calice con la condotta.

Essendo:

$$\text{portata sfiorata} = 2 \pi R \mu h \sqrt{2gh};$$

$$\begin{aligned} \text{portata max nella sezione inferiore} &= \\ &= \pi r_0^2 c_v \sqrt{2g(l+h)}; \end{aligned}$$

risulta quindi

$$(7) \quad 2 R \mu h^{3/2} \leq r_0^2 c_v (l+h)^{1/2}.$$

La (7) (od altra equazione ricavata in maniera analoga da condizioni di valle diverse da quelle ora considerate) comporta una limitazione superiore per h , e quindi, giusta la (5), un'analoga limitazione per R .

Le due condizioni così enunciate, vanno entrambe precisate attraverso l'analisi sperimentale. Esse comunque lasciano in generale una certa arbitrarietà nella scelta di

R , arbitrarietà che la nostra indagine potrà effettivamente confermare od ulteriormente ridurre.

2. - INQUADRAMENTO DELLE ESPERIENZE E DESCRIZIONE DELL'APPARATO.

Date le premesse, gli AA. hanno ritenuto di poter ottenere sufficienti elementi di confronto sperimentando su quattro calici aventi, come si è detto, la stessa lunghezza l (fissata in 20 cm), lo stesso raggio r_0 nella sezione in-

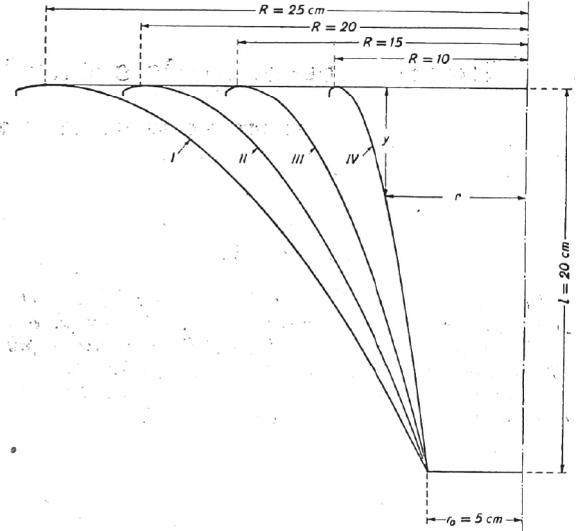


Fig. 1. - Profili di equazione $\frac{y}{l} = \left(\frac{R-r}{R-r_0} \right)^2$

fioro (fissato in 5 cm) e quattro diversi raggi in corrispondenza della soglia. Precisamente:

Calice I ^o	-	Raggio della soglia	$R = 25$ cm	
Calice II ^o	-	»	»	$R = 20$ cm
Calice III ^o	-	»	»	$R = 15$ cm
Calice IV ^o	-	»	»	$R = 10$ cm

Le relative equazioni dei profili della sezione meridiana si ricavano immediatamente dalla (4). Detti profili sono rappresentati nella fig. 1.

Sono state previste due differenti serie di misure su ogni calice, e per esse gli AA. si sono così divisi i compiti:

a) determinazione del coefficiente di efflusso in funzione del carico, e quindi della portata fino alla massima consentita senza che il rigurgito raggiungesse la soglia (Marchi);

b) rilievo della curva delle pressioni sul paramento interno dello sfioratore in corrispondenza di alcuni valori del carico (Rubatta).

(1) Nel nostro caso non è necessario prendere in considerazione anche sezioni del calice diverse da quella inferiore. Ciò perché il profilo (4) adottato è tale da determinare, appena è $R \geq 3/2 r_0$, un aumento d'area nella sezione trasversale, con l'aumento della quota, maggiore della corrispondente diminuzione di velocità.

All'atto della presentazione di questa nota al VI Convegno di Idraulica, pur essendo già pronti tutti gli sfioratori, il rilievo dei dati sperimentali è stato portato a termine solo sul I° e sul IV° calice. Di queste due situazioni estreme riportiamo qui i risultati, che sono già indicativi sul problema postoci.

Le esperienze sono state eseguite nel Laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Bologna, utilizzando in parte anche le attrezzature predisposte per le prove sull'Eleutero.

L'apparato sperimentale (fig. 2) comprendeva una vasca di smorzamento in muratura, alta 1,25 m e della sezione di 1,3 m² circa, alimentata attraverso una saracinesca di regolazione da una derivazione della condotta omnibus del laboratorio. A monte di quest'ultima veniva eseguita la misura della portata per mezzo dei boccagli tarati di cui è dotato il laboratorio; la loro descrizione particola-

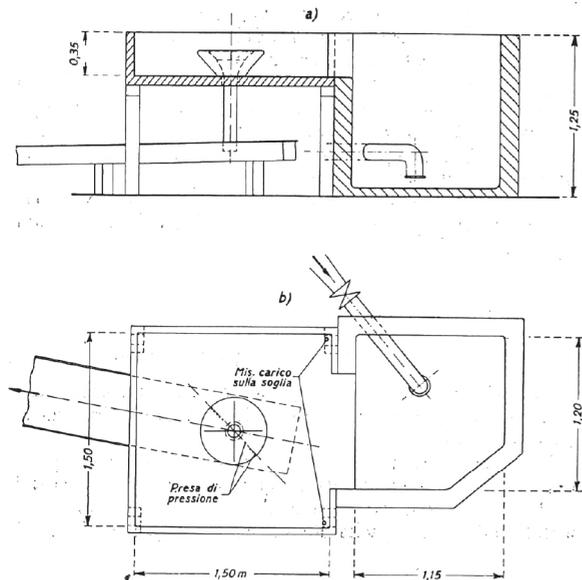


Fig. 2. - Sezione a) e planimetria b) dell'apparato sperimentale.

reggiata si può trovare nella pubblicazione di G. Cocchi: « Il Laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Bologna », 1954. Tale apparecchiatura consente un'approssimazione non inferiore al 0,3% nella misura delle portate $\geq 1,5$ l/s e non inferiore al 0,6% per quelle più piccole. Si è impiegato il boccaglio di diametro $\varnothing = 50$ mm per le portate fino a circa 10 l/s, e quello di diametro $\varnothing = 100$ mm per le portate maggiori.

Il vero e proprio serbatoio pensile è stato costruito in legno e masonite, con pianta di $1,50 \times 1,50$ m ed altezza 0,35 m. Esso è stato messo in comunicazione con la vasca in muratura per tutta la sua altezza e per una larghezza di 0,90 m. Sul fianco opposto la parete in masonite è stata sostituita per una lunghezza di 0,60 m da una lastra in perspex.

Nel centro di questo serbatoio, su un'apertura nel fondo del diametro di 140 mm, sono stati successivamente montati i diversi modelli di sfioratore, fissandoli rigidamente al fondo stesso, con l'interposizione di una guarnizione di gomma. Al lembo inferiore di ogni calice è stato attaccato, volta per volta, un breve tronco verticale (0,60 m)

di condotta in perspex del diametro interno di 100 mm (fig. 3). I calici sono stati realizzati in legno, incollando fra loro diversi anelli dopo averli sovrapposti in modo

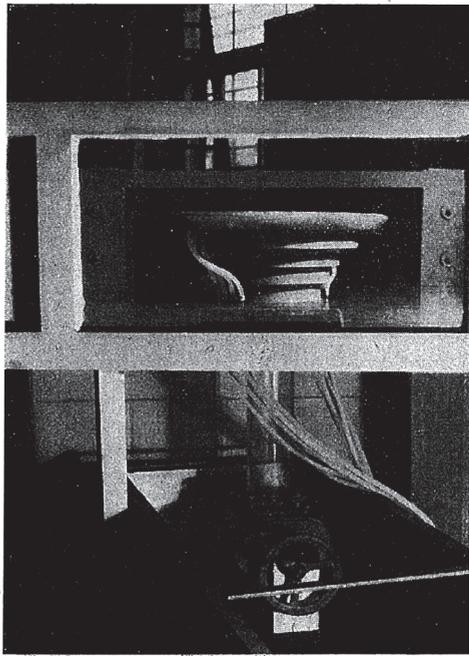


Fig. 3. - Il serbatoio, il calice di raggio $R = 25$ cm, e la condotta di scarico visti da valle.

da incrociarne le vene; la superficie interna è stata rifinita al tornio. Sono stati poi predisposti all'interno due setti verticali in alluminio, alti 8 cm e dello spessore

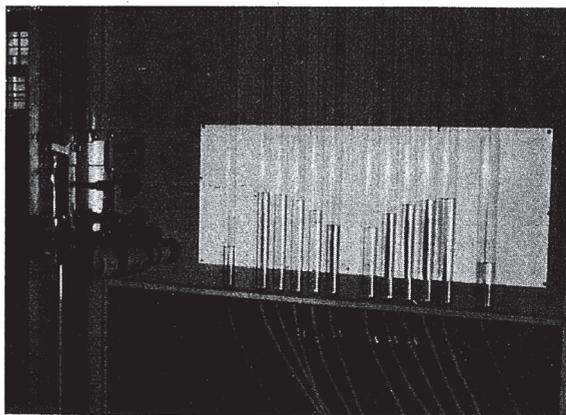


Fig. 4. - Tabellone per la misura delle pressioni.

di 1,2 mm, in modo da formare una crociera con la sommità 0,5 cm sotto il piano della soglia del calice. Essi avevano lo scopo di impedire la formazione di un vortice

all'interno dello sfioratore, e sono stati dimensionati in base ai risultati delle prove sull'Eleutero.

La misura del carico nel serbatoio è stata eseguita nei

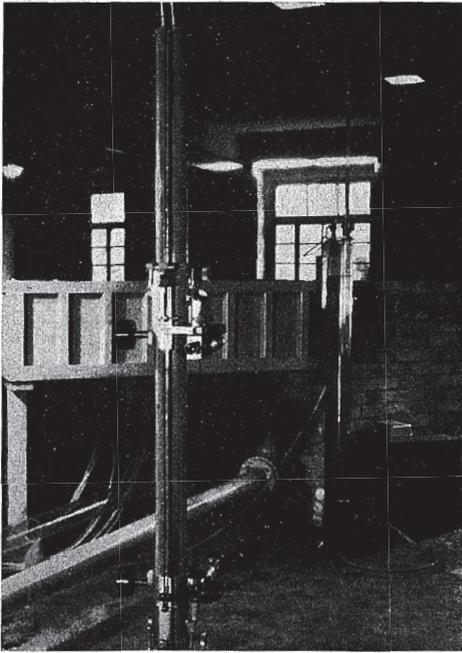


Fig. 5. - Piezometro per la misura del carico nel serbatoio.

due punti indicati nella fig. 2, dove l'acqua era praticamente ferma. In questi punti furono posti due tubicini verticali di ottone, forati in diverse posizioni e collegati

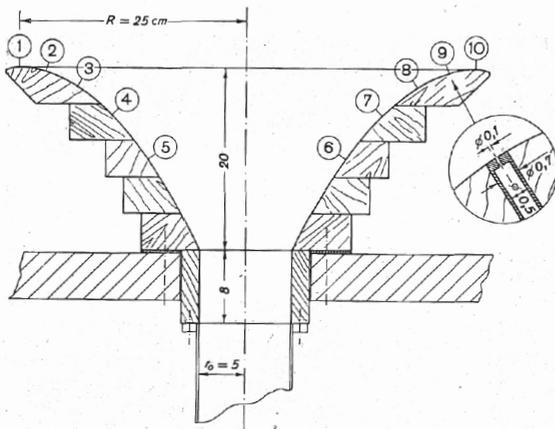


Fig. 6. - Sezione del calice I° ($R = 25$ cm) con il particolare di una presa di pressione.

per mezzo di tubi in plastica trasparente con i due piezometri di vetro ($\varnothing 3$ cm) posti alle estremità del tabellone per la misura delle pressioni (fig. 4). Le stesse prese

erano, insieme, collegate ad un grosso tubo di vetro ($\varnothing 5$ cm) posto a fianco del serbatoio (fig. 5).

La lettura della quota del pelo libero dell'acqua è stata fatta mediante un catetometro Askania con scala graduata al centesimo di millimetro, ed il riferimento alla soglia, per la determinazione del carico, è stato eseguito misurando, con lo stesso catetometro, la quota, a serbatoio carico, di una riga metallica, di spessore costante, appoggiata sul calice in una posizione diametrale corrispondente a quella delle prese di pressione.

Tenuto conto che l'errore nella misura del carico era normalmente inferiore allo 0,5%, l'approssimazione nella determinazione del coefficiente di efflusso può ritenersi non inferiore all'1%. D'altronde, non si poteva raggiungere un'approssimazione maggiore, perchè con l'aumentare del carico, l'errore era legato non tanto ai mezzi di misura quanto alle irregolari oscillazioni del pelo libero in conseguenza delle pulsazioni del rigurito.

Per quanto riguarda la misura dei carichi sul paramento interno dei singoli sfioratori, sono state predisposte su un piano meridiano 10 prese di pressione, che venivano poi collegate con i soliti tubi di plastica ad altrettanti piezometri di vetro ($\varnothing 3$ cm) disposti sul tabellone di cui si è detto (fig. 4). Le prese vere e proprie erano costituite da tubi di ottone incassati nel corpo dello sfioratore e terminanti con una piccola luce ($\varnothing 1$ mm) in corrispondenza del paramento interno (v. particolare della fig. 6).

3. - RISULTATI SPERIMENTALI.

a) Esperienze relative al calice I° ($R = 25$ cm).

La sezione meridiana di questo calice è rappresentata nella fig. 6, nella quale sono indicate anche le posizioni delle prese di pressione.

I risultati delle misure della portata Q e del corrispondente carico h relativo alla soglia, insieme ai valori del coefficiente di efflusso μ , calcolati con la (6), sono riportati nella tab. 1; nella stessa tabella sono stati indicati

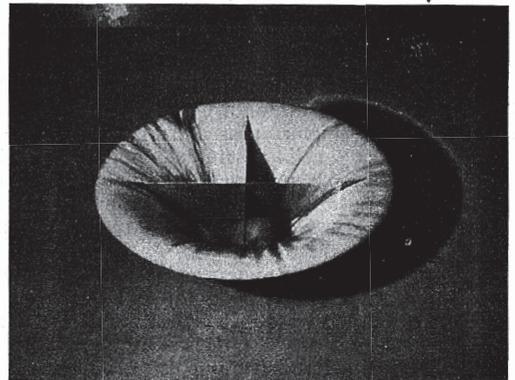


Fig. 7. - Deflusso con portata di ~ 10 l/s.

i valori dei rapporti adimensionali $Q/\nu R$, proporzionale al numero di Reynolds (essendo ν il coefficiente di viscosità cinematica), ed h/R , proporzionale al numero di Froude. I risultati delle misure di pressione sono raccolti

TABELLA 1. - Calice I° - Raggio della soglia R = 25 cm.

N.	Temp. °C	Portata Q (l/s)	Carico h (mm)	Coeff. di portata μ	$\frac{Q}{\nu R} \times 10^{-3}$	$\frac{h}{R}$
1	14.8	1,755	8,28	0,335	6,120	0,0331
2	14.8	2,470	10,16	0,347	8,615	0,0406
3	14.4	3,12	11,70	0,3545	10,77	0,0468
4	14.8	3,56	12,62	0,360	12,41	0,0505
5	14.8	3,75	13,05	0,361	13,07	0,0522
6	14.8	4,23	14,10	0,363	14,75	0,0564
7	14.3	4,72	15,03	0,368	16,25	0,0601
8	14.8	5,33	16,23	0,370	18,58	0,0649
9	14.4	5,92	17,34	0,373	20,43	0,0694
10	14.9	6,46	18,32	0,374	22,59	0,0733
11	14.6	7,17	19,50	0,378	24,86	0,0780
12	14.6	7,48	20,00	0,380	25,93	0,0800
13	14.6	8,25	21,34	0,380	28,6	0,0854
14	14.5	8,96	22,45	0,383	31,0	0,0898
15	14.3	9,12	22,60	0,386	31,4	0,0904
16	14.9	9,47	23,20	0,385	33,1	0,0928
17	14.5	10,05	24,10	0,386	34,8	0,0964
18	14.3	10,95	25,65	0,383	37,7	0,1026
19	14.7	11,90	27,08	0,384	41,4	0,1083
20	14.2	12,55	28,25	0,380	43,1	0,1130
21	14.9	12,83	28,60	0,381	44,8	0,1144
22	14.7	13,76	29,95	0,382	47,9	0,1198
23	14.2	14,79	31,55	0,379	50,8	0,1262
24	14.5	15,67	32,70	0,381	54,3	0,1308
25	14.1	16,40	33,70	0,381	56,2	0,1348
26	14.7	17,98	35,95	0,379	62,6	0,1438
27	14.7	19,70	38,0	0,382	68,55	0,1520
28	14.7	21,60	40,2	0,385	75,2	0,1608
29	14.7	23,80	42,9	0,385	82,8	0,1716
30	14.7	25,75	45,3	0,384	89,6	0,1812
31	14.8	27,40	47,3	0,383	95,5	0,1892

di 12 l/s (fig. 7). Per valori superiori aveva inizio — e si accentuava oltre i 15 l/s — un fenomeno di rigurgito pulsante, con irregolari riempimenti parziali dello sfioratore all'incirca fino al limite inferiore dei setti. Al di sopra

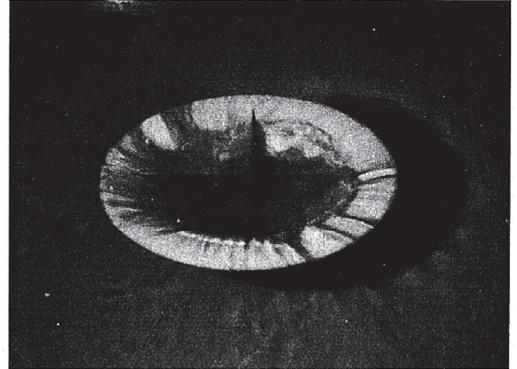


Fig. 8. - Deflusso con portata di ~ 27 l/s.

dei 21 l/s il rigurgito diventava più stabile, ed oltre i 25 l/s occupava permanentemente il calice (fig. 8), aumentando di quota fino a sommergerlo quando la portata superava la più grande utilizzata nelle esperienze.

nella tab. 2, con una numerazione corrispondente a quella delle prese nella fig. 6.

Il deflusso si dimostrò del tutto regolare fino a portate

TABELLA 2. - Calice I° - Raggio della soglia R = 25 cm.

Numero d'ordine delle prese	Quote del centro delle prese mm	Pressioni mm d'acqua			
		Q = 17,94 l/s	Q = 12,74 l/s	Q = 8,25 l/s	Q = 3,27 l/s
1	0	20,3	17,7	14,4	8,7
2	— 4,29	14,9	12,0	9,3	4,9
3	— 21,25	8,3	7,1	5,3	3,1
4	— 52,40	3,3	2,1	2,9	1,1
5	— 99,99	~ 17 (*)	1	1	1
6	— 99,27	~ 16 (*)	— 1	— 2	— 2
7	— 52,16	4,0	2,7	3,9	1,2
8	— 21,07	8,3	7,1	5,3	2,8
9	— 4,34	15,0	12,3	9,4	4,9
10	0	20,3	17,8	14,4	8,7

(*) In corrispondenza della portata di ~ 17 l/s, le due prese inferiori erano già ricoperte dal rigurgito.

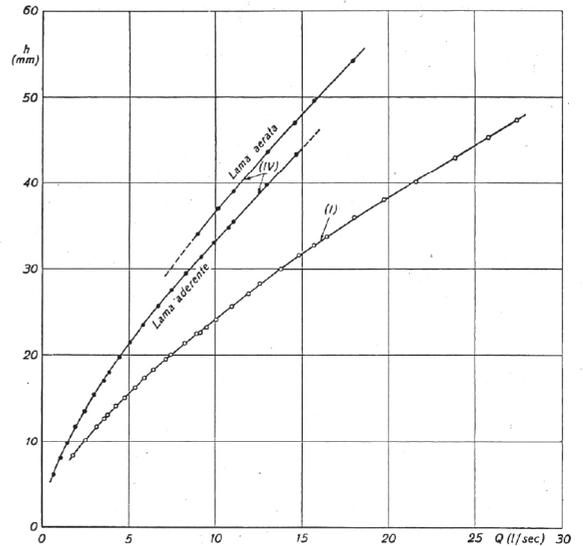


Fig. 9. - Relazione fra i carichi h e le portate Q.

Nella fig. 9 sono riportati i valori sperimentali della portata in funzione del carico e nella fig. 10 i valori del coefficiente di efflusso in funzione di $Q/\nu R$. Le curve relative al calice considerato recano sempre l'indicazione (I°).

Nella fig. 11 sono riportati gli andamenti delle pressioni sul paramento interno, corrispondenti a quattro diversi

valori di portata scelti nel campo in cui il rigurgito era assente o poco sensibile.

L'esame dei risultati sperimentali consente un'impor-

di tipo Bazin, avrebbe richiesto un carico dell'ordine di 9 cm, irraggiungibile sperimentalmente senza sommergere lo sfioratore sotto il rigurgito determinato da valle.

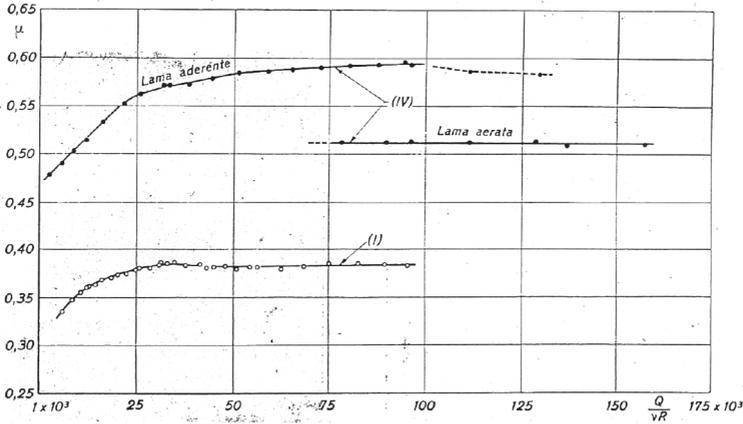


Fig. 10. - Il coefficiente di efflusso μ in funzione di Q/vR .

tante deduzione. Sia i valori del coefficiente di efflusso (che per portate maggiori di 7 l/s hanno oscillato costantemente intorno al valore 0,382, con scarti $\leq 1\%$), sia la distribuzione praticamente idrostatica della pressione sul primo tronco del paramento interno dello sfioratore, dimostrano che il funzionamento di questo calice avviene in modo analogo a quello di uno *stramazzo in parete*

b) *Esperienze relative al calice IV^o (R = 10 cm).*

La fig. 12 mostra la sezione meridiana di questo calice e la posizione delle prese di pressione sul paramento interno.

I rilievi sperimentali di portata e di carico, e i valori calcolati del coefficiente di efflusso e dei rapporti adimen-

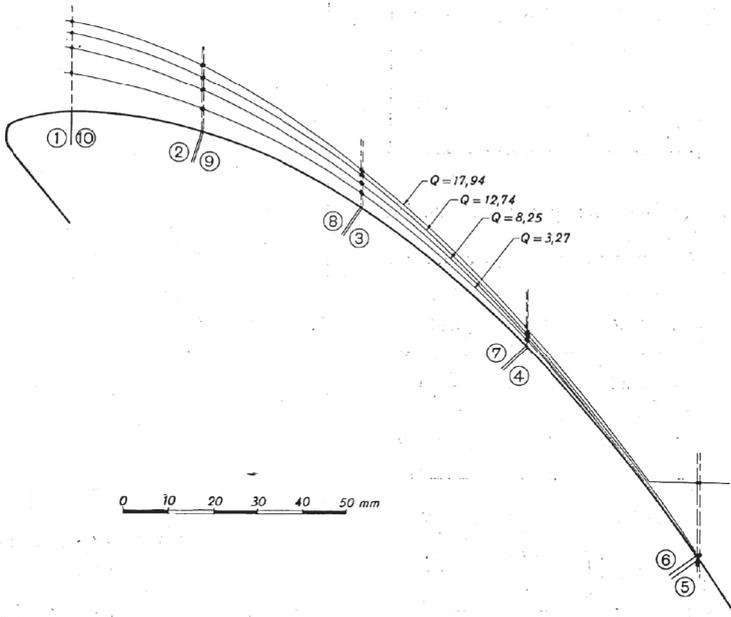


Fig. 11. - Rilievi di pressione sul calice I^o (R = 25 cm).

grossa con spigolo a monte arrotondato (tipo Bélanger). Ciò conferma le previsioni, in quanto l'equazione (5), che condiziona un profilo inferiore della lama effluente

sionali Q/vR ed h/R , sono riportati nella tabella 3. I risultati delle misure di pressione, con riferimento alle indicazioni della fig. 12, sono raccolti nella tabella 4.

Il funzionamento di questo sfioratore potè realizzarsi in due maniere diverse appena superata la portata di 6 l/s. Con portate inferiori il deflusso avveniva in maniera del tutto stabile, con la lama aderente al paramento interno del calice. Al di sopra di questo valore, e fino a

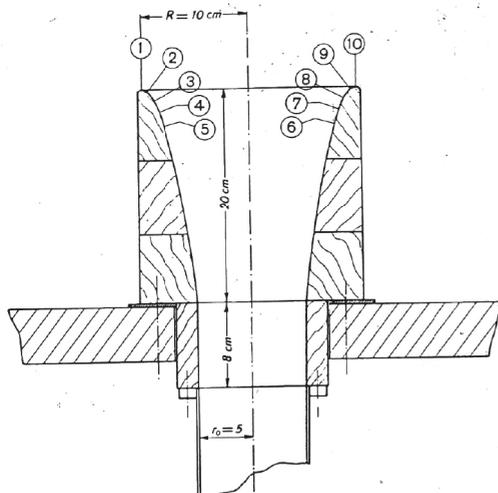


Fig. 12. - Sezione del calice IV° (R = 10 cm).

circa 11 l/s pur potendosi presentare la stessa condizione di funzionamento (fig. 13), essa non era più l'unica possibile. Con un'azione esterna sul getto o con un brusco aumento di portata, seguito da una graduale riduzione, si realizzava infatti una situazione di efflusso notevolmente

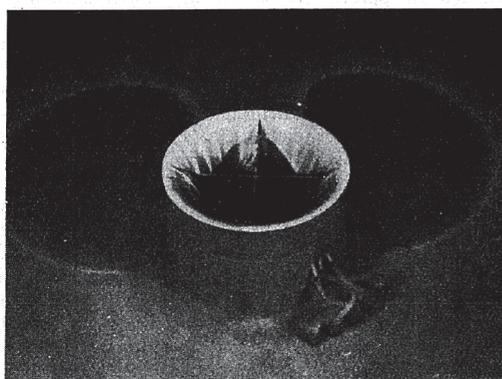


Fig. 13. - Deflusso con lama aderente ($Q \lesssim 10$ l/s).

diversa dalla precedente, nella quale la lama, staccandosi dal paramento all'altezza circa della soglia, cadeva entro il calice, aerata sul lembo inferiore (fig. 14). Questa seconda situazione si presentava in forma soltanto parziale con portate fra 6 e 8 l/s, ma si manteneva in modo completo, e sempre più stabilmente, con portate superiori. Oltre gli 11 l/s era questo il deflusso definitivamente stabile; temporaneamente fu però ancora possibile ottenere il funzionamento con lama aderente, come mostrano

TABELLA 3. - Calice IV° - Raggio della soglia R = 10 cm

N.	Temp. °C	Portata Q (l/s)	Carico h (mm)	Coeff. di portata μ	$\frac{Q}{\nu R} \times 10^{-3}$	$\frac{h}{R}$
Funzionamento con lama aderente						
1	15,4	0,652	6,12	0,490	5,78	0,0612
2	15,4	1,005	8,03	0,503	8,90	0,0803
3	14,4	1,406	9,90	0,514	12,14	0,0990
4	14,5	1,885	11,73	0,533	16,31	0,1173
5	14,6	2,414	13,53	0,552	21,85	0,1353
6	14,6	2,990	15,41	0,562	25,9	0,1541
7	14,9	3,54	17,06	0,571	31,9	0,1706
8	14,7	3,84	18,01	0,571	33,4	0,1801
9	14,7	4,42	19,77 ($\pm 0,01$)	0,572	38,4	0,1977
10	14,9	5,06	21,49	0,578	44,2	0,2149
11	14,9	5,86	23,52	0,584	51,2	0,2352
12	14,9	6,73	25,73	0,586	58,8	0,2573
13	14,9	7,48	27,55 ($\pm 0,03$)	0,588	65,4	0,2755
14	15,0	8,30	29,44	0,590	72,7	0,2944
15	15,0	9,17	31,40 ($\pm 0,05$)	0,592	80,3	0,3140
16	15,4	9,90	33,0	0,593	87,7	0,330
17	15,1	10,75	34,8	0,596	94,5	0,348
18	14,9	11,02	35,5 ($\pm 0,1$)	0,593	96,3	0,355
19	15,4	12,95	39,8 ($\pm 0,2$)	0,586	114,7	0,398
20	15,3	14,66	43,4 ($\pm 0,3$)	0,583	129,5	0,434
Funzionamento con lama aerata						
21	15,0	8,94	34,05 ($\pm 0,05$)	0,512	78,3	0,3405
22	15,4	10,15	37,00	0,512	89,9	0,3700
23	14,9	11,02	39,05 ($\pm 0,1$)	0,513	96,3	0,3905
24	15,2	13,00	43,7 ($\pm 0,2$)	0,512	114,6	0,437
25	15,3	14,55	47,0	0,513	128,6	0,470
26	15,0	15,65	49,6	0,509	137,0	0,496
27	15,1	17,90	54,2 ($\pm 0,5$)	0,510	157,4	0,542
28	15,1	20,0	54,2 ~ 58 ~ 65	0,57 ~ 0,51 ~ 0,44	(1) (2) (3)

- (1) Lama quasi-aderente.
- (2) Lama aerata.
- (3) Lama con vortice.

le esperienze 19, 20 e 28. I rilievi sperimentali si sono fermati alla portata di 20 l/s, perchè con essa incominciava a formarsi, pur con durata limitata, un grande vortice, che sommergeva lo sfioratore.

Come nel caso precedente, i valori sperimentali sono stati riportati nelle figg. 9 e 10 con l'indicazione (IV°) delle relative curve interpolari.

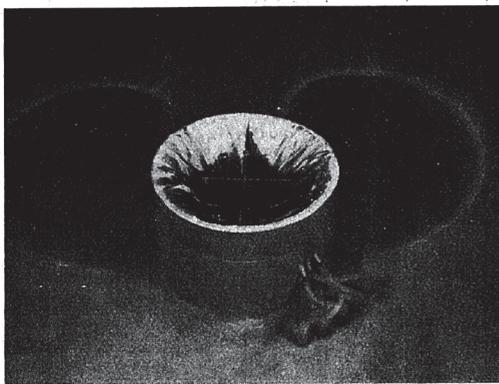
L'andamento del coefficiente di efflusso è stato osservato in diagrammi in funzione sia di h/R che di $Q/\nu R$. Solo quest'ultimo grafico, riprodotto nella fig. 10, sembra però fornire qualche indicazione significativa. Infatti il confronto fra le curve (I°) e (IV°) mostra pressochè la stessa influenza del parametro $Q/\nu R$. La diminuzione di μ al diminuire di $Q/\nu R$ può essere almeno in parte

TABELLA 4. - Calice IV° - Raggio della soglia $R = 10$ cm

Numero d'ordine delle prese	Quote del centro delle prese mm	Pressioni mm d'acqua			
		$Q=0,662$ l/s	$Q=1,881$ l/s	$Q=4,41$ l/s	$Q=7,22$ l/s
1	0	+ 2,5	- 1,7	- 18,9	- 41,9
2	- 1,93	+ 0,9	- 1,7	- 13,4	- 30,5
3	- 10,27	+ 1,1	+ 0,4	- 3,9	- 13,7
4	- 20,76	+ 1,4	+ 2,2	+ 1,2	- 1,3
5	- 34,20	+ 1	+ 1	+ 1	0
6	- 34,22	0	0	0	- 1
7	- 21,14	+ 1,8	+ 2,5	+ 1,4	- 0,6
8	- 10,46	+ 1,1	+ 0,4	- 4,9	- 16,7
9	- 3,18	+ 1,1	- 1,8	- 11,7	- 27,0
10	0	+ 2,5	- 1,6	- 18,9	- 41,9

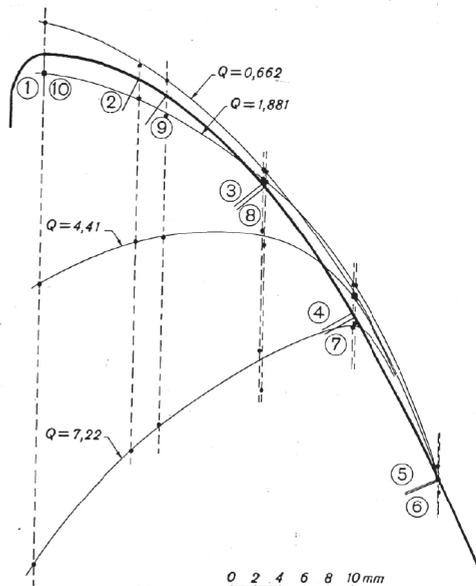
giustificata con un aumento relativo dei fatti dissipativi (in maniera analoga a quanto avviene nel moto uniforme per il coefficiente di resistenza al diminuire del numero di Reynolds). Nel nostro caso non deve però essere sottovalutata la sensibile influenza che, per piccoli carichi, esercita anche la tensione superficiale.

La fig. 15 raccoglie i risultati delle misure di pressione sul paramento interno dello sfioratore, eseguite per quattro successivi valori della portata appartenenti al campo di sicuro funzionamento a lama aderente.

Fig. 14. - Deflusso con lama aerata ($Q \approx 10$ l/s).

L'equazione (5) mostra che, nel caso considerato, il carico doveva essere dell'ordine di 6 mm affinché il funzionamento potesse avvenire nelle stesse condizioni di quello di uno stramazzo a spigolo vivo con lama aerata. Effettivamente, pur con le riserve derivanti dalla non trascurabile influenza della tensione superficiale con carichi così piccoli, i risultati sperimentali confermano questa previsione, mettendo inoltre in evidenza come, con l'aumentare del carico, si realizzi un deflusso paragonabile a quello con *lama soffolta negli stramazzi a spigolo vivo*. Il paramento interno dello sfioratore è soggetto a sensibili depressioni, e quindi i notevoli valori del coefficiente di portata possono essere dovuti ad una minor

contrazione del getto. La stabilità del funzionamento resta però, come si è visto, limitata a valori di portata molto piccoli.

Fig. 15. - Rilievi di pressione sul calice IV° ($R = 10$ cm).

4. - PRIME CONCLUSIONI.

Riassumendo: le esperienze sui due calici aventi raggio della soglia di 25 e di 10 cm hanno messo in luce un funzionamento del primo sfioratore analogo a quello dello stramazzo in parete grossa ed un funzionamento del secondo analogo a quello dello stramazzo in parete sottile quando la lama è soffolta, con notevoli variazioni dall'uno all'altro, sia nei valori del coefficiente di portata sia nelle pressioni sul paramento interno. Con il raggio più piccolo si è rilevata anche la possibilità di un distacco della vena dalla superficie interna del calice, con la realizzazione quindi di un deflusso di tipo misto.

In ordine all'arbitrarietà nella scelta dei valori del raggio della soglia, occorre precisare che le condizioni limitative di cui si è detto nelle premesse si possono ricondurre, dal punto di vista di queste esperienze, alla condizione che la coppia di valori h ed R che soddisfa la (7), nel caso dell'uguaglianza, verifichi anche la (5); ossia, in altre parole, che la massima portata sfiorabile senza rigurgito defluisca entro il calice in condizioni molto prossime a quelle della lama aerata effluente da uno stramazzo a spigolo vivo. A questo riguardo le due prime serie di risultati sperimentali hanno confermato che un deciso allontanamento dalle condizioni predette si riflette in un funzionamento dello sfioratore sostanzialmente diverso nei due casi, ma sempre insoddisfacente.

Presentando la prima parte di questa ricerca sperimentale, gli AA. non hanno ancora potuto completare la documentazione bibliografica sull'argomento. Ne rimandano perciò la pubblicazione alla conclusione del loro lavoro.

Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide
Note I e II
Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 1960

Idrodinamica. — *Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide* (*). Nota I di ENRICO MARCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. Le ricerche sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide, iniziate nel secolo scorso con esperienze eseguite per la maggior parte su canali a pelo libero (ricordiamo in particolare gli studi di Bazin), hanno poi trovato un soddisfacente inquadramento teorico, ad opera di Prandtl, Kármán, Taylor, ecc. (1), soltanto nel campo delle correnti in pressione entro condotti circolari (o nel campo concettualmente analogo del moto piano bidimensionale). Le classiche esperienze di Nikuradse su tubi omogeneamente scabri e di Colebrook su tubi con scabrezza naturale eterogenea, confermando le interpretazioni teoriche, hanno chiarito il fenomeno (medio temporale) del moto nei condotti circolari e definito in questo campo le leggi di distribuzione della velocità e le leggi di resistenza.

Più arretrato è rimasto invece l'analogo studio nei condotti di sezione diversa dalla circolare e, in generale, nei canali. In questi casi, la mancanza di quella particolare simmetria che caratterizza le correnti circolari esclude il semplice trasferimento della stessa impostazione teorica.

A partire dal 1954 ho eseguito in maniera sistematica una ricerca sperimentale sul moto uniforme di correnti a pelo libero con differenti sezioni trasversali. L'osservazione sperimentale ha confermato una sostanziale analogia di comportamento fra queste correnti e quelle circolari in pressione per quanto riguarda la dipendenza del coefficiente di attrito dal n° di Reynolds e dalla scabrezza relativa, ma contemporaneamente ha messo in evidenza la non trascurabile influenza della forma della sezione. Un'indagine in questa direzione appare quindi essenziale per lo studio del moto nei canali.

Per questo mi sono proposto di affrontare il problema del movimento uniforme turbolento di un fluido incomprimibile entro condotti di sezione generica. I risultati, messa in conto (almeno globalmente) l'influenza del pelo libero, possono trasferirsi alle sezioni aperte, cioè al moto uniforme nei canali.

Nella presente Nota I tratteremo il caso della sezione circolare. Una revisione di questo studio si è resa necessaria dopo che le misure sperimentali ci avevano rivelato una sensibile differenza fra la pendenza dei profili della velocità adimensionale lungo le normali al contorno nelle sezioni non circolari (con valori 6,5-7,0 sia nelle sezioni chiuse che in quelle aperte) e il valore

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Idraulica di Bologna con il contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) Per una chiara esposizione degli studi sulla turbolenza di parete e per le relative indicazioni bibliografiche si veda C. FERRARI, *Turbolenza di parete*, lezioni tenute a Varenna per il C.I.M.E. dal 1-10 settembre 1957. Libr. Univ. Levrotto e Bella, Torino, p. 171.

5,75 assegnato da Nikuradse nelle circolari. Constatato che ciò non dipende dalla forma della sezione, perché la stessa variazione si presenta anche nei singoli profili rilevati nelle sezioni circolari, dimostreremo per quest'ultime che la legge puramente logaritmica con pendenza 5,75 può giustificarsi solo come espressione semplificata di una più complessa legge di distribuzione della velocità. Proveremo però che tale semplificazione risulta corretta agli effetti della deduzione delle leggi di resistenza.

Nella Nota II, trattando il caso specifico delle sezioni non circolari, mostreremo la possibilità di sviluppare, con l'introduzione di nuove ipotesi di lavoro, un analogo inquadramento teorico.

RICHIAMO DELLE LEGGI DEL MOTO ENTRO CONDOTTI CIRCOLARI.

2. Ci riferiamo al moto turbolento di una corrente liquida in un tubo di sezione circolare ⁽²⁾ e indichiamo con U la velocità media nella sezione, con τ_0 la tensione tangenziale sul contorno (costante), con y_0 il raggio della sezione ($R = y_0/2 =$ raggio idraulico), con i la pendenza motrice e con λ il coefficiente di resistenza definito dall'equazione

$$(1_1) \quad i = \frac{\lambda}{4R} \cdot \frac{U^2}{2g}.$$

Poniamo inoltre $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*$ (velocità di attrito). Per ragioni di equilibrio e per la (1₁) si ha

$$(2_1) \quad u_* = \sqrt{Rig} = U \sqrt{\frac{\lambda}{8}}.$$

La legge logaritmica di distribuzione delle velocità u (con valore massimo u_m), lungo una normale al contorno, in funzione della distanza y dalla parete, è

$$(3_1) \quad \frac{u - u_m}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} = b \log \frac{y}{y_0} \quad \left(b = \frac{2 \cdot 303}{k} \right).$$

La costante k , detta di Prandtl-Kármán, è stata determinata per via sperimentale. Ponendo $k = 0,40$, secondo le indicazioni di Nikuradse, si ha

$$(4_1) \quad \frac{u - u_m}{u_*} = 5,75 \log \frac{y}{y_0}.$$

La (4₁) assume forme particolari tenendo conto delle condizioni al contorno ⁽³⁾. Così, nel caso di *pareti lisce*, la legge di distribuzione della velocità diventa

$$(5_1) \quad \frac{u}{u_*} = a_1 + 5,75 \log \left(\frac{y u_*}{\nu} \right)$$

(2) Le considerazioni che seguono possono trasferirsi inalterate anche al moto piano bidimensionale, purché si indichi con y_0 la semidistanza fra i piani paralleli (in tal caso è $R = y_0$).

(3) Le trasformazioni sono riportate dettagliatamente in diversi trattati. Ved. ad esempio BAKHMETEFF, *The Mechanics of Turbulent Flow*. Princeton U. P., 1936.

con $a_l = 5,5$, secondo Nikuradse ⁽⁴⁾. Nel caso di *pareti scabre* in regime di moto assolutamente turbolento (λ indipendente dal n° di Reynolds N), si ha

$$(6_r) \quad \frac{u}{u_*} = a_r + 5,75 \log\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

con $a_r = 8,5$, in base alle esperienze ancora di Nikuradse ⁽⁵⁾ su tubi aventi scabrezza omogenea di altezza ε .

3. La legge logaritmica di distribuzione della velocità è stata assegnata per la prima volta da v. Kármán ⁽⁶⁾. Il procedimento più semplice per dedurre la (3_r) è dovuto però sostanzialmente a Prandtl ⁽⁷⁾ e si fonda sull'ipotesi che la «lunghezza di mescolamento» – intesa modernamente anche come macroscale della turbolenza – sia proporzionale, nella regione vicina alla parete (esterna allo strato laminare), alla relativa distanza y . Esso la giustifica quindi in questa regione ma non in tutto il campo del moto, al quale invece la (4_r) viene spesso arbitrariamente estesa.

Nella regione centrale del condotto la distribuzione della velocità è stata interpretata, più recentemente, con una legge di tipo parabolico, derivata dall'ipotesi che la lunghezza di mescolamento sia in quel campo costante.

Qui possiamo fare due osservazioni:

I) I *profili sperimentali della velocità* adimensionale u/u_* , in funzione di $\log y$, non confermano, presi singolarmente, il valore 5,75 della pendenza b , eccetto che per $y/y_0 < 0,15$. Nella regione ben più importante che va da $y/y_0 \cong 0,15$ a $y/y_0 \cong 0,85$ la pendenza dei profili varia fra 6,5–7,0. In vicinanza dell'asse del tubo i profili piegano rapidamente, diminuendo di pendenza, fino a raggiungere tangente orizzontale per $y = y_0$. Si vedano, a titolo di esempio, i risultati sperimentali, di Nikuradse ⁽⁸⁾ e di Dönch ⁽⁹⁾ riportati nella fig. 1.

II) Nella deduzione delle *leggi di resistenza* non si tiene conto di una differente distribuzione della velocità nella regione vicina alla parete e nella regione centrale del tubo, e si ammette senz'altro valida la (4_r), con le con-

(4) J. NIKURADSE, *Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren*, «V.D.I., Forschungsheft 356», 1932.

(5) J. NIKURADSE, *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*, «V.D.I. Forschungsheft 361», 1933.

(6) Ved. TH. KÁRMÁN, *Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz.*, 3° Int. Kongress Tech. Mech. Stoccolma 1930; *Turbulens and Skin Friction*, «J. Aeron. Sciences», I (1934).

(7) L. PRANDT, *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, «Z.A.M.M.», Bd. 5 (1925); *Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten*, «Ergebn. Aerod. Vers. Göttingen», 4 (1932); *Neue Ergebnisse der Turbulenzforschung*, «Z.V.D.I.», Bd. 77, n. 5 (1933).

(8) Ved. note (4) e (5).

(9) F. DÖNCH, *Divergente und Konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln*, «V.D.I. Forschungsarb. 282», 1926.

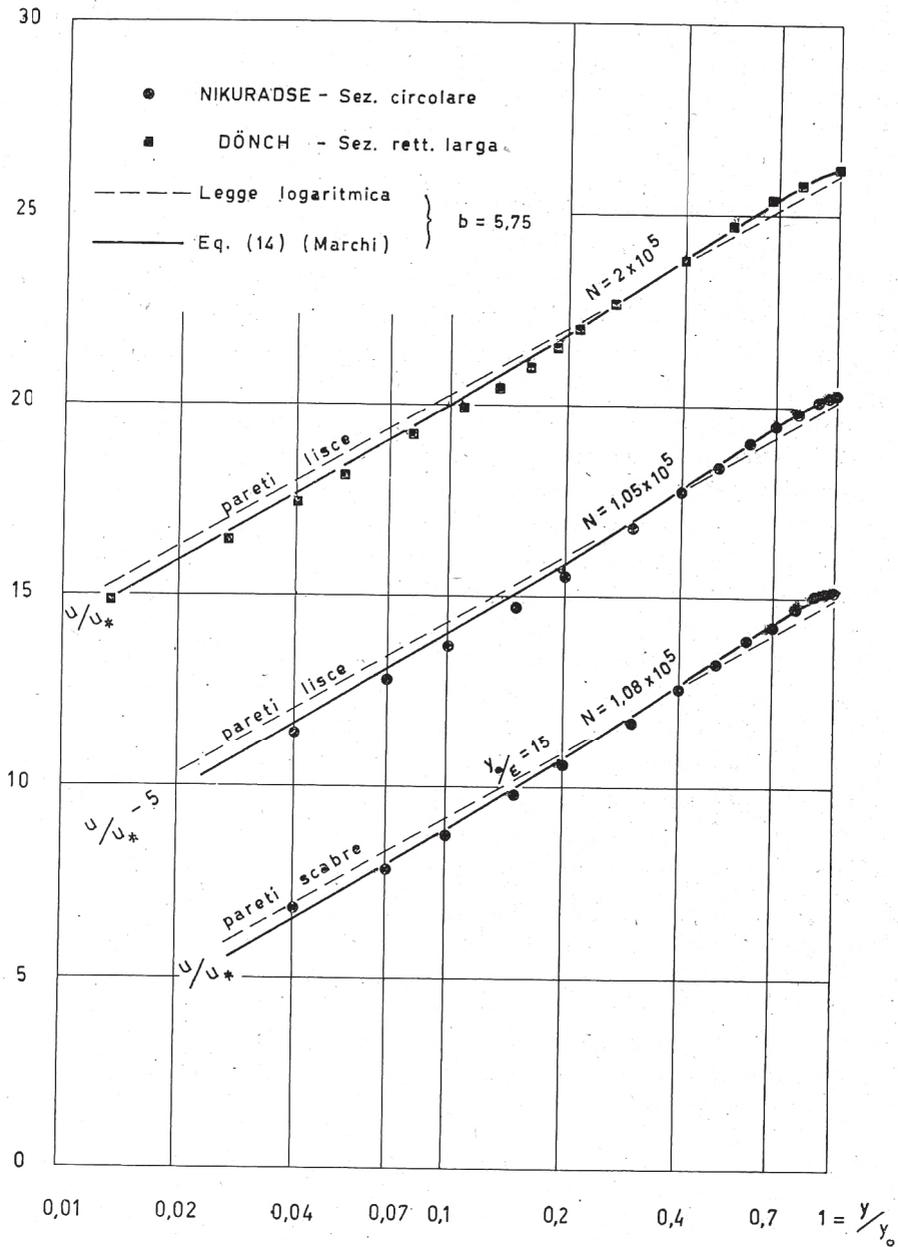


Fig. 1.

seguenti (5_r) e (6_r), in *tutta* la sezione. I risultati ottenuti con questo procedimento:

$$(7_r) \quad \frac{I}{\sqrt{\lambda}} = A_l + B \log(N\sqrt{\lambda}) \quad \text{per i condotti } \textit{lisce} \left(\text{con } N = \frac{4RU}{\nu} \right)$$

e

$$(8_r) \quad \frac{I}{\sqrt{\lambda}} = A_r + B \log\left(\frac{4R}{\epsilon}\right) \quad \text{per i condotti } \textit{scabre} \text{ in regime assolutamente turbolento}$$

sono stati pienamente verificati dalle esperienze di Nikuradse⁽⁸⁾, che hanno precisato i valori delle costanti $A_l = -0,80$, $A_r = 1,14$ e $B = 2,0$. Essi sono in soddisfacente accordo anche con i valori numerici che si ricavano attraverso la (2₁) mediando le leggi (5₁) e (6₁) in tutta la sezione (tenuto conto dei valori indicati per le costanti a_l e a_r). In particolare si ottiene

$$B = \frac{b}{\sqrt{8}} = \frac{5,75}{\sqrt{8}} = 2,03.$$

UNA NUOVA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ NEI CONDOTTI CIRCOLARI.

4. Le osservazioni precedenti si contraddicono per quanto riguarda la legge di distribuzione della velocità nella sezione. Infatti, mentre la prima conferma che la distribuzione logaritmica non può essere accettata in *tutta* la sezione, se non in via approssimata e con un valore di b sensibilmente maggiore di 5,75, la seconda giustifica la sua corretta assunzione proprio con $b = 5,75$.

La contraddizione scompare se si introduce nelle leggi di distribuzione della velocità (5₁) e (6₁) un termine funzione soltanto di y/y_0 . In tal modo è possibile rispettare la distribuzione sperimentale della velocità assumendo $b = 5,75$ e conservare nello stesso tempo al coefficiente B delle leggi di resistenza il valore $5,75/\sqrt{8}$. Basta osservare che il contributo di una funzione di y/y_0 - mediata sulla sezione - o è nullo o si riduce ad una costante.

Per precisare questa funzione abbiamo ripreso il procedimento di Prandtl, assegnando alla lunghezza di mescolamento la seguente espressione, valida in tutta la sezione (escluso lo strato laminare).

$$(9_1) \quad l = ky e^{-y/y_0}.$$

Essa ci è stata suggerita dai rilievi sperimentali, e dalle indicazioni qualitative che abbiamo premesso. La curva (9₁) segue fedelmente quella sperimentale di Nikuradse ponendo $K = 0,38$ ⁽¹⁰⁾, e si discosta poco da essa anche con $K = 0,40$ (fig. 2).

Dalla nota relazione

$$(10_1) \quad \tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

tenuto conto che la tensione tangenziale varia linearmente dal valore τ_0 alla parete al valore nullo in asse, segue per la (9₁)

$$(11_1) \quad \frac{\tau_0}{\rho} \left(1 - \frac{y}{y_0} \right) = K^2 y^2 e^{-2y/y_0} \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

(10) Un valore di K minore di 0,40, addirittura $K = 0,36$, è stato proposto da DEISSLER sulla base delle sue ricerche sperimentali sul moto di una corrente d'aria entro condotti circolari: *Analytical and experimental investigations of adiabatic turbulent flow in smooth tubes*, « Nat. Advisory Comm. Aeronaut. », Tech. Note 2138 (1950).

I risultati di queste esperienze sono in buon accordo anche con le misure eseguite su correnti d'aria fra piani lisci paralleli da W. G. SCHLINGER e B. H. SAGE, *Velocity distribution between parallel plates*, « Ind. Eng. Chem. », vol. 45, n. 12, p. 2636 (1953).

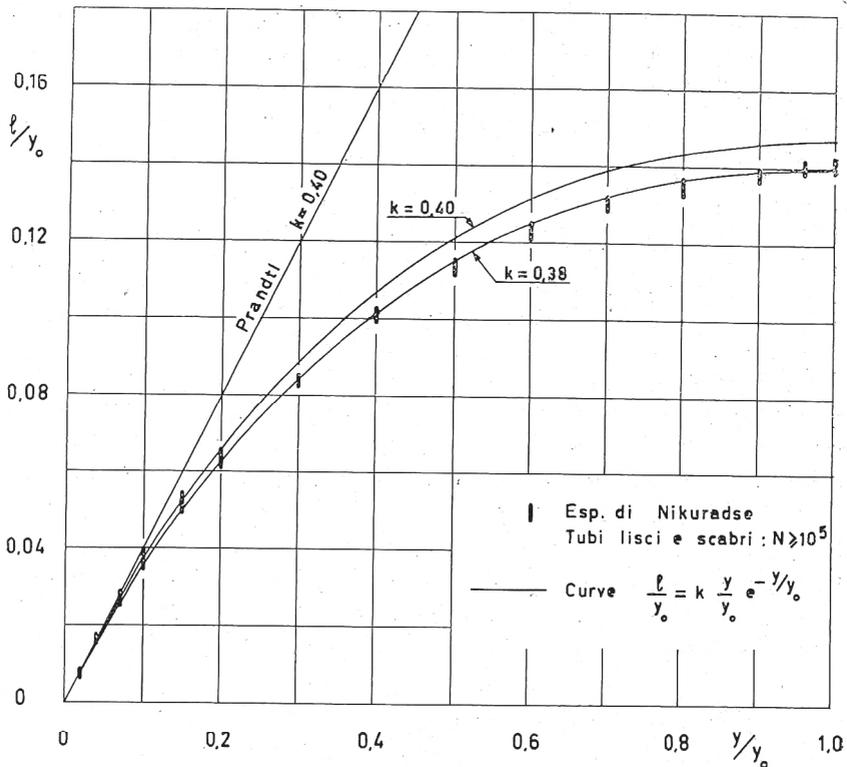


Fig. 2.

Integrando si ha, con le solite indicazioni,

$$(12_i) \quad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} \frac{1}{K} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{1}{K} \int_{y_0}^y \frac{e^{y/y_0} \sqrt{1 - y/y_0} - 1}{y} dy.$$

Posto

$$(13_i) \quad \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right) = \int_1^{y/y_0} \frac{e^{y/y_0} \sqrt{1 - y/y_0} - 1}{y/y_0} d \left(\frac{y}{y_0} \right),$$

la legge di distribuzione della velocità diventa

$$(14_i) \quad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right) + \frac{1}{K} \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right).$$

La funzione $\Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)$, della quale riportiamo nella Tabella I alcuni valori, calcolati numericamente con passo $2 \cdot 10^{-3}$, rappresenta (divisa per K) il termine correttivo di cui si è detto inizialmente.

Assumendo $K = 0,38$ il valore del coefficiente b dovrebbe essere modificato da 5,75 a 6,0. La correzione migliorerebbe un poco la concordanza con le misure sperimentali di velocità, ma lascerebbe praticamente inalterata

la verifica delle leggi di resistenza. Appunto per questo, allo stato attuale delle cose, non ci sembra opportuna una variazione che si rifletterebbe su coefficienti ormai abituali nelle formule per il calcolo di λ .

TABELLA I.

y/y_0	$\Phi(y/y_0)$	y/y_0	$\Phi(y/y_0)$	y/y_0	$\Phi(y/y_0)$
0	- 0,2166	0,15	- 0,1433	0,70	+ 0,0520
0,01	- 0,2166	0,20	- 0,1198	0,80	+ 0,0595
0,02	- 0,2066	0,30	- 0,0751	0,90	+ 0,0480
0,04	- 0,1967	0,40	- 0,0340	0,95	+ 0,0311
0,07	- 0,1819	0,50	+ 0,0021	1,00	0
0,10	- 0,1673	0,60	+ 0,0316		

Con $b = 5,75$, imponendo le condizioni al contorno, si ricavano subito dalla (14_r) le leggi particolari

$$(15_r) \quad \frac{u}{u_*} = a'_i + 5,75 \log \left(\frac{yu_*}{\nu} \right) + 2,5 \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

per i condotti *lisci*, e

$$(16_r) \quad \frac{u}{u_*} = a'_r + 5,75 \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) + 2,5 \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

per i condotti *scabri* (in regime assolutamente turbolento).

I valori a'_i ed a'_r sono ancora costanti ma differiscono un poco da quelli di Nikuradse: precisamente $a'_i = 5,7$ ed $a'_r = 8,7$. La fig. 1 mette in evidenza la buona concordanza dei nostri risultati con i precedenti profili sperimentali⁽¹¹⁾. Per quanto riguarda le leggi di resistenza, esse restano inalterate rispetto a quelle ricavate a partire dalla distribuzione puramente logaritmica della velocità, perché il valore medio nella sezione circolare di $2,5 \Phi(y/y_0)$ è - 0,195 ed è quindi compensato sia nei condotti lisci che in quelli scabri dall'aumento del coefficiente a_i o rispettivamente del coefficiente a_r .

5. La nuova espressione della distribuzione della velocità, che abbiamo ricavato al n. 4, si presta ad alcune considerazioni.

In primo luogo, oltre ad una generale migliore concordanza con i risultati sperimentali, rispetto alla legge di Prandtl-Kármán, essa presenta in

(11) Altri confronti saranno riportati in una prossima pubblicazione su «L'Energia Elettrica». In essa sarà dato particolare rilievo alla parte sperimentale.

asse del tubo un massimo effettivo della velocità. La condizione teorica $(du/dy) = 0$ per $y = y_0$ è infatti soddisfatta dalla (11₁).

In secondo luogo si osserva, come avevamo premesso, che la legge logaritmica (4₁) può considerarsi una semplificazione della nostra (14₁). Tale semplificazione è solo approssimativamente verificata, in tutto il campo del moto turbolento, dai profili sperimentali della velocità, perché la loro pendenza nel tronco più importante ($0,15 \leq y/y_0 \leq 0,85$) vale circa 6,5-7,0 anziché 5,75, ma è perfettamente accettabile se viene utilizzata per ricavare con processo deduttivo le leggi di resistenza.

Idrodinamica. — *Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide* (*). Nota II di ENRICO MARCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. SUPINO.

SEZIONI DI FORMA QUALUNQUE: DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ.

1. Il trasferimento allo studio del moto uniforme turbolento entro condotti di sezione qualunque dei risultati ottenuti nei condotti circolari è stato oggetto di diverse ricerche, fra le quali particolarmente notevoli quelle di Nikuradse (1,2) su sezioni chiuse e di Keulegan (3) su sezioni aperte.

Alla base di questi procedimenti sta l'ipotesi di una distribuzione logaritmica di velocità lungo ogni normale al contorno, in funzione del valore della tensione tangenziale τ_0 al piede della normale considerata. In formule

$$(1_2) \quad \frac{u}{u_*} = \bar{a} + b \log\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

con \bar{a} funzione del numero di Reynolds (regime di tubo liscio) o della scabrezza relativa (regime di tubo scabro), ritenuta quindi *costante* in uno stesso condotto per assegnate condizioni di moto, b costante universale (uguale a 5,75), e $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ *variabile* da punto a punto del contorno in maniera a priori incognita.

L'osservazione sperimentale non ha confermato queste ipotesi (4). Essa giustifica piuttosto i risultati dell'interpretazione che esponiamo nei numeri seguenti.

2. Indichiamo con u' la componente della velocità di agitazione turbolenta nella direzione x del condotto, e con v' la componente nella direzione y normale alla parete più vicina al punto in esame. Considerazioni elementari sul « trasporto della quantità di moto » dimostrano che la tensione turbolenta (di Reynolds) agente nella direzione x sull'elemento di superficie perpendicolare a y vale

$$(2_2) \quad \tau = -\rho \overline{u'v'}.$$

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Idraulica di Bologna con il contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 novembre 1960.

(1) J. NIKURADSE, *Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen*, « V. D. I. Forschungsarb », 281 (1926).

(2) J. NIKURADSE, *Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Röhren*, « Ing. Archiv. », p. 307 (1930).

(3) G. H. KEULEGAN, *Laws of turbulent flow in open channels*, « J. of Res. of Nat. Bur. of Standards », vol. 21, p. 707 (1938).

(4) A. GHETTI, *Distribuzione della velocità all'interno e sforzi di scorrimento al contorno nelle correnti a regime uniforme*, « L'En. Elett. », n. 3, p. 290 (1957).

Riteniamo trascurabile la tensione viscosa in tutto il campo esterno allo strato laminare: la (2_2) rappresenta quindi la tensione tangenziale agente su una superficie di traccia γ , distante costantemente y dalla parete (fig. 1).

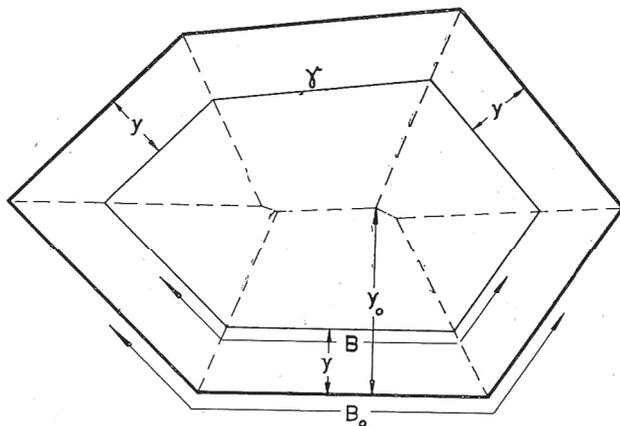


Fig. 1.

Le interpretazioni teoriche che abbiamo prima richiamato presuppongono la variabilità della tensione τ , considerata nel suo valor medio temporale, da punto a punto di γ . È su questa posizione che il nostro procedimento differisce dai precedenti.

Le indicazioni sperimentali hanno provato l'identità di comportamento, agli effetti della distribuzione della velocità, delle pareti piane dei condotti rettangolari larghissimi e delle pareti curve dei condotti circolari. Generalizzando, ciò induce a ritenere che il moto di agitazione turbolenta, nel nucleo della corrente (escluso cioè il film laminare), sia mediamente lo stesso ad ugual distanza dalla parete, indipendentemente dalla forma di quest'ultima. Ossia che la funzione di correlazione $\overline{u'v'}$ dipenda soltanto dalla distanza y , almeno in prima approssimazione.

Ne deriva uno schema nel quale la tensione τ , secondo la (2_2) , viene ad assumere una distribuzione uniforme ($\bar{\tau}$) su ogni superficie equidistante da quella di contorno, mentre su questa ultima la tensione τ_0 non è in generale costante. Il raccordo fra le due diverse distribuzioni avviene attraverso lo strato laminare, il cui spessore può variare da punto a punto del contorno.

Come si è detto, questa interpretazione, plausibile a priori ma giustificata soprattutto dalla verifica sperimentale dei risultati, non vuole essere che uno schema e come tale non pretende di esaurire anche tutti i fenomeni locali di turbolenza che possono verificarsi nelle immediate vicinanze dei punti angolosi del contorno.

In analogia con lo studio del moto entro condotti circolari, poniamo

$$(3_2) \quad \overline{u'v'} = -l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

con l funzione soltanto di y . Quindi dalla (2₂), tenuto conto delle considerazioni precedenti, segue

$$(4_2) \quad \frac{\tau}{\rho} = l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Suddividiamo la sezione, che per semplicità supponiamo senz'altro con lati rettilinei, in zone limitate dalle bisettrici degli angoli perimetrali (ved. fig. 1). In ciascuna di esse varrà la (4₂), intendendo con y la distanza del punto considerato dal relativo lato di contorno e con y_0 il massimo valore di y in tutta la sezione.

Anche per una sezione generica sussiste, fra il valor medio della tensione tangenziale al contorno $\bar{\tau}_0 = \gamma R_i$ e il valor medio $\bar{\tau}$ sulla superficie distante y (coincidente nel nostro schema con il valore locale), la relazione

$$(5_2) \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \left(1 - \frac{y}{y_0} \right).$$

Adottando per la lunghezza l l'espressione (9₁) $l = K y e^{-y/y_0}$ assegnata al n. 4 della Nota I, segue dalle (4₂) e (5₂)

$$(6_2) \quad \frac{\bar{\tau}_0}{\rho} \left(1 - \frac{y}{y_0} \right) = K^2 y^2 e^{-2y/y_0} \left(\frac{du}{dy} \right)^2.$$

Di qui, posto

$$\Phi \left(\frac{y}{y_0} \right) = \int_1^{y/y_0} \frac{e^{y/y_0} \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}} - 1}{\frac{y}{y_0}} d \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad (\text{cfr. (13}_1))$$

e

$$(7_2) \quad \bar{u}_* = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{\rho}}$$

si ottiene integrando

$$(8_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = a' + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right) + \frac{1}{K} \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad \left(b = \frac{2,303}{K} \right).$$

Se si assume invece per l la posizione di Prandtl $l = Ky$, che rappresenta una semplificazione della (9₁) valida nella regione vicina alle pareti, si ottiene la distribuzione puramente logaritmica

$$(9_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = a + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad \left(b = \frac{2,303}{K} \right).$$

Una differenza sostanziale fra la relazione premessa (1₂) e la (9₂) è che, mentre nella prima la pendenza $u_* b$ dei profili della velocità in funzione di $\log y$ è variabile da normale a normale in relazione alla variazione sul contorno di u_* , nella seconda la pendenza degli stessi profili conserva il valore costante $\bar{u}_* b$ su qualunque normale al perimetro bagnato (5).

(5) Per quanto riguarda la (8₂), la pendenza dei profili $u = f(\log y)$ non risulta più costante lungo ciascuna normale al contorno, causa la presenza del termine contenente $\Phi(y/y_0)$, ma resta ugualmente la stessa, a parità di y , su tutte le normali al contorno (s'intende in una stessa sezione e in assegnate condizioni di moto).

3. Si è già visto nei nn. 4 e 5 della Nota I come l'introduzione del termine $\frac{1}{K} \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$ nelle leggi di distribuzione della velocità giustifichi il valore 5,75 del coefficiente b , mentre la pendenza dei profili u/\bar{u}_* è intorno a 6,5-7,0 in quasi tutto il campo dei valori y/y_0 . Il contributo dello stesso termine, qualunque sia la forma della sezione, si riduce però ad un valore costante nelle leggi di resistenza. In vista della determinazione di queste ultime, possiamo quindi far riferimento all'espressione semplificata (9₂).

Imponiamo le condizioni al contorno operando come nello studio del moto turbolento entro condotti circolari. Nel caso di *pareti lisce* poniamo quindi che al confine (ideale) fra lo strato laminare e il nucleo turbolento si mantenga costante il numero $N_* = \frac{u_\delta}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu}$, essendo u_δ la velocità al limite del film laminare di spessore, in generale variabile, δ . Scritta la (9₂) per $y = \delta$ ed eliminato a , si ottiene

$$(10_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = \frac{u_\delta}{\bar{u}_*} - b \log \frac{\delta \bar{u}_*}{\nu} + b \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu};$$

da cui, per le ipotesi precedenti,

$$(11_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = \left(N_* \frac{u_*}{\bar{u}_*} - b \log N_* \frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + b \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu}.$$

Più concisamente la legge di distribuzione della velocità nei condotti lisci di sezione qualunque si può scrivere

$$(12_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = a_1 + b \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu} \quad \left(a_1 = a_1 \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right); b = \frac{2,303}{K} \right).$$

Dalla (12₂) si nota che a_1 è costante soltanto nei condotti di sezione circolare e nei condotti rettangolari larghissimi dove $u_* = \bar{u}_* = \text{cost.}$ Altrimenti i valori di a_1 sono diversi da profilo a profilo in relazione al valore di u_* al piede della normale considerata. In questo sta una seconda fondamentale differenza fra la nostra (12₂) e gli sviluppi che si deducono dalla (1₂).

In altre parole, lo schema assunto alla base del nostro procedimento implica che, a parità di condizioni di parete e di moto, la variazione della velocità (media temporale) nella direzione normale alla parete sia la *stessa* in tutti i punti equidistanti dal contorno, ma il *valore* della stessa velocità sia *diverso* da punto a punto in relazione alla non uniforme distribuzione di τ_0 sul contorno. I profili $u/\bar{u}_* = f(\log y)$ lungo diverse normali al contorno di una data sezione devono essere quindi interpolabili, secondo le nostre ipotesi, con rette aventi tutte la medesima pendenza ma costanti diverse all'origine ⁽⁶⁾. Le figg. 2 e 3 mettono in evidenza la buona conferma sperimentale ⁽⁷⁾.

(6) Al contrario i profili rappresentati dalla (1₂) sono rette passanti tutte per uno stesso punto e con pendenze diverse da normale a normale al contorno.

(7) Le misure sperimentali sono tratte dalla Memoria ⁽¹⁾.

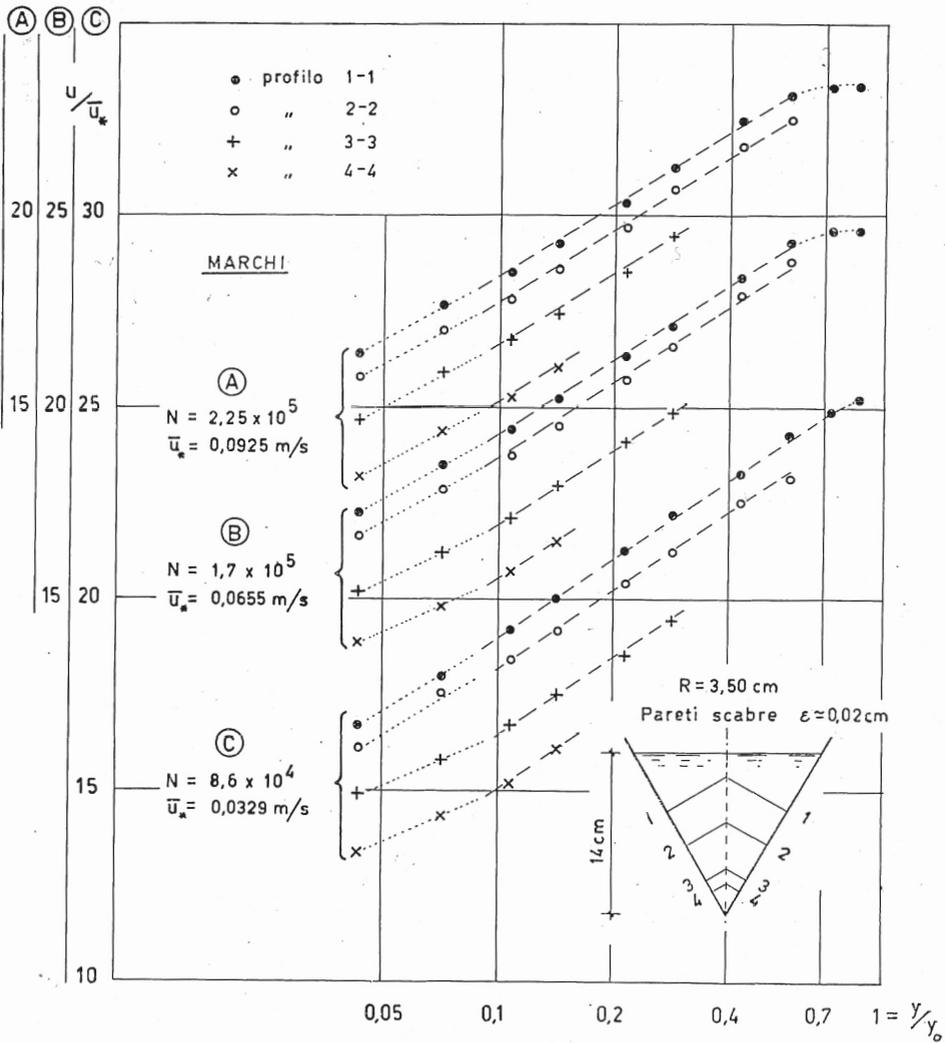


Fig. 4.

Nel caso di *pareti scabre* e di *moto assolutamente turbolento*, imposte le condizioni al contorno con procedimento sempre analogo a quello seguito per le condotte circolari, si ottiene

$$(I3_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = a_r + b \log \frac{y}{\epsilon} \quad \left(a_r = a_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right); b = \frac{2,303}{K} \right)$$

con a_r dipendente dalla distribuzione di u_* sul contorno, e con i limiti che derivano in questo caso dalla possibilità di caratterizzare la scabrezza con il solo parametro ϵ . Anche qui il confronto sperimentale, di cui riportiamo un esempio nella fig. 4⁽⁸⁾, prova l'attendibilità dei risultati⁽⁹⁾.

(8) E. MARCHI, *Terza serie di esperienze sul moto uniforme nei canali*, «La Ricerca Scientifica», n. 12, p. 2564 (1959).

(9) Come si è detto nella Nota I, ulteriori confronti sperimentali saranno riportati in una Memoria di prossima pubblicazione su «L'Energia Elettrica».

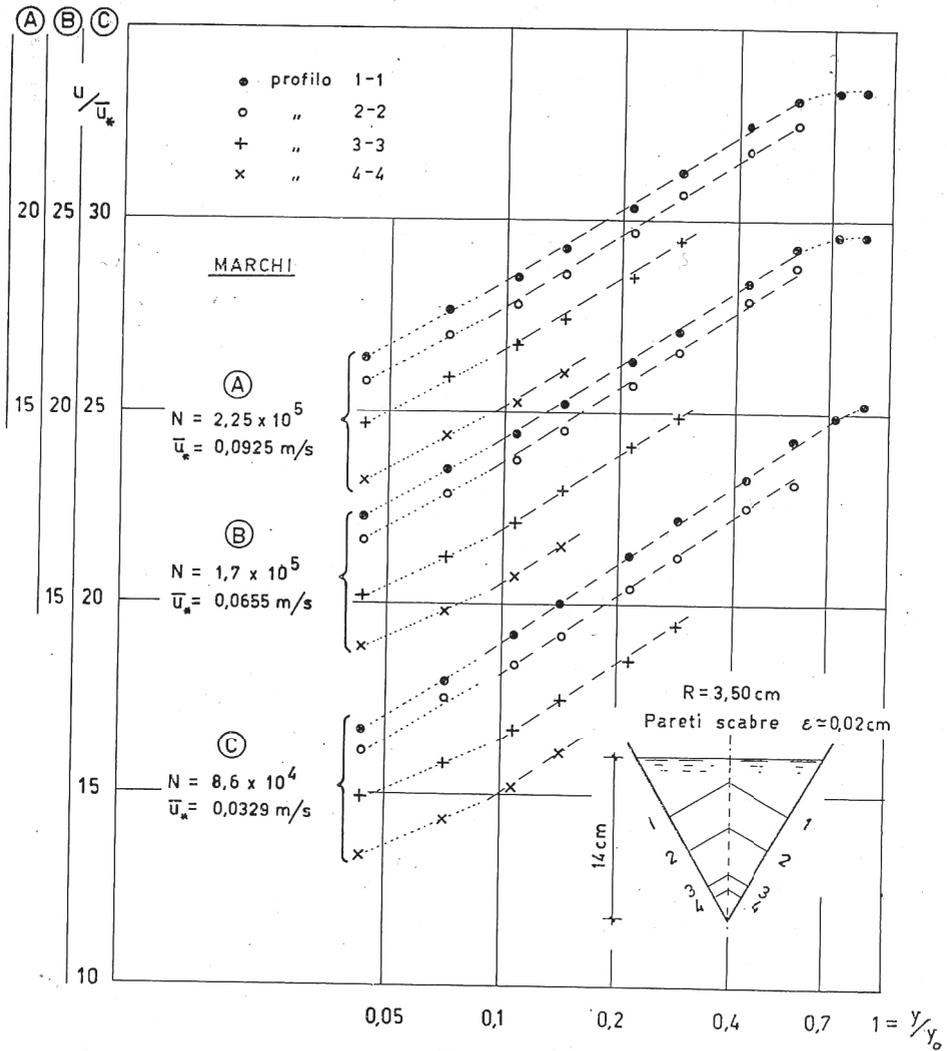


Fig. 4.

Nel caso di *pareti scabre* e di *moto assolutamente turbolento*, imposte le condizioni al contorno con procedimento sempre analogo a quello seguito per le condotte circolari, si ottiene

$$(13_2) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = a_r + b \log \frac{y}{\varepsilon} \quad \left(a_r = a_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right); b = \frac{2,303}{K} \right)$$

con a_r dipendente dalla distribuzione di u_* sul contorno, e con i limiti che derivano in questo caso dalla possibilità di caratterizzare la scabrezza con il solo parametro ε . Anche qui il confronto sperimentale, di cui riportiamo un esempio nella fig. 4⁽⁸⁾, prova l'attendibilità dei risultati⁽⁹⁾.

(8) E. MARCHI, *Terza serie di esperienze sul moto uniforme nei canali*, «La Ricerca Scientifica», n. 12, p. 2564 (1959).

(9) Come si è detto nella Nota I, ulteriori confronti sperimentali saranno riportati in una Memoria di prossima pubblicazione su «L'Energia Elettrica».

SEZIONI DI FORMA QUALUNQUE: LE LEGGI DI RESISTENZA.

4. Calcoliamo il valor medio U della velocità in tutta la sezione

$$(14_2) \quad U = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B u dB$$

dove B è la lunghezza di una linea distante costantemente y dal contorno B_0 .
Poniamo

$$(15_2) \quad \alpha = \frac{B_0 - B}{y}$$

$$(16_2) \quad \beta = \ln \frac{y_0}{R} - \frac{\alpha y_0^2}{4\Omega} = \text{coeff. geometrico di forma.}$$

Partendo dalla (12₂), indicato con

$$(17_2) \quad C_l = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_l \left(\frac{u_*}{u_*'} \right) dB$$

un coefficiente che dipende dalla distribuzione di a_l sul contorno, si ha

$$(18_2) \quad \frac{U}{u_*'} = C_l - \frac{1-\beta}{K} + b \log \left(\frac{R u_*'}{v} \right).$$

Sostituendo la (18₂) nell'equazione del moto uniforme (2₁) $\frac{U}{u_*'} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$,
segue

$$(19_2) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{lf} + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (N \sqrt{\lambda}) \quad \left(N = \frac{4RU}{v} \right)$$

con

$$(20_2) \quad A_{lf} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_l - \frac{1-\beta}{K} - b \log 8 \sqrt{2} \right).$$

La (19₂) rappresenta la *legge di resistenza nei condotti lisci di sezione qualunque*. Il coefficiente A_{lf} cambia un poco con la forma della sezione in conseguenza delle variazioni di C_l e di β . Per la sezione circolare abbiamo indicato questo coefficiente con A_l (cfr. formula (7₁)). Essendo in tal caso $\beta = 0,193$, $C_l = a_l = \text{cost}$, si ottiene

$$(21_2) \quad A_{lf} - A_l = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_l - a_l + \frac{\beta - 0,193}{K} \right).$$

Operando in maniera del tutto analoga a partire dalla (13₂), si ottiene la *legge di resistenza nei condotti scabri in moto assolutamente turbolento*

$$(22_2) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{rf} + \frac{b}{\sqrt{8}} \log \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right)$$

dove, posto

$$(23_2) \quad C_r = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_r \left(\frac{u_*}{u_*'} \right) dB$$

si è indicato con A_{rf} l'espressione

$$(24_a) \quad A_{rf} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_r - \frac{1-\beta}{k} - b \log 4 \right).$$

Nella sezione circolare: $\beta = 0,193$, $C_r = a_r = \text{cost}$ e $A_{rf} = A_r$ (cfr. formula (8_r)), quindi

$$(25_2) \quad A_{rf} - A_r = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_r - a_r + \frac{\beta - 0,193}{k} \right).$$

La (21₂) e la (25₂) mostrano che le variazioni dei coefficienti A_l e A_r , dalla sezione circolare ad una sezione generica, sono rappresentate da termini che hanno lo stesso valore, a parità di forma, in ogni regime del moto turbolento, e dalle differenze $C_l - a_l$ e $C_r - a_r$ i cui valori dipendono dalla distribuzione di $a_l(u_{*x}/\bar{u}_{*x})$ e di $a_r(u_{*x}/\bar{u}_{*x})$ sul contorno.

L'esperienza non è in grado attualmente di fornire indicazioni sufficientemente precise su questa distribuzione ⁽¹⁰⁾. La posizione più semplice è di ritenere che tale distribuzione sia funzione soltanto della forma della sezione. Allora le differenze (21₂) e (25₂) sono uguali, per una stessa sezione, e si può porre

$$(26_2) \quad A_{lf} - A_l = A_{rf} - A_r = \frac{b}{\sqrt{8}} \log f$$

indicando con f un « coefficiente di forma » caratteristico di ogni sezione (evidentemente è $f = 1$ per la sezione circolare).

5. Per la (26₂), assunto $b = 5,75$ sulla base delle indicazioni precedenti, e assegnati i valori di Nikuradse $A_l = -0,8$ e $A_r = 1,14$, le leggi di resistenza (19₂) e (22₂) diventano

$$(27_2) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8 + 2,0 \log (fN \sqrt{\lambda}) \quad \text{per il regime « liscio »}$$

e

$$(28_2) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 + 2,0 \log \left(\frac{4fR}{\epsilon} \right) \quad \text{per il regime « assolutamente rugoso »}.$$

Ne deriva che l'introduzione di un nuovo raggio idraulico R_f « di forma », definito dalla relazione

$$(29_2) \quad R_f = fR$$

(al quale corrisponde il n° di Reynolds $N_f = fN = f \frac{4RU}{v}$), consente di uti-

(10) Dal punto di vista teorico è interessante l'ipotesi avanzata da Ghetti nella Memoria citata (*): l'autore ritiene che la distribuzione delle τ_0 sul contorno debba essere tale da realizzare, a parità di valor medio, quella distribuzione di velocità nella sezione che dà luogo alla portata massima.

lizzare, anche nei condotti di sezione generica, le formule valide nei condotti circolari per il calcolo del coefficiente di attrito λ in regime turbolento ⁽¹¹⁾.

6. I valori del coefficiente f , per sezioni di forma diversa dalla circolare e dalla rettangolare infinitamente larga, devono essere ricavati dal confronto con le esperienze. Tale confronto, che sarà pubblicato per esteso nella Memoria citata ⁽⁹⁾, ha consentito, insieme alla verifica dei nostri risultati, l'indicazione dei valori di f per alcune sezioni tipiche, chiuse e aperte.

Nel campo delle *sezioni chiuse* una conferma significativa si è ottenuta dall'esame delle esperienze di Fromm e Fritsch su condotti lisci di sezione rettangolare molto larga e di Lorentz su condotti lisci di sezione anulare stretta ⁽¹²⁾. Il valore sperimentale del coefficiente di forma in regime turbolento risulta infatti $f = 0,84$, praticamente coincidente con il valore teorico indicato nella nota ⁽¹¹⁾.

Nel campo delle *sezioni aperte* si possono utilizzare ancora le formule precedenti con la convenzione che l'unico coefficiente f interpreti, insieme all'influenza della forma, anche quella del pelo libero, ed assuma quindi per queste sezioni valori caratteristici, in generale diversi da quelli che competono alle corrispondenti forme chiuse (cioè alle sezioni ottenute aggiungendo alle date le simmetriche rispetto al pelo libero) ⁽¹³⁾.

(11) Questa posizione è ovviamente valida, dal punto di vista formale, anche nel regime laminare. I valori del coefficiente f , calcolabili in tal caso per via teorica, sono però *diversi* da quelli del regime turbolento. Nel caso della sezione rettangolare infinitamente larga, dove il calcolo teorico di f è possibile anche in regime turbolento si ha: $f_{\text{lam}} = 0,67$, $f_{\text{turb}} = 0,83$. (Cfr. (25₂) e (26₂) con $C_r = \alpha_r$, $\alpha = \beta = 0$).

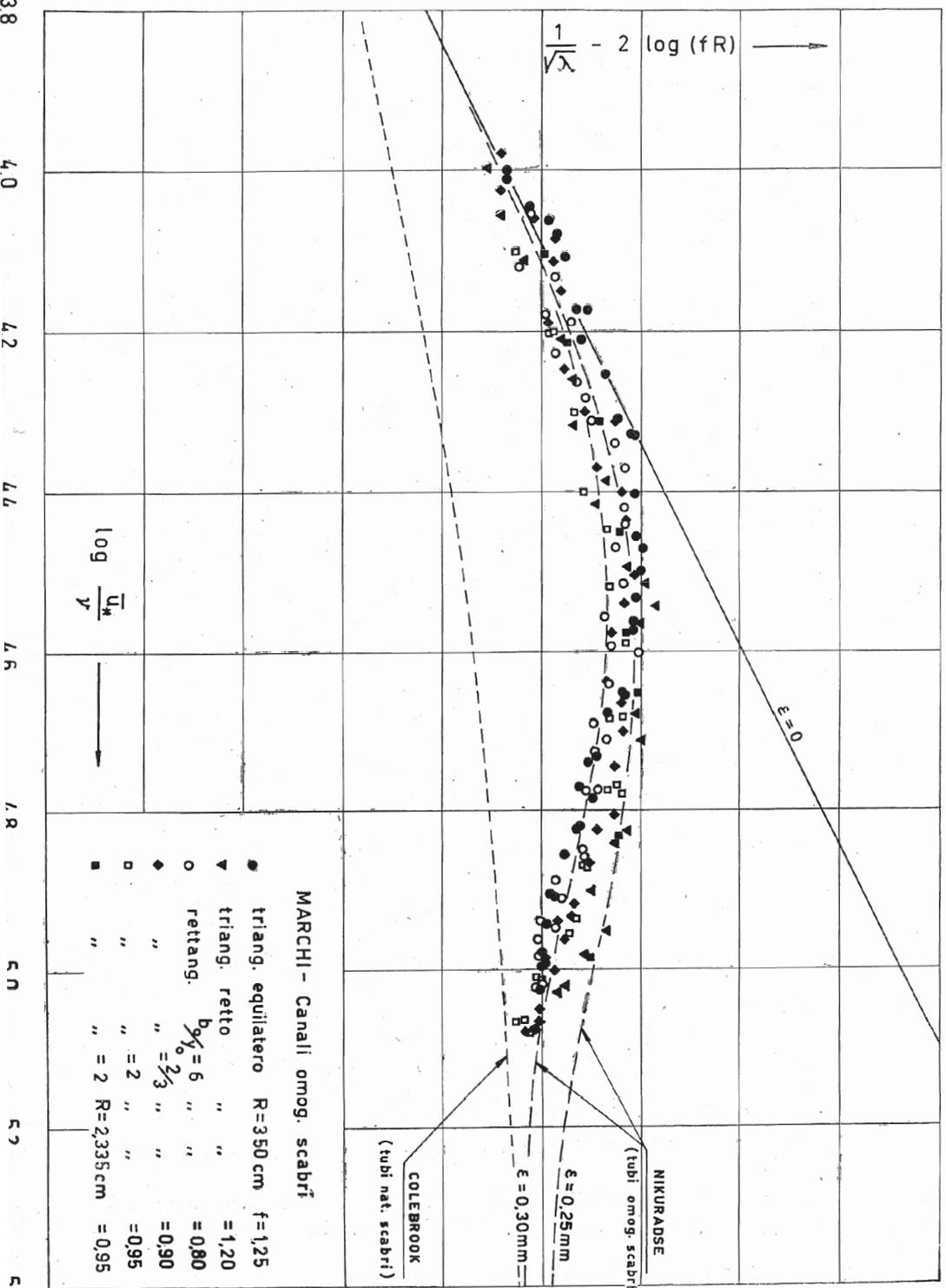
(12) Una rielaborazione di queste esperienze era già stata fatta da B. GENTILINI, *Sull'equazione del movimento uniforme delle correnti liquide*, « L'Energia Elettrica », n. 3 (1935).

L'autore aveva riconosciuto, per analogia col regime laminare, la possibilità di introdurre un coefficiente di forma come moltiplicatore del raggio medio nelle formule per il calcolo di λ nei condotti lisci; riteneva però che tale coefficiente, nel moto turbolento, fosse lo stesso coefficiente di forma del moto laminare.

(13) Questa posizione si può giustificare qualitativamente. Nelle sezioni aperte, la presenza del pelo libero impone la condizione che sia nulla su di esso la componente normale della velocità di agitazione turbolenta w' . Per ragioni di continuità, rispetto alla situazione che si verificherebbe nella corrispondente sezione chiusa dove è $w' \neq 0$, deve aumentare, a parità di u' , la componente v' e quindi la tensione tangenziale (2_2) agente sull'elemento perpendicolare alla superficie libera. Queste variazioni delle τ , e la relativa influenza sulla distribuzione della velocità, interessano non soltanto il pelo libero ma, in misura progressivamente ridotta, tutta una regione prossima ad esso. Un risultato equivalente si può ottenere immaginando di partire dalla corrispondente corrente in pressione, e, dopo averne separato idealmente una delle due parti con la retta che in essa sostituisce il pelo libero, di applicare su quest'ultimo una tensione tangenziale parallela all'asse del moto e distribuita, caso per caso, con leggi particolari. [Ved. G. COCCHI, *Su una questione relativa alle correnti a pelo libero*, « Atti Acc. delle Scienze di Bologna », serie XI, V (1958); dove è trattato in maniera completa il caso dei canali semicircolari].

Da questa impostazione deriva che il pelo libero esercita, in misura diversa secondo la forma della sezione, una funzione di contorno paragonabile parzialmente a quella di una parete. La sua influenza sulle leggi di resistenza si può quindi riportare « grosso modo » ad

7 8 9 10 11



38 40 42 44 46 48 50 52 54

Un esempio di confronto sperimentale in questo campo è rappresentato dalla fig. 5 che riporta i risultati delle mie esperienze su canali scabri con scabrezza artificiale omogenea ⁽¹⁴⁾. La sostituzione fR al posto di R in ordinate ha determinato, con i valori di f indicati nella figura, l'addensamento dei punti sperimentali su una curva interpolare unica, con andamento chiaramente simile a quello della curva trovata da Nikuradse nei tubi circolari omogeneamente scabri.

una variazione del coefficiente di forma f , i cui valori non saranno più determinati soltanto dalla forma della sezione chiusa nella corrispondente corrente in pressione, ma risentiranno anche di quella effettiva della sezione aperta.

(14) E. MARCHI, *Esperienze di moto uniforme su canali a pelo libero in modelli di canali artificialmente scabri*, «Atti del V Convegno di Idraulica», Torino, maggio 1957. Vedi inoltre nota ⁽⁸⁾.

Il moto uniforme delle correnti liquide
nei condotti chiusi e aperti
Parte I: Sezioni circolare e rettangolare larghissima
L'Energia Elettrica, 1961

ENRICO MARCHI

Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti (*)

P R E M E S S A

L'Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria di Bologna ha ricevuto, a partire dal 1955, una sovvenzione dal Consiglio Nazionale delle Ricerche per poter svolgere delle sistematiche esperienze sul moto uniforme nei canali.

Lo scopo che queste esperienze si proponevano fu illustrato nella relazione inviata allora al CNR e può essere riassunto osservando che mentre le formule idrauliche per i tubi erano già state sufficientemente affinate in base alle deduzioni teoriche sulla similitudine e alle esperienze di Nikuradse, Colebrook, White ecc., invece nel campo dei canali a pelo libero erano allora note soltanto poche esperienze del Raju e soprattutto del Warwick e che sui risultati di quest'ultimo A. era legittima qualche incertezza.

Il prof. ing. Enrico Marchi ha perciò iniziato una serie di esperienze sui canali che ha poi proseguito in modo completamente autonomo. Alcuni risultati sono già stati pubblicati ne «La Ricerca Scientifica» (1956 e 1959), negli «Atti del V Convegno di Idraulica (1957) e ne «L'Energia Elettrica» (1958). Le ricerche successive e conclusive sono contenute nella presente memoria. La quale ha richiesto un riesame delle formule del moto uniforme nei tubi, in quanto le formule date dal Nikuradse, se sufficientemente precise nei risultati globali, non risultano di una approssimazione adeguata quando si voglia condurre su di esse uno studio sistematico sulla distribuzione locale della velocità.

Il prof. Marchi ha perciò rielaborato nella prima parte del presente studio le leggi date dal Nikuradse. Egli ha così potuto assegnare, nella seconda parte della presente ricerca, una interpretazione teorica del moto entro condotti di sezione qualunque, e quindi, compiendo un secondo passo, è potuto passare alla interpretazione teorica delle esperienze sui canali. La legge di resistenza è sempre del tipo $i = \frac{\lambda}{R} \frac{U^2}{2g}$ ma λ dipende ora dal n. di Reynolds, da un coefficiente di scabrezza, dal raggio medio e da un coefficiente di forma. Quest'ultimo interviene direttamente come coefficiente correttivo del valore del raggio medio.

I risultati ottenuti, che a me sembrano particolarmente importanti sia nel campo teorico che in quello tecnico dell'Idraulica, sono stati brevemente riassunti in due note che ho comunicato alla Accademia Nazionale dei Lincei. La presente memoria dà una esposizione completa di essi con tutte le dimostrazioni e giustificazioni sperimentali necessarie.

Bologna, gennaio 1961.

GIULIO SUPINO.

S o m m a r i o

Si espone uno studio del moto uniforme turbolento entro condotti di sezione di forma qualunque, con particolare riguardo alle correnti a pelo libero.

La I Parte, che viene ora pubblicata sul presente fascicolo, è dedicata allo studio del moto entro condotti cir-

colari e rettangolari infinitamente larghi. Si richiamano le leggi di distribuzione della velocità (media temporale) e le leggi di resistenza di Prandtl-Kármán-Nikuradse. Rilevato dal confronto con le esperienze di diversi AA. (in particolare del Nikuradse stesso), che la pendenza dei profili della velocità adimensionale u/u_* , in funzione del logaritmo della distanza dalla parete, è sensibilmente superiore — in gran parte del campo di variabilità — al valore 5,75 assegnato da Nikuradse, si propone una nuova legge di distribuzione della velocità. Essa giustifica il valore 5,75 del coefficiente predetto,

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Idraulica di Bologna con il contributo del CNR.

lascia praticamente inalterate le leggi di resistenza e soddisfa alla condizione di presentare, nel centro della sezione, un massimo effettivo della velocità.

Nella II Parte, che verrà pubblicata prossimamente, si espone una interpretazione teorica del moto entro condotti di sezione di forma qualunque.

La pubblicazione compendia i risultati delle ricerche svolte dall'A. sul moto uniforme nei canali secondo gli indirizzi e gli obbiettivi che gli erano stati proposti.

P A R T E I

SEZIONI CIRCOLARE E RETTANGOLARE LARGHISSIMA

INTRODUZIONE.

1. - L'interpretazione dei dati sperimentali sul moto uniforme delle correnti liquide comporta generalmente due diverse indagini che, sebbene strettamente concatenate, procedono molte volte in maniera indipendente.

La prima indagine riguarda la *distribuzione delle velocità* e degli sforzi di scorrimento in una sezione trasversale della corrente. Essa implica un'interpretazione, che generalmente è però soltanto schematica, del fenomeno della turbolenza di parete.

La seconda si propone invece di determinare la *legge di resistenza*: ossia di valutare il coefficiente di attrito λ , che compare nella equazione del moto uniforme

$$(i) \quad i = \frac{\lambda}{4 R} \cdot \frac{U^2}{2 g},$$

in dipendenza del n. di Reynolds e dei parametri adimensionali atti a caratterizzare la scabrezza dell'alveo, la forma della sezione, l'influenza del pelo libero, ecc.

Quest'ultimo studio, che investe il comportamento globale delle correnti uniformi, dovrebbe evidentemente trovare soluzione come conseguenza del primo; ma le scarse conoscenze nel campo della distribuzione di velocità hanno permesso solo nel caso di sezioni con particolari simmetrie (cerchio e rettangolo larghissimo) uno sviluppo così completo. Di qui la necessità di interpretare, in tutti gli altri casi, con formule empiriche (Bazin, Kutter, Manning, ecc.) i diversi risultati sperimentali.

In questa memoria, che pubblichiamo a seguito di tre serie di ricerche sperimentali sul moto uniforme nei canali, eseguite fra il 1954 e il 1959 nel Laboratorio dell'Istituto di Idraulica di Bologna, affronteremo successivamente i due problemi mostrando la possibilità di una loro interpretazione coordinata.

2. - Esaminando le più importanti misure sperimentali disponibili in condotti di sezione diversa dalla circolare, abbiamo osservato alcune anomalie dei profili di velocità lungo le normali al contorno rispetto alla legge di distribuzione di Nikuradse. Più precisamente abbiamo rilevato delle sensibili differenze fra la pendenza degli stessi

profili ed il relativo coefficiente di Nikuradse. A nostro avviso, queste differenze non potevano attribuirsi ad una influenza della forma della sezione. Abbiamo ritenuto pertanto necessario premettere un richiamo delle considerazioni teoriche che hanno permesso di definire la legge di distribuzione della velocità e la legge di resistenza nelle condotte circolari e insieme un riesame delle esperienze fondamentali di Nikuradse, per stabilire in che modo e fino a che punto esse avevano confermato tali leggi.

Diciamo fin d'ora che questa revisione delle esperienze sui tubi circolari, come pure il confronto che abbiamo eseguito successivamente con le esperienze di diversi AA. su condotti rettangolari larghissimi, hanno confermato le sensibili differenze fra i parametri delle curve interpolari dei singoli profili di velocità sperimentali e i valori dei corrispondenti coefficienti assunti da Nikuradse.

È sorto così un problema di critica a tali assunzioni. Dimosteremo, negli ultimi paragrafi di questa I Parte, come sia possibile giustificare i valori dei coefficienti proposti da Nikuradse con una più raffinata rappresentazione della distribuzione di velocità.

RICHIAMI DELLE INTERPRETAZIONI TEORICHE DEL MOTO TURBOLENTO ENTRO CONDOTTE CIRCOLARI.

3. - Nel moto *turbolento* entro condotti si riconoscono, nei confronti della distribuzione di velocità, due regioni nettamente distinte: uno strato laminare a contatto con la parete, di spessore sempre molto piccolo in confronto alle dimensioni del condotto e una zona centrale, comprendente la maggior parte della sezione, nella quale le azioni dissipative dovute alla turbolenza sono assolutamente prevalenti su quelle viscosse. Una stretta fascia, compresa fra le precedenti, rappresenta infine la regione di transizione fra i due regimi.

Agli effetti del moto di trasporto le velocità efficaci sono essenzialmente quelle relative alla zona turbolenta. È dalla distribuzione di queste velocità che dipende in sostanza la forma della legge di resistenza al moto di una corrente uniforme turbolenta. Quindi con l'espressione generica « distribuzione di velocità » intenderemo sempre nel seguito riferirci alla distribuzione nel nucleo turbolento della corrente e, per il calcolo della portata, riteremo (come di consueto) prolungabili tali profili di velocità con la stessa legge anche nella zona di transizione e nello strato laminare, fino al contatto con la parete.

4. - Facciamo riferimento alla « teoria del trasporto delle quantità di moto » come a quella che ha trovato finora le migliori verifiche sperimentali (1).

(1) Vi è la tendenza attualmente da parte di diversi AA. (v. ad es. LAUFER [13]) di considerare ormai superate le teorie fenomenologiche della turbolenza, come in particolare la teoria della lunghezza di mescolamento.

Non ci sentiamo di accettare, in linea generale, tale giudizio negativo. Se è vero infatti che queste teorie non sono di aiuto per approfondire l'indagine sul fenomeno della turbolenza di parete, non si può dire ch'esse abbiano perso importanza nei confronti della interpretazione delle leggi di distribuzione delle velocità medie locali e delle leggi di resistenza (cioè di quelle ricerche per le quali erano state effettivamente proposte). In questo campo, sostanzialmente il

I simboli impiegati saranno quelli consueti; nel testo ci limiteremo a richiamare il significato dei meno noti.

In un tubo circolare percorso da una corrente uniforme, indicate con u' la componente assiale della velocità di agitazione (sovrapposta alla velocità media locale u), con v' la componente radiale della stessa velocità e con τ la tensione tangenziale in un punto generico distante y dalla parete, si dimostra (trascurando l'azione della viscosità) fondamentalmente valida la relazione

$$(2) \quad \tau = \rho |u'v'|$$

dove la soprilineatura indica il valore medio nel tempo del prodotto $u'v'$.

Ritenendo, secondo Prandtl [1], u' e v' dello stesso ordine di grandezza della velocità relativa $l du/dy$ (l è la cosiddetta «lunghezza di mescolamento») segue dalla (2)

$$(3) \quad \frac{\tau}{\rho} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2$$

Lo sviluppo più semplice della (3) si ottiene assumendo per la lunghezza di mescolamento l'espressione $l = Ky$ (con $K + \text{cost}$), che le esperienze giustificano in prossimità della parete. In queste condizioni, indicato con τ_0 il valore (costante) della tensione tangenziale al contorno, la (3) diventa

$$(4) \quad \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = Ky \left| \frac{du}{dy} \right|$$

Poniamo come di consueto $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*$ (velocità di

più importante sotto il profilo tecnico, ci sembra che si potrà considerare superata la teoria della lunghezza di mescolamento soltanto quando sarà dimostrato che nuove teorie sono meglio confermate dall'esperienza. È invece significativo che lo stesso Laufer, nella memoria citata, riconosca che i suoi risultati sperimentali sulle misure delle velocità medie locali sono ben interpretabili con una legge di distribuzione logaritmica.

Ciò non esclude che il significato fisico di una «lunghezza», definita in sostanza dall'analisi dimensionale, sia per lo meno discutibile. Ma noi pensiamo che oggi si possa astrarre da qualunque particolare significato fisico della lunghezza di mescolamento e considerare piuttosto le teorie di Prandtl e Kármán come schemi, fondati sulle osservazioni sperimentali, che, senza entrare nel meccanismo delle fluttuazioni di velocità legate alla turbolenza, ne interpretano gli effetti sulla distribuzione delle componenti medie di trasporto e la loro relazione con gli sforzi di scorrimento al contorno.

[Mi pare che in una posizione perfettamente analoga si presenti lo studio della termodinamica. Esso può essere riguardato come uno speciale ramo della meccanica: «la meccanica di un insieme così numeroso di particelle (atomi e molecole), che la descrizione dettagliata dello stato e del moto perde importanza e occorre considerare solamente le proprietà medie dell'insieme» — sono parole di FERMI («Termodinamica», pag. 4, Ed. Boringhieri 1958). Più avanti, parlando della termodinamica pura, lo stesso A. afferma: «... i principi fondamentali sono assunti come postulati fondati sull'esperienza, e si traggono conclusioni da essi senza entrare nel meccanismo cinetico dei fenomeni. Questo modo di procedere ha il vantaggio di essere largamente indipendente dalle ipotesi semplificatrici che vengono spesso introdotte quando si fanno considerazioni di meccanica statistica».

attrito) ed integriamo la (4) fra y ed $r_0 =$ raggio del tubo. Si ha

$$(5) \quad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{K} \ln \frac{y}{r_0}$$

La (5) rappresenta la legge logaritmica (Prandtl-Kármán) di distribuzione della velocità in un condotto di sezione circolare. Un'ovvia obiezione, nata già in sede teorica, riguarda la validità della (5) sull'asse del tubo: infatti ivi risulta $du/dy \neq 0$ mentre in effetti il profilo della velocità dovrebbe presentare un massimo. Interpretazioni più recenti tendono a sostituire alla legge logaritmica, in vicinanza dell'asse del condotto, una legge di distribuzione di velocità del tipo parabolico. Ritorniamo su questo argomento dopo il confronto con i risultati sperimentali.

Ipotesi meno semplici di quelle qui richiamate (v. Kármán, Taylor, ecc. ...) portano in questo campo ad espressioni che non differiscono in sostanza dalla legge logaritmica (5) o, diversamente, non trovano una migliore conferma sperimentale. Rimandiamo, per una esposizione di questi procedimenti, alle monografie e ai testi specializzati [2].

Tenendo conto delle condizioni alla parete, la (5) può assumere due diverse espressioni molto note.

Nel caso di *tubo liscio*, ammessa la costanza del prodotto $\frac{u_* \delta}{\nu}$ ($\delta =$ spessore del film laminare), si ottiene

$$(6) \quad \frac{u}{u_*} = a_1 + b \log \left(\frac{y u_*}{\nu} \right)$$

I valori delle costanti, determinati sperimentalmente da Nikuradse [3], sono $a_1 = 5,5$ e $b = \frac{2,30}{K} = 5,75$ (ossia $K = 0,40$)⁽²⁾.

Nel caso di *tubo scabro*, ritenendo la distanza minima dalla parete alla quale inizia la distribuzione logaritmica della velocità proporzionale all'altezza ε delle scabrezze, si ottiene l'espressione

$$(7) \quad \frac{u}{u_*} = a_r + b \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right)$$

dove $b = \frac{2,30}{K} = 5,75$ è lo stesso coefficiente della (6)

(2) Nella situazione di pareti lisce *ondulate*, si ritiene ancora valida una relazione del tipo (6), però con valori di a_1 sempre maggiori di 5,5 e variabili da caso a caso.

mentre a_r non ha in generale il carattere di una costante. Esso diventa tale solo oltre certi valori del numero di Reynolds, tanto più elevati quanto minore è la scabrezza relativa; precisamente oltre certi limiti del numero $\varepsilon u_* / \nu$.

Nikuradse, sperimentando su tubi circolari con scabrezza artificiale omogenea [4], ha trovato $a_r = 8,48$ per $\log \frac{\varepsilon u_*}{\nu} > 1,83$ ($\frac{\varepsilon u_*}{\nu} > 70$, regime « assolutamente turbolento »).

Nelle stesse condizioni sperimentali, Nikuradse dimostrò anche che la distribuzione della velocità si riconduceva alla (6) per $\log \frac{\varepsilon u_*}{\nu} < 0,55$ ($\frac{\varepsilon u_*}{\nu} < 3,5$). Entro questo limite le condotte « omogeneamente » scabre si comportano quindi come lisce.

5. - Interpretato così il fenomeno della turbolenza di parete, si deducono subito dalla (6) e dalla (7) le leggi di resistenza, relative rispettivamente al caso di tubo liscio e di tubo scabro. Per quanto detto al n. 3 sul trascurabile apporto dello strato laminare, indicando con U la velocità media di tutta la sezione dev'essere

$$(8) \quad U = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u^2 \pi (r_0 - y) dy.$$

Se sostituiamo la (6) nella (8) segue

$$(9) \quad \frac{U}{u_*} = a_l - \frac{3}{2K} + b \log \left(\frac{r_0 u_*}{\nu} \right).$$

Ma, da note condizioni di equilibrio dinamico, è $\tau_0 = \gamma R i$ e quindi

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{R i g}.$$

Tenuto conto della (1) si ha

$$(10) \quad \frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{R i g}} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$$

e la (9) si trasforma nella relazione

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(a_l - \frac{3}{2K} - b \log 4 \sqrt{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (N \sqrt{\lambda})$$

dove si è indicato con $N = \frac{2 r_0 U}{\nu} = \frac{4 R U}{\nu}$ il n. di Reynolds.

Più semplicemente la (11) si può scrivere

$$(12) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_l + B \log (N \sqrt{\lambda})$$

che rappresenta la legge di resistenza nel caso di *tubo liscio*.

Sulla base dei precedenti valori di a_l e di b si trova: $A_l = -0,91$ e $B = 2,03$. L'interpretazione diretta dei valori sperimentali di λ in funzione di N ha condotto Nikuradse all'espressione

$$(12') \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8 + 2,0 \log (N \sqrt{\lambda})$$

i cui coefficienti sono in soddisfacente accordo con quelli prima calcolati.

Analogamente, se sostituiamo nella (8) l'espressione (7) che rappresenta la legge di distribuzione della velocità nel regime di tubo scabro, si ottiene

$$(13) \quad \frac{U}{u_*} = a_r - \frac{3}{2K} + b \log \left(\frac{r_0}{\varepsilon} \right).$$

Di qui, con le stesse trasformazioni precedenti, deriva:

$$(14) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(a_r - \frac{3}{2K} - b \log 2 \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log \left(\frac{2 r_0}{\varepsilon} \right)$$

ossia

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_r + B \log \left(\frac{d}{\varepsilon} \right) \quad (d = 2 r_0 = 4 R)$$

che rappresenta la legge di resistenza nel caso di *tubo scabro*. I valori di A_r e di B calcolati nel regime assolutamente turbolento partendo dai valori sperimentali di a_r e b sono: $A_r = 1,07$ e $B = 2,03$. Portando in un diagramma $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log \frac{r_0}{\varepsilon} \right)$ in funzione di $\log u_* \varepsilon / \nu$, Nikuradse ha trovato il valore costante 1,74 per $\log \frac{u_* \varepsilon}{\nu} >$

$> 1,83$; da cui $A_r = 1,74 - 2,0 \log 2 = 1,14$. La (15), con i coefficienti sperimentali in buon accordo con quelli

(*) Assumiamo questa forma della legge di resistenza anziché quella originale di Nikuradse con r_0/ε , perchè $\varepsilon/d (= \varepsilon/4 R)$ è il parametro generalmente impiegato per definire la scabrezza relativa delle condotte.

calcolati partendo dalla (7), si scrive quindi

$$(15') \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 + 2,0 \log \left(\frac{d}{\varepsilon} \right)$$

nel regime *assolutamente turbolento di tubo scabro*.

VERIFICHE SPERIMENTALI DELLE LEGGI DEL MOTO NEI TUBI CIRCOLARI.

6. — La soluzione dei problemi di moto uniforme nei tubi, richiamata nei nn. precedenti, non sembra lasciare dubbi sulla validità delle ipotesi poste a base del procedimento.

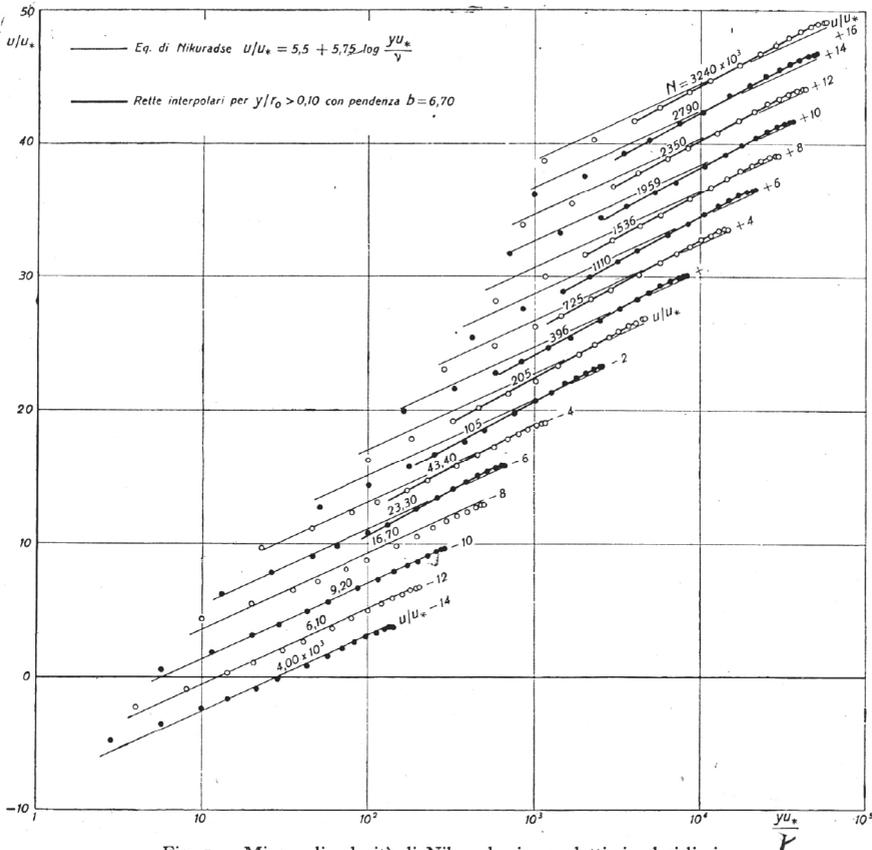
E per quanto riguarda le leggi di resistenza (12) e (15) la conferma sperimentale è già rappresentata dalle (12') e (15'). La prima interpola con buona approssimazione non soltanto i risultati sperimentali di Nikuradse ma anche quelli di Stanton e Pannel, Ombeck, Nusset, Jakob ed Erk, Schiller e Hermann. Si veda in proposito il confronto eseguito dal Nikuradse stesso nella fig. 35 della memoria [3]. La (15') risulta ben verificata, come si è

detto, nelle condizioni sperimentali di Nikuradse (tubi con scabrezza artificiale di sabbia), per $\log u_* \varepsilon / \nu > 1,83$. Le figg. 9 e 11 della memoria [4], che mettono in evidenza quest'ultimo confronto, sono notissime e riportate ormai in tutti i testi di idraulica.

Quello che invece non soltanto le più recenti ricerche (come ad esempio quelle americane di Deissler [12]) ma anche le stesse esperienze di Nikuradse non provano che in forma approssimata sono le leggi logaritmiche di distribuzione della velocità (6) e (7) e in particolare il valore attribuito al coefficiente b . Effettivamente nella stessa memoria [3] sui tubi lisci di Nikuradse è detto che i risultati di una singola serie di misure di velocità, in condizioni fissate di moto, si discostano dalla distribuzione teorica. È soltanto l'insieme delle misure eseguite su diversi tubi, con i nn. di Reynolds crescenti da 4×10^3 a $3,24 \times 10^6$, che si addensa nell'intorno della (6) con i predetti valori dei coefficienti: $a_1 = 5,5$ e $b = 5,75$. Basti, a conferma, la pure notissima fig. 4 della memoria [3]

dove i valori di u/u_* sono portati in funzione di $\log \frac{y u_*}{\nu}$.

In questi diagrammi semi-logaritmici anche i singoli profili delle velocità dovrebbero essere rappresentati dalla retta di equazione (6). Nella fig. 1 abbiamo rappresentato le misure di velocità di Nikuradse nei tubi lisci, separando



immediante una traslazione parallela all'asse delle ordinate i diversi profili a seconda del relativo n. di Reynolds (4).

Nella fig. 2 sono riportate le misure di velocità di Nikuradse nei tubi scabri rilevate, per ogni valore di scabrezza, con i più grandi nn. di Reynolds. Qui, assumendo in ascissa i valori di $\log y/\epsilon$, i profili delle velocità dovrebbero essere rappresentati dalla retta di equazione

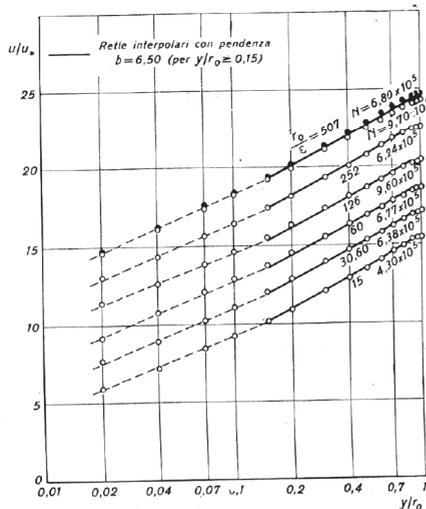


Fig. 2. - Misure di velocità di Nikuradse in condotti circolari scabri.

(7). Per separare i diversi profili abbiamo riportato nella fig. 2 in ascisse i valori $\log y/r_0$, anziché $\log y/\epsilon$. Con ciò abbiamo traslato i profili delle velocità parallelamente all'asse delle ascisse del valore $\log \epsilon/r_0$, costante in ogni serie di misure.

I profili sperimentali delle velocità in funzione della distanza dalla parete (in diagrammi semilogaritmici) mostrano, sia nei tubi lisci che nei tubi scabri, un tipico andamento a forma di S, particolarmente evidente per $N \geq 10^5$. Tale andamento, come vedremo in seguito, è confermato anche dalle misure di altri sperimentatori sia in condotti in pressione di sezione diversa dalla circolare, sia in correnti a pelo libero. Caratteristiche generali dei profili interpolari delle misure di velocità nei diagrammi

$$\frac{u}{u_*} = f(\log y) \text{ sono:}$$

1) Un primo tratto quasi rettilineo con pendenza $< 5,75$, la cui lunghezza si estende dal limite della zona di transizione fino a circa 0,15 della distanza fra parete e asse del tubo (cioè per $y/r_0 < 0,15$).

2) Un secondo tratto, pure rettilineo, con pendenza variabile fra 6,5 e 7,0. Esso va da $y/r_0 \leq 0,15$ fino a circa $y/r_0 \leq 0,85$ ed occupa quindi la maggior parte della sezione.

3) Un ultimo tratto, di forma parabolica, con la concavità rivolta verso il basso, lungo il quale, a partire da $y/r_0 \leq 0,85$, la curva sperimentale diminuisce rapidamente di pendenza, fino ad assumere tangente orizzontale in corrispondenza dell'asse del tubo.

Si osservi a maggior chiarimento la fig. 3 dove è particolarizzato uno dei profili della fig. 1, quello relativo al n. di Reynolds $N = 1,05 \times 10^5$. L'andamento de-

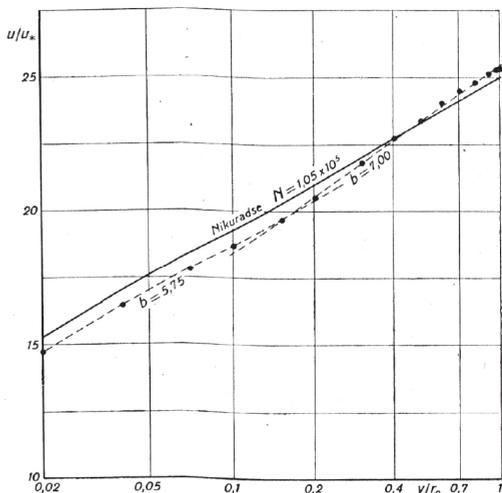


Fig. 3. - Particolare della fig. 1: rilievo sperimentale delle velocità con $N = 1,05 \times 10^5$ (Nikuradse).

scritto della curva interpolare risulta ben evidente. La

retta $\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \log \frac{y u_*}{\nu}$ interseca, come si può notare, la curva sperimentale in modo arbitrario, pur mantenendo da quest'ultima scarti massimi limitati.

Ma non è tanto l'entità di questi scostamenti che abbiamo voluto mettere in evidenza, quanto alcune importanti conseguenze che derivano subito dal confronto precedente. Prima di tutto la necessità di giustificare l'assunzione delle leggi logaritmiche di distribuzione della velocità (6) e (7) — o meglio il *valore del coefficiente* $b = 5,75$ — con ragioni più valide di quelle di una posizione utile per ricavare, con procedimento deduttivo, le leggi di resistenza verificate sperimentalmente; in secondo luogo l'osservazione che, in quei casi dove non sono disponibili altrettante misure sperimentali, e soprattutto dove lo sono solo a partire da una distanza non piccolissima dalla parete, l'andamento dei profili di velocità, nel consueto diagramma semilogaritmico, deve risultare molto prossimo a quello di una retta con pendenza notevolmente maggiore di 5,75. Si tratta in sostanza del ramo più importante della curva ad S e, come si è visto, la sua pendenza può raggiungere valori oltre 6,5 e fino a 7,0.

(4) I valori di $y u_* / \nu$ sono stati calcolati partendo dai valori originali delle misure di Nikuradse riportati nella tab. 2 della memoria [3]. I valori $\eta = y u_* / \nu$ calcolati dall'A. e riportati nella tab. 3 della stessa pubblicazione sono stati tutti maggiorati del numero 7. Ciò risulta piuttosto strano perchè tale aggiunta non provoca nel diagramma semilogaritmico una traslazione delle curve ma una vera e propria deformazione, sensibile nel campo dei piccoli valori di $y u_* / \nu$ (fino a circa $y u_* / \nu = 100$).

Su queste osservazioni torneremo più avanti, dopo aver richiamato anche i risultati acquisiti sul moto piano bidimensionale (sezione rettangolare larghissima).

RICHIAMI DELLE INTERPRETAZIONI TEORICHE DEL MOTO PIANO TURBOLENTO.

7. — Il moto uniforme turbolento fra due piani paralleli con direzione di trasporto unica presenta, dal punto di vista concettuale, sostanziali analogie con il moto entro condotte di sezione circolare. Infatti, in entrambi i casi, per ovvie ragioni di simmetria, le tensioni tangenziali devono distribuirsi uniformemente su superficie (in questo caso piani) a distanza costante dalle pareti, e le normali al contorno sono ortogonali in ogni punto alle isotachie. Ciò giustifica, nel caso della sezione rettangolare larghissima, quella stessa impostazione teorica, derivata da Prandtl, che abbiamo richiamato a proposito delle condotte circolari. Anzi è proprio in questo campo — del moto piano bidimensionale — ch'essa è stata suggerita, e di qui integralmente riportata al moto entro tubi di sezione circolare (ritenendo quindi trascurabile l'effetto della curvatura della parete).

Detta y_0 la semidistanza fra le pareti parallele, la legge di distribuzione della velocità (5) diventa evidentemente

$$(16) \quad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{K} \ln \frac{y}{y_0}.$$

In particolare segue:

$$(17) \quad \boxed{\frac{u}{u_*} = a_l + b \log \left(\frac{y u_*}{\nu} \right)}$$

nel caso di *pareti lisce*, e

$$(18) \quad \boxed{\frac{u}{u_*} = a_r + b \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right)}$$

nel caso di *pareti scabre*.

Tale distribuzione logaritmica di velocità è stata oggetto di confronti sperimentali, sia per una verifica generica, sia per la determinazione effettiva dei coefficienti. Si ritiene normalmente che questi ultimi abbiano gli stessi valori calcolati da Nikuradse nei tubi circolari. Interessante è soprattutto il valore del coefficiente b . Volendo rivederne la determinazione attraverso un confronto con i più noti risultati sperimentali conviene tornare all'espressione generale (16), che riscriviamo nella forma:

$$(19) \quad \boxed{\frac{u}{u_*} = c + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right)}$$

Il coefficiente c ha lo stesso valore lungo qualunque normale al contorno nelle stesse condizioni sperimentali, cioè a parità di $\frac{\varepsilon u_*}{\nu}$. In particolare, in condotti *lisce*, ed anche in condotti omogeneamente scabri finché $\frac{\varepsilon u_*}{\nu} < 3,5$, dovrebbe essere

$$(20) \quad c = a_l + b \log \left(\frac{y_0 u_*}{\nu} \right)$$

e in condotti *scabri*, quando il moto è assolutamente turbolento ($\frac{\varepsilon u_*}{\nu} > 70$), dovrebbe essere

$$(21) \quad c = a_r + b \log \left(\frac{y_0}{\varepsilon} \right).$$

Per quanto riguarda la determinazione di b , la (19) può essere confrontata con qualunque serie di misure sperimentali, indipendentemente dalle condizioni di scabrezza delle pareti, perchè quest'ultime influiscono soltanto sul valore del coefficiente c .

Prima però di procedere al confronto con le esperienze, rivediamo anche qui lo sviluppo delle leggi di resistenza.

8. — Analogamente a quanto si è fatto al n. 5, scriviamo l'espressione della velocità media U . Nel caso di sezione rettangolare larghissima si ha

$$(22) \quad U = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} u \, dy.$$

Mediante sostituzione della (17) nella precedente segue

$$(23) \quad \frac{U}{u_*} = a_l - \frac{1}{K} + b \log \left(\frac{y_0 u_*}{\nu} \right)$$

da cui, con le solite trasformazioni,

$$(24) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(a_l - \frac{1}{K} - b \log 8 \sqrt{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (N \sqrt{\lambda})$$

ossia

$$(25) \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_l' + B \log (N \sqrt{\lambda})} \quad \left(N = \frac{2 y_0 U}{\nu} = \frac{4 R U}{\nu} \right)$$

che rappresenta la legge di resistenza del moto piano fra *pareti lisce*. Come si nota il coefficiente A_l differisce da quello A_l' trovato nei tubi circolari di $\frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2K} \right)$ uguale a 0,17 con $b = 5,75$ ($K = 0,40$). Questa diffe-

renza rappresenta, nel caso considerato, l'influenza della forma della sezione trasversale sulla legge di resistenza.

Sostituendo invece nella (22) la (18) si ottengono successivamente le relazioni:

$$(26) \quad \frac{U}{u_*} = a_r - \frac{1}{K} + b \log \left(\frac{y_0}{\varepsilon} \right)$$

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(a_r - \frac{1}{K} - b \log 4 \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right)$$

e quindi

$$(28) \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_r' + B \log \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right)} \quad (R = y_0)$$

La (28) rappresenta la legge di resistenza del moto piano assolutamente turbolento fra *pareti scabre* e ancora $A_r - A_r' = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2K} \right)$ rappresenta l'influenza della forma della sezione trasversale (5).

VERIFICHE SPERIMENTALI DELLA DISTRIBUZIONE DI VELOCITÀ ENTRO CONDOTTI DI SEZIONE RETTANGOLARE LARGHISSIMA.

9. - Eseguiamo ora il confronto sperimentale della legge di distribuzione logaritmica della velocità nel moto piano bidimensionale.

Diversi AA. hanno eseguito misure di velocità in sezioni rettangolari con rapporto b_0/y_0 abbastanza grande ($b_0 =$ lato maggiore della sezione; $y_0 = a_0/2 =$ semilato minore delle sezioni chiuse, oppure profondità delle sezioni aperte). Prenderemo in considerazione le ricerche sperimentali di: Bazin (1865), Dönch (1926), Nikuradse (1926-1929), Schlichting (1936), Laufer (1950), Schlinger e Sage (1952).

Bazin [5].

Per una indicazione attendibile si sono scelte, fra le numerose serie di esperienze di Bazin, quelle che, oltre ad un elevato valore del rapporto b_0/y_0 , presentavano almeno quattro misure sulla normale al fondo in asse del condotto. Sono tutte misure eseguite in *canali a pelo libero* e precisamente quelle delle serie:

- n. 55 — esp. n. 1 — Canale di cemento
 $b_0 = 181$ cm, $y_0 = 26,9$ cm,
 $\frac{b_0}{y_0} = 6,7$ ($i_f = 0,0049$);

(5) Si noti che l'influenza della forma della sezione nei casi considerati non è strettamente legata alla legge assunta per la distribuzione di velocità. Partendo da una legge di distribuzione parabolica, che deriva dall'ipotesi di costanza della lunghezza di mescolamento, Gherardelli [10] ha potuto dimostrare un'analoga variazione del coefficiente di resistenza fra sezione circolare e sezione rettangolare larghissima.

- n. 58 — esp. n. 3 — Canale in tavole
 $b_0 = 199$ cm, $y_0 = 33,2$ cm,
 $\frac{b_0}{y_0} = 6,0$ ($i_f = 0,0015$);
- n. 59 — esp. n. 4 — Canale in tavole
 $b_0 = 200$ cm, $y_0 = 26,5$ cm,
 $\frac{b_0}{y_0} = 7,5$ ($i_f = 0,0059$).

Nella fig. 4, in un diagramma avente in ordinate $\frac{u}{u_*} = \frac{u}{\sqrt{Rig}}$ ed in ascisse $\log y/y_0$, abbiamo riportato i valori rilevati lungo l'asse di ogni canale e lungo le due ordinate verticali più vicine all'asse medesimo. I punti

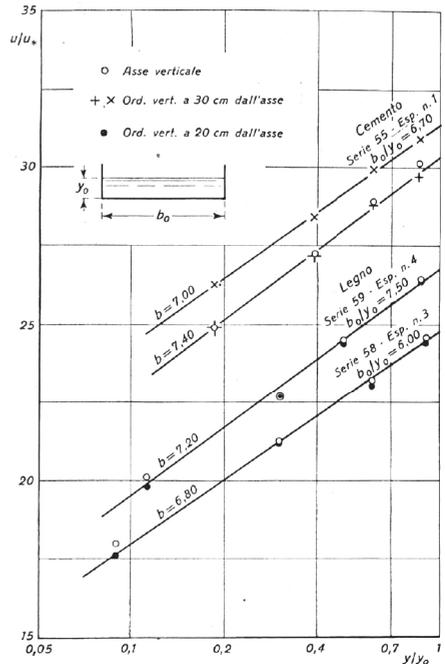


Fig. 4. - Misure di velocità di Bazin in canali rettangolari larghi.

sono abbastanza ben allineati su rette di equazione (19), salvo al più il primo. I valori del coefficiente angolare delle rette interpolari, cioè i valori del coefficiente b della (19), oscillano entro i seguenti limiti:

— Canali in tavole:

- serie 58: $\frac{b_0}{y_0} = 6,0$ $N = 2,7 \times 10^5$ $b = 6,5 \div 7,0$
 serie 59: $\frac{b_0}{y_0} = 7,5$ $N = 4,4 \times 10^5$ $b = 7,0 \div 7,5$

— Canale in cemento:

serie 55: $\frac{b_0}{y_0} = 6,7 \quad N = 4,2 \times 10^5 \quad b = 7,0 \div 7,4.$

Dönch [6].

Le misure di velocità sono state eseguite in un condotto in pressione di sezione rettangolare $15,0 \times 65,0 \text{ cm}^2$, con pareti lisce, avente l'asse minore orizzontale.

I risultati di questa ricerca sperimentale, particolarmente accurata e precisa, sono riportati nel diagramma semilogaritmico

$\frac{u}{u_*} = f\left(\log \frac{y}{y_0}\right)$ della fig. 5. Essi sono relativi all'unico n. di Reynolds $N = 200\ 000$.

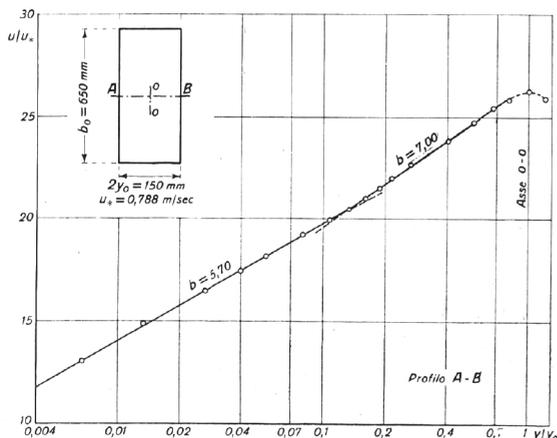


Fig. 5. - Misure di velocità di Dönch in asse di un tubo rettangolare liscio.

I valori dei coefficienti angolari della spezzata che intercala i risultati sperimentali sono:

$$\frac{b_0}{y_0} = 8,5 \quad N = 200\ 000:$$

per $0,007 < \frac{y}{y_0} < 0,13 \quad b = 5,7$

per $0,13 < \frac{y}{y_0} < 0,80 \quad b = 7,0.$

È evidente, come nei profili di Nikuradse delle figg. 1, 2, 3, la forma ad S della curva sperimentale di distribuzione delle velocità.

Nikuradse [7, 8].

Una prima serie di esperienze è stata eseguita dall'A. nel 1926 su un condotto in pressione di sezione $0,806 \times 2,808 \text{ cm}^2$, con pareti lisce. Il rapporto $b_0/y_0 = 7$ può ritenersi sufficientemente grande.

Il profilo della velocità lungo l'asse minore è rappresentato, nel solito diagramma semilogaritmico, nella fig. 6. Il valore della pendenza della retta interpolare è, sorprendentemente, intorno a $b = 8,60$.

La giustificazione di un valore del coefficiente b diverso da quelli consueti, si deve probabilmente ricer-

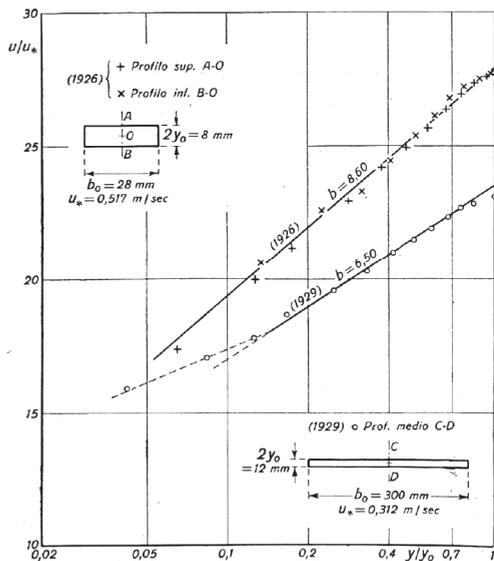


Fig. 6. - Misure di velocità di Nikuradse in asse di un tubo rettangolare largo (1926) e di un tubo rettangolare larghissimo (1929), entrambi lisce.

care, più che in imperfette misure locali di velocità, in una errata valutazione della velocità di attrito u_* (8).

Una seconda serie di esperienze è stata eseguita dallo stesso A. nel 1929. Si tratta di una ricerca, come quella di Dönch, su canali convergenti e divergenti. Il condotto in pressione di sezione rettangolare costante, al quale ci riferiamo, aveva dimensioni $1,20 \times 30,0 \text{ cm}^2$. L'elevato rapporto $b_0/y_0 = 50$ assicura senz'altro il comportamento di moto piano. Il n. di Reynolds sperimentale era però piuttosto basso: $N = 67\ 000$.

I risultati sono riportati nel diagramma semilogaritmico della stessa fig. 6. Si ha:

$$\frac{b_0}{y_0} = 50 \quad N = 67\ 000$$

per $\frac{y}{y_0} > 0,13 \quad b = 6,5.$

(8) Questa pubblicazione di Nikuradse contiene diverse imperfezioni. Fra l'altro il valore $u_* = 0,517 \text{ m/s}$ (in accordo con quello riportato da Ghetti [11] in una rielaborazione delle esperienze di Nikuradse) è stato da noi calcolato modificando il dato $h = 6,4 \text{ cm}$, che rappresenta in colonna di mercurio il dislivello piezometrico fra le sezioni estreme del tronco di misura, in $h = 6,4 \text{ cm}$. Altrimenti ne sarebbe derivata una pendenza troppo piccola in confronto con l'elevato valore della velocità media.

A questo proposito si osservi che anche le misure di velocità di Bazin sono state eseguite in non perfette condizioni di moto uniforme. Infatti, a parità di pendenza del fondo e di portata, i valori della velocità media rilevati durante le prove tachimetriche differiscono un poco da quelli misurati, negli stessi canali, nel corso delle esperienze eseguite per dedurre la legge di resistenza. (Cfr. le serie n. 55-58-59 con le corrispondenti n. 2-9-10).

Le dimensioni del condotto ($y_0 = 6$ mm) erano troppo piccole per consentire delle misure di velocità attendibili per y/y_0 fra 0,05 e 0,10.

Schlichting [9].

L'A. ha eseguito le misure di velocità lungo l'asse verticale di una sezione rettangolare di $4,0 \times 17,0$ cm² ($b_0/y_0 = 8,5$). I risultati (quelli riportati in maniera completa) si riferiscono ad un moto piano fra pareti di diversa natura: una liscia e l'altra fortemente scabra, con rugosità creata artificialmente mediante ostacoli di varia forma.

Pur tenendo conto che i valori assunti per $u_{*r} = \sqrt{\frac{\tau_r}{\rho}}$ (τ_r = tensione tangenziale sulla parete rugosa) sono le medie fra i valori calcolati con due procedimenti necessariamente approssimati, i profili sperimentali di distribuzione della velocità, riportati dall'A. in diagrammi $\frac{u}{u_{*r}} = f\left(\log \frac{y}{\varepsilon}\right)$ nelle figg. 10, 11, 12, 13, 14 e 15 da pag. 19 a 22 della nota citata, mostrano un andamento quasi rettilineo con pendenza costante $b = 6,15$. Gli scostamenti dei profili sperimentali dalle rette di compenso sono perfettamente analoghi a quelli osservati nelle esperienze di Nikuradse sui tubi circolari.

Laufer [13].

Recentemente, dal 1950 al 1953, misure accurate sulla distribuzione della velocità nel moto fra piani paralleli sono state eseguite da diversi AA. negli Stati Uniti. Fra queste abbiamo potuto consultare le esperienze eseguite da Laufer e da Schlinger e Sage sul moto di una corrente d'aria in tubi lisci.

Le esperienze di Laufer sono state eseguite su condotti di sezione $2,54$ e $12,7 \times 152,5$ cm². I valori originali dell'A. sono rappresentati nella fig. 7. La pendenza della retta interpolare delle quattro serie di misure è,

Schlinger e Sage [14].

Il condotto liscio aveva sezione $1,77 \times 30,5$ cm² ($b_0/y_0 = 35$).

Il diagramma della fig. 8, ricavato integralmente da quello degli AA., mette in evidenza i risultati sperimentali

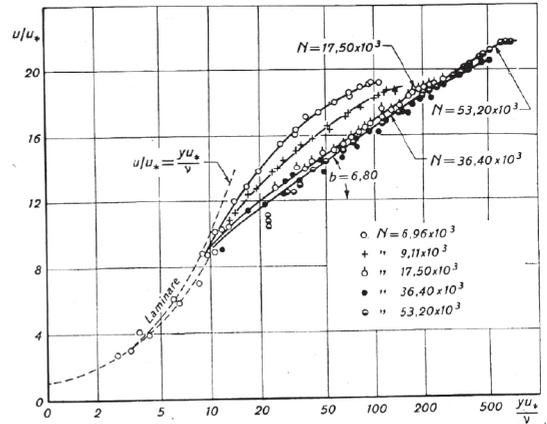


Fig. 8. - Misure di velocità di Schlinger e Sage su correnti d'aria in moto fra piani paralleli lisci.

tali e le relative curve interpolari. Quest'ultime si discostano un poco dalla legge di distribuzione della velocità di Nikuradse e trovano piuttosto, per i più alti valori di yu_*/v , un buon accordo con i risultati sperimentali di Deissler [12] su tubi circolari. Il max n. di Reynolds raggiunto è stato soltanto $5,32 \times 10^4$. Peraltro per $3 \cdot 10^4 < N \leq 5 \times 10^4$ non si notano più differenze fra le curve di distribuzione della velocità, la cui pendenza resta costantemente $b = 6,8$.

UNA NUOVA ESPRESSIONE DELLA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ NEI CONDOTTI CIRCOLARI E RETTANGOLARI LARGHISSIMI.

10. - Abbiamo già visto al n. 6 l'andamento sperimentale dei profili di velocità nei tubi di sezione circolare e abbiamo messo in evidenza gli scostamenti dalla legge logaritmica di Prandtl-Nikuradse. Il confronto del n. precedente suggerisce, nel caso di moto piano bidimensionale, gli stessi rilievi. In particolare esso conferma che la pendenza delle rette interpolari dei profili di velocità, nei diagrammi $u/u_* = f(\log y)$, è sempre superiore a 5,75 ed ha valori intorno a $6,5 \div 7,0$.

A questo punto è naturale porci una domanda: l'interpretazione di Nikuradse della distribuzione di velocità è giustificata soltanto dall'andamento medio di tutto l'insieme delle misure sperimentali eseguite in situazioni differenti (cioè con diversi numeri di Reynolds nel caso dei tubi lisci, con diverse scabrezze nel caso dei tubi scabri), in definitiva della buona verifica sperimentale delle leggi di resistenza che ne derivano, oppure essa rappresenta effettivamente un'approssimazione della distribuzione di velocità di ogni singola serie di misure, a parità di N e

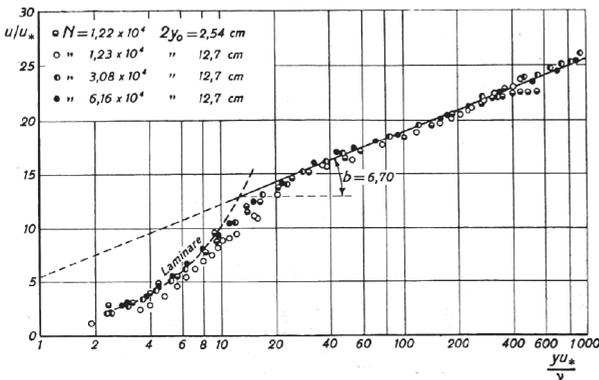


Fig. 7. - Misure di velocità di Laufer su correnti d'aria in moto fra piani paralleli lisci.

con ottima approssimazione $b = 6,7$. Da notare, almeno per i profili relativi ai più alti nn. di Reynolds, il tipico incurvamento in vicinanza dell'asse del condotto.

di ε/y_0 , da cui deriva intrinsecamente il valore 5,75 del coefficiente b ?

Ritengo che le considerazioni che seguono offrano una indicazione in quest'ultimo senso.

11. — Riprendiamo la teoria del trasporto delle quantità di moto ed esprimiamo la lunghezza di mescolamento con la relazione

$$(29) \quad \frac{l}{y_0} = k \frac{y}{y_0} e^{-\frac{y}{y_0}}$$

dove con il simbolo y_0 indichiamo sia il raggio nel caso della sezione circolare, sia la semidistanza fra le pareti nel caso del moto piano. La fig. 9 giustifica l'assunzione della (29). La curva che ne deriva, assumendo $k = 0,38$,

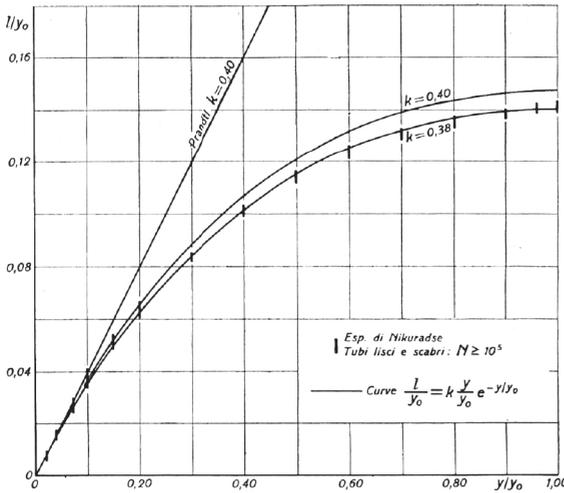


Fig. 9. — La lunghezza di mescolamento data dall'equazione (29) con $K = 0,38$ e con $K = 0,40$, a confronto con i rilievi sperimentali di Nikuradse su tubi circolari.

segue infatti fedelmente i valori sperimentali di Nikuradse [4]. La forma della (29) sembra attribuire alla lunghezza di mescolamento il carattere di un parametro probabilistico [10].

Tenuto conto che la pressione tangenziale in un punto, a distanza y dalla parete, varia linearmente con la distanza stessa, cioè $\tau = \tau_0 (1 - y/y_0)$, segue dalla (3)

$$(30) \quad \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho} \left(1 - \frac{y}{y_0}\right)} = k y e^{-\frac{y}{y_0}} \left| \frac{du}{dy} \right|$$

e, indicato come al solito $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ con u_* , si ha

$$(31) \quad \frac{du}{u_*} = \frac{1}{k} \frac{e^{\frac{y}{y_0}} \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}}}{y} dy$$

ossia

$$(32) \quad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{1}{k} \int_{y_0}^y \frac{e^{\frac{y}{y_0}} \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}}}{y} dy$$

Posto

$$(33) \quad \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_1^{\frac{y}{y_0}} \frac{e^{\frac{y}{y_0}} \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}}}{y} d\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

la (32) si scrive

$$(34) \quad \frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + b \log\left(\frac{y}{y_0}\right) + \frac{1}{K} \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

con $b = \frac{2,30}{K}$.

La (34) mette già in evidenza un sostanziale miglioramento rispetto alla normale legge logaritmica (19): essa infatti soddisfa alla condizione, imposta da ragioni di simmetria, che la velocità presenti un massimo effettivo in corrispondenza di $y = y_0$. Ciò è evidente dalla (31), dove du/dy si annulla per $y = y_0$.

I valori della funzione $\Phi(y/y_0)$ possono essere calcolati una volta per sempre [15]. Nella tab. A sono riportati alcuni di questi valori calcolati numericamente passo a passo.

TABELLA A.

$\frac{y}{y_0}$	$\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$	$\frac{\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)}{K}$ (*)	$\frac{y}{y_0}$	$\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$	$\frac{\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)}{K}$ (*)
0	—0,2166	—0,541	0,40	—0,0340	—0,085
0,01	—0,2116	—0,529	0,50	+ 0,0021	+ 0,005
0,02	—0,2066	—0,514	0,60	+ 0,0316	+ 0,079
0,04	—0,1967	—0,492	0,70	+ 0,0520	+ 0,130
0,07	—0,1819	—0,455	0,80	+ 0,0595	+ 0,149
0,10	—0,1673	—0,418	0,90	+ 0,0480	+ 0,120
0,15	—0,1433	—0,358	0,95	+ 0,0311	+ 0,078
0,20	—0,1198	—0,299	1,00	0	0
0,30	—0,0751	—0,188			

(*) Si è assunto $K = 0,40$.

L'equazione (34), con un procedimento perfettamente analogo a quello applicato alla (5), si riconduce alle equazioni:

$$(35) \quad \frac{u}{u_*} = a_i' + b \log\left(\frac{y u_*}{v}\right) + \frac{1}{K} \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

nei «tubi lisci», e

$$(36) \quad \frac{u}{u_*} = a_r' + b \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{K} \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

nei «tubi scabri».

12. - Il valore $b = \frac{2,30}{K}$, assunto $K = 0,38$ nella (29), dovrebbe essere $b = 6,0$. Ne deriverebbe, nelle leggi di resistenza, una piccola variazione del coefficiente $B = \frac{b}{\sqrt{8}}$

da 2,0 a 2,1. I valori sperimentali di λ , sia nel regime assolutamente turbolento di tubo scabro, sia soprattutto nel regime liscio, non escluderebbero questa possibilità (dato il margine di indeterminazione insito nelle approssimazioni grafiche); ma la consuetudine ormai invalsa in campo tecnico di considerare $B = 2,0$ mi fa ritenere non opportuna questa modifica.

Assumendo allora $b = 5,75$, in accordo con Nikuradse, la fig. 10 mette in evidenza, a titolo di esempio, la buona concordanza della (35) con il profilo di velocità ricavato

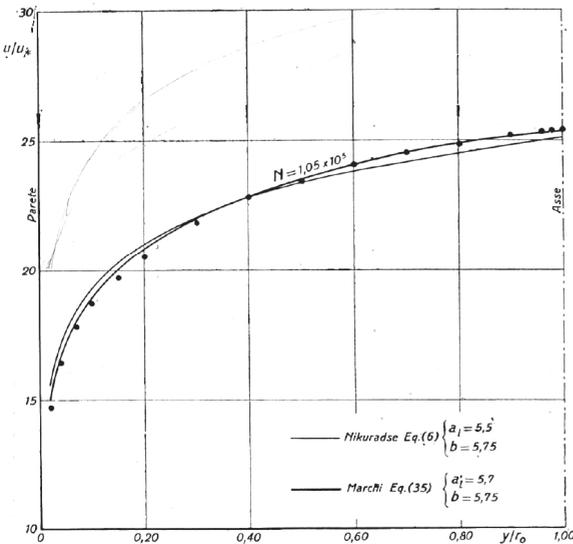


Fig. 10. - Distribuzione della velocità in un tubo circolare liscio secondo l'equazione (35), a confronto con i risultati sperimentali di Nikuradse e con la distribuzione puramente logaritmica (equaz. (6)).

sperimentalmente dallo stesso A. in un tubo liscio con $N = 1,05 \times 10^5$. A maggior conferma, sia della (35) che della (36), abbiamo portato nel diagramma semi-logaritmico della fig. 11 quattro profili sperimentali di Nikuradse. Essi sono stati scelti in corrispondenza del n. di Reynolds 10^5 e del massimo n. di Reynolds sperimentale, sia nel campo dei tubi lisci che in quello dei tubi scabri in regime assolutamente turbolento. Si potrebbe vedere che l'interpretazione dei profili sperimentali si mantiene altrettanto buona per tutti i nn. di Reynolds intermedi. Qualche scostamento si nota invece per $N < 10^5$, proba-

bilmente legato al fatto che lo schema di assoluta turbolenza, assunto alla base del procedimento teorico, non è del tutto corretto per $N < 10^5$ (cioè, per i tubi lisci, nel campo della legge di Blasius).

I valori delle costanti a_i' ed a_r' , dedotti sempre attraverso il confronto con le esperienze di Nikuradse nei

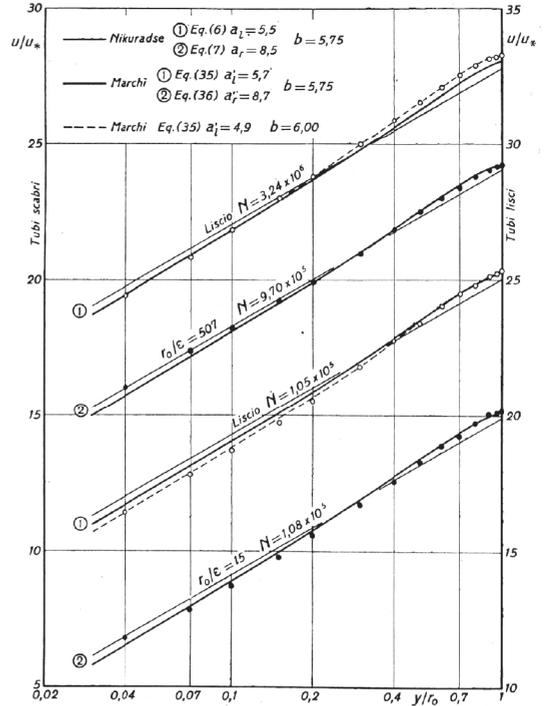


Fig. 11. - Confronto delle distribuzioni di velocità, previste nei tubi circolari lisci e scabri secondo le equazioni (35) e (36), con i rilievi sperimentali di Nikuradse e con le distribuzioni puramente logaritmiche (6) e (7).

tubi circolari, presentano delle piccole differenze rispetto ai valori precedenti: precisamente $a_i' = 5,7$, $a_r' = 8,7$.

Passiamo ora alla determinazione delle leggi di resistenza. Il contributo del fattore $\frac{1}{K} \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)$ — mediato sulla sezione — si riduce a un valore costante piccolo in confronto alle altre grandezze in gioco e compensato quasi esattamente dalla variazione di a_i' o di a_r' [15]. La dipendenza di λ da N e da ε/R resta quindi espressa nelle forme già viste (12) e (15) (oppure (25) e (28) con valori di B e delle costanti A_i ed A_r (oppure A_i' ed A_r') che possono ritenersi invariati rispetto a quelli detti in precedenza (7).

(7) Si ricordino, a proposito della determinazione dei coefficienti A_i ed A_r , le differenze già rilevate nelle condotte circolari fra i risultati ottenuti partendo dalle leggi di distribuzione della velocità ed i risultati ottenuti interpretando direttamente i valori sperimentali di λ .

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE.

13. — Da quanto precede possiamo trarre due importanti conclusioni:

I) La (34), e le leggi derivate (35) e (36), descrivono la distribuzione di velocità in soddisfacente accordo con i rilievi sperimentali quando si assuma per b il valore 5,75 (od anche un valore un po' più grande ma non oltre $b = 6,0$); in particolare esse sono ben confermate sia dalle esperienze di Nikuradse nei tubi circolari, sia da quelle di Dönch nei tubi rettangolari larghi. Sembra allora giustificato considerare l'equazione (5) di Prandtl-Nikuradse come un'evidente semplificazione della (34); semplificazione nella quale è rimasto invariato il valore del parametro b , essenziale ai fini degli sviluppi successivi. Ciò spiega inoltre perchè la (5) non possa rappresentare, se non in larga massima, la curva interpolare dei punti sperimentali di ogni singola serie di misure.

II) In secondo luogo, se l'obiettivo della ricerca è soltanto la determinazione delle leggi di resistenza (con un procedimento deduttivo a partire dalla distribuzione di velocità), l'assunzione della (5), o genericamente della

$$(19) \quad \frac{u}{u_*} = c + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

con $b = 5,75$, risulta giustificata.

Dobbiamo però sottolineare che, mentre così la deduzione teorica del coefficiente di attrito λ trova buone conferme sperimentali, i profili delle velocità adimensionali

$\frac{u}{u_*} = f(\log y)$ rivelano pendenze sensibilmente maggiori del valore del coefficiente b assunto nella (19), cioè intorno a $6,5 \div 7,0$ anzichè $5,75$ (o $6,0$)⁽⁸⁾.

Questa osservazione ci sembra indispensabile per affrontare, nella seconda parte, lo studio delle sezioni diverse dalla circolare o dalla rettangolare larghissima. Infatti è chiaro che non potremo attribuire all'influenza della forma un aumento della pendenza dei profili sperimentali di velocità — rispetto al valore 5,75 — se riscontreremo ch'esso è della stessa entità di quelli osservati nel moto entro tubi circolari e nel moto piano bidimensionale.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. PRANDTL: *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildete Turbulenz.* - « ZAMM », Bd. 5, 1925; anche: 2° Int. Kongress f. Techn. Mech., Zurigo, 1927 — *Turbulenz und ihre Entstehung.* - « J. Aeron. Res. Inst. », Tokio Imp. University, n. 65, 1930. — *Zur turbulenten Strömung in Rohren und längs Platten.* - « Erg. A. V. Göttingen », 4, 1932. — *Neue Ergebnisse der Turbulenzforschung.* - « Z. VDI », Bd. 77, n. 5, 1933, (con una vasta bibliografia).
 — TH. v. KÁRMÁN: *Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz.* - 3° Int. Kongress f. Techn. Mech., Stoccolma, 1930. — *Turbulence and Skin Friction.* - « J. of Aeron. Sciences », I, 1934.

[2] G. I. TAYLOR: *The Transport of Vorticity and Heat through Fluids in turbulent Motion.* - « Proc. Roy. Soc. A. », v. 135, 1932, pag. 685. — *Statistical Theory of Turbulence, part. 1-5.* - « Proc. Roy. Soc. A. », v. 151-156, 1935 e 1936. — *Flow in Pipes and between parallel Planes.* - « Proc. Roy. Soc. A. », v. 159, 1937, pag. 496.
 — TH. v. KÁRMÁN: *The Fundamentals of the statistical Theory of Turbulence.* - « J. Aeron. Soc. » v. 4, 1937, pag. 131.
 — H. GEBELEIN: *Turbulenz.* - Springer-Verlag, Berlino 1935.
 — C. D. MATTIOLI: *Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti.* - CEDAM, Padova, 1937.
 — A. KOLMOGOROFF: *The local Structure of Turbulence in incompressible viscous Fluid for very large Reynolds' Numbers.* - « Comp. rend. Acad. URSS », v. 30, n. 4, 1941.
 — W. HEINSENBERG: *Zur statistischen Theorie der Turbulenz.* - « Zeitschr. Phys. », Bd. 124, H. 7/12, 1948, pag. 628.
 — A. A. TOWNSEND: *The structur of turbulent shear flow.* - Cambridge U.P., 1956.
 — B. A. BAKHMETEFF: *The Mechanics of turbulent Flow.* - Princeton U.P. 1936.
 — S. GOLDSTEIN: *Modern Developments in Fluid Dynamics.* - Oxford U.P., 1938.
 — H. ROUSE: *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers.* - Mc Graw Hill, New York-London, 1938.
 — L. PRANDTL: *Strömungslehre.* - Braunschweig, 1942.
 — CORCORAN-OPFEL-SAGE: *Momentum Transfer in Fluids.* - Academic Press Inc., New York, 1956.
 — C. FERRARI: *Turbolenza di parete.* - Lezioni tenute a Varenna per il CIME dal 1-10 settembre 1957. Libr. Ed. Univ. Levrotto e Bella, Torino, pag. 171.
 — OSWATITISCH, SERRIN, HOWARTH, SCHLICHTING: *Handbuch der Physik.* - Bd. VIII/1, Strömungsmechanik I, Springer-Verlag, Berlino 1959.
 [3] J. NIKURADSE: *Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren.* - « VDI, Forschungsheft 356 », 1932.
 [4] J. NIKURADSE: *Strömungsgesetze in rauhen Rohren.* - « VDI, Forschungsheft 361 », 1933.
 [5] H. BAZIN: *Recherches Hydrauliques.* - « Mem. divers Savants » Sci. Math. et Phys., 19, Parigi 1865.
 [6] F. DÖNCH: *Divergente und Konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln.* - « VDI Forschungsarb. 282 », 1926.
 [7] J. NIKURADSE: *Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten und divergenten Kanälen.* - « VDI Forschungsarb. 281 », 1926.
 [8] J. NIKURADSE: *Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen.* - « VDI Forschungsarb. 289 », 1929.
 [9] H. SCHLICHTING: *Experimentelle Untersuchungen zum Rauheitsproblem.* - « Ingen. Archiv », Bd. 7, 1936, pag. 1.
 [10] L. GHERARDELLI: *Su di una teoria elementare del moto uniforme in regime turbolento nei tubi.* - « L'Acqua », n. 6, 1943.
 [11] A. GHETTI: *Distribuzione della velocità all'interno e sforzi di scorrimento al contorno nelle correnti a regime uniforme.* - « L'Energia Elettrica », n. 11-12, 1950.
 [12] R. G. DESSLER: *Analytical and experimental investigations of adiabatic turbulent flow in smooth tubes.* - « Nat. Advisory Comm. Aeronaut. », Tech. Note 2138, 1950.
 [13] J. LAUFER: *Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel.* - « Nat. Advisory Comm. Aeronaut. », Tech. Note 2123, 1953.
 [14] W. G. SCHLINGER, B. H. SAGE: *Velocity Distribution between parallel Plates.* - « Ind. Eng. Chem », v. 45, n. 12, 1953, pag. 2636.
 [15] E. MARCHI: *Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide.* - Nota I, presentata all'Accademia dei Lincei nella seduta del 19 novembre 1960.

RECAPITO DELL'AUTORE

PROF. ING. ENRICO MARCHI - Istituto di Idraulica, Università di Bologna, Viale Risorgimento 2.

(8) Il margine piuttosto largo di oscillazione di questi valori è dovuto, oltre che alle incertezze sperimentali e grafiche, alla notevole influenza, sulla pendenza della retta interpolare, del maggiore o minore numero di punti di misura a distanza dalla parete inferiore a $0,15 y_0$ (v. le osservazioni del n. 6).

Il moto uniforme delle correnti liquide
nei condotti chiusi e aperti
Parte II: Sezioni di forma qualunque
L'Energia Elettrica, 1961

ENRICO MARCHI

Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti

Sommario

Lo studio del moto uniforme turbolento entro condotti viene esteso in questa seconda parte a condotti con sezione di forma qualunque.

La legge di distribuzione della velocità viene dedotta partendo dall'ipotesi che la funzione di correlazione $\overline{u'v'}$ dipenda soltanto dalla distanza y dalla parete. La « variazione » di u in funzione di y risulta la « stessa » lungo qualunque normale al contorno, a partire però da valori della velocità (in vicinanza della parete ma esternamente al film laminare) diversi a seconda del corrispondente valore della tensione tangenziale sul contorno. Il confronto con diverse misure sperimentali, sia di altri AA. che nostre, conferma tale legge, entro i limiti consentiti dalle verifiche grafiche.

Si ricava quindi la legge di resistenza e si dimostra che, introducendo un unico raggio convenzionale $R_f = fR$ per ogni forma di sezione, è possibile utilizzare in tutto il campo del moto uniforme turbolento le formule dei tubi circolari per il calcolo del coefficiente di attrito λ . Con la stessa posizione, ma naturalmente con valori diversi di f , si riconosce la possibilità di tener conto anche dell'influenza del pelo libero nelle sezioni aperte.

Diversi confronti sperimentali provano la validità dei risultati e consentono nello stesso tempo la determinazione dei valori di f per alcune sezioni tipiche, chiuse e aperte. Per questi confronti si sono dimostrate particolarmente adatte le ricerche sperimentali eseguite dall'A. su canali scabri.

PARTE II

SEZIONI DI FORMA QUALUNQUE

RICHIAMI TEORICI.

1. - Le leggi di distribuzione della velocità e le leggi di resistenza, valide per il moto uniforme entro condotti circolari o rettangolari infinitamente larghi (v. I parte) non si possono trasferire alle sezioni di forma generica senza dover superare serie difficoltà. La maggiore nasce dal fatto che qui vengono a mancare quelle particolari condizioni di simmetria alle quali si deve una semplificazione essenziale del problema nei primi due casi. In

particolare, la distribuzione della pressione tangenziale τ_0 , sul contorno delle sezioni di forma generica, non è uniforme, e l'esperienza consente di misurarne soltanto il valor medio $\overline{\tau_0} = \gamma R i$.

A questa difficoltà di carattere concettuale si deve aggiungere, dal punto di vista sperimentale, la mancanza di misure di velocità e di resistenza altrettanto numerose e sistematiche di quelle eseguite nei tubi circolari.

La maggior parte dei dati sperimentali si riferisce inoltre alle correnti a pelo libero, le quali hanno abitualmente una sezione di forma diversa dalla semicircolare. Ciò introduce un nuovo problema nella valutazione della resistenza perchè, oltre all'influenza della forma della sezione, occorre interpretare anche l'influenza del pelo libero. La distinzione fra i due effetti è raramente possibile con i risultati sperimentali disponibili. Sotto il profilo teorico affronteremo però successivamente le due questioni.

2. - Per quanto riguarda la legge di resistenza è consuetudine tecnica, sorta già sulla base delle indicazioni di Bazin, ritenere trascurabili, a parità di raggio idraulico, le influenze della forma della sezione e del pelo libero. Così il coefficiente di attrito resta determinato, in tutti i casi, mediante formule empiriche o semi-empiriche legate al solo valore del raggio medio e alla scabrezza delle pareti [1].

L'esperienza quotidiana non rivela grossolani errori derivanti da questo procedimento, il che fa pensare ad una sostanziale identità delle leggi di resistenza nella sezione circolare e nelle sezioni differenti dalla circolare, sia chiuse che aperte, almeno finchè si resta nel campo delle normali forme di alveo. Si vedano in proposito le osservazioni di Supino nella premessa alle nostre ricerche sperimentali [9].

Tutto ciò non significa ancora che ci si debba attendere un'identità anche nelle leggi di distribuzione della velocità, ma fa prevedere l'esistenza di una profonda analogia fra le due situazioni considerate.

3. - Tentativi di reimpostare teoricamente il problema del moto uniforme in condotti di sezione differente dalla circolare, partendo dalla distribuzione della velocità, sono stati fatti da diversi AA., fra i quali in particolare Niku-

radse [2, 3] per le sezioni chiuse e Keulegan [4] per le sezioni aperte.

Il principio informatore è sempre stato quello di estendere la legge logaritmica di distribuzione della velocità ⁽¹⁾ alle sezioni di forma qualunque ritenendola *valida lungo ogni normale* alle pareti in funzione del valore della *pressione tangenziale sul contorno, al piede della normale stessa*.

Indicando sempre con $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ la velocità di attrito

— variabile da punto a punto del contorno — e con y la distanza fra un punto generico con velocità u e il piede della perpendicolare al contorno (cui compete il predetto valore variabile u_*), si pone quindi

$$(1) \quad \frac{u}{u_*} = a_l + b \log \left(\frac{y u_*}{\nu} \right)$$

nei condotti lisci, e

$$(2) \quad \frac{u}{u_*} = a_r + b \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right)$$

nei condotti scabri ($b = \frac{2,30}{K}$).

Il Keulegan ha anche messo in conto l'influenza del pelo libero nelle sezioni aperte aggiungendo nelle formule precedenti un fattore del tipo $\varepsilon_f u/u_*$.

Assegnati per a_l , a_r , b i valori ricavati nella sezione circolare, il confronto sperimentale avrebbe dovuto permettere ad un tempo il calcolo della distribuzione lungo il contorno di u_* (ossia della pressione tangenziale τ_0) e confermare la validità della legge logaritmica lungo le normali. S'intende che l'estensione di tale validità doveva limitarsi, caso per caso, a zone della sezione definite dalla forma delle isotachie, entro ciascuna delle quali doveva valere la legge (1) (o la (2)) con riferimento al valore di u_* al piede delle normali al contorno. Più semplicemente, nel caso di sezioni poligonali, tali zone si ritengono delimitate dalle bisettrici degli angoli perimetrali. Un esempio evidente è dato dalle proiezioni planimetriche delle falde di un tetto a pendenza costante che ha come linea di gronda il contorno bagnato della sezione.

Un approfondito esame comparativo di questo indirizzo teorico con i risultati sperimentali è stato già compiuto da Ghetti [5], utilizzando le ricerche di Nikuradse su sezioni chiuse triangolari e rettangolari e quelle di Bazin su sezioni aperte rettangolari e semicirculari. I grafici chiarissimi riportati in quella memoria (alla quale rinviamo per maggiori particolari) mettono in evidenza, come conclude l'A., una « abbastanza pronunciata dipendenza lineare dei valori di u , lungo profili normali alle pareti, dal logaritmo della distanza, ma non altrettanto

una reale corrispondenza con le leggi di distribuzione valide per la sezione circolare ».

4. — Keulegan [4], per utilizzare le (1) e (2) alla deduzione delle leggi di resistenza, scrive la generica velocità di attrito sul contorno u_* in funzione del valore medio \bar{u}_* nella forma

$$(3) \quad u_* = \bar{u}_* (1 + \varepsilon_*)$$

indicando con ε_* un coefficiente variabile su cui non fa nessuna ipotesi a priori.

Mediando allora la (1) su tutta la superficie della sezione, si ottiene, con qualche trasformazione,

$$(4) (1 + \bar{\varepsilon}) \frac{U}{\bar{u}_*} = \left(a_l - \frac{1}{K} \right) + b \log \left(\frac{R u_*}{\nu} \right) + \frac{\beta}{K}$$

e analogamente dalla (2)

$$(5) (1 + \bar{\varepsilon}) \frac{U}{\bar{u}_*} = \left(a_r - \frac{1}{K} \right) + b \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right) + \frac{\beta}{K}$$

dove si è indicato con $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\varepsilon_f - \varepsilon_*) d\Omega$ un fattore

che dovrebbe interpretare l'effetto combinato del pelo libero e della non uniforme distribuzione della tensione tangenziale sulle pareti, e con β un coefficiente che l'A. definisce « di forma » e su cui ritorneremo più avanti. Esso deriva esclusivamente dalle operazioni di integrazione sulla sezione; è effettivamente diverso nel caso della sezione rettangolare larghissima rispetto alla sezione circolare (come abbiamo già messo in evidenza nella I parte, n. 8), ma ha lo stesso valore per il cerchio e per tutte le sezioni poligonali chiuse circoscritte ad un cerchio, come pure per tutte le sezioni poligonali aperte circoscritte ad un semicerchio.

Successivamente l'A., per scrivere le leggi di resistenza senza indeterminazioni, ha trascurato definitivamente $\bar{\varepsilon}$ ed assunto per β il valore costante 0,1. Un confronto di queste leggi di resistenza con diverse esperienze di Bazin, eseguito dallo stesso Keulegan, ha messo in evidenza una concordanza soddisfacente nei confronti dell'influenza della scabrezza, ma non ha fornito chiare indicazioni sull'influenza della forma, considerata in definitiva trascurabile. Questa parziale conferma dei risultati finali, sulla base delle esperienze di Bazin, se prova la sostanziale analogia fra correnti a pelo libero e correnti in pressione, non ci sembra che giustifichi un procedimento deduttivo fondato su ipotesi di distribuzione della velocità non sufficientemente verificate.

La memoria del Keulegan presenta peraltro un indubbio interesse sia perchè è il primo tentativo di trasferire ai canali, in maniera coordinata, i risultati teorici validi nelle condotte circolari in pressione, sia per il procedimento impiegato nel confronto con i risultati sperimentali.

5. — A chiusura di queste note riassuntive vogliamo richiamare particolarmente l'attenzione sulla memoria cita-

(1) In precedenza, nei condotti lisci, si era anche cercato di generalizzare la cosiddetta « legge delle potenze » $\frac{u}{u_*} = C \left[\frac{y u_*}{\nu} \right]^{1/7}$ che, nella sezione circolare risulta abbastanza ben confermata per $N < 10^5$ e giustifica, come legge di resistenza, la formula di Blasius.

ta [5] di Ghetti. In quel lavoro, per analogia con quanto avviene nel regime laminare, l'A. ha avanzato l'ipotesi che la distribuzione della tensione tangenziale al contorno sia tale da realizzare, a parità di valor medio, quella distribuzione di velocità nella sezione che dà luogo alla portata massima. In formule, se $u = u(u_*, \dots)$ rappresenta la relazione fra la velocità locale e la velocità di attrito sul contorno, dev'essere

$$(6) \quad Q = \int_{\Omega} u(u_*, \dots) d\Omega = \text{massimo}$$

compatibilmente con la condizione sul contorno C

$$(7) \quad \int_C \rho (u_*^2 - \overline{u_*^2}) dC = 0$$

$\overline{u_*^2}$ essendo il valore medio di u_*^2 .

Sulla base di questo principio variazionale Ghetti ha dimostrato l'impossibilità, per assurdo, che la relazione $u = u(u_*, \dots)$ in una sezione qualunque sia la stessa valida per la sezione circolare. In mancanza di altre relazioni non ha però ulteriormente sviluppato il procedimento. A questo proposito l'A. si limita a concludere che « nella ricerca dell'espressione $u(u_*, \dots)$ sembra logico non allontanarsi dai fondamenti delle teorie che hanno dato buona prova nella caso della sezione circolare ». Affermazione che ci trova pienamente consenzienti come quella, riportata nelle considerazioni finali della memoria citata, di trascurare in una prima trattazione approssimata le eventuali componenti delle velocità di trasporto nel piano della sezione. Su quest'ultimo punto, cioè sull'importanza dei moti secondari, torneremo anche più avanti, trattando del fenomeno di abbassamento dei punti di massima velocità al di sotto del pelo libero.

LA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ NELLE SEZIONI DI FORMA QUALUNQUE.

6. — Riprendiamo la teoria del « trasporto della quantità di moto », applicandola al moto di una corrente uniforme turbolenta entro un condotto cilindrico ad asse rettilineo avente la sezione generica di contorno B_0 indicata nella fig. 1.

Consideriamo la massa racchiusa da una superficie γ interna a quella di contorno e distante costantemente y da essa. In una sezione trasversale sia B la lunghezza della traccia della superficie considerata (v. fig. 1).

Indicate con u' e v' le componenti delle pulsazioni della velocità rispettivamente nella direzione x della corrente e nella direzione normale a γ (e quindi normale anche al contorno), la variazione media temporale, secondo x , della quantità di moto della massa elementare $\rho v' dB$ che attraversa la superficie γ è, nell'unità di tempo, $\rho \overline{u' v'} dB$; la corrispondente variazione media di quantità di moto di tutta la massa che attraversa la superficie γ , in un tronco di lunghezza unitaria, è quindi, sempre nell'unità di tempo, $\rho \int_B \overline{u' v'} dB$. Questo trasporto di

quantità di moto attraverso γ è equivalente all'applicazione, sulla stessa superficie e per una lunghezza unitaria, di una forza $\overline{\tau}_1 B$, esercitata dal liquido esterno su quello interno alla superficie γ . Ovviamente $\overline{\tau}_1$ rappresenta il valor medio della tensione tangenziale turbolenta su γ .

In tutto il campo di moto esterno allo strato laminare possiamo trascurare, come si fa di solito, la tensione vi-

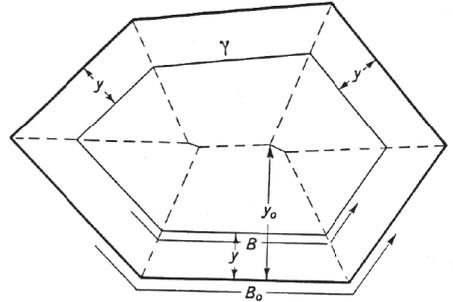


Fig. 1. - Schema della sezione trasversale di un condotto.

scosa rispetto a quella turbolenta. Allora, indicato con $\overline{\tau}$ il valor medio della tensione tangenziale su γ , si ha senza altro, nel campo predetto

$$(8) \quad \overline{\tau} B = \rho \int_B |\overline{u' v'}| dB.$$

A questo punto introduciamo un'ipotesi fondamentale per il nostro procedimento: riteniamo il valor medio temporale $\overline{u' v'}$ funzione soltanto della distanza y dalla parete. Esso deve pertanto restare costante su tutta la superficie γ .

Questa ipotesi ci è suggerita dalle osservazioni fatte sul moto turbolento entro condotti di sezione circolare e di sezione rettangolare larghissima. I risultati sono stati allora bene interpretati con un procedimento teorico identico, nel quale non si teneva conto, nel primo caso, della curvatura della parete. Sembra possibile quindi — almeno in prima approssimazione ed escludendo eventualmente le zone molto prossime a punti angolosi del contorno — ritenere la turbolenza, nel nucleo della corrente, distribuita statisticamente con gli stessi caratteri ad uguale distanza dalla parete.

La (8) si semplifica quindi nella

$$(9) \quad \overline{\tau} = \rho |\overline{u' v'}|.$$

Seguendo la teoria di Prandtl della « lunghezza di mescolamento » (v. I parte, n. 4) poniamo anche in questo caso

$$(10) \quad \overline{u' v'} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2$$

dove, in relazione a quanto premesso, l si ritiene funzione soltanto di y .

Dalla (9) e dalla (10) segue

$$(11) \quad \frac{\bar{\tau}}{\varrho} = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|^2$$

analoga alla (3) della I Parte, ricavata per il moto nei condotti circolari.

Sulla (11) possiamo operare con i procedimenti noti. Ad esempio, considerando valori molto piccoli di y , possiamo porre $\bar{\tau} \propto \bar{\tau}_0 = \gamma R i$ e

$$(12) \quad l = K y$$

Si ha

$$(13) \quad \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{\varrho}} = K y \left| \frac{du}{dy} \right|$$

e quindi

$$(14) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = c + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right) \quad \left(b = \frac{2,30}{K} \right)$$

dove il simbolo \bar{u}_* ha il significato

$$(15) \quad \bar{u}_* = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{\varrho}} = \sqrt{R i g}$$

e dove con y_0 abbiamo indicato il massimo valore della y nella sezione (tenuto conto della suddivisione in zone indicata al n. 3 e visibile nella fig. 1).

Per valori anche grandi di y (cioè in tutto il campo turbolento di variazione di y , fino a $y = y_0$) possiamo seguire quel nostro procedimento, esposto nel n. 10 della I Parte, che si basa sulla seguente interpretazione dei valori sperimentali della lunghezza di mescolamento:

$$(16) \quad l = K y e^{-y/y_0}$$

Allora, tenuto conto che anche per una sezione generica vale, nei confronti dei valori medi delle tensioni tangenziali, la $\bar{\tau} = \bar{\tau}_0 \left(1 - \frac{y}{y_0} \right)$, la (11) diventa

$$(17) \quad \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{\varrho}} \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}} = K y e^{-y/y_0} \left| \frac{du}{dy} \right|$$

ed integrando

$$(18) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = c + b \log \left(\frac{y}{y_0} \right) + \frac{\Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)}{K}$$

con \bar{u}_* data dalla (15) e $b = \frac{2,30}{K}$.

L'espressione

$$(19) \quad \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right) = \int_1^{y/y_0} \frac{e^{y/y_0} \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}} - 1}{\frac{y}{y_0}} d \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

rappresenta la funzione (33) della I Parte, i cui valori numerici (crescenti da $-0,2166$ per $y/y_0 = 0$ fino a $+0,0595$ per $y/y_0 = 0,8$ e decrescenti quindi fino a 0 per $y/y_0 = 1$) sono stati allora riportati.

La (18) — e l'espressione semplificata (14) con le riserve già dette — rappresentano la legge di distribuzione della velocità in una sezione generica.

Il simbolo c indica una costante di integrazione il cui valore è generalmente diverso a seconda della normale al contorno che si esamina.

Considerazioni analoghe a quelle relative al moto entro tubi circolari⁽²⁾, portano alle espressioni

$$(20) \quad c = a_l \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + b \log \left(\frac{y_0 \bar{u}_*}{y} \right)$$

nel campo del regime turbolento di « tubo liscio » e

$$(21) \quad c = a_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + b \log \left(\frac{y_0}{\varepsilon} \right)$$

nel campo del regime assolutamente turbolento di « tubo scabro ».

Come si è messo in evidenza scrivendo le (20) e (21), a_l ed a_r non sono costanti ma funzioni della distribuzione sul contorno di u_* / \bar{u}_* . Le (18), (20) e (21), nel caso $u_* = \bar{u}_*$ — cioè quando la tensione tangenziale sul contorno è uniforme — si riducono alle analoghe espressioni relative al moto con simmetria assiale o al moto piano bidimensionale.

7. — La legge di distribuzione della velocità che abbiamo ricavata nel n. precedente (equazione (18), oppure senza altro equazione semplificata (14)) presenta rispetto alle generalizzazioni della legge Prandtl-Nikuradse tipo (1) e (2) delle sostanziali differenze, su cui vogliamo richiamare l'attenzione.

In assegnate condizioni di moto, i valori della velocità u , secondo la (1) o la (2), dovrebbero variare linearmente con il logaritmo della distanza dalla parete, attraverso un coefficiente $u_* b$ diverso da normale a normale, variabile proporzionalmente alla radice quadrata della tensione tangenziale sul contorno.

I valori della velocità u , secondo la (14), variano pure linearmente con il logaritmo della distanza dalla parete, ma attraverso un coefficiente $\bar{u}_* b$ che non dipende dalla distribuzione di u_* sul contorno. Esso è proporzionale al valor medio $\bar{u}_* = \sqrt{R i g}$ e quindi costante su qualunque

⁽²⁾ Maggiori particolari su questi sviluppi e su tutta l'impostazione teorica del nostro procedimento sono riportati nella nota [35]

normale al contorno. I valori della velocità sono influenzati dalla non uniforme distribuzione di u_* soltanto attraverso la costante d'integrazione c .

Fisicamente lo schema di moto da noi assunto è fondato quindi sull'ipotesi che, pur variando u_* da punto a punto del contorno e con essa la velocità al limite dello

VERIFICHE SPERIMENTALI DELLA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITÀ IN SEZIONI QUALUNQUE.

8. — Tenuto conto che la nostra ricerca è rivolta principalmente alla precisazione delle leggi di resistenza, ci basta esprimere — come si è detto nelle conclusioni della

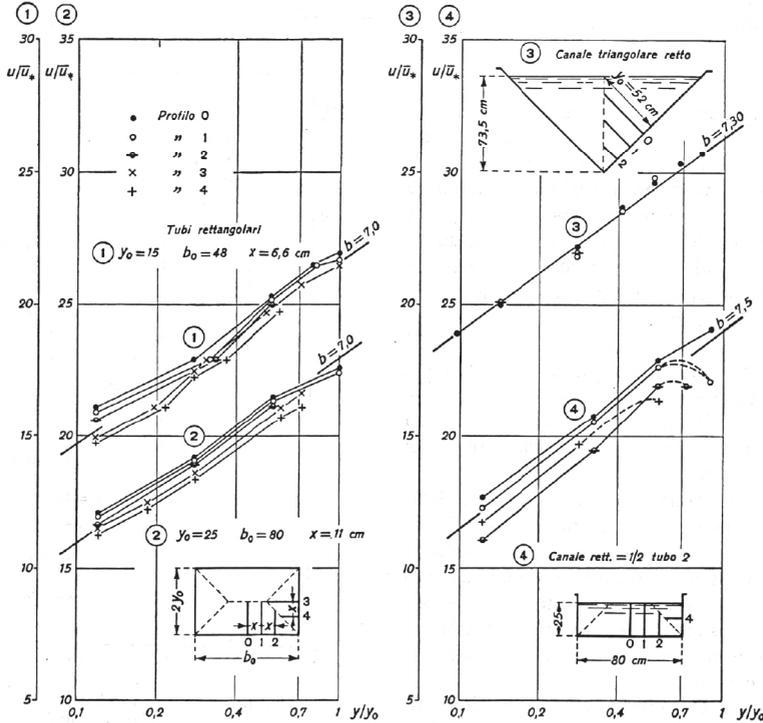


Fig. 2. — Misure di velocità di Bazin in due tubi rettangolari, in un canale triangolare retto e in un canale rettangolare.

strato laminare (regime liscio) o rispettivamente al limite della scabrezza (regime assolutamente turbolento), le variazioni successive, in funzione della distanza dalla parete, siano le stesse lungo qualunque normale al contorno nella zona turbolenta.

Aggiungiamo ancora un'osservazione per quanto riguarda la variazione di c (o di a_1 e di a_2) con u_*/\bar{u}_* , su cui finora non abbiamo fatto ipotesi. Ammessa valida l'impostazione variazionale di Ghetti, richiamata al n. 5, essa potrebbe fornire quella ulteriore relazione necessaria per definire teoricamente la funzione $c = c(u_*/\bar{u}_*)$ in ogni particolare regime di moto. Non sviluppiamo per ora questo procedimento, anche perchè non saremmo in grado, come vedremo fra poco, di sottoporre i risultati ad una verifica sperimentale.

Per la stessa ragione l'ipotesi di Keulegan [4] (v. anche [6]) di distribuzione sul contorno della velocità di attrito u_* secondo una legge logaritmica, non ci sembra che possa essere oggi sufficientemente provata dalle esperienze.

I Parte — la distribuzione della velocità per mezzo della legge semplificata (14)

$$(14) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = c + b \log \frac{y}{y_0},$$

dato che il contributo del termine $\frac{1}{K} \Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)$, mediato sulla sezione, si riduce ad un valore costante (cfr. Parte I, nn. 12-13).

Allora l'ipotesi da noi avanzata nei nn. precedenti potrà dirsi confermata se, indipendentemente dai valori di c , i profili delle velocità, in funzione di $\log y/y_0$, risulteranno rappresentati da rette con la stessa pendenza su tutte le normali al contorno. Di più se il valore costante della pendenza delle rette $\frac{u}{\bar{u}_*} = f \left(\log \frac{y}{y_0} \right)$ sarà compreso fra 6,0 e 7,0 concluderemo, in accordo con quanto visto nelle sezioni circolari e in quelle rettangolari lar-

ghissime, che il valore del coefficiente b si può assumere uguale al 5,75 di Nikuradse.

9. — Il confronto sperimentale è stato eseguito riportando le misure di velocità di Bazin (1865), Nikuradse (1926-1930), Varwick (1943-44) e Marchi (1957-59), divise per $\bar{u}_* = \sqrt{Ri g}$, in diagrammi in funzione di $\log y/y_0$. Ecco i risultati.

Bazin [7].

Nella fig. 2 sono riportati due diagrammi. A sinistra, indicati con i numeri 1 e 2, si trovano i valori di velocità, mediati dallo stesso A., fra tre serie di esperienze (serie n. 52, esp. n. 4-6-8) su di un tubo di sezione rettangolare $30 \times 48 \text{ cm}^2$ con pareti di legno; e rispettivamente fra tre serie di esperienze (serie n. 51, esp. n. 3-5-6) su di un tubo di sezione rettangolare $50 \times 80 \text{ cm}^2$ con le stesse pareti. A destra, indicati con i numeri 3 e 4, sono riportate le misure di velocità su di un canale triangolare retto in tavole (serie n. 70, esp. n. 6) e rispettivamente su di un canale rettangolare la cui sezione era la metà di quella del tubo 2 (serie n. 53). Nella stessa figura sono riportate quattro rette con segno più marcato che forniscono una indicazione di massima sui valori del coefficiente b dei rispettivi fasci di curve interpolari.

Queste esperienze non consentono una chiara indicazione. Le curve 2 e 4 confermano le nostre ipotesi per quanto riguarda il parallelismo fra i profili di velocità relativi a diverse normali al contorno, e anche dai casi 1 e 3 non derivano indicazioni in contrasto con le stesse ipotesi. Ma la sovrapposizione dei differenti profili di velocità e l'esiguo numero di misure lungo ogni normale rende insufficiente il confronto.

Per queste ragioni non ci soffermeremo sulle altre misure dell'A., eseguite su canali di sezione rettangolare larga e di sezione semicircolare⁽³⁾.

Nikuradse [2], [3].

Nella fig. 3 sono riportate le misure di Nikuradse del 1926 su di un tubo liscio di sezione rettangolare e nella successiva fig. 4 le misure eseguite nel 1926 e nel 1930 su di un tubo liscio di sezione triangolare equilatera.

L'andamento dei profili di velocità, lungo diverse normali al contorno, conferma pienamente la nostra previsione per quanto riguarda la uniforme distribuzione della turbolenza a ugual distanza dalla parete. I valori notevolmente elevati del coefficiente b (da 8,1 a 8,6) non rientrano invece fra quelli previsti. In proposito si vedano le osservazioni già fatte sui valori di \bar{u}_* dedotti dalle esperienze del 1926 nel n. 9 della I Parte di questa Nota; si tenga inoltre presente che il valore di \bar{u}_* per le esperienze del 1930 è stato dedotto — in mancanza di dati nella memoria dell'A. — estrapolando quelli del 1926. Una variazione del valore di \bar{u}_* modifica d'altra parte nello stesso modo la pendenza di tutti i profili di velocità e non influisce quindi sul loro parallelismo.

⁽³⁾ Alcuni profili delle velocità in asse dei canali rettangolari più larghi sono stati già riportati nella I Parte di questa nota.

Nella fig. 5 sono riportate le misure di velocità del 1930 eseguite in un tubo di sezione trapezia sempre con pareti lisce. Qui la velocità di attrito \bar{u}_* è stata calcolata sulla base dei dati effettivamente pubblicati dall'A. — È interessante osservare, oltre alla conferma del parallelismo dei diversi profili, il valore $b = 6,60$ in perfetto accordo con quelli relativi a sezioni circolari e rettangolari larghissime.

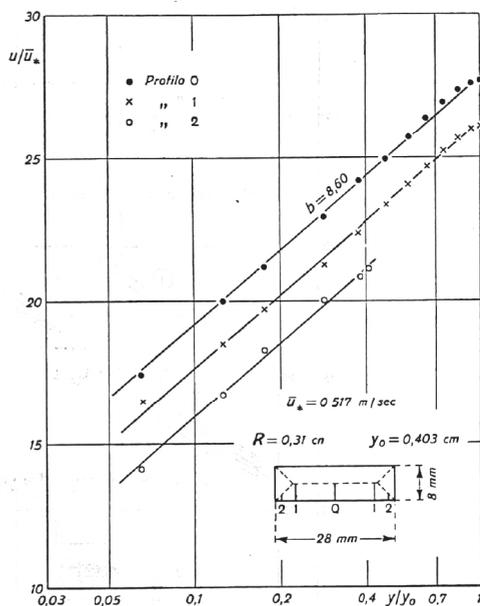


Fig. 3. — Misure di velocità di Nikuradse (1926) in un tubo rettangolare liscio.

Varwick [8].

Le misure di velocità, riportate nella fig. 6, furono eseguite su un canale di sezione trapezia con raggio medio $R = 4,8 \text{ cm}$ e pareti lisce e sullo stesso canale con pareti omogeneamente scabre. I profili di velocità hanno andamenti molto simili a quelli rilevati entro condotte circolari e rettangolari larghissime. Il ramo principale delle tipiche curve ad S ha pendenze rispettivamente di 6,35 nel caso di pareti lisce e di 6,10 nel caso di pareti artificialmente scabre. Sia questi valori sia il parallelismo fra i profili relativi a diverse normali al contorno sono in buon accordo con le nostre ipotesi.

Marchi [10], [11] (4).

Nella fig. 7 sono indicate le misure eseguite su due canali rettangolari resi artificialmente scabri e aventi raggio medio costante uguale a 3,5 cm. A sinistra i profili

⁽⁴⁾ Le misure di velocità, cui faremo ora riferimento, sono state eseguite tutte nel periodo 1957-59, ma soltanto una serie per ogni forma di sezione è stata pubblicata nelle memorie [10] e [11]. Le altre vengono riportate qui per la prima volta.

di velocità si riferiscono ad un canale con rapporto $b_0/y_0 = 2$ e n. di Reynolds $N = 160\ 000$. A destra si riferiscono ad un canale con rapporto $b_0/y_0 = 2/3$ in tre

dente nell'ambito di ciascuna serie di misure di velocità. Il valore della pendenza di ogni fascio di profili varia fra 6,20 e 6,70, nel campo cioè dei valori previsti.

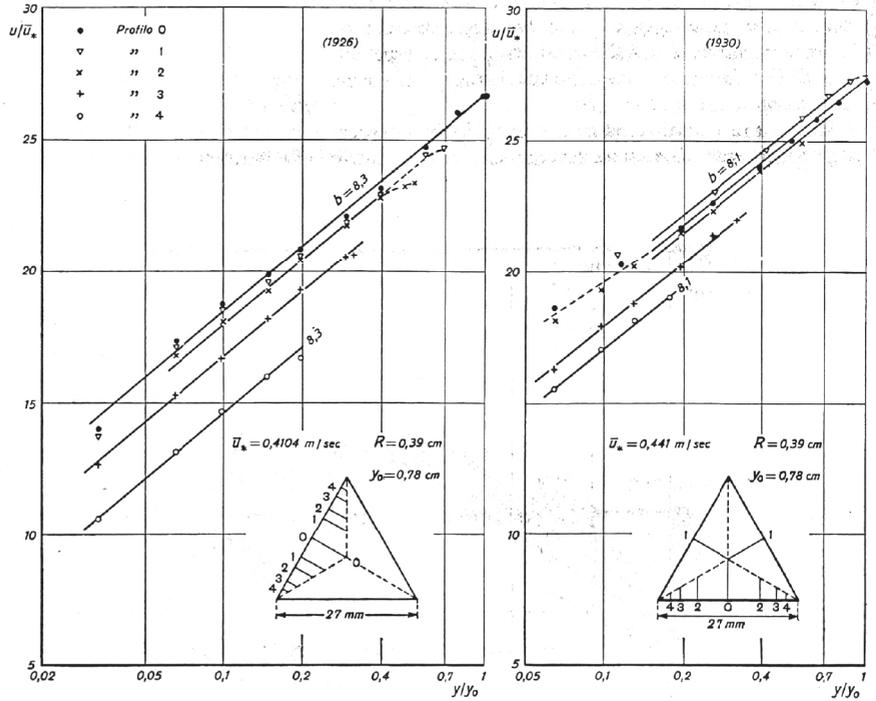


Fig. 4.

Misure di velocità di Nikuradse in tubi lisci di sezione triangolare equilatera.

diverse condizioni di moto caratterizzate dai nn. di Reynolds $N = 96\ 000 - 160\ 000 - 250\ 000$.

Il parallelismo fra le rette interpolari è abbastanza evi-

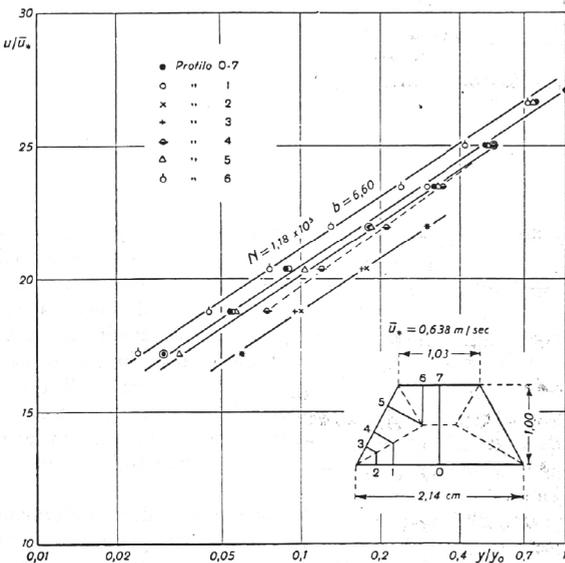


Fig. 5. - Misure di velocità di Nikuradse (1930) in un tubo liscio di sezione trapezia.

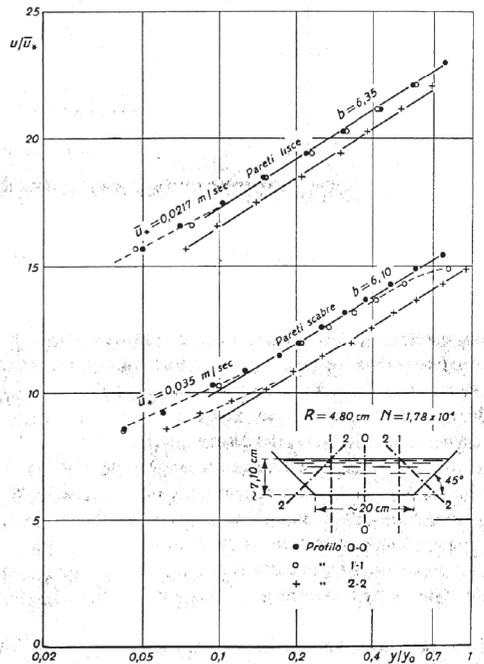


Fig. 6. - Misure di velocità di Varwick in un canale di sezione trapezia con pareti lisce e con pareti scabre.

Nella successiva fig. 8 sono riportate tre serie di misure di velocità eseguite dall'A. in un canale di sezione triangolare equilatera con $R = 3,5$ cm, pareti artificialmente scabre e nn. di Reynolds $N = 86\ 000 - 170\ 000 - 225\ 000$. Anche qui le nostre ipotesi trovano conferma sia per quanto riguarda il parallelismo fra i diversi profili, a parità di N , sia per quanto riguarda i valori della pendenza, compresi fra 6,20 e 6,80.

Riteniamo che i cambiamenti di b con N , che si osservano tanto nel caso di sezione rettangolare che in quello

conferme (e nessuna contraddizione) nelle misure finora eseguite sia in tubi che in canali di sezione rettangolare, triangolare e trapezia, con pareti lisce e con pareti scabre.

Occorre aggiungere che tali conferme, mentre sono da ritenersi senz'altro sufficienti in vista della ricerca delle leggi di resistenza, non possono dirsi del tutto probanti anche nel quadro della interpretazione del fenomeno della turbolenza. Infatti vi sono diverse cause, quali il modesto numero dei punti di misura in ogni sezione, le piccole dimensioni dei condotti sperimentali con sezioni chiuse,

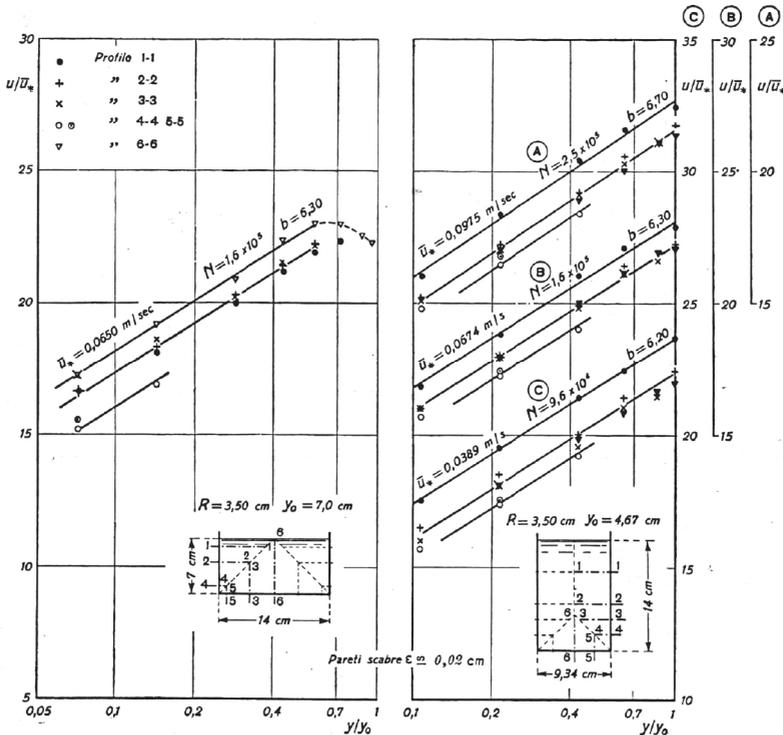


Fig. 7. - Misure di velocità di Marchi in canali rettangolari con pareti scabre ($\epsilon \leq 0,02$ cm).

di sezione triangolare equilatera, debbano attribuirsi più alle incertezze insite nelle misure sperimentali che a una vera e propria dipendenza di un fattore dall'altro. Infatti la variazione di b con N ha verso opposto nei due casi e non supera mai il 10% del valor medio di b .

Per quanto riguarda infine la sola distribuzione della velocità in asse dei canali rettangolari, numerose conferme della legge logaritmica (14) si trovano anche nelle ricerche sperimentali dedicate al fenomeno del trasporto solido (v. in particolare Vanoni [12]; per un panorama generale, anche di carattere bibliografico, v. Chien [13]).

10. - A conclusione del precedente confronto sperimentale possiamo dire che l'ipotesi da noi avanzata sulla uniforme variazione della velocità lungo tutte le normali al contorno, nelle stesse condizioni di moto, trova buone

l'influenza del pelo libero sulla distribuzione della velocità nelle sezioni aperte, che limitano il significato del confronto. In particolare, le esperienze considerate non sono in grado di assicurare, in maniera decisiva, la costanza della pendenza dei profili della velocità adimensionale u/\bar{u}_* , in funzione del $\log y$, anche lungo normali molto vicine ai punti angolari del contorno. Si tratta però di regioni della sezione molto limitate, ed un'eventuale variazione della distribuzione di velocità in esse avrebbe sempre un'influenza trascurabile sulla resistenza globale.

Per questo noi possiamo ritenere senz'altro confermata l'ipotesi di cui al n. 6, cioè costante ovunque la pendenza delle rette $u/\bar{u}_* = f(\log y)$. Il valore di detta pendenza si è visto che oscilla generalmente entro gli stessi limiti osservati nei casi di sezione circolare e rettangolare lar-

ghissima. Il coefficiente b della (14) può assumersi quindi uguale a 5,75, secondo quanto premesso nel n. 8.

LE LEGGI DI RESISTENZA NEI CONDOTTI DI FORMA QUALUNQUE.

11. — Accettata la (14) a rappresentare la distribuzione di velocità, almeno come la più semplice schematizzazione confermata dai risultati sperimentali, possiamo procedere al calcolo delle leggi di resistenza.

generica di lunghezza B , a distanza costante y dal contorno,

(23)

$$\frac{u_n}{\bar{u}_*} = \frac{1}{B} \int_0^B \frac{u}{\bar{u}_*} dB = \frac{1}{B} \int_0^B a_1 dB + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{y \bar{u}_*}{\nu} \right).$$

Il valor medio U della velocità in tutta la sezione sarà

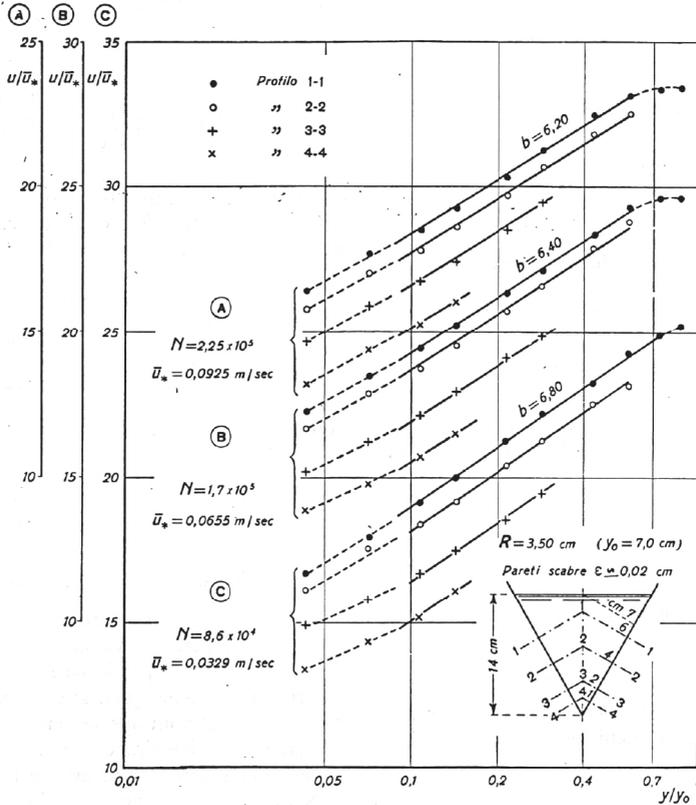


Fig. 8. — Misure di velocità di Marchi in un canale triangolare con sezione equilatera e pareti scabre.

Facciamo riferimento alla fig. 1 e consideriamo prima il caso di *pareti lisce*. Partiamo dalla (14), tenendo conto della (20), cioè

$$(22) \quad \frac{u}{u_*} = a_1 \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + b \log \left(\frac{y \bar{u}_*}{\nu} \right) = a_1 \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{y \bar{u}_*}{\nu} \right)$$

e facciamo la media u_n dei valori di u lungo una linea

dato quindi dalla

$$(24) \quad \frac{U}{\bar{u}_*} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} \frac{u_n}{\bar{u}_*} B dy = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_1 dB + \frac{1}{K \Omega} \int_0^{y_0} \ln \left(\frac{y \bar{u}_*}{\nu} \right) B dy.$$

Poniamo

$$(25) \quad C_1 = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_1 \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) dB$$

coefficiente adimensionale che dipende solo dalla distribuzione di a_r sul contorno e quindi dalla forma della sezione nei suoi riflessi idraulici⁽⁵⁾, ed inoltre

$$(26) \quad B = B_0 - \alpha y$$

dove il coefficiente α dipende pure dalla forma della sezione, ma in relazione a caratteristiche puramente geometriche.

La (24) si trasforma, con ovvi passaggi, nella

$$(25) \quad \frac{U}{\bar{u}_*} = C_i - \frac{1}{K} + \frac{\beta}{K} + b \log \left(\frac{R \bar{u}_*}{\nu} \right)$$

dove si è posto, seguendo Keulegan,

$$(26) \quad \beta = \ln \frac{y_0}{R} - \frac{\alpha y_0^2}{4 \Omega}.$$

Tenuto conto dell'equazione del moto uniforme $i = \frac{\lambda}{4R} \cdot \frac{U^2}{2g}$ e della posizione $\bar{u}_* = \sqrt{R i g}$, la (25) diventa

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_i - \frac{1-\beta}{K} - b \log 8 \sqrt{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (N \sqrt{\lambda})$$

od anche, più concisamente,

$$(28) \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{ir} + B \log (N \sqrt{\lambda})} \quad \left(N = \frac{4 R U}{\nu} \right).$$

La (28) rappresenta la *legge di resistenza nei condotti lisci di sezione qualunque*. Il coefficiente

$$(29) \quad B = \frac{b}{\sqrt{8}}$$

è indipendente dalla forma della sezione e, in relazione alle conclusioni del n. 10 sulla distribuzione della velocità, vale $\frac{5,75}{\sqrt{8}} \cong 2,0$ (quindi $K = \frac{2,30}{5,75} = 0,40$).

Invece il coefficiente

$$(30) \quad A_{ir} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_i - \frac{1-\beta}{K} - b \log 8 \sqrt{2} \right)$$

dipende dalla forma della sezione sia attraverso β che attraverso C_i .

⁽⁵⁾ Se a_r è costante sul contorno, cioè nel caso di sezione circolare o rettangolare larghissima, è evidentemente $C_i = a_r$.

Operando in maniera perfettamente analoga a partire dalle (14) e (21)

$$(31) \quad \frac{u}{\bar{u}_*} = a_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + b \log \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) = a_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) + \frac{1}{K} \ln \left(\frac{y}{\varepsilon} \right)$$

si trova

$$(32) \quad \frac{U}{\bar{u}_*} = C_r - \frac{1}{K} + \frac{\beta}{K} + b \log \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)$$

con

$$(33) \quad C_r = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) dB$$

e β espresso sempre dalla (26)⁽⁶⁾.

Quindi la *legge di resistenza nei condotti rugosi di sezione qualunque, in regime assolutamente turbolento*, diventa

$$(34) \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{rf} + B \log \left(\frac{4 R}{\varepsilon} \right)}$$

con lo stesso valore $B = 2,0$ e con

$$(35) \quad A_{rf} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_r - \frac{1-\beta}{K} - b \log 4 \right).$$

12. - Vediamo alcuni valori del coefficiente β .

Per una sezione circolare è $\beta = 0,193$. Tale valore resta lo stesso per tutte le sezioni poligonali circoscritte ad un cerchio, quindi in particolare per tutte le sezioni triangolari e per quelle quadrate. Ovviamente β vale ancora 0,193 per le sezioni aperte semicircolari o poligonali circoscritte a semicerchi, e quindi in particolare per la sezione rettangolare aperta avente base doppia dell'altezza.

Nelle sezioni rettangolari chiuse, indicato con b_0 il lato maggiore e con y_0 il semilato minore, si ha

$$\begin{array}{llll} b_0 = 2 y_0 & \beta = 0,193 & ; & b_0 = 8 y_0 \quad \beta = 0,10 \\ b_0 = 4 y_0 & \beta = 0,156 & ; & b_0 = 10 y_0 \quad \beta = 0,08 \\ b_0 = 6 y_0 & \beta = 0,12 & ; & b_0/y_0 \rightarrow \infty \quad \beta \rightarrow 0. \end{array}$$

Gli stessi valori di β si ritrovano per le sezioni rettangolari aperte ricavate dalle precedenti facendo coincidere il pelo libero con l'asse maggiore o con l'asse minore del rettangolo chiuso.

⁽⁶⁾ Le (25) e (32), assumendo C_i e C_r uguali rispettivamente ai valori costanti a_r ed a_r della sezione circolare, e $\beta = 0,1$, diventano coincidenti con le relazioni ricavate dal Keulegan [4] sulla base delle ipotesi richiamate al n. 4. Di queste formule semplificate, come si è già detto, lo stesso A. ha dimostrato la buona concordanza con diverse esperienze di Bazin.

Riassumendo, β vale sempre circa 0,19 nelle sezioni raccolte di qualunque forma, diminuisce soltanto nelle sezioni rettangolari con il crescere del rapporto fra i lati e tende a zero nelle sezioni rettangolari larghissime.

13. - Nelle espressioni dei coefficienti A_{lf} e A_{rf} , rispettivamente (30) e (25), facciamo comparire i valori A_l ed A_r relativi alla sezione circolare (v. formule (11) e (14) della I Parte)

$$(36) \quad A_{lf} = A_l - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2K} \right) + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_l - \frac{a_l}{K} + \frac{\beta}{K} \right)$$

$$(37) \quad A_{rf} = A_r - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2K} \right) + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_r - \frac{a_r}{K} + \frac{\beta}{K} \right)^{(*)}$$

Le (36) e (37) mostrano come l'influenza della forma determini una variazione sui coefficienti A rappresentata dalla somma dei due termini

$$-\frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2K} \right) = -0,17 \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{\sqrt{8}K} = \frac{\beta}{1,13}$$

costanti per una data sezione, qualunque sia la natura delle pareti, più un termine che dipende dalla distribuzione di a_l (u_*/\bar{u}_*) o di a_r (u_*/\bar{u}_*) sul contorno. Il confronto con i profili di velocità sperimentali è insufficiente ad un'indicazione precisa in questo senso. Ci limiteremo pertanto a fare un'ipotesi plausibile: che le distribuzioni di a_l in regime liscio e di a_r nel regime assolutamente turbolento, sul contorno di una stessa sezione, seguano la medesima legge (del resto incognita). Allora possiamo scrivere le (26) e (37) nella forma

$$(38) \quad A_{lf} = A_l + A_f$$

$$(39) \quad A_{rf} = A_r + A_f$$

con un unico valore di A_f nei due casi.

Tenuto conto dei valori assegnati da Nikuradse:

$A_l = -0,8$ e $A_r = 1,14$, le leggi di resistenza diventano

$$(40) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8 + A_f + 2,0 \log (N \sqrt{\lambda})$$

per il regime liscio ($N = \frac{4RU}{\nu}$);

$$(41) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,14 + A_f + 2,0 \log \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right)$$

per il regime assolutamente rugoso ⁽⁸⁾.

(*) Abbiamo sottolineato i valori a_l ed a_r della sezione circolare per porre in evidenza la loro costanza sul contorno.

(8) Le formule (40) e (41) mostrano che l'influenza della forma sui valori del coefficiente di attrito λ si attenua con il diminuire di λ

14. - Posto

$$(42) \quad \boxed{A_f = 2,0 \log f}$$

possiamo scrivere le (40) e (41) nella forma

$$(43) \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log \left(\frac{f N \sqrt{\lambda}}{2,51} \right)}$$

(regime liscio)

$$(44) \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log \left(\frac{3,71 f (4R)}{\varepsilon} \right)}$$

(regime assolutamente rugoso).

Le (43) e (44) mettono in evidenza come il coefficiente di forma f , da determinare per via sperimentale, possa interpretarsi anche come un coefficiente moltiplicatore del raggio medio. Nelle formule per il calcolo di λ , si può quindi tener conto dell'influenza della forma della sezione scrivendo al posto del consueto raggio medio R il raggio convenzionale « di forma ».

$$(45) \quad \boxed{R_f = f R.}$$

Nel campo dei condotti lisci, ciò equivale a moltiplicare per f il n. di Reynolds e questa posizione corrisponde perfettamente, dal punto di vista formale, con quella proposta nel 1935 da Gentilini [14], in analogia con le leggi del moto laminare. Vi è però fra i due procedimenti una differenza sostanziale, che deriva dalla loro diversa impostazione: l'ipotesi di Gentilini prevede infatti l'impiego nel regime turbolento entro condotti lisci degli stessi coefficienti di forma del regime laminare (dati per via teorica e confermati in quel regime dall'esperienza), mentre noi riteniamo che i coefficienti f del regime turbolento siano propri di questo regime, indipendenti dalla natura delle pareti, e non identici a quelli del regime laminare. Si osserva naturalmente una certa corrispondenza fra le due serie di valori, e di questa diremo più avanti.

stesso. Quindi, nei condotti lisci, si attenua con l'aumentare di N , mentre in quelli con pareti scabre si comporta diversamente secondo il tipo di scabrezza. Tende però sempre a valori indipendenti da N in regime « assolutamente turbolento », dove l'influenza della forma risulta tanto più accentuata quanto più grande è la scabrezza relativa.

A queste formule si potrebbe aggiungere la

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_0 + A_f + 2,0 \log (N \sqrt{\lambda})$$

per il regime liscio con « pareti ondulate ». Il coefficiente A_0 ha però valori non ancora ben precisati, variabili sensibilmente con il tipo di ondulazione.

15. - Le equazioni (40) e (41), o le corrispondenti (43) e (44), si riferiscono (come le analoghe di Nikuradse per le sezioni circolari) a condotti con *pareti lisce* e con *pareti artificialmente ed omogeneamente scabre*.

Sulla base delle stesse considerazioni che hanno condotto Colebrook [15] alla nota formula per il calcolo di λ nei tubi commerciali di sezione circolare, si può ritenere che tali espressioni conservino significato come leggitime anche quando la scabrezza delle pareti è *naturale, non omogenea*. Allora alle formule (43) e (44) si sostituisce l'unica relazione (perfettamente analoga alla formula di Colebrook)

$$(46) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log \frac{1}{f} \left[\frac{2,51}{N \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71 (4 R)} \right]$$

coincidente ai limiti ($\varepsilon \rightarrow 0$, o $N \rightarrow \infty$) con le precedenti, e la cui validità si estende anche al regime *intermedio*, ossia a tutto il campo del regime turbolento.

La (46) si può anche scrivere

$$(47) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log \left[\frac{2,5}{N_f \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71 (4 R_f)} \right]$$

che, con le posizioni $R_f = f R$ ed $N_f = f N = \frac{4 R_f U}{\nu}$, consente l'impiego degli stessi diagrammi di Colebrook.

Altre espressioni si possono scrivere mettendo in evidenza anziché il coefficiente di attrito λ , il coefficiente pure adimensionale $C = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \frac{\chi}{\sqrt{g}}$ ($\chi =$ coefficiente di Chézy). Le trasformazioni sono ovvie; per ulteriori considerazioni sulla formula di Colebrook e per i confronti con le formule pratiche dell'idraulica rimandiamo alle memorie [16], [17], [18], [19], [20]. La formula (47) si può rendere inoltre esplicita nei confronti di λ seguendo un procedimento suggerito da Supino [21].

SEZIONI CHIUSE.

16. - Le leggi di resistenza trovate richiedono un confronto con l'esperienza, sia per la verifica della loro validità, sia per la determinazione dei valori del coefficiente f relativi a diverse forme di sezione.

Per quanto riguarda i condotti in pressione di sezione diversa dalla circolare, un confronto con le esperienze più attendibili su condotti con pareti lisce, è stato già eseguito da Gentilini [14].

L'A. ha riunito in un unico diagramma (fig. 12 della Sua memoria) i risultati sperimentali di Schiller [22] per la sezione triangolare equilatera e per la sezione quadrata, Fromm [23] e Fritsch [24] per la sezione rettangolare molto larga e Lorenz [25] per la sezione anulare stretta, a confronto con la retta di Blasius per $N \leq 10^5$. A parità di n . Reynolds i valori di λ per le diverse forme stanno

nei seguenti rapporti con il corrispondente valore λ_0 della sezione circolare (Blasius)

$$\begin{aligned} \text{sezione triangolare equilatera} \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} &= 0,935 \\ \text{sezione quadrata} \dots \dots \dots \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} &= 0,96 \div 1,00^{(9)} \\ \text{sezione rettangolare larghissima} \\ \text{e anulare molto stretta} \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} &= 1,045 \end{aligned}$$

Dovendo essere, nei condotti lisci, per $N \leq 10^5$,

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{N}{f N} \right)^{\frac{1}{4}} = f^{-\frac{1}{4}}$$

si deducono i valori di f che riportiamo nella tabella seguente, a confronto con i coefficienti di forma del regime laminare (indicati con f_0).

TABELLA I.

Sezioni chiuse	f (reg. turbolento)	f_0 (reg. laminare)
Triangolare equilatera	1,30	1,21
Quadrata	1,17 \div 1,00	1,12
Rettangolare larghissima (e anulare stretta)	0,84	0,67

La variazione del coefficiente di forma nel regime turbolento presenta evidenti analogie con la variazione nel regime laminare, ma i valori nei due casi sono sensibilmente diversi. In particolare essi differiscono decisamente per la sezione rettangolare larghissima. È proprio questa l'unica sezione (oltre ovviamente alla circolare, dove si è posto $f=1$) nella quale è possibile calcolare il coefficiente f per via puramente teorica. Essendo qui $\beta = 0$ e, per ragioni di simmetria, $C_l = \frac{a_l}{r}$ e $C_r = \frac{a_r}{r}$, dalle (38) e (39), tenuto conto delle (36) e (37), segue

$$A_f = -0,168$$

e quindi dalla (42)

$$\log f = -0,084 \quad ; \quad f = 0,83.$$

Il valore trovato è in buon accordo con quello sperimentale e conferma, anche dal punto di vista teorico, la non identità dei coefficienti di forma nei regimi laminare e turbolento. Contemporaneamente il confronto sperimentale, con la precisazione dei valori di f per alcune *sezioni chiuse*, prova, almeno nel regime « liscio », l'attendibilità dei nostri risultati teorici.

(9) In questa situazione i risultati sperimentali non consentono una determinazione più precisa del rapporto λ/λ_0 .

SEZIONI APERTE: INFLUENZA DEL PELO LIBERO.

17. — La ricerca dei valori di f per via sperimentale assume maggiore importanza nel campo delle correnti a pelo libero, dove « abitualmente » la sezione ha forma diversa dalla semicircolare.

Prima di passare al confronto con le esperienze è però necessario che noi teniamo conto, nelle formule precedenti, dell'influenza del pelo libero. Infatti, soltanto se quest'ultima mancasse, una sezione aperta presenterebbe, dal punto di vista idraulico, un comportamento perfettamente identico (e quindi un uguale coefficiente di forma) della sezione chiusa ottenuta aggiungendo alla data la simmetrica rispetto al pelo libero.

È noto invece sperimentalmente che il massimo di velocità nei canali non si verifica sul pelo libero, come richiederebbe la predetta corrispondenza, ma al di sotto di questa superficie, con una deformazione di tutta la distribuzione della velocità nella regione adiacente al pelo libero.

Sofferamoci un momento sulle possibili cause del fenomeno.

Per giustificarlo diversi AA. (dopo Thomson e Gibson [26]) hanno fatto ricorso alla teoria dei moti trasversali. Questi movimenti (che dovrebbero verificarsi soltanto nelle sezioni aperte), trascinando continuamente verso il pelo libero particelle che prima si trovavano vicine alle pareti ed erano quindi meno veloci, determinerebbero l'abbassamento di velocità rilevato. In mancanza di una solida prova sperimentale resta molto incerta l'accettabilità di questa ipotesi.

Senza altro più convincente, sia per l'impostazione che parte da osservazioni fenomenologiche, sia per la conferma sperimentale ottenuta nel caso di sezione semicircolare, è l'ipotesi avanzata da Cocchi [27].

L'A., tenuto conto che la superficie corrispondente al pelo libero in una corrente in pressione può essere attraversata dal liquido nel moto di agitazione turbolenta, mentre non può esserlo quando la sezione è aperta, osserva che, nel secondo caso, la vicinanza del pelo libero provoca di massima anisotropia della turbolenza. Cioè, a differenza di quanto accade avvicinandosi alle pareti dove la turbolenza diminuisce in maniera isotropica, avvicinandosi al pelo libero deve progressivamente ridursi, fino ad annullarsi, la componente di agitazione turbolenta w' , normale al pelo libero, ma non vi è impedimento al moto di agitazione nelle altre due direzioni fra loro ortogonali, quella della corrente (componente u') e quella parallela al pelo libero (componente v'). Ammesso che u' resti inalterata, per continuità v' , in valore assoluto medio, deve raddoppiare rispetto ai valori della corrente in pressione. Di qui il raddoppiamento, sul pelo libero, della tensione tangenziale $\tau = \rho |u'v'|$ che agisce sull'elemento normale a detta superficie.

Passando dal pelo libero alla zona immediatamente sottostante al componente turbolento w' non sarà più nulla, ma sempre minore della w' corrispondente della corrente in pressione. Il predetto fenomeno di aumento delle τ si verificherà quindi anche in vicinanza del pelo libero,

in misura progressivamente ridotta con l'aumentare della profondità.

Questa impostazione mostra già una conseguenza importante: se la sezione aperta è infinitamente larga, dato che la tensione tangenziale, nella corrispondente sezione chiusa, è nulla su tutti i piani normali all'asse che sostituisce il pelo libero, l'effetto precedente è nullo. Esso aumenta in valore assoluto al diminuire della larghezza del pelo libero. D'altro canto l'importanza relativa della resistenza dovuta alla fascia prossima al pelo libero diminuisce, in confronto alla resistenza totale, con il diminuire della lunghezza di quest'ultimo rispetto al contorno bagnato (cioè diventa praticamente trascurabile nelle sezioni aperte molto strette e profonde). Si ha quindi un effetto di compensazione per cui è proprio nelle sezioni semicircolari o in quelle rettangolari circoscritte a semicerchi che l'influenza del pelo libero dovrebbe assumere la maggiore importanza.

Volendo passare da queste indicazioni ad uno sviluppo analitico quantitativo il procedimento si complicherebbe notevolmente.

Nel caso di sezione aperta semicircolare, introducendo qualche plausibile ipotesi di lavoro, la trattazione è stata svolta in maniera completa da Cocchi nella memoria citata [27]. I risultati teorici sono stati ben confermati da due serie di esperienze eseguite dallo stesso A.

18. — Sulla base dell'impostazione riportata al n. precedente, e limitatamente alle nostre considerazioni di carattere globale, possiamo ritenere l'effetto del pelo libero paragonabile a quello di una parete ideale, capace di esercitare pressioni tangenziali nel senso contrario al moto nella zona centrale e nel senso del moto alle estremità, con risultante nulla⁽¹⁰⁾. In tal modo si può pensare che la sua influenza si riduca ad una variazione del coefficiente f già introdotto nelle formule per il calcolo di λ . Questo coefficiente non dipenderà più dalla sola forma della sezione chiusa corrispondente, ma risentirà generalmente, e in qualche caso anche in maniera notevole, della forma effettiva della sezione aperta. Ad esempio, il coefficiente di forma di un canale avente sezione rettangolare pari alla metà di un quadrato, non sarà il coefficiente del quadrato (corrispondente sezione chiusa), ma avrà un valore intermedio fra questo e quello relativo alla sezione rettangolare con rapporto 2 fra i lati.

Tale procedimento non è ovviamente rigoroso e non consente di separare l'influenza della forma della sezione da quella del pelo libero. Esso trova però giustificazione nella piccolezza della variazione di resistenza introdotta dal pelo libero — 3,5% su valori di λ intorno a 0,02, nelle esperienze di Cocchi — e in una considerazione di carattere tecnico cui abbiamo già accennato: il fatto che sezioni rettangolari, trapezoidali, triangolari ecc. siano abituali nel campo delle correnti a pelo libero e assolutamente eccezionali per le correnti in pressione. Non importa quindi tanto conoscere l'influenza esclusiva della

⁽¹⁰⁾ Circa la distribuzione di queste pressioni tangenziali, nel caso della sezione semicircolare, si veda la memoria citata [27] di Cocchi, pag. 13.

forma, che interesserebbe soltanto le seconde, quanto la influenza complessiva forma-pelo libero, riguardante le prime.

Determineremo perciò il coefficiente f per le sezioni aperte e continueremo a chiamarlo « coefficiente di forma » (sebbene interpreti ora globalmente entrambe le influenze predette), confrontando le formule (43), (44) e (46) con le esperienze eseguite su canali a pelo libero.

SEZIONI APERTE: VERIFICHE SPERIMENTALI E CALCOLO DEL COEFFICIENTE f .

19. — La verifica sperimentale doveva raggiungere due obbiettivi:

1) provare che il comportamento delle correnti a pelo libero non differisce sostanzialmente da quello delle correnti in pressione in moto uniforme;

2) dimostrare che l'influenza contemporanea della forma della sezione e del pelo libero può interpretarsi con l'introduzione di un unico coefficiente di forma in tutti i regimi di moto turbolento.

Della prima verifica abbiamo già detto nelle osservazioni conclusive di tutte le pubblicazioni dei nostri risultati sperimentali (v. memorie [9], [10], [11]). Contrariamente ad alcuni risultati di Warwick [8], le nostre esperienze, eseguite su canali lisci, su canali naturalmente scabri e su canali artificialmente scabri, hanno confermato, per quanto riguarda la dipendenza del coefficiente di attrito λ dal n. di Reynolds e dalla scabrezza relativa, una perfetta analogia fra correnti a pelo libero e correnti in pressione. Evidenti prove in tal senso si possono trovare anche riesaminando le classiche esperienze di Bazin [7]; basti per questo il confronto eseguito dal Keulegan [4] il quale ha dimostrato che parte di quelle esperienze rientrano nel campo del regime assolutamente turbolento e sono ben interpretabili alla maniera di Nikuradse con valori del parametro ϵ di scabrezza dell'ordine di quelli sperimentali mentre altre, quelle eseguite su canali di tavole, presentano il comportamento delle pareti lisce ondulate. Dopo tale rielaborazione non riteniamo necessario rivedere le stesse esperienze e rimandiamo alla memoria del Keulegan per maggiori particolari.

Ulteriori conferme — sebbene generalmente limitate a piccole variazioni del n. di Reynolds — offrono pure le ricerche eseguite negli Stati Uniti su canali rettangolari e triangolari, con lo scopo principale di studiare l'influenza di particolari tipi di scabrezze [28], [29], [30] ⁽¹⁾.

Recentemente, anche misure di velocità media, eseguite su alcuni fiumi cecoslovacchi, sono state ben interpretate con leggi logaritmiche aventi $B = 2,0$ [32].

Per quanto riguarda il secondo punto, più difficile da precisare data la modesta entità delle differenze conseguenti ai cambiamenti di forma della sezione, lo tratteremo in modo particolare nei nn. seguenti facendo ri-

ferimento alle esperienze di laboratorio eseguite sistematicamente a questo scopo. È evidente che questa seconda verifica comprende implicitamente anche la prima.

20. — Per il confronto utilizzeremo diagrammi aventi in ascisse $\log \frac{u_*}{v}$ e in ordinate $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R$ oppure $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log (fR)$ (con R espresso in m e $\frac{u_*}{v}$ in m^{-1}).

Secondo le nostre previsioni teoriche, nei primi, cioè nei diagrammi aventi in ordinate $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R$, i punti sperimentali relativi a canali con la stessa scabrezza devono trovarsi su curve distinte, in relazione alla forma della sezione. Nei secondi, con ordinate $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log (fR)$,

i punti relativi ad una stessa scabrezza devono essere invece interpolabili con un'unica curva, qualunque sia la forma della sezione. Il coefficiente f resta determinato proprio dalla condizione di consentire la traslazione delle diverse curve, con ugual ϵ , in una sola. Quest'ultima avrà inoltre forme diverse, nel regime intermedio, secondo che si tratti di scabrezza artificiale omogenea o naturale non-omogenea.

Per grandi valori di $\frac{\epsilon \bar{u}_*}{v} = \epsilon \frac{\sqrt{Rig}}{v}$, cioè in regime assolutamente turbolento, tutte le curve devono diventare rette parallele all'asse delle ascisse. Per piccoli valori di $\frac{\epsilon \bar{u}_*}{v}$ devono tendere invece a curve parallele (se non si tiene conto di f) o coincidenti (se si introduce il coefficiente f) con la curva dei tubi circolari lisci, che nei nostri diagrammi è rappresentata dalla retta (eq. n. (43) con $f = 1$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R = 1,308 + 2,0 \log \frac{\bar{u}_*}{v}$$

indicata sempre con tratto intero marcato.

21. — Esaminiamo in primo luogo il comportamento dei canali con pareti lisce. Un confronto è rappresentato nelle figg. 9 e 10, dove abbiamo riportato i risultati sperimentali di Cocchi [27]. Precisamente: i cerchietti neri indicano le misure eseguite, con funzionamento in pressione, in una condotta circolare di cemento-amianto, preventivamente lisciata; i cerchietti metà bianchi e metà neri indicano invece le misure eseguite, nella stessa condotta, con funzionamento a pelo libero su mezza sezione (I posizione); i cerchietti con la stessa indicazione (ma invertita, rappresentano infine i risultati delle misure eseguite, con il tubo rovesciato, utilizzando come alveo della corrente a pelo libero l'altra mezza sezione (II posizione).

Nella fig. 9 sono riportate anche le rette (tratteggiate) corrispondenti alle curve interpolari indicate dall'A., e relative rispettivamente al funzionamento in pressione e

⁽¹⁾ Per una visione generale dei risultati delle ricerche sulle correnti a pelo libero, specialmente americane, si veda il recente libro di Ven Te Chow [31].

a quello a pelo libero. Come mostra la successiva fig. 10, l'introduzione del coefficiente

$$f = 0,87$$

ha consentito di traslare la retta interpolare corrispon-

Esperienze su canali *triangolari retti* con pareti lisce sono state eseguite da Owen [33], per nn. di Reynolds compresi fra 20 000 e 275 000. I risultati sono stati interpolati con una curva di equazione $\lambda = \frac{0,295}{N^{1/4}}$ per N variabile dal minimo 20 000 a 120 000.

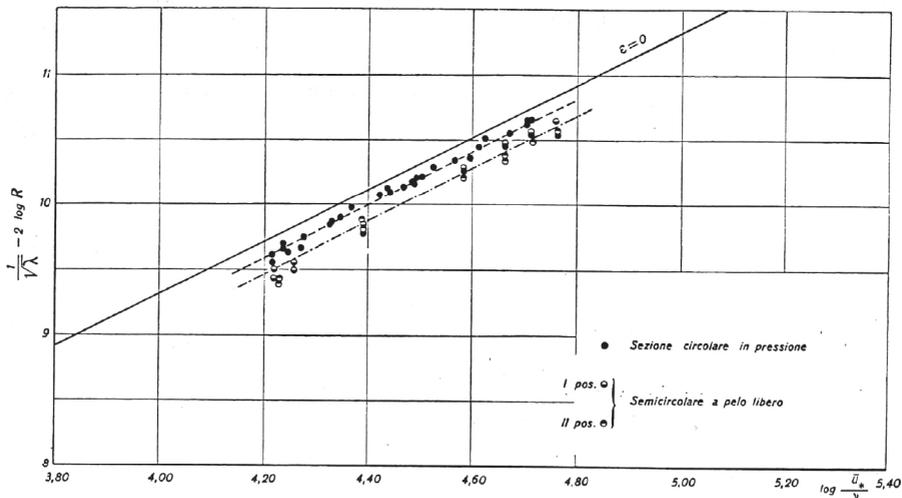


Fig. 9. — Esperienze di Cocchi su un tubo circolare di eternit « liscio » funzionante in pressione, o a pelo libero su mezza sezione: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

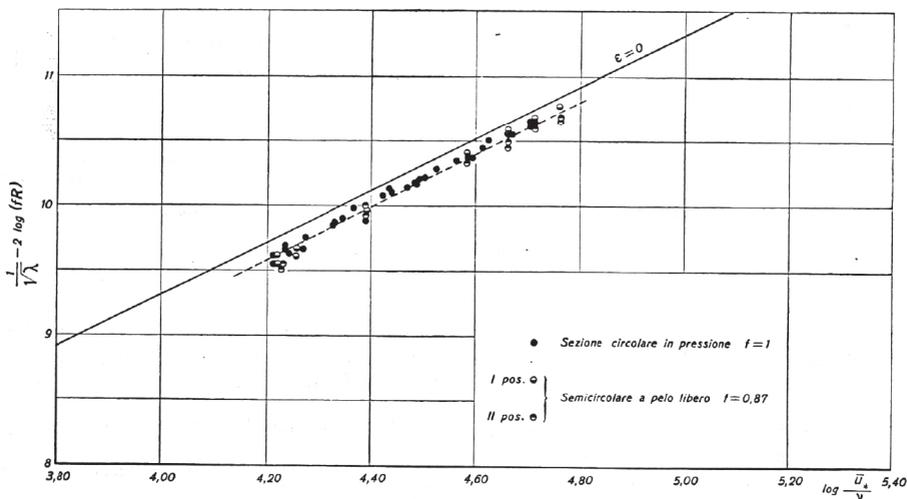


Fig. 10. — Esperienze della fig. 9: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log (fR)$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

dente alla *sezione semicircolare aperta* fino a sovrapporla a quella relativa alla sezione circolare chiusa⁽¹²⁾.

(12) Il fatto che questa retta sperimentale presenti un piccolo scostamento da quella di Nikuradse per i tubi circolari lisci (dovuto probabilmente ad una lieve scabrezza residua, forse di tipo ondulato), non ha naturalmente influenza sul confronto fra sezione aperta e sezione chiusa, perchè è rimasta la stessa nei due casi la natura delle pareti.

Dal confronto con la formula di Blasius per i tubi circolari lisci si deduce subito in questo campo

$$f = \left(\frac{0,316}{0,295} \right)^4 = 1,30.$$

Il valore dello stesso coefficiente tende però a diminuire

un poco (in media intorno a 1,20) con l'aumentare di N fino al max sperimentale (13).

22. - Nella situazione di *pareti naturalmente scabre* il confronto è rappresentato nelle figg. 11 e 12. Qui abbiamo riportato i risultati delle nostre esperienze del 1955-56 [9] su tre canali di cemento: uno di sezione triangolare equilatera con profondità $\sim 13,2$ cm ($R = 3,20$ cm) e due di sezione trapezia, con base 8,35 cm, sponde inclinate di $\sim 30^\circ$ rispetto alla verticale e profondità rispettivamente 6,0 cm ($R = 3,18$ cm) e 10,0 cm ($R = 4,46$ cm) (14).

23. - Infine, nella situazione di pareti *artificialmente ed omogeneamente scabre*, il confronto è stato eseguito con le nostre esperienze del 1957 [10] e del 1959 [11] su canali di varia forma con pareti rivestite di carta abrasiva ed è rappresentato nelle figg. 13, 14, 15.

Nella prima, per dare maggiore evidenza al confronto, si sono riportati soltanto i risultati relativi alla sezione triangolare equilatera, con profondità 14,0 cm, e alla più larga sezione rettangolare, $b_0 = 28,0$ cm e $y_0 = \frac{b_0}{6} = 4,67$ cm, entrambe con raggio medio $R = 3,50$ cm.

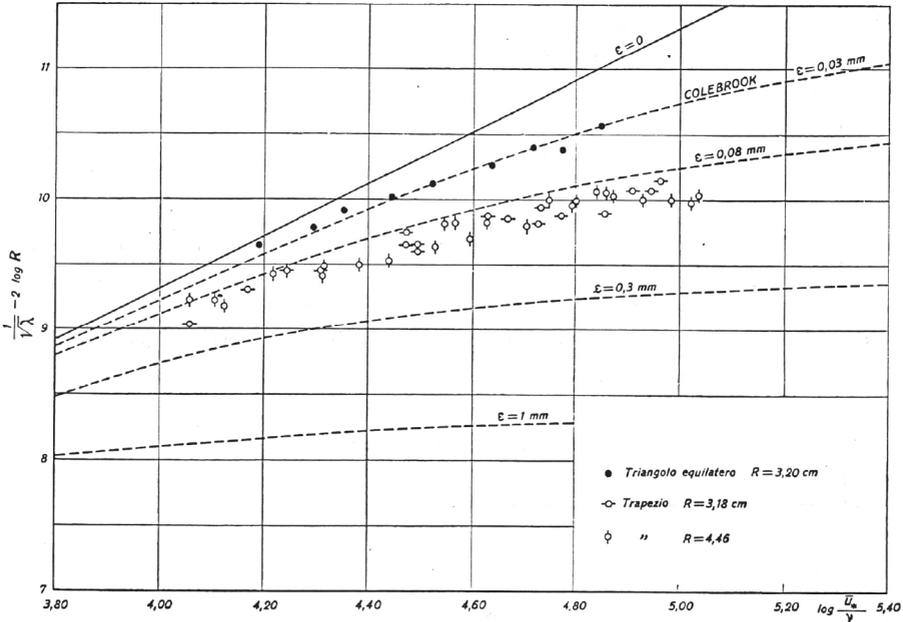


Fig. 11. - Esperienze di Marchi su canali triangolari e trapezi di cemento:

$$\text{valori } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R \text{ in funzione di } \log \frac{u_m^2}{\nu}.$$

Le curve tratteggiate rappresentano la formula di Colebrook — equazione (46) con $f = 1$ — per alcuni valori assegnati della scabrezza ϵ .

La sovrapposizione dei punti sperimentali, che con buona approssimazione avviene sulla curva $\epsilon = 0,08$ mm di Colebrook nel diagramma di fig. 12, è stata ottenuta applicando i seguenti coefficienti di forma:

$f = 1,30$ per la sezione triangolare equilatera;

$f = 0,90$ per le due sezioni trapezie.

(13) Valori di f ancora più piccoli (variabili fra 1,10 ÷ 1,20) per la stessa forma di sezione, si deducono dalle esperienze dell'Università del Minnesota [30]. Il loro campo, nel regime turbolento, è limitato però a piccoli valori di N (< 45.000).

(14) Non abbiamo riportato alcune nostre esperienze in regime liscio, eseguite su una canaletta rettangolare con pareti di vetro e pubblicate nella stessa memoria [9]. Ciò perché i valori sperimentali di λ in quella situazione erano molto vicini ai valori dei tubi circolari lisci e quindi il loro confronto risultava poco significativo agli effetti dell'influenza della forma.

Nella successiva fig. 14 gli stessi risultati sono stati riportati con l'introduzione dei seguenti valori del coefficiente di forma:

$f = 1,25$ per la sezione triangolare equilatera;

$f = 0,80$ per la sezione rettangolare con rapporto $\frac{b_0}{y_0} = 6$.

La buona conferma delle previsioni teoriche è provata dalla sovrapposizione di questi punti su di un'unica curva.

Nella fig. 15, accanto ai risultati precedenti, si sono riportati quelli relativi alla sezione triangolare retta, con profondità 9,9 cm ($R = 3,50$ cm), alla sezione rettangolare con rapporto $b_0/y_0 = 2/3$ ($b_0 = 9,34$ cm, $y_0 = 14,0$ cm, $R = 3,50$ cm), ad una sezione rettangolare con rapporto $b_0/y_0 = 2$ ($b_0 = 14,0$ cm, $y_0 = 7,0$ cm, $R = 3,50$ cm) e ad un'altra sezione pure rettangolare con lo stesso rapporto ma con diverso raggio medio ($b_0 = 9,34$ cm

$y_0 = 4,67$ cm, $R = 2,335$ cm). La sovrapposizione di tutti i punti sperimentali su di una stretta fascia si è ottenuta applicando i seguenti coefficienti di forma:

- $f = 1,20$ per la sezione triangolare retta;
- $f = 0,90$ per la sezione rettangolare con rapporto $b_0/y_0 = 2/3$;
- $f = 0,95$ per le due sezioni rettangolari con rapporto $b_0/y_0 = 2$.

Vi è una sostanziale analogia fra l'andamento rappre-

schungsheft 361, 1933) con la correzione soltanto della didascalia che nell'originale risulta erroneamente invertita, come si può controllare confrontando i dati numerici dello stesso A.

Non abbiamo utilizzato, nei nostri diagrammi, le coordinate $\log \frac{\bar{u}_* \varepsilon}{\nu}$ e $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2,0 \log f \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)$, perchè il valore del parametro di scabrezza ε (lo stesso per tutti i canali) non era perfettamente noto a priori. Abbiamo però riportato, nel diagramma di fig. 15, la curva interpolare

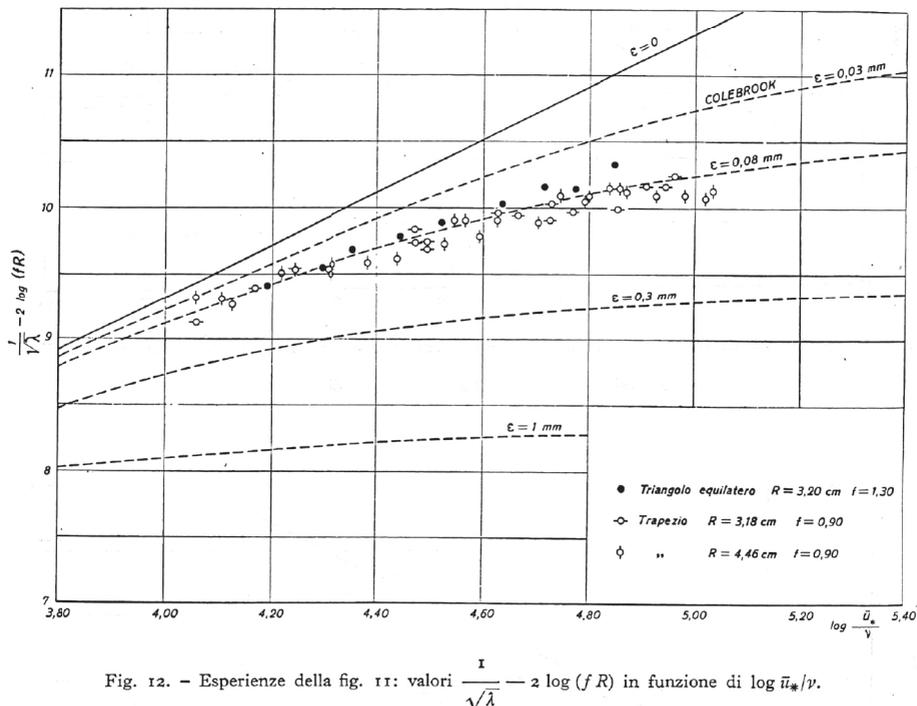


Fig. 12. - Esperienze della fig. 11: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log (fR)$ in funzione di $\log \frac{\bar{u}_*}{\nu}$.

sentato dai nostri punti nel diagramma della fig. 15⁽¹⁵⁾ e quello individuato dai punti di Nikuradse, dedotti da misure sulle correnti in pressione, nel diagramma notissimo di fig. 16. Quest'ultimo è stato riportato integralmente dalla memoria dell'A. (fig. 11 della V. D. I. For-

(15) Si sono riportati nella fig. 15 i punti rappresentativi di tutte le nostre misure eseguite sui canali di sezione: triangolare equilatera, rettangolare con rapporto $b_0/y_0 = 6$ e rettangolare con rapporto 2 ($R = 2,335$ cm). Sono state invece scartate alcune esperienze delle altre serie, precisamente quelle indicate nelle nostre precedenti pubblicazioni [10] e [11] con: n. 6 sul canale rettangolare con rapporto 2 ($R = 3,50$ cm), n. 8 sul canale rettangolare con rapporto $2/3$, e n. 4-5-9-11-23 sul canale triangolare retto.

Questi punti sono stati tolti non perchè presentassero scostamenti eccessivi (le differenze dei valori di λ dalle relative curve interpolari erano sempre $< 5\%$), ma perchè la loro distribuzione era tale da ridurre, sotto l'aspetto visuale, la chiarezza del diagramma della fig. 15.

Per la stessa ragione, crediamo, anche nel diagramma relativo alle condotte circolari in pressione, riportato nella fig. 16, Nikuradse ha indicato solo una parte dei punti sperimentali, tralasciando in particolare tutte le misure relative a $r/\varepsilon = 507$.

dei risultati di Nikuradse per un valore di scabrezza $\varepsilon = 0,25$ mm e la stessa curva per $\varepsilon = 0,30$ mm.

Misurate al microscopico, le dimensioni dei grani della carta abrasiva che ricopriva le pareti dei nostri canali risultavano mediamente intorno a 0,2 mm. La concordanza con i valori indicati dal confronto con le curve di Nikuradse può ritenersi pertanto soddisfacente, tenuto conto che le scabrezze nei due casi non potevano essere identiche (per quanto riguarda la densità di distribuzione dei grani, la loro forma, ecc. . .) e che la presenza dei giunti fra foglio e foglio di carta abrasiva (uno ogni 23 cm) aumentava sicuramente il valore del parametro ε nei nostri canali.

24. - I risultati delle precedenti esperienze su canali scabri raggiungevano l'inizio del regime « assolutamente turbolento » senza estendersi però in esso. Ulteriori indicazioni in questo campo si possono trovare nelle ri-

cerche sperimentali di Varwick [8] e di Möller-Hartmann [34].

Delle prime, eseguite su canali artificialmente ed omogeneamente scabri, abbiamo già detto nelle pubblicazio-

nel regime « assolutamente turbolento » — nel quale sono riportati anche numericamente i valori del coefficiente di attrito λ ⁽¹⁶⁾ per le due sezioni scabre ($\varepsilon = 2$ mm) esaminate dall'A., cioè sezione trapezia con larghezza al

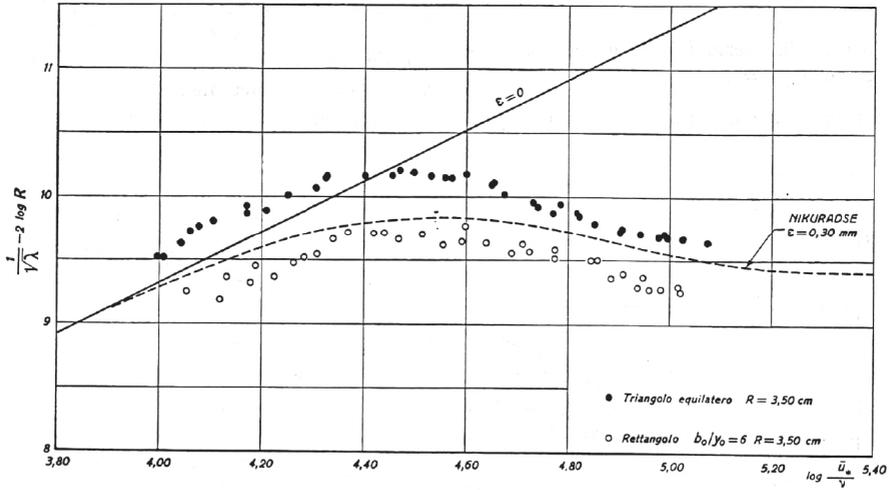


Fig. 13. - Esperienze di Marchi su canali omogeneamente scabri di sezione triangolare equilatera e rettangolare

larga: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

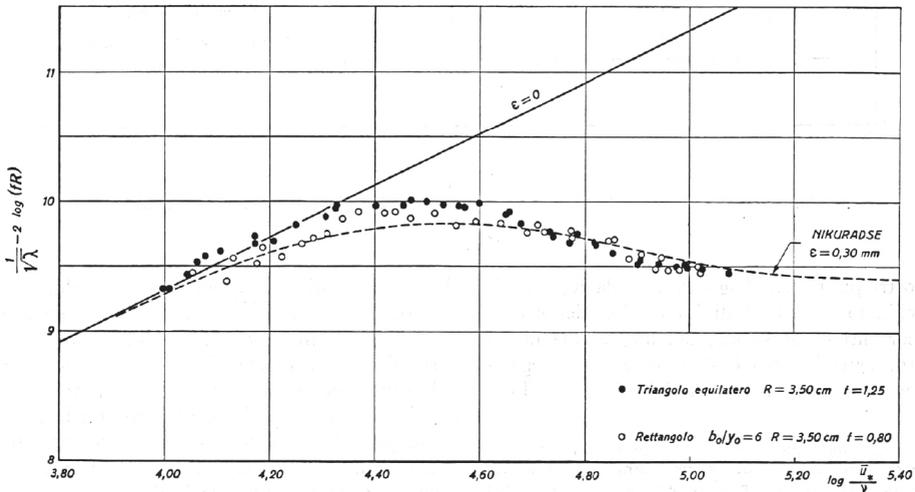


Fig. 14. - Esperienze della fig. 13: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log (fR)$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

ni [9], [10], [11] mettendo anche in evidenza le differenze con le nostre nel campo dei più piccoli nn. di Reynolds. Per quanto riguarda l'influenza della forma della sezione, le indicazioni che si ricavano dalla ricerca di Varwick sono di massima in accordo con le precedenti. Infatti,

(16) I valori $\bar{\lambda}$ cost., riportati da Varwick, si riferiscono alla equazione $i_f = \frac{\bar{\lambda}}{R} \cdot \frac{U^2}{2g}$. Qui abbiamo indicato con λ (come nelle condotte in pressione) i valori $4 \bar{\lambda}$.

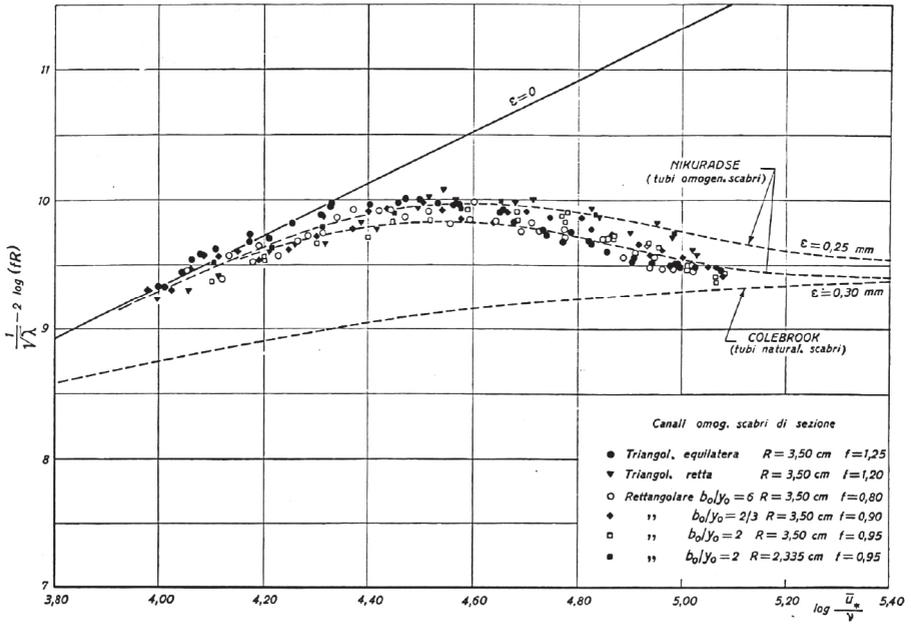


Fig. 15. - Esperienze di Marchi su diversi canali triangolari e rettangolari omogeneamente scabri:

valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log(fR)$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

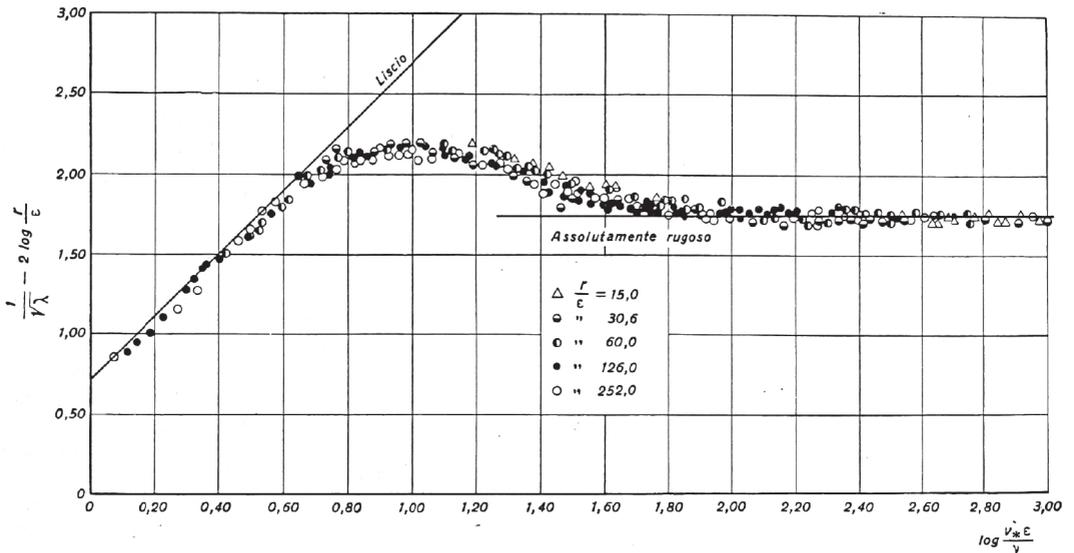


Fig. 16. - Risultati sperimentali di Nikuradse su condotte circolari in pressione.

fondo di 20 cm e sponde inclinate di 45°, e sezione triangolare equilatera — si ottengono i seguenti risultati:

TABELLA II.

R (m)	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R$		$f_{\text{triang.}}$
	triangolare	trapezia	$f_{\text{trap.}}$
0,010	7,10	6,75	1,50
0,020	7,29	7,00	1,40
0,030	7,39	7,18	1,27
0,040	7,43	7,26	1,22
0,048	7,46	7,34	1,15
0,054	7,48	7,37	1,13
0,060	7,48	7,39	1,11
0,072	7,48	7,42	1,07

L'ultima colonna della tabella indica il rapporto fra i coefficienti f delle due sezioni, il cui logaritmo, secondo le (41) e (42), vale la semidifferenza fra i corrispondenti valori della seconda e della terza colonna. Assunto, per la sezione *triangolare*, f costante ed uguale a 1,25 (sulla base delle indicazioni precedenti) si ottiene, per la sezione *trapezia*, un coefficiente variabile da $f = 0,83$ per $R = 1$

Möller-Hartmann [34]. Le prove furono condotte su tre canali triangolari le cui pareti erano state rese omogeneamente scabre mediante sovrapposizione di lastre di lamiera stirata. Le sponde dei canali avevano scarpa di 1 : 0,3 (sez. triangolare stretta), 1 : 1 (sez. triangolare retta) e 1 : 2,5 (sez. triangolare larga). I risultati sono ri-

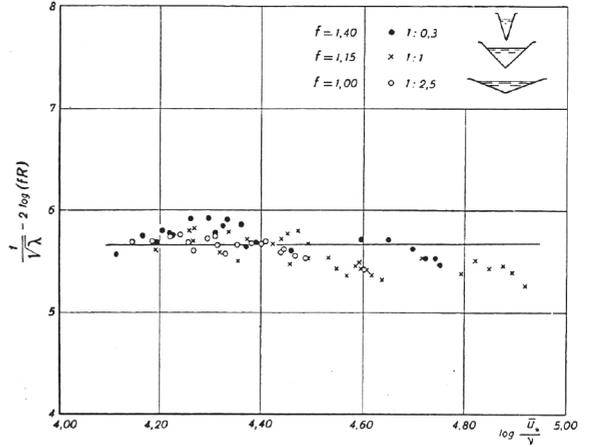


Fig. 18. - Esperienze della fig. 17: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log(fR)$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

portati, con il solito criterio, nella fig. 17 e successivamente nella fig. 18, dopo avere introdotto i seguenti coefficienti di forma:

- $f = 1,40$ sezione triangolare stretta (1 : 0,3);
- $f = 1,15$ » » retta (1 : 1);
- $f = 1,00$ » » larga (1 : 2,5).

Sebbene la dispersione dei punti sperimentali sia sensibile, l'interpretazione dell'influenza della forma conferma sostanzialmente i risultati dei nn. precedenti, tenuto conto delle analogie di forma.

RIASSUNTO DEI VALORI DEL COEFFICIENTE DI FORMA NELLE SEZIONI APERTE.

25. - I confronti precedenti dimostrano un buon accordo dei risultati sperimentali, nei diversi regimi di moto turbolento (pareti lisce, pareti naturalmente scabre e pareti artificialmente scabre), con la nostra interpretazione teorica del moto uniforme nei canali.

I valori del *coefficiente* f — che, come moltiplicatore del raggio medio nelle formule per il calcolo di λ , rappresenta globalmente l'influenza della forma e quella del pelo libero nelle *sezioni aperte* — sono risultati i seguenti:

- Sezione triangolare equilatera. . . $f = 1,30 - 1,25$
- » » retta $f = 1,20 - 1,15$
- » » larga $f \approx 1,00$

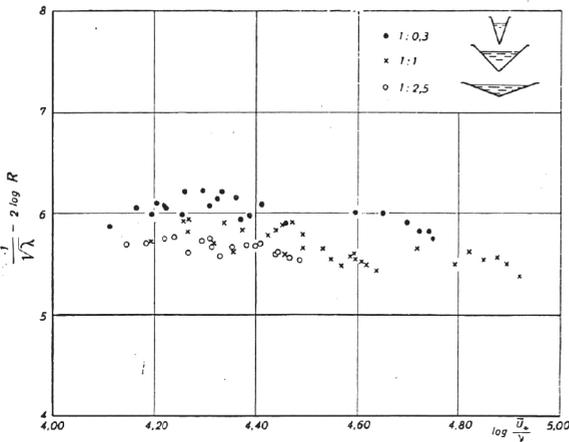


Fig. 17. - Esperienze di Möller-Hartmann su canali triangolari fortemente scabri: valori $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \log R$ in funzione di $\log \frac{u_*}{\nu}$.

cm, cioè per il caso di sezione larga rispetto alla profondità, a $f = 1$ per $R = 3,5$ cm, fino a $f = 1,15$ per $R = 7,2$ cm, cioè nel caso della sezione sperimentale più profonda.

Esperienze su canali fortemente scabri con rapporti ϵ/R maggiori di 0,10, tanto da interessare sempre il regime « assolutamente turbolento », sono state eseguite da

Sezione semicircolare	$f \cong 0,90$
Sezione trapezia ($\sim 1/2$ esagono)	$f = 1,00 - 0,90$
» » larga	$f \cong 0,80$
Sezione rettangolare di economia	$f = 0,95$
($b_0 = 2 y_0$)	
» » stretta	$f = 0,90$
($b_0 = 2/3 y_0$)	
» » larga	$f = 0,80$
($b_0 = 6 y_0$)	

Per la sezione rettangolare infinitamente larga il valore teorico è $f = 0,83$.

Questi valori non sono e non possono essere attualmente determinati con una precisione superiore al 5%. Le indicazioni che abbiamo ottenute sono peraltro sufficientemente approssimate per gli scopi pratici e consentono un'interpolazione intuitiva anche per forme diverse da quelle esaminate.

26. - Con questa pubblicazione ritengo conclusa la ricerca sul moto uniforme nei canali che ho svolto secondo l'indirizzo e gli obiettivi enunciati dal prof. Supino nella premessa alla mia prima nota sull'argomento [9]. Desidero ringraziarlo dell'incarico affidatomi e degli aiuti e dei consigli con i quali ha seguito costantemente il mio lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. EISNER: *Offene Gerinne*. - Handb. d. Experimentalphysik, Bd. 4 - Hydro-u. Aerodynamik, Parte 4^a, Berlino 1932.
 - E. LINDQUIST: *On velocity formulas for open channels and pipes*. - « Trans. World Power Conference », Stoccolma 1933.
 - G. DE MARCHI: *Correnti uniformi entro grandi condotte e grandi canali* (Relazione finale). - « L'Energia Elettrica », n. 8, 1936.

[2] J. NIKURADSE: *Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen*. - « VDI Forschungsarb », 281, 1926.

[3] J. NIKURADSE: *Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Röhren*. - « Ing. Archiv », 1930, pag. 307.

[4] G. H. KEULEGAN: *Laws of turbulent flow in open channels*. - « J. of Res. of Nat. Bur. of Standards », v. 21, 1938, pag. 707.

[5] A. GHETTI: *Distribuzione della velocità all'interno e sforzi di scorrimento al contorno nelle correnti a regime uniforme*. - « L'Energia Elettrica », n. 11-12, 1950.

[6] R. SMUTEK: *Distribution of shear stress in a rectangular channel*. - « Acta Technica », n. 3, 1957, pag. 290.

[7] H. BAZIN: *Recherches hydrauliques*. - « Mem. div. Savants ». Sci. Math. et Phys., 19, Parigi 1865.

[8] F. VARWICK: *Zur Fließformel für künstliche Gerinne*. - « Dissertation », T. H. Dresden, 1944.

I risultati sono stati riportati anche da:
 O. KIRSCHMER: *Pertes de charges dans les conduits forcés et les canaux découverts*. - « Rev. Gén. de l'Hydr. », n. 51, 1949.

[9] E. MARCHI: *Esperienze di moto uniforme su correnti a pelo libero*. « La Ricerca Scientifica », n. 8, 1956 (con una « Premessa » di G. Supino), pag. 2 448.

[10] E. MARCHI: *Esperienze di moto uniforme su correnti a pelo libero in modelli di canali artificialmente scabri*. - Atti del V Congresso di Idraulica, Torino, maggio 1957.

[11] E. MARCHI: *Terza serie di esperienze sul moto uniforme nei canali*. - « La Ricerca Scientifica », n. 12, 1959, pag. 2 564.

[12] V. A. VANONI: *Velocity distribution in open channels*. - « Civil Engineering », 1941, pag. 356.
 - *Transportation of suspended sediment by water*. - « Trans. ASCE », v. 111, 1956, pag. 67.

[13] N. CHIEN: *The present Status of Research on Sediment Transport*. - « Trans. ASCE », v. 121, 1956, pag. 833.

[14] B. GENTILINI: *Sull'equazione del movimento uniforme delle correnti liquide*. - « L'Energia Elettrica », n. 3, 1935.

[15] C. F. COLEBROOK: *Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws*. - « J. Inst. Civ. Eng. », Londra 1938/39.

[16] O. KIRSCHMER: *Zur Frage einheitlicher Fließformeln für offene Gerinne*. - « Die Wasserwirtschaft », 43, 1953, pag. 146.

[17] P. FRANKE: *Die Reibungsverluste bei stationär gleichförmiger Strömung*. - « Die Wasserwirtschaft », 45, 1954, pag. 15.
 - *Frictional losses of head in steady uniform flow*. - « J. of Sci. Ind. Research », v. 17B, n. 8, 1958, pag. 289.

[18] F. R. HAMA: *Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces*. - « Trans. Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng. » v. 62, 1954.

[19] E. MARCHI: *Alcune considerazioni sulle formule pratiche del moto uniforme*. - « L'Energia Elettrica », n. 9, 1958.

[20] G. LAMMERS: *Hydraulischen Grundlagen zur wirtschaftlichen Bemessung von Entwässerungsleitungen*. - « Dissertation », Rheinische Friedrich Wilhelms-Univ., Bonn, 1959.

[21] G. SUPINO: *Le formule per il calcolo del moto uniforme nelle tubazioni*. - Atti dell'Acc. delle Scienze di Bologna, 1950-51.

[22] L. SCHILLER: *Ueber den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauheitsgrades*. - « Z. a. Math. u. Mech. », 1923, pag. 9.

[23] K. FROMM: *Strömungswiderstand in rauen Röhren*. - « Z. a. Math. u. Mech. », 1923, pag. 339.

[24] W. FRITSCH: *Der Einfluss der Wandrauigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen*. - « Z. a. Math. u. Mech. », 1928, pag. 199.

[25] F. R. LORENZ: *Ueber turbulente Strömung durch Röhre mit kreisringförmigen Querschnitt*. - « Mitt. Inst. f. Strömungsmaschinen », T. H. Karlsruhe, H. 2, 1932, pag. 26.

[26] A. H. GIBSON: *On the depression of the filament of maximum velocity in a stream flowing through an open channel*. - « Proc. Roy. Soc. A. », v. 82, Londra 1909, pag. 149.

[27] G. COCCHI: *Su una questione relativa alle correnti a pelo libero*. - Atti dell'Acc. delle Scienze di Bologna, serie XI, tomo V, 1958.

[28] G. W. JOHNSON: *Rectangular artificial roughness in open channels*. - « Trans. Am. Geoph. Union », Hydrology Section, 1944.

[29] R. W. POWELL: *Flow in a open channel of definite roughness*. - « Trans. ASCE », v. 111, 1946, pag. 531.

[30] L. G. STRAUB, E. SILBERMAN, C. H. NELSON: *Open-channel flow at small Reynolds numbers*. - « Trans. ASCE » v. 123, 1958, pag. 685.

[31] VEN TE CHOW: *Open-channel hydraulics*. - Mc Graw-Hill, New York 1959. Parti I e II (con una vasta bibliografia).

[32] J. MARTINEC: *The effect of river channel roughness on the velocity of flow*. - « VUV », Praga 1958.

[33] W. M. OWEN: *Correlation between pipe and uniform flow in a triangular open channel*. - « Trans Am. Geoph. Union », v. 34, 1953, pag. 213.
 V. anche W. M. LANSFORD e J. M. ROBERTSON nella « Discussione » sulla memoria [33].

[34] W. MÖLLER-HARTMANN: *Abfluss in offenen Dreiecksgerinnen*. - « Mitt. d. Hannoverschen Versuch. f. Grund. u. Wasserbau ». T. H. Hannover, 1957, pag. 16.

[35] E. MARCHI: *Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide*. - Nota II, presentata dall'Accademia dei Lincei nella seduta del 19 novembre 1960.

RECAPITO DELL'AUTORE

PROF. ING. ENRICO MARCHI - Istituto di Idraulica, Università di Bologna, Viale Risorgimento 2.

Contributo allo studio del risalto ondulato
Giornale del Genio Civile, 1966

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEL RISALTO ONDULATO

ENRICO MARCHI

SOMMARIO. - Si analizza il fenomeno della formazione del risalto ondulato in due situazioni limite: I) corrente uniforme a monte del salto; II) corrente uniforme a valle del salto. Si utilizzano le equazioni del moto permanente piano di una corrente con pendenze e curvature del pelo libero non trascurabili. Viene fornita infine una interpretazione dell'inizio del frangimento e ne sono determinati i limiti.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DU RESSAUT ONDULÉ

E. MARCHI

Résumé: En appliquant les équations approchées aux deuxième ordre de l'écoulement plan permanent, dans l'hypothèse de mouvement irrotationnel, l'A. étudie le phénomène du ressaut ondulé dans les deux cas, caractérisés respectivement: le premier par un écoulement torrentiel uniforme à l'amont du ressaut ($F > 1$), le second par un écoulement fluvial uniforme à l'aval du ressaut ($F < 1$).

Ayant écrites les équations pour calculer la hauteur max de la première ondulation, l'A. indique un critère pour établir l'emplacement du ressaut dans les deux situations et donne encore une interprétation de la position du déferlement déterminant les limites, écrits aussi en fonction de la pente du fond.

CONTRIBUTION TO THE STUDY OF THE UNDULATED JUMP

E. MARCHI

Summary: By applying the second-order approximation of two-dimensional steady flow equations for irrotational motion, the A. studies the phenomenon of the undulated jump in the two conditions, characterised respectively: the first by a rapid uniform flow before the jump ($F > 1$), the second by a tranquil uniform flow after the jump ($F < 1$).

The A. indicates a criterium to localize the jump in both cases after having carried the equations of the first wave height. He gives also an interpretation of the beginning of the breaking and determines the limits, writing them too in terms of bottom slope.

BEITRAG ÜBER DEN GEWELLTEN WASSERSPRUNG

E. MARCHI

Zusammenfassung: Der V. verfolgt das Phänomen des gewellten Wassersprunges in zwei Situationen, wobei er die Gleichungen der zweiten Näherung für stationären zweidimensionalen Bewegung in der

wirbelfreien Strömung heranzieht. Die beiden Situationen sind die folgenden: die erste entsteht aus einer gleichförmig fließenden Bewegung vor dem Sprung ($F > 1$), die zweite aus einer Strömung nach dem Sprung ($F < 1$).

Nach der Bestimmung der Gleichungen für die Berechnung der ersten Wellenhöhe bringt der Verfasser ein Kriterium für Feststellung der Lage des Sprunges in beiden Fällen vor und ferner eine Deutung des Beginnes der Wellenbrechung, und bestimmt die Grenze, indem er sie auch in Sohlgefällefunction beschreibt.

Notazioni

α = $\text{sen } \alpha$ = pendenza del fondo ($\cos \alpha \cong 1$)

x = coordinata lungo l'asse del canale

z = quota sul fondo del canale

y = quota del pelo libero (profondità)

p = pressione ($p = 0$ pressione atmosferica)

ρ = densità

γ = ρg = peso specifico

v_x, v_z = componenti della velocità nelle direzioni x e z

$q = \int_0^y v_x dz$ = portata per unità di larghezza

$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v_x^2 + v_z^2}{2g}$ = carico specifico

$M = \int_0^y \frac{p}{\gamma} dz + \int_0^y \frac{v_x^2}{g} dz$

ξ = energia dissipata per attrito, per unità di peso del fluido e per unità di lunghezza del canale

$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ = profondità critica

$F = \frac{v}{\sqrt{g y}} = \frac{q}{y \sqrt{g y}} = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{\frac{3}{2}} = n.$ di Froude della corrente di profondità y e velocità v .

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEL RISALTO ONDULATO

1. — Il moto permanente delle correnti a pelo libero, nei tronchi con variazioni molto graduali della profondità (correnti quasi cilindriche e quindi moto stazionario gradualmente variato) trova, come è noto, una soddisfacente interpretazione teorica fondata sulle ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni e di distribuzione uniforme delle velocità nelle sezioni trasversali. I fenomeni di transizione da correnti lente a correnti veloci o viceversa, dove le ipotesi predette non sarebbero più accettabili, sono generalmente fenomeni localizzati che si possono ben interpretare in modo globale per mezzo del teorema di Bernoulli generalizzato nel passaggio da corrente lenta a veloce, per mezzo del teorema della quantità di moto nel passaggio inverso, quando esso è caratterizzato dalla formazione di un unico vortice (risalto diretto o salto di Bidone).

Meno facile si presenta l'interpretazione dei fenomeni di transizione da corrente veloce a corrente lenta quando essi avvengono senza discontinuità del pelo libero, cioè con la formazione di un risalto on-

dulato. Da un punto di vista generale mi sembra che la maggiore difficoltà derivi dal fatto che ci troviamo in tal caso in presenza di correnti prossime allo stato critico, con una energia specifica intorno al valore minimo, e quindi in condizioni tali da consentire variazioni sensibili di profondità in conseguenza di piccolissime variazioni energetiche. Ciò rende estremamente delicato il problema di una schematizzazione se si vogliono contenere entro limiti accettabili gli scostamenti fra risultati teorici e risultati sperimentali.

In questa nota, riassumendo gli studi sull'argomento che sono stati sviluppati particolarmente negli ultimi dieci anni, s'intende portare un contributo di inquadramento e di sviluppo alla conoscenza del risalto ondulato anche sotto il profilo tecnico, in modo da precisarne gli elementi essenziali.

2. — La prima generalizzazione dell'equazione del moto permanente piano delle correnti a pelo libero ai tronchi con traiettorie non sensibilmente rettilinee e parallele, è stata eseguita da SERRE (1) nel 1953.

Già nel 1948 LEMOINE (2) aveva condotto un interessante studio teorico del risalto ondulato, limitatamente però alla ricerca dell'ampiezza massima e della lunghezza della prima onda e con un procedimento di carattere energetico applicato a un treno d'onde sinusoidali.

Il contributo di Serre va giustamente riconosciuto, sia per l'analisi approfondita del problema, sia per gli sviluppi e per i risultati da lui ottenuti a partire dalle equazioni differenziali che richiameremo più avanti. Ma occorre dire che tali equazioni sono state ottenute da Serre ammettendo una ipotesi restrittiva sulla distribuzione delle componenti normali della velocità, le quali dovrebbero essere rappresentate in coordinate adimensionali da una legge unica, indipendente dalla sezione. Questa ipotesi contrasta con le osservazioni sul risalto ondulato (1) e in particolare non permette di giustificare il fenomeno del frangimento che ha inizio dal colmo della prima onda con velocità dirette in senso opposto a quello del moto della corrente. Su questo argomento torneremo in seguito trattando delle condizioni limite per la formazione del risalto ondulato.

Nel 1954 BENJAMIN e LIGHTILL (3) hanno impostato diversamente l'interpretazione del moto permanente piano, partendo dall'ipotesi di moto irrotazionale. Il loro studio si riferisce alle onde « cnoidali » cioè a quei treni d'onde di forma invariante, scoperti da KORTEWEG e DE VRIES (4), che sono rappresentati dal quadrato della funzione ellittica Jacobiana in x per differenti moduli k , e che tendono per $k \rightarrow 0$ alle onde sinusoidali (Boussinesq) e per $k = 1$ all'onda solitaria (Scott Russel, Rayleigh). I risultati sono ottenuti con un procedimento che appare più accettabile di quello di Serre, sia perché presuppone uno schema che interpreta meglio il fenomeno fisico, sia perché rientra in quei metodi di espansione (o di successive approssimazioni) (5) di cui è stata dimostrata la convergenza da FRIEDRICHS e HYERS (6) per l'onda solitaria nel 1954 e da LITTMAN (7) per le onde cnoidali nel 1957.

Nella seguente trattazione riassuntiva ci atterremo pertanto sostanzialmente alla impostazione di Benjamin e Lightill.

3. — Consideriamo un *moto permanente piano*, ossia il moto permanente che si realizza in un canale prismatico infinitamente largo. Poniamo che il liquido si muova di moto irrotazionale in tutto il nucleo della corrente e concentri nello strato laminare, a contatto con le pareti fisse e di spessore trascurabile, l'effetto dissipativo delle resistenze.

Indichiamo, secondo le notazioni premesse, con H il carico specifico, cioè l'energia meccanica per unità di peso riferita al fondo della sezione che si considera, con M la somma della quantità di moto della corrente e della spinta dovuta alle pressioni normali per unità di larghezza della sezione considerata, divisa per il peso specifico γ del fluido. Data l'ipotesi di moto irrotazionale, H è lo stesso in tutti i punti di una stessa sezione; nel caso di corrente prismatica vale quindi

$$H = y + \frac{q^2}{2g y^2}; \quad [1]$$

(1) La distribuzione delle componenti normali della velocità varia apprezzabilmente da sezione a sezione in un risalto ondulato. Basta osservare che in corrispondenza di un colmo d'onda la velocità tende ad essere massima al fondo, mentre in corrispondenza di un cavo tende ad esserlo in superficie.

M. è una funzione definita globalmente in ogni sezione; per una corrente prismatica essa vale

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy}. \quad [2]$$

Indicando con ξ l'energia dissipata per attrito, per unità di peso del fluido e per unità di lunghezza del canale, segue, dal teorema della quantità di moto,

$$\frac{dM}{dx} = y (i_f - \xi). \quad [3]$$

Se non vi sono perdite localizzate, dovute ad esempio alla presenza di vortici, il bilancio energetico porta alla condizione

$$\frac{dH}{dx} = i_f - \xi. \quad [4]$$

L'equazione [3] resta valida, anche in presenza di una discontinuità del pelo libero; l'equazione [4] dovrebbe invece essere modificata con l'introduzione al secondo membro di un ulteriore termine negativo per mettere in conto le perdite localizzate.

La parte sostanziale dei fenomeni che interessano tronchi brevi di corrente, senza discontinuità del pelo libero, si può ben interpretare trascurando la differenza $i_f - \xi$, che è rigorosamente nulla solo in regime uniforme. Le equazioni [3] e [4] si riducono allora alle $H = \text{cost}$ ed $M = \text{cost}$.

4. — Scriviamo la funzione di corrente Ψ del moto piano irrotazionale in forma di serie di potenze della quota z del punto considerato. Dovendo essere Ψ una funzione armonica, nulla sul fondo, si ha (2)

$$\Psi = z f(x) - \frac{z^3}{3!} f''(x) + \frac{z^5}{5!} f^{IV}(x) - \dots \quad [5]$$

con $f(x)$ funzione da determinare.

Dalla [5] si ricavano subito le componenti della velocità. Limitando gli sviluppi ai termini del 3° ordine in z , segue

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = f(x) - \frac{z^2}{2} f''(x) \quad [6]$$

$$v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -z f'(x) + \frac{z^3}{6} f'''(x). \quad [7]$$

Sul pelo libero ($z = y$) deve essere $\Psi = q$. Quindi

$$f(x) = \frac{q}{y} + \frac{1}{6} y^2 f''(x). \quad [8]$$

Derivando successivamente la [8] e tenendo conto solo dei termini del 3° ordine in z , si ha

$$z^2 f''(x) = \frac{2q}{y^3} z^2 y^2 - q y'' \frac{z^2}{y^2}$$

che, sostituita nella [6] fornisce

$$v_x = \frac{q}{y} \left[1 + \left(\frac{z^2}{y^2} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{y y''}{2} - y^2 \right) \right] \quad [9]$$

La distribuzione delle componenti normali della velocità è uniforme quando $y' = y'' = 0$. Altrimenti essa segue una legge parabolica a partire dal valore sul fondo, massimo in corrispondenza di un

(2) Con apici si indicano le derivate rispetto ad x .

colmo d'onda, minimo in corrispondenza di un cavo. In particolare, sul pelo libero, si ha

$$v_x (z=y) = \bar{v}_x = \frac{q}{y} \left(1 + \frac{1}{3} y y'' - \frac{2}{3} y'^2 \right) \quad [10]$$

$$v_z (z=y) = \bar{v}_z = y' \bar{v}_x \quad [11]$$

Aumentando la curvatura nel colmo di un'onda, dove y'' è negativo, la [10] mostra che v_x può diventare nulla o addirittura negativa.

La funzione H, essendo costante nella sezione, si può scrivere con riferimento a un punto sul pelo libero. Nell'ordine di approssimazione premesso si ha

$$H = y + \frac{q^2}{2gy^2} \left(1 + \frac{2}{3} y y'' - \frac{1}{3} y'^2 \right) \quad [12]$$

Per calcolare la funzione M basta sostituire nella

$$M = \int_0^y \left(\frac{P}{\gamma} + \frac{v_x^2}{g} \right) dz = \int_0^y \left(H - z + \frac{v_x^2}{2g} - \frac{v_z^2}{2g} \right) dz \quad [13]$$

a v_x e v_z le espressioni [6] e [7] e tener conto della [8] e delle derivate successive limitatamente ai termini di ordine z^2 . Si ottiene

$$M = Hy - \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{2gy} - \frac{1}{6} \frac{q^2}{gy} y'^2 \quad [14]$$

Confrontando la [14] con la [12] segue infine:

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy} \left(1 + \frac{1}{3} y y'' - \frac{1}{3} y'^2 \right) \quad [15]$$

Le equazioni [14] [3] [4], oppure [12] e [4], oppure [15] e [3], rappresentano tre sistemi di equazioni differenziali equivalenti per lo studio del moto permanente piano di una corrente che ha il profilo del pelo libero continuo, pendenze e curvature non trascurabili. E' da notare che si tratta pur sempre di equazioni approssimate la cui validità va limitata ai valori di y'^2 e di $|y y''|$ inferiori a 1. Le misure sperimentali mostrano che ordinariamente i termini $|y'|$ e $|y y''|$ sono dello stesso ordine di grandezza, sicché y'^2 è piccolo in confronto a $|y y''|$.

5. — L'integrazione dei sistemi di equazioni predetti presenta difficoltà per ora insormontabili. Benjamin e Lightill hanno analizzato il comportamento della soluzione della [14] considerando H ed M costanti. In breve, si possono verificare i seguenti casi:

a) H ed M costantemente uguali ai valori relativi al moto uniforme. L'unica soluzione possibile è l'onda solitaria;

b) M pari al valore del moto uniforme a monte del salto, di profondità y_1 , H diminuito della quantità $\frac{(y_2 - y_1)^3}{4 y_1 y_2}$. Fra le sezioni 1 e 2 si ha una discontinuità brusca, ossia un salto di Bidone;

c) M pari al valore del moto uniforme, H diminuito di una quantità minore di quella richiesta dal salto diretto. Questa situazione consente il formarsi di un treno di onde cnoidali di lunghezza determinabile in funzione dei valori assegnati di M e di H. Per piccole ampiezze questo onde si confondono con onde sinusoidali.

Alla formazione dello stesso treno di onde si perviene, entro certi limiti, anche nel caso che M abbia un valore diverso da quello del regime uniforme purché sia opportunamente assegnato il valore di H (che può essere anche quello del moto uniforme).

6. — Vogliamo riprendere in esame i risultati analitici procedendo in modo da mettere fisicamente in evidenza il comportamento della corrente e di adeguarne l'interpretazione.

Premettiamo una distinzione fra le due situazioni limiti nelle quali si può presentare il risalto ondulato e che caratterizzano sostanzialmente tutti i casi possibili.

I) Corrente *uniforme* veloce *a monte*, di profondità y_1 e n^0 di Froude F_1 , che si raccorda attraverso il risalto con una corrente lenta permanente a valle ($i_f > i_c$).

II) Corrente veloce permanente a monte che si raccorda con una corrente lenta *uniforme a valle*, di profondità y_2 e n^0 di Froude F_2 ($i_f < i_c$).

La prima situazione è stata particolarmente studiata da Serre nella memoria citata (1) e ad essa si riferiscono la maggior parte delle ricerche sperimentali come quella di Favre (8) e come le recenti di Sandover e Zienkiewicz (9). Ciò si spiega con il fatto che tale situazione interpreta non solo il fenomeno stazionario che stiamo studiando ma anche la propagazione verso monte del fronte di un'onda di traslazione positiva. Si vedano in proposito, oltre alle op. citate, le osservazioni di Serre e di Lemoine e lo studio sperimentale di Benini, Vecellio, e Casara (10).

Al contrario la seconda situazione è stata generalmente trascurata. Come fenomeno stazionario mi sembra che essa sia invece la più frequente a verificarsi, in quanto ricorre in alvei con pendenza del fondo minore, ma non molto diversa, dalla critica, cioè in alvei moderatamente tranquilli. Può presentarsi per esempio a valle dei salti di fondo o delle traverse con profilo raccordato, a valle delle luci di fondo e in genere di tutte le opere che creano il passaggio attraverso lo stato critico in un tronco dell'alveo predetto.

7. — *Situazione I* ($i_f > i_c$; corrente uniforme a monte; ved. fig. 1)

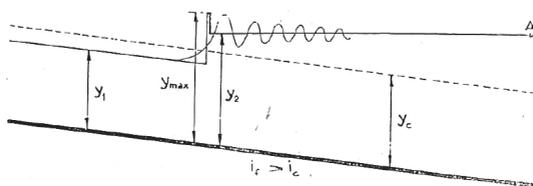


Fig. 1

La funzione carico specifico H e la funzione M sono costanti nel tronco a monte del risalto ondulato, con i valori H_1 ed M_1 dati dalle [1] e [2] con la profondità y_1 . Esse aumentano procedendo verso valle con il crescere della profondità perché diventa positiva la differenza $i_f - \xi$. Con buona approssimazione si possono ritenere costanti fino al colmo della prima onda.

Le equazioni [12] [14] [15] si riducono allora alla

$$y'^2 = \frac{3}{F_1^2} \left(\frac{y}{y_1} - 1 \right)^2 \left(F_1^2 - \frac{y}{y_1} \right) \quad [16]$$

che è l'equazione dell'onda solitaria. La massima profondità y_{max} si verifica per $y' = 0$, cioè vale

$$y_{max} = F_1^2 y_1 = \frac{q^2}{g y_1^2} \quad [17]$$

Dopo questa sezione occorre prendere in considerazione gli incrementi graduali di H e di M , cioè insieme le equazioni [15] [3] e [4]. Non sarebbe possibile farlo senza ricorrere a un laborioso procedimento alle differenze finite, ma è chiaro che si verificano le condizioni per la formazione di un treno di onde cnoidali smorzate. L'andamento della curva che esce dal punto $y = y_1$, $y' = 0$, nel piano delle fasi y, y' , è riportato indicativamente nella fig. 2. Il tratto marcato fra $y = y_1$ e $y = y_{max}$ rappresenta l'equaz. [16]; il punto origine è un colle dell'equaz. abbreviata

$$y'' - \frac{3}{F_1^2 y_1} \left(F_1^2 - 1 \right) \left(\frac{y}{y_1} - 1 \right) = 0$$

Nel piano H, y l'andamento della stessa curva è indicato nella fig. 3.

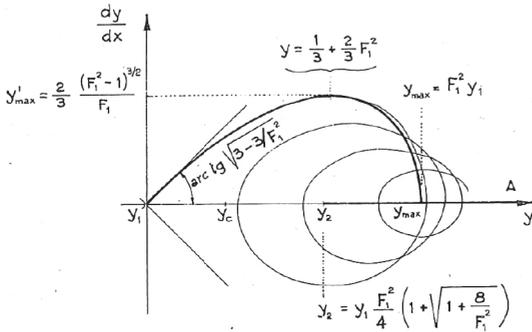


Fig. 2

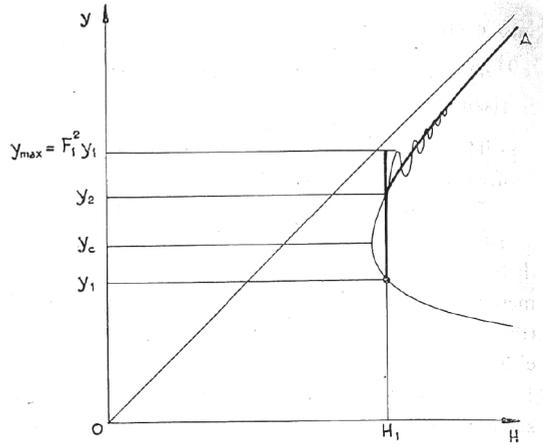


Fig. 3

L'osservazione delle figg. 2 e 3 suggerisce di schematizzare il profilo del pelo libero seguendo le indicazioni delle linee marcate, come si vede nella fig. 1. Ciò equivale a ritenere che il raccordo fra corrente veloce e corrente lenta avvenga sotto la condizione

$$y_1 + \frac{q^2}{2 \cdot g \cdot y_1^2} = y_2 + \frac{q^2}{2 \cdot g \cdot y_2^2} \quad [18]$$

da cui, con facili trasformazioni,

$$y_2 = y_1 \frac{F_1^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{F_1^2}} \right). \quad [19]$$

In tal modo, tracciato il profilo di rigurgito assegnato da valle (V. punto A di fig. 1) è possibile localizzare la posizione del risalto. S'intende che i limiti di approssimazione sono modesti, in relazione con la lenta variazione di profondità della corrente di valle. Il valore $y_{\max} = F_1^2 y_1$, profondità della prima onda, è leggermente in difetto rispetto ai valori sperimentali (V. Sandover e Zienkiewicz [9]), causa il trascurato primo incremento di H e di M. Le differenze sono però normalmente contenute entro il 3 ÷ 4%. Solo in condizioni prossime a quelle di frangimento si hanno scarti sensibilmente maggiori.

8. — *Situazione II* ($i_f < i_c$; corrente uniforme a valle. V. fig. 4).

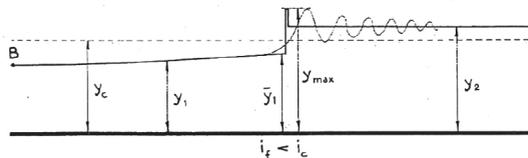


Fig. 4

Le funzioni H ed M sono costanti solo all'infinito a valle dove assumono i valori H_2 ed M_2 che si ottengono dalle [1] e [2] con la profondità y_2 .

Nella corrente veloce, a monte del salto, essendo la profondità minore di quella del moto uniforme, la differenza $i_f - \xi$ è sempre negativa. Procedendo verso valle le funzioni H ed M continuano quindi a diminuire fino alla formazione del salto. Successivamente, l'oscillazione quasi simmetrica del pelo libero intorno alla profondità di moto uniforme, porta a ritenere che in prima approssimazione H resti mediamente costante intorno al valore H_2 ed M aumenti gradualmente fino a raggiungere, all'infinito a valle il valore M_2 .

Appare pertanto indicativa, nel piano delle fasi, la rappresentazione delle curve che si ottengono dall'equaz. [15] con le ipotesi:

$$H = H_2$$

$$M = M_2 - \frac{1}{6} \frac{q^2}{g y_2^2} \vartheta^2$$

dove si è indicato con ϑ il valore della pendenza y' per $y = y_2$. Ogni curva è caratterizzata da un particolare valore di ϑ .

Si ha, in queste condizioni,

$$y'^2 = \frac{3}{F_2^2} \left(\frac{y}{y_2} - 1 \right)^2 \left(F_2^2 - \frac{y}{y_2} \right) + \frac{y}{y_2} \vartheta^2. \quad [20]$$

Per $y' = 0$ si ottiene un'equaz. cubica in y/y_2 che, per $\vartheta = 0$, ha l'ovvia radice doppia $y = y_2$, e per un particolare valore $\vartheta = \vartheta_0$ ha ancora una radice doppia:

$$y_1 = y_2 \frac{F_2^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{F_2^2}} \right) \quad [21]$$

e la radice semplice:

$$y_{\max} = y_2 \frac{F_2^2}{(y_1/y_2)^2} = \frac{16 y_2}{F_2^2 (1 + \sqrt{1 + 8/F_2^2})^2}. \quad [22]$$

Per $0 < \vartheta < \vartheta_0$ si hanno tre radici reali, di cui due comprese fra y_1 e y_{\max} . Evidentemente l'equazione [20] con $\vartheta = \vartheta_0$ è ancora la [16] (equazione dell'onda solitaria), tenuto conto che la [21] esprime la condizione di conservazione dell'energia specifica fra le sezioni 1 e 2 (3).

La fig. 5 mostra l'andamento di alcune curve.

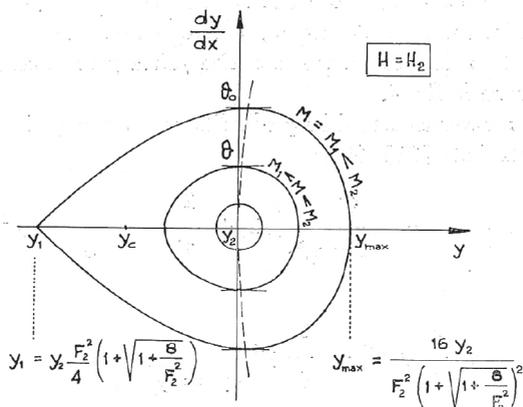


Fig. 5

Il punto di coordinate $y = y_2$ $y' = 0$ è un centro dell'equazione differenziale

$$y'' + \frac{3}{F_2^2 y_2} \left(1 - F_2^2 \right) \left(\frac{y}{y_2} - 1 \right) = 0$$

(3) L'equazione [21] porta alla relazione

$$1 + \frac{F_1^2}{2} = 1 + \frac{F_2^2}{2}$$

$$\frac{F_1^{2/3}}{F_2^{2/3}} = \frac{F_2^{2/3}}{F_1^{2/3}}$$

fra i numeri di Froude F_1 ed F_2 .

che si ottiene linearizzando la [20]. Le piccole oscillazioni sono quindi sinusoidali ed hanno lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2 \pi y_2}{\sqrt{3/F_2^2 - 3}} \cdot (4) \quad [23]$$

Quando l'ampiezza è maggiore le oscillazioni sono cnoidali; la lunghezza d'onda è più grande della [23] e si può calcolare per mezzo di un integrale ellittico del primo ordine (Cfr. memoria [3]).

Tenendo conto della schematizzazione premessa in questo numero, cioè di una variazione graduale della funzione M, appare giustificato l'andamento indicativo rappresentato con segno sottile nella fig. 6.

Nella sezione con profondità y_1 , a monte del salto, la corrente non è in moto uniforme e quindi il punto corrispondente della curva effettiva ha un'ordinata y' piccola ma diversa da O.

Per maggior chiarimento è riportato nella fig. 7 l'andamento delle stesse curve nel piano H, y.

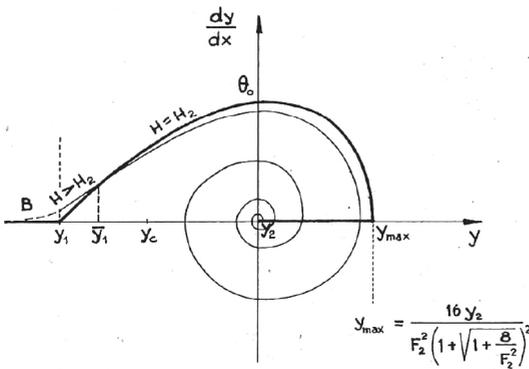


Fig. 6

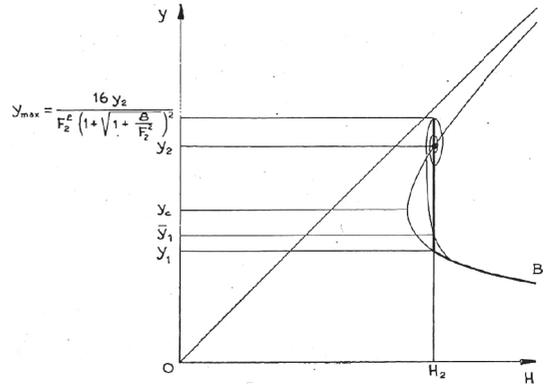


Fig. 7

La profondità massima, corrispondente al colmo della prima onda, è prevedibilmente in difetto rispetto al valore y_{max} espresso dalla [22] sicché quest'ultima ha il vantaggio d'essere prudentiale.

Per quanto riguarda la localizzazione del risalto, occorre premettere che non esiste una profondità unica a monte del salto. Il profilo della corrente veloce si alza prima gradualmente, poi con accentuata pendenza e curvatura, come mostra la fig. 4.

Il raccordo rapido, con attraversamento della profondità critica, ha però inizio ad una profondità \bar{y}_1 poco più grande della y_1 data dalla [21]. Si ha

$$H_2 = \bar{y}_1 + \frac{q^2}{2 g \bar{y}_1^2} \left(1 + \frac{2}{3} y y'' - \frac{1}{6} y'^2 \right) \quad y = \bar{y}_1$$

Ponendo

$$\left(1 + \frac{2}{3} y y'' - \frac{1}{6} y'^2 \right)_{y = \bar{y}_1} = \alpha \quad [24]$$

segue la condizione

$$\bar{y}_1 + \alpha \frac{q^2}{2 g \bar{y}_1^2} = y_2 + \frac{q^2}{2 g y_2^2} \cdot \quad [25]$$

Il coefficiente α è maggiore ma poco diverso da 1. La sua precisazione dev'essere fatta per via sperimentale. Indicativamente gli si può attribuire il valore 1,10 che è apparso giustificato in alcune prove su modello.

(4) Linearizzando il sistema di equazioni [12]-[4] si ottiene una equazione che ha, nel punto indicato, un fuoco. Le piccole oscillazioni sono sinusoidali smorzate con lunghezza d'onda espressa sempre dalla [23] e coefficiente esponenziale di attenuazione

$$\eta = - \frac{3 i_f}{y_2 (1 - F_2^2)}$$

Il problema della localizzazione del risalto ondulato risulta così schematizzato. Assegnata la corrente uniforme lenta di valle, di profondità y_2 , e tracciato il profilo di rigurgito della corrente veloce definita da monte (V. punto B della fig. 4), basterà cercare in questa corrente la profondità $\overline{y_1}$ data dalla [25]. In questa sezione si può ritenere che abbia inizio il risalto.

9. — *Limiti di frangimento.*

Resta da giustificare la ragione per la quale, oltre certi limiti, avviene il frangimento del salto, con inizio sulla prima onda.

Si è già detto, riportando al n. 4 la formula [12], che la componente orizzontale della velocità può annullarsi sul colmo di un'onda se si accentua fortemente la curvatura. Si raggiunge allora una situazione limite oltre la quale, invertendosi il verso della velocità in superficie, incomincia a formarsi un vortice. Quando si verifica la condizione $v_x = 0$ sul colmo dell'onda (cui corrisponde anche $v_z = 0$) la profondità diventa pari al carico specifico. Se ne deduce che il salto ondulato può mantenersi senza discontinuità del pelo libero finché

$$y_{\max} = F_1^2 y_1 < H_1 \text{ nella I situazione} \quad [26]$$

e finché

$$y_{\max} = \frac{16 y_2}{F_2^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{F_2^2}} \right)^2} < H_2 \text{ nella II situazione.} \quad [27]$$

$$\text{Essendo } H_1 = y_1 \left(1 + \frac{F_1^2}{2} \right) \text{ ed } H_2 = y_2 \left(1 + \frac{F_2^2}{2} \right)$$

dalle [26] e [27] derivano i limiti $1 < F_1^2 < 2$ e $1 > F_2^2 > 0,47$ ossia:

$$1 < F_1 < 1,4 \quad [28]$$

$$1 > F_2 > 0,7. \quad [29]$$

Il limite trovato per via sperimentale nella I situazione è sensibilmente inferiore a 1,4, intorno a 1,25 (Favre). La spiegazione deve ricercarsi nel fatto che, con il crescere del n° di Froude, le approssimazioni introdotte per giungere all'equaz. [16] sono sempre meno accettabili. Con uno scarto del 10% fra il valore effettivo di y_{\max} e il valore $F_1^2 y_1$, il limite [28] scende già da 1,4 a 1,3 (5).

I valori [28] e [29] mi sembrano peraltro sufficientemente indicativi perché il frangimento, finché il n° di Froude della corrente uniforme è contenuto entro tali limiti, appare appena apprezzabile. Per valori di F_1^2 variabili fra 2 e 3 (cui corrispondono nell'altro caso valori di F_2^2 variabili fra 0,5 e 0,3)

(5) Una conferma indiretta si ha nel fatto che, operando con un procedimento concettualmente equivalente sulla funzione M, anziché sulla H, si trova per F_1 un valore limite un po' più piccolo

Calcoliamo infatti M nelle condizioni di velocità nulla in superficie ed eseguiamo il confronto con il valore

$$M_1 = y_1^2 \left(\frac{1}{2} + F_1^2 \right).$$

Si ha dalla [11], con $v_x (z=y) = 0$,

$$v_x = \frac{3q}{y} \left(1 - \frac{z^2}{y^2} \right)$$

$$\text{e quindi } M = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{g} \int_0^y v_x^2 dz = \frac{y^2}{2} + \frac{3}{5} \frac{q^2}{g y}$$

Con $y = y_{\max} = F_1^2 y_1$ dalla $M = M_1$ deriva

$$F_1^4 - 2 F_1^2 + \frac{1}{5} = 0 \text{ cioè } F_1^2 = 1,89 \text{ (anziché } 2).$$

Se si aumenta y_{\max} rispetto al valore $F_1^2 y_1$, il limite discende ulteriormente, rimanendo però sempre inferiore a quello che si ricava dalla $y_{\max} = H_1$. La coincidenza si verifica soltanto introducendo degli incrementi di H e di M molto piccoli (dell'ordine dell'1-2%) ma diversi fra loro. E' possibile ritrovare in tal modo il valore ottenuto sperimentalmente; il risultato non è tanto significativo in sé stesso quanto come giustificazione della precedente impostazione concettuale.

l'esperienza mostra che il salto presenta ondulazioni con frangimenti sempre più vistosi e conseguenti diminuzioni di ampiezza delle onde. Esso si riduce ad un unico vortice, cioè al salto di Bidone, solo se $F_2^2 > 3$ o corrispondente se $F_2^2 < 0,30$.

Anziché nei confronti del n° di Froude, gli stessi limiti si possono scrivere in termini della pendenza del fondo rispetto alla pendenza critica $i_c = \frac{g}{\chi^2}$ (dove si indica con χ il coefficiente di attrito di Chèzy).

Trascurando le variazioni dei coefficiente di attrito con la profondità, date le piccole differenze fra la profondità del moto uniforme y_u e la profondità critica y_c , si ha

$$\frac{i_f}{i_c} = \left(\frac{y_c}{y_u} \right)^3 = F^2. \quad [30]$$

Quindi il passaggio da corrente veloce a corrente lenta avviene con un *salto ondulato* se

$$0,5 i_c < i_f < 2 i_c \quad [31]$$

avendo arrotondato 0,47 i_c alla prima cifra decimale.

Oltre questi limiti ha inizio il frangimento che è completo (*salto di Bidone*) quando

$$i_f < 0,3 i_c \quad \text{oppure} \quad i_f > 3 i_c \quad [32]$$

I limiti [31] e [32] sono particolarmente significativi nel campo delle sistemazioni fluviali (6).

Le considerazioni precedenti possono estendersi anche al caso di alveo rettangolare di larghezza b non grande rispetto alla profondità. Essendo allora $i_c = \frac{g}{\chi^2} \frac{b + 2 y_c}{b}$ e tenendo conto dell'equazione del moto uniforme, la [30] viene sostituita dalla

$$\frac{b + 2 y_c}{b + 2 y_u} \cdot \frac{i_f}{i_c} = F^2. \quad [33]$$

Le condizioni [31] e [32] si modificano quindi molto poco se rimangono invariati i limiti nei confronti di F ; ciò che naturalmente è condizionato dalla accettabilità dello schema di moto piano.

(6) Ad esempio, in un alveo rettangolare largo che abbia pendenza inferiore alla critica, ma maggiore di 0,5 i_c , e sia percorso da una corrente uniforme, l'introduzione di una accidentalità localizzata che comporti la formazione di un tronco veloce, comunque breve, crea sempre a valle un raccordo ondulato.

BIBLIOGRAFIA

- (1) F. SERRE: *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux*. « La Houille Blanche », n. 3-6, 1953.
- (2) R. LEMOINE: *Sur les ondes positives de translation dans les canaux et sur le ressaut ondulé de faible amplitude*. « La Houille Blanche », n. 2, 1948.
- (3) T.B. BENJAMIN e M.J. LIGHTILL: *On cnoidal waves*. « Proc. Roy. Soc », vol. 224, pag. 448, 1954.
- (4) D. KORTEWEG e G. DE VRIES: « Phil. Mag. », vol. 39, pag. 422, 1895.
- (5) J.W. WEHAUSEN e E.V. LAITONE: *Surface waves*. « Handbuch der Physik », vol. IX, pag. 701-714, 1960.
- (6) K.O. FRIEDRICHS e D.H. HYERS: *The existence of solitary waves*. « Comm. Pure and Appl. Math. », vol. VII, pagg. 517-550, 1954.
- (7) W. LITTMAN: *On the existence of periodic waves near critical speed*. « Comm. Pure and Appl. Math. », vol. X, pagg. 241-269, 1957.
- (8) H. FAVRE: *Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts*. Ed. Dunod, Paris, 1935.
- (9) J.A. SANDOVER e O.C. ZIENKIEWICZ: *Experiments on surge waves*. « Water Power », vol. 9, n. 11, 1957.
- (10) G. BENINI, A. VECELLIO, F. CASARA: *Fenomeni ondosi nel canale di carico dell'impianto idroelettrico di Zevio sull'Adige*. « L'Energia Elettrica », n. 7, 1961.

Open-channel Flow near the Critical Depth
Meccanica, 1966

OPEN - CHANNEL FLOW NEAR THE CRITICAL DEPTH

Enrico Marchi *

SUMMARY: The stationary surface waves in a quasi-uniform flow approaching the critical conditions are shown to be possible only around a basic normal depth greater than critical.

The demonstration is based on the second order equation of steady two-dimensional flow (cnoidal waves equation).

1. Introduction.

From experimental observations it is known that conditions of uniform flow cannot be exactly obtained in a prismatic channel if the bed slope is near to the critical state (Fig. 1-a). The profile of the free surface in such a case does not remain straight and parallel to the bottom but it appears unstable and presents stationary undulations around the critical depth (that depth at which, for a given discharge, the specific energy of the parallel flow reaches a minimum).

In this article, assuming the equations of two-dimensional potential flow limited to the second derivatives of depth, we show that the existence of stationary waves of appreciable amplitude in a quasi-uniform flow may be justified only with a basic normal depth which is close to but always greater than critical depth.

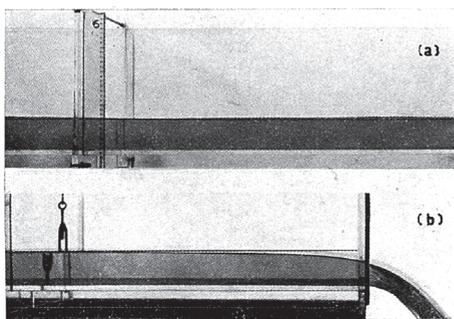


Fig. 1.

Fig. 1. Profiles of: (a) quasi-uniform flow near the critical depth; (b) free overfall.

When the depth is less than the critical it is possible to have, on the contrary, either a uniform flow profile or a supercritical flow profile with depth decreasing gradually in the direction of the movement without oscillations. An experimental example of the latter situation is the flow

profile of the "free overfall" at the terminal reach of a prismatic channel (Fig. 1-b).

2. Basic equations.

Constant discharge is the continuity equation for an open channel steady flow. Other important quantities in describing motion are the following:

a) the specific head H , that represents the energy per unit weight of the liquid with reference to the section bottom;

b) the specific force, that represents the momentum flow rate at a section increased by the normal pressure force.

Taking into consideration two-dimensional flow we shall refer to the unit width and indicate y the depth, q the discharge per unit span and M the momentum rate per unit span, corrected by pressure force and divided by the specific weight γ .

In the parallel potential flow the velocity q/y is uniformly distributed in every section and the pressure varies according to hydrostatic law.

This being the case

$$H = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (1)$$

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy} \quad (2)$$

At the critical depth

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3)$$

H and M take the following minimum values (from Eqs. (1) and (2))

$$H_c = \frac{3}{2} y_c \quad (4)$$

$$M_c = \frac{3}{2} y_c^2 \quad (5)$$

If the flow is not a parallel flow, H and M are functions of the depth y as well as of its derivatives. Neglecting the influence of those of the 3rd order, the expressions of H and M are (1):

$$H = y + \frac{q^2}{2gy^2} \left(1 + \frac{2}{3} yy'' - \frac{1}{3} y'^2 \right) \quad (6)$$

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy} \left(1 + \frac{1}{3} yy'' - \frac{1}{3} y'^2 \right) \quad (7)$$

(1) With apices we indicate the derivatives with respect to the spatial coordinate x .

* Professore di Idraulica, Università di Genova.

Eqs. (6) and (7) have shown that they can be used satisfactorily for the analysis of phenomena in which the free surface has no small slopes and curvatures, such as the solitary wave (Scott Russel, Boussinesq, Rayleigh) and cnoidal waves (Korteweg and De Vries). For the development of these equations, one should consult papers of Serre [1] and of Benjamin and Lighthill [2], or the chapter "Surface Waves" of Wehausen and Laitone [3] in "Handbuch der Physik". A brief exposition of the procedure is also given by the author in paper [4].

3. Formulation of the problem.

Let us suppose that the flow, which should have a uniform behaviour near the critical state, should be perturbed: let us look for the conditions that will keep up this disturbance indefinitely and will cause the formation on the surface of a train of stationary waves.

Variations of depth near the critical are considered small enough to make the relative variations of H and M , being small and of the second order, negligible. Thus the conditions $H = \text{Const}$ and $M = \text{Const}$ indicate a state that may be of uniform or only quasi-uniform flow (the resistance is balanced by the gravitational forces).

We can eliminate y'' from Eqs. (6) and (7)

$$y' = \frac{6g y^2}{q^2} \left(H - \frac{M}{y} - \frac{y}{2} + \frac{q^2}{2g y^2} \right). \quad (8)$$

Substituting (3), (4), (5) in (8) and introducing

$$\eta = \frac{y}{y_c} \quad \text{and} \quad \theta = \frac{dy}{dx} \quad (9)$$

we obtain:

$$\theta^2 = 3 \left(1 - 3 \frac{M}{M_c} \eta + 3 \frac{H}{H_c} \eta^2 - \eta^3 \right) \quad (10)$$

which is the equation employed by T. B. Benjamin and M. J. Lighthill in their article "On cnoidal waves". This equation also lends itself well to use in the analysis of flow profiles under the conditions of the premise.

4. Considerations and conclusions.

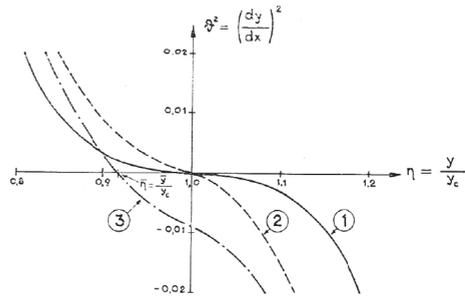
For a parallel flow H_c and M_c are the minimum values that H and M may have for a given discharge. It is not so when the slope and the curvature of the free surface are appreciable. In general the ratios H/H_c and M/M_c may therefore be ≤ 1 .

a) If H and M have values less than or equal to the critical values H_c and M_c , the slope θ of the free surface, as given in Eq. (10), is zero only once for $y = y_c$ (curves 1 and 2, Fig. 2) or for $y = \bar{y} < y_c$ (curve 3 of Fig. 2).

Depths greater than \bar{y} (or than y_c) can not be realized under the preceding conditions, because θ^2 should assume a negative value. The profile of the free surface can be maintained parallel to the bottom only if $H = H_c$ constantly (uniform flow with normal depth $y = y_c$); if $H < H_c$, on the contrary, it is impossible to have a parallel flow. Therefore, the surface profile must be lowered, proceeding in the flow direction with a continuous increase in the slope θ .

The latter case is possible also if H does not remain constant but diminishes in the downstream direction (and

even if the decrease originates at $H = H_c$). The experimental example of "free overfall" has already been cited.

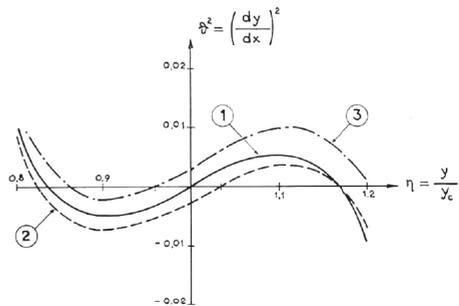


- ① $\frac{M}{M_c} = \frac{H}{H_c} = 1$
- ② $\frac{M}{M_c} = \frac{H}{H_c} = 0.990$
- ③ $\frac{M}{M_c} = 0.991$; $\frac{H}{H_c} = 0.990$

Fig. 2. Solutions of Eq. (10).

b) If H and M have greater values than H_c and M_c , the cubic at the right-hand side of Eq. (10) has three real zeros on condition that the difference $|H/H_c - M/M_c|$ is small enough ⁽²⁾.

One of the zeros is given by $y = y_c$ if $H/H_c = M/M_c$ (curve 1 of Fig. 3); otherwise this zero becomes $> y_c$ (curve 2 of Fig. 3) or $< y_c$ (curve 3 of Fig. 3) according to whether M/M_c is $>$ or $<$ H/H_c , within the indicated limits.



- ① $\frac{M}{M_c} = \frac{H}{H_c} = 1.01$
- ② $\frac{M}{M_c} = 1.010 > \frac{H}{H_c} = 1.0097$
- ③ $\frac{M}{M_c} = 1.0097 < \frac{H}{H_c} = 1.010$

Fig. 3. Solutions of Eq. (10).

⁽²⁾ The limit conditions are the following:

$$\text{if } \frac{M}{M_c} > \frac{H}{H_c} \text{ then } \left(\frac{M}{M_c} - \frac{H}{H_c} \right) < \frac{2}{3} \left(\frac{H}{H_c} - 1 \right)^{3/2};$$

$$\text{if } \frac{M}{M_c} < \frac{H}{H_c} \text{ then } \left(\frac{H}{H_c} - \frac{M}{M_c} \right) < \frac{2}{3} \left(\frac{M}{M_c} - 1 \right)^{3/2}.$$

In every case examined, θ^2 is positive between the second and third zero of the cubic, with a maximum θ_m^2 . Therefore, in this field of depth, undulations of the free surface can appear with slopes varying from $-\theta_m$ and $+\theta_m$ (Fig. 4).

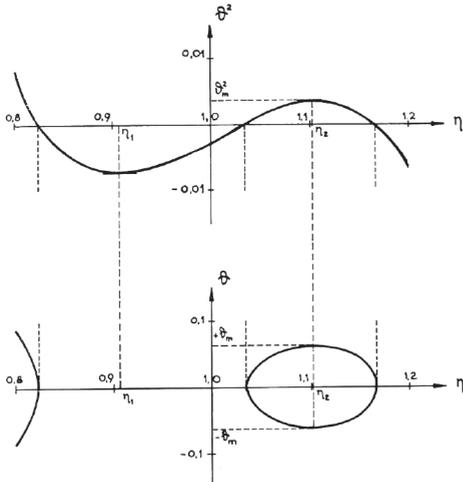


Fig. 4. Characteristics of Eq. (11) with:
 $M/M_c = 1.010$, $H/H_c = 1.0097$

In Fig. 4 is shown the behaviour of the characteristics of the equation

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{9}{2} \left(\frac{-M/M_c + 2\eta H/H_c - \eta^2}{\theta} \right) \quad (11)$$

which is obtained by derivation of Eq. (10) with respect to η (3).

We shall indicate with η_1 and η_2 , in increasing order, the roots of the equation

$$\eta^2 - 2\eta \frac{H}{H_c} + \frac{M}{M_c} = 0$$

(3) Eq. (11) remains formally unchanged even if H and M are not constant. In fact, it is enough to derive Eq. (8) with respect to x keeping in mind that, in the absence of surface discontinuity, $dM/dx = y dH/dx$ (see references [1] and [4]).

that is

$$\eta_{1,2} = \frac{H}{H_c} \mp \sqrt{\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 - \frac{M}{M_c}} \quad (12)$$

The points $(\eta_1, 0)$ and $(\eta_2, 0)$ are singular points of Eq. (11) that is, of the equation

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{9}{2} \frac{(\eta - \eta_1)(\eta_2 - \eta)}{\theta} \quad (13)$$

Zero values of the surface slope θ and of the curvature θ' correspond to the singular points, so that the depth $y_1 = y_c \eta_1$ and $y_2 = y_c \eta_2$ are those of uniform flow with given values of g , H and M (it is understood that there is an opportune slope of the bottom in every case, supercritical for y_1 , and subcritical for y_2).

Since, as Fig. 4 shows and as can immediately be verified, $(\eta_1, 0)$ is a *saddle* point and $(\eta_2, 0)$ is a *center* of equation (13), only around this last can the periodic solutions which were mentioned at the beginning (surface undulations) exist.

Eq. (12) shows that, since $H/H_c > 1$, it must always be true that

$$\frac{y_2}{y_c} > 1 \quad (14)$$

the normal depth y_2 , basic depth around which a train of stationary surface waves of small but not insignificant amplitude can develop, is greater than the critical depth (4).

Received 8 July 1966.

(4) For small amplitude oscillations (which are sinusoidal in form) Eq. (13) can be bridged in the neighbourhood of the point $(\eta_2, 0)$ obtaining the linear equation in y

$$y'' + \frac{9}{2} \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{y_c^2} \right) y = 0 \quad (15)$$

from which is immediately deduced the wave length

$$L = \frac{2\pi}{3} \frac{y_c}{\sqrt[4]{\left(\frac{H}{H_c}\right)^2 - \frac{M}{M_c}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{y_c}{\sqrt{\frac{y_2}{y_c} - \left(\frac{y_c}{y_2}\right)^2}} \quad (16)$$

of the small undulations around y_2 .

REFERENCES

- [1] F. SERRE, *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux*, in "La Houille Blanche", n° 3-6, 1953.
- [2] T. B. BENJAMIN and M. J. LIGHTHILL, *On cnoidal waves*, in "Proc. Roy. Soc.", vol. 224, pp. 448, 1954.
- [3] J. W. WEHAUSEN and E. V. LAITONE, *Surface waves*, in "Handbuch der Physik", vol. IX, pp. 701-714, 1960.
- [4] E. MARCHI, *Contributo allo studio del risalito ondulato*, in "Giornale del Genio Civile", n° 9, Sept. 1963.

Resistance to Flow in Fixed-bed Channels with the Influence of
Cross-sectional Shape and Free Surface
Proc. XIIth of I.A.H.R., 1967

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR HYDRAULIC RESEARCH

RESISTANCE TO FLOW IN FIXED-BED CHANNELS
WITH THE INFLUENCE OF CROSS-SECTIONAL SHAPE AND FREE SURFACE

by Enrico MARCHI

Professor, Director Institute of Hydraulics,
Univ. of Genoa - ItalyS Y N O P S I S

The analytical transfer of the velocity and resistance laws from circular pipes to closed-conduits of general cross-sectional configuration and to open channels, meets the known difficulties which are due to the non-uniform distribution of the wall shear stress and, in the latter case, due also to the free surface influence.

In this paper the study is approached by introducing a new expression of the velocity distribution along normals to the wall. This law, which contains the logarithmic one as a limit-law in the wall region, appears to be substantially justified by the experimental observations. From it, following a classic pattern, the resistance laws are deduced. There is shown the possibility of interpreting the effect of section shape, and also the free surface influence in open channels, with the introduction of only one shape coefficient, which appears as a multiplier of the hydraulic radius.

Results of tests on channels with homogeneous and non-homogeneous roughness, conducted by the A. in 1957-1960 gave some values of the shape coefficient.

R É S U M É

Le transfèrement analytique des lois de vitesse et de résistance des tuyaux circulaires aux conduites de section d'une forme quelconque et aux canaux découverts, rencontre les bien connues difficultés qui sont dues à la distribution non uniforme des tensions tangentielles à la paroi et, dans le deuxième cas, aussi à l'influence de la surface libre.

Dans ce rapporte l'étude est conduite en introduisant une nouvelle expression de la distribution de la vitesse le long les normales à la paroi. Cette loi, qui contient la logarithmique comme une loi limite dans la région près de la paroi, se montre substantiellement justifiée par les observations expérimentales. C'est de là que l'A. a déduit, suivant un modèle classique, les lois de résistance. On y représente les possibilités d'interpréter l'effet de la forme de la section et aussi l'influence de la surface libre dans les canaux découverts par l'introduction d'un seul coefficient de forme qui apparaît comme un multiplicateur du rayon hydraulique.

Les résultats d'expériences sur canaux avec une rugosité homogène et non homogène, conduites par l'A. dans 1957-1960, ont donné des valeurs du coefficient de forme.

RESISTANCE TO FLOW IN FIXED-BED CHANNELS
WITH THE INFLUENCE OF CROSS-SECTIONAL SHAPE AND FREE SURFACE

by Enrico MARCHI

1. I N T R O D U C T I O N

The purpose of the present paper is to show the validity, for the calculation of friction factor in open channels, of formulae analogous to those of circular pipes, but by taking into account, in a simple form, also the influence of cross-sectional shape and free surface.

Resistance equations of this type were already presented by the A. in two papers of 1960-61¹, as conclusion of a set of experimental researches on the uniform turbulent flow in open channels. Now the preceding results are obtained with less restrictive hypothesis for the semiempirical analysis of the velocity distribution.

For a broad bibliographic panorama on the subject one may see the report on "Friction Factors in Open Channels" of the Committee on Hydromechanics of the Hydraulics Division². Further important references are in a recent paper of Rouse³. Here will be mentioned only the articles to which explicit reference is made.

2. V E L O C I T Y D I S T R I B U T I O N

2.a - CIRCULAR CONDUITS

In circular conduits (and also in bidimensional channels) the purely logarithmic velocity law is usually accepted. Using v to indicate local velocity, ρ e ν respectively density and kinematic viscosity, τ_0 the shear stress on the boundary, y the wall distance (with maximum y_0) and placing $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ and $\eta = y/y_0$, one may write

$$\frac{v}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \eta + \frac{v_0}{u_*} \quad (1)$$

in which K is the Kármán's universal constant and v_0/u_* is a function of $y_0 u_*/\nu$ and of one or more adimensional roughness parameters r_s . If the latter is such as can be defined with only one dimension - for example the equivalent sand roughness ϵ (Nikuradse) - then the simplest functional definition of v_0/u_* is

$$\frac{v_0}{u_*} = -\frac{1}{K} \ln \left(c_s \frac{\nu}{y_0 u_*} + c_r \frac{\epsilon}{y_0} \right) \quad (2)$$

in which c_s and c_r are constants, relative respectively to smooth flow ($\epsilon = 0$) and to fully rough flow ($\nu = 0$). Eq. (1), originally deduced on the basis of Prandtl's mixing length theory, is now justified in an immediate manner

-
- 1 - E.Marchi: "Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide". Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Serie VIII, Vol. XXIX, Fasc. 5,6 - Nov.Dec. 1960.
"Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti". L'Energia Elettrica, Vol. XXXVIII, Fasc. 4,5 - 1961.
- 2 - Progress Rep. of the Task Force on Friction Factors in Open Channels. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 89, No. HY2, March 1963.
- 3 - H.Rouse: "Critical Analysis of Open Channels Resistance". Journal of the Hydraulics Div., ASCE, Vol. 91, No. HY4, July 1965.

ner by assuming that there exists an overlap region of the "wall law" (or inner law)

$$\frac{v}{u_*} = \phi_1 \left(\frac{y u_*}{\nu}, r_s \right) \quad (3)$$

and of the "velocity-defect law" (or outer law)

$$\frac{v - v_0}{u_*} = \phi_2 (\eta). \quad (4)$$

The extension of Eq. (1) outside the overlapping of the two laws is always assumed for the deduction of the resistance equations.

By means of Eq. (2), the logarithmic velocity law becomes, as is well known, for smooth-pipe flow

$$\frac{v}{u_*} = a \log \frac{y u_*}{\nu} + b_s \quad (5)$$

and for fully rough flow

$$\frac{v}{u_*} = a \log \frac{y}{\epsilon} + b_r \quad (6)$$

with b_s and b_r numerical constants, derived from c_s and c_r , and $a = 2.30/K$.

The velocity profiles observed in circular and in very wide rectangular conduits (Nikuradse ⁴, Dönch ⁵, Laufer ⁶, etc..) show that the logarithmic law (5) is adaptable to experiments with $K = 0.40$ ($a = 5.75$ as indicated by Nikuradse) only for $y < 0.15 y_0$. The main tract of the profiles, in a semi-logarithmic plot, has always a more pronounced slope, about 7.0.

A better approach to the experimental data is possible with a slightly different analysis of the velocity distribution. For this purpose one considers the wall law (3), that is rigorously valid in the laminar sublayer of thickness δ , a limit-law, to which the velocity distribution must approach in the turbulent region for $y \rightarrow \delta$. On this assumption, given that the outer law (4) is always valid, the purely logarithmic velocity law in circular pipes can be corrected by the addition of a function $\phi(\eta)$, which is numerically defined by the experimental comparison. That is

$$\frac{v}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \eta + \phi(\eta) + \frac{v_0}{u_*} \quad (7)$$

in which ϕ becomes zero for $\eta = 1$ and constant, or quasi-constant, with the small values of η ($\eta \rightarrow \delta/y_0$). A possible expression of $\phi(\eta)$, according to the experimental results of Nikuradse, was indicated by the A. in the paper already cited ¹. On the other hand the knowledge of the function $\phi(\eta)$ is not important for the deduction of the resistance equations (in regard to their form) as we shall see in n. 3.

By means of Eq. (2), one can of course derive from Eq. (7) the particular laws for smooth and fully rough flow.

4 - J. Nikuradse: "Gesetzmässigkeiten der turbulent Strömung in glatten Rohren". VDI, Forschungsheft 356, 1932.

"Strömungsgesetze in rauhen Rohren". VDI Forschungsheft 361, 1933.

5 - F. Dönch: "Divergente und Konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln". VDI, Forschungsarb. 282, 1926.

6 - J. Laufer: "Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel" Nat. Advisory Comm. Aeronaut., Tech. Note 2123, 1953.

2.b - NON-CIRCULAR CONDUITS

Many of the technically important conduit shapes, including in particular all open channels, are non-circular. For them, at least for the normal types of cross sections, the velocity distribution along normals to the wall can be represented with a relationship which generalises Eq. (7)

$$\frac{v}{\bar{u}_*} = \frac{1}{K} \ln \eta + F(\eta, \xi) + \frac{v_0}{\bar{u}_*} \quad (8)$$

in which $\bar{u}_* = \sqrt{\bar{\tau}_0/\rho}$, $\xi = u_*/\bar{u}_*$ and $\bar{\tau}_0$ is the average value of the variable shear τ_0 on the boundary. Now (v_0/\bar{u}_*) depends not only on $(y \bar{u}_*/\nu)$ and r_s , but also on ξ , and $F(\eta, \xi)$ is a function which, as far as $\phi(\eta)$, is null for $\eta = 1$ and becomes independent of η for small values of η ($\eta \rightarrow \delta/\nu$).

We can obtain the simplest justification of Eq. (8) following the phenomenological method. It is sufficient: to consider the turbulent shear stress τ defined as a function of the mean boundary shear τ_0 through the relationship

$$\tau = \tau_0 F_1(\eta, \xi); \quad (9)$$

and to make use of the Prandtl's mixing length concept, eventually with the following generalisation of the function $l(y)$

$$l = K y F_2(\eta). \quad (10)$$

By substituting these equations in the known expression of turbulent shear $\tau = l^2 (dv/dy) |dv/dy|$, one obtains Eq. (8) without difficulty. The velocity distribution defined by Eq. (8) leads to a "wall law" of the type

$$\frac{v}{\bar{u}_*} = \phi_3\left(\frac{y\bar{u}_*}{\nu}, \frac{u_*}{\bar{u}_*}, r_s\right). \quad (11)$$

The presence in Eq. (8) of F , which is a function of u/\bar{u}_* , permits us to correct, in a sufficient manner for practical purposes, the reference to the average value \bar{u}_* , rather than to the local value u_* , of the velocity in the turbulent region near the wall. According to Eq. (8), the wall has a sensible influence on the value of the velocity which represents (conventionally) the beginning of the turbulent distribution, that is on the value of v for $y = \delta$ in the smooth flow, but it has a negligible action on the variation of v/\bar{u}_* with the distance y .

By means of the function $F(\eta, \xi)$, it is possible to consider also the effect, variable in general from normal to normal, of the free surface on the velocity distribution.

Following Cocchi ⁷, we think that the influence of the free surface can be mainly due to non-isotropic variation of turbulence near the surface, rather than to the action of the secondary flows. The normal components of the velocity fluctuations must become null on the free surface and, by virtue of continuity, the parallel components must change. The shear stresses on longitudinal planes normal to the free surface, as AB and CD in Fig. 1, can of course increase, while those on parallel planes near the surface, as BC, decrease and can also change sign, since the average value of τ along ABCD must remain the same.

Normally the free surface influence determines only small deviations

7 - G. Cocchi: "Su una questione relativa alle correnti a pelo libero". Atti dell'Acc. delle Scienze di Bologna, serie XI, tomo V, 1958.

from similarity, remarkable in a narrow zone near the surface. As shown by example in Fig. 2-3-4, the experimental data $v = \bar{v} (\log \eta)$ observed by Tracy⁸ on closed conduits and by Nikuradse⁹ and by the A.¹ on open channels, fall into a family of almost parallel lines. Each line represents the velocity profile along an indicated boundary normal.

For smooth flow Eq. (8) becomes

$$\frac{v}{\bar{u}_*} = a \log \frac{y \bar{u}_*}{\nu} + F_s (\eta, \xi) \quad (12)$$

and for fully rough flow (in conduits with a sand roughness ε) it is

$$\frac{v}{\bar{u}_*} = a \log \frac{y}{\varepsilon} + F_r (\eta, \xi) \quad (13)$$

with $a = 2.30/K$.

3 - RESISTANCE EQUATIONS

One may indicate with $C_o (= \sqrt{8/f})$ the friction adimensional coefficient defined by equation of uniform flow in fixed-bed open channels

$$U = C_o \sqrt{RSg} \quad (14)$$

in which $S =$ bottom slope, $U =$ mean velocity, and $R =$ hydraulic radius. Considering that $\bar{u}_*^2 = \bar{\tau}_o/\rho = RSg$, it follows from Eq. (14)

$$\frac{U}{\bar{u}_*} = C_o \quad (15)$$

The integration over the cross-section Ω of the velocity given by Eq. (12) or by Eq. (13), yields the expressions of the friction factor C_o respectively in the case of smooth or rough channels.

By following a classic pattern, one writes

$$C_o = \frac{U}{\bar{u}_*} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_o} dy \int_0^P \frac{v}{\bar{u}_*} dP \quad (16)$$

in which P is the length of a line distant y from the wetted perimeter P_o .

The most significant observation to be made is that, carrying out the operation (16), only the functions of y , i.e. $\log (y\bar{u}_*/\nu)$ in Eq. (12) and $\log (y/\varepsilon)$ in Eq. (13), lead to a functional dependence (logarithmic) of C_o by the radius R . The functions of y/y_o and u/\bar{u}_* , integrated over the section, are reduced to constant values.

One obtains the following results:

a) for smooth channels

$$C_o = a \log \frac{Re}{C_o} + A'_s \quad (17)$$

in which Re is the Reynolds number $4RU/\nu$;

b) for channels with roughness ε and fully turbulent flow,

$$C_o = a \log \left(\frac{4R}{\varepsilon} \right) + A'_r \quad (18)$$

The coefficients A'_s and A'_r differ from the correspondent coefficients A_s and A_r , found by Nikuradse in circular pipes, owing to the non-uniform di-

8 - H.J. Tracy: "Turbulent Flow in a Three-dimensional Channels". J. of Hydr. Div., ASCE, Vol. 91, No. HY6, Nov. 1965.

9 - J. Nikuradse: "Untersuchung uber die geschwindigkeitsverteilung in turbulenten stromungen". VDI Forschungsarbeiten - Heft 281, 1926.

tribution of u_* on the boundary and, in open channels, also to the influence of the free surface on the functions F_S and F_R .

Experimental observations still do not provide a sufficiently consistent indication on the distribution of u_* . By assuming that it is a function of only the section shape, different from open to closed sections, but independent of the regime of turbulent flow, the differences ($A'_S - A_S$) and ($A'_R - A_R$) are equal. We can write

$$A'_S - A_S = A'_R - A_R = a \log \varphi \quad (19)$$

with φ a section shape coefficient which, introduced in Eq. (17) and in Eq. (18), appear to be a multiplier of the hydraulic radius, while the constants can reassume the values of circular pipes.

In particular, with $K = 0.40$, the resistance equations - according for $\varphi = 1$ to Nikuradse's experiments - can be written for smooth flow

$$C_0 = 5.75 \log \left(\frac{\varphi Re}{C_0} \right) \quad (20)$$

and for fully rough flow

$$C_0 = 5.75 \log \left(\frac{13.3 \varphi R}{\epsilon} \right). \quad (21)$$

For combined viscous and roughness action, that is in the transition region between smooth and fully rough flow, in channels with "natural" roughness, we can follow the Colebrook's procedure for finding C_0

$$C_0 = -5.75 \log \left(\frac{C_0}{\varphi Re} + \frac{\epsilon}{13.3 \varphi R} \right). \quad (22)$$

The present method does not exclude the possibility of other types and measures of roughness, such as that of Sayre and Albertson¹⁰ (based also on experimental data of Koloseus and Robinson) and that of Rouse³ (experiments of Schlichting, Koloseus, Davidian, Macdonald, Roberson).

Experimental resistance data obtained by the A. on triangular and trapezoidal open channels with natural roughness are plotted in Fig. 5 and those obtained on triangular and rectangular open channels with homogeneous roughness are plotted in Fig. 6. In order to group the points in each figure along only one curve, which is of Colebrook-type in Fig. 5 and of Nikuradse-type in Fig. 6, necessitated the introduction of the φ -values, for open-sections, indicated in the figures.

The calculation of the friction factor C_0 with Eq. (22) can be made by using diagrams of the type represented in Fig. 7. The diagram expresses C_0 as function of the shape-radius φR . Every group of curves corresponds to a constant value of the absolute roughness ϵ ; each one of the curves is valid for a given slope S . This latter parameter shows the dependence (which disappears with the large roughness values) of C_0 on Reynolds number.

The diagram was plotted for water at 15°C ($\approx 60^\circ\text{F}$).

10 - W.W.Sayre and M.L.Albertson: "Roughness spacing in rigid open channels".
J. of the Hydr. Div., ASCE, Vol. 87, No HY3, May 1961.

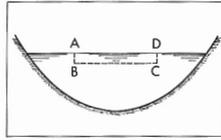


Fig. 1 - Example of planes on which free surface effect is notable.

Exemple de plans sur lesquels l'effet de la surface libre est sensible.

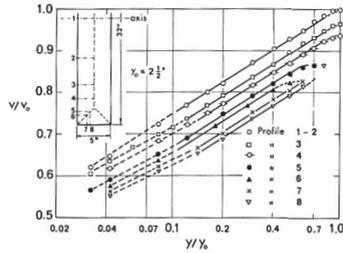


Fig. 2 - Velocity profiles in a rectangular closed conduit (measured by H.J. TRACY⁸).

Profils de vitesse dans une conduite rectangulaire (d'après les essais de H.J. TRACY⁸).

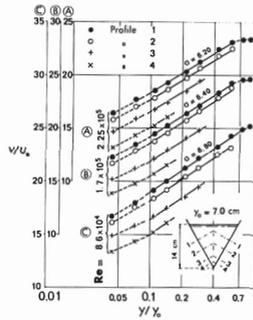


Fig. 3 - Velocity profiles in a triangular rough open channel (measured by E. MARCHI¹).

Profils de vitesse dans un canal découvert triangulaire rugueux (d'après les essais de E. MARCHI¹).

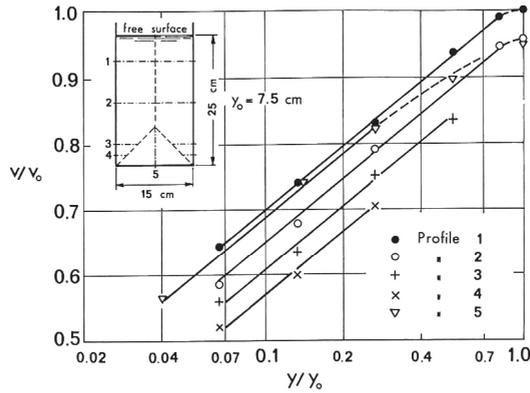


Fig. 4 - Velocity profiles in a rectangular open channel (measured by J. NIKURADSE⁹).

Profils de vitesse dans un canal découvert rectangulaire (d'après les essais de J. NIKURADSE⁹).

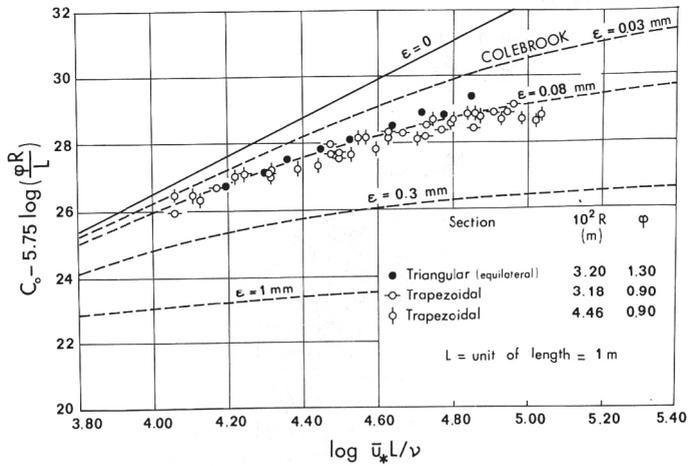


Fig. 5 - Resistance data obtained by E. MARCHI¹ on open channels with natural roughness.

Valeurs de la résistance obtenus par E. MARCHI¹ sur canaux découverts avec rugosité naturelle.

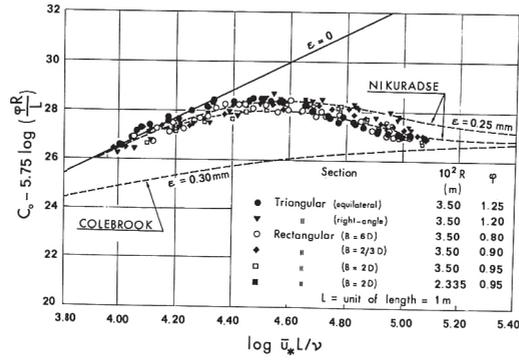


Fig. 6 - Résistance data obtained by E. MARCHI¹ on open channels with homogeneous roughness.

Valeurs de la résistance obtenus par E. MARCHI¹ sur canaux découverts avec rugosité homogène.

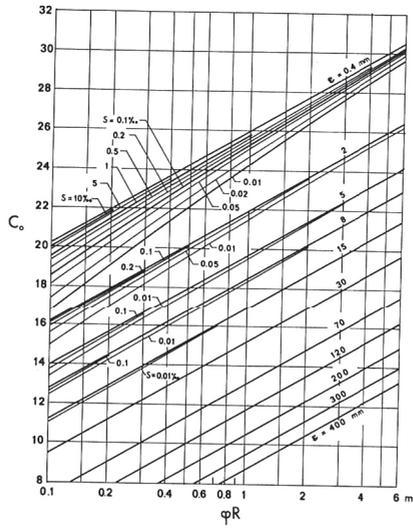


Fig. 7 - Relationship between friction factor C_0 and the shape-radius φR by eq. (22) for water at 15 °C (≈ 60 °F).

Relation entre le coefficient de frottement C_0 et le rayon de forme φR en utilisant l'eq. (22) pour l'eau à 15 °C (≈ 60 °F).

Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile dei ponti.
Deflusso con transizione attraverso lo stato critico
L'Energia Elettrica, 1968

Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile dei ponti

Deflusso con transizione attraverso lo stato critico

Sommario

Si considera la situazione che si realizza in un canale in corrispondenza di una ostruzione praticamente brusca, dovuta in particolare alle pile di un ponte, quando le condizioni della corrente e della strozzatura sono tali da imporre la « transizione » attraverso lo stato critico nel restringimento.

Riesaminando le classiche esperienze di Yarnell in questo campo, si dimostra la possibilità di una interpretazione analitica semplice dei risultati e si suggerisce una formula per il calcolo del rigurgito, utilizzando un coefficiente sperimentale chiaramente definito per alcune forme di pile. Una conferma della validità del procedimento si trova negli studi di De Marchi sul misuratore a risalto.

Elenco dei simboli e delle notazioni.

- Q = portata della corrente;
- y, U, F = profondità, velocità media e numero di Froude della corrente indisturbata ($F = U/\sqrt{gy} = Q/Ly\sqrt{gy}$);
- y_1, U_1, F_1 = profondità, velocità media e numero di Froude a monte dell'ostruzione;
- $\Delta h = y_1 - y$ = rigurgito rispetto alla situazione della corrente indisturbata;
- L = larghezza dell'alveo a monte e a valle dell'ostruzione;
- l = larghezza dell'alveo nel restringimento;
- r = l/L rapporto di strozzamento;
- $y_{crit} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gl^2}}$ = profondità critica relativa alla portata Q nella sezione ristretta l ;
- F'_L ed F''_L = radici minore e maggiore della (5): valori limite del numero di Froude entro i quali il moto si realizza con attraversamento dello stato critico;
- y'_L ed y''_L = profondità limite corrispondenti rispettivamente ai numeri di Froude F'_L ed F''_L .

I. - INTRODUZIONE.

Sui rigurgiti provocati dalle pile dei ponti — o da ostacoli ad essi assimilabili, come ad esempio le strutture di sostegno delle coperture dei torrenti intubati — le esperienze più numerose e sistematiche sono state condotte da Yarnell e riportate in due memorie del 1934 [1] [2]. Oltre a verificare i limiti di applicabilità di alcune formule empiriche, come quelle di d'Aubuisson [3], di Nagler [4] e di Rehbock [5], per il calcolo del rigurgito nella situazione più frequente di corrente « sempre » lenta, Yarnell suggerì, sulla base dei suoi risultati sperimentali, due nuovi procedimenti di calcolo: uno valido nel campo predetto di moto « subcritico », l'altro nel caso di moto « con transizione » attraverso la profondità critica.

In questa nota si esamina la seconda situazione, quella cioè che si stabilisce quando le condizioni della corrente e della ostruzione sono tali da realizzare un tronco di corrente lenta a monte dell'ostacolo e il passaggio del moto attraverso lo stato critico nel restringimento. A valle, se inizialmente il moto indisturbato era lento, la corrente si riporta a quella condizione attraverso un salto diretto od ondulato; se invece il moto indisturbato era veloce, la corrente lo raggiunge gradualmente e asintoticamente.

Salvo la differente forma dell'ostruzione, si tratta del fenomeno che si verifica in un misuratore a risalto, almeno nel tronco che va da monte fino alla sezione di controllo [6]. Mentre però, nel misuratore a risalto, il restringimento del canale è il fattore determinante di questo tipo di deflusso, nel caso delle pile dei ponti, essendo in generale poco accentuata la strozzatura, assume particolare rilievo la condizione originaria della corrente, la quale di norma non può essere nè eccessivamente lenta nè eccessivamente veloce.

Precisati quindi, in funzione del rapporto di strozzamento, i limiti del numero di Froude della corrente indisturbata entro i quali può verificarsi la situazione in esame, si mette in evidenza, analizzando le esperienze di Yarnell, un risultato pratico significativo: la costanza, per alcune forme tipiche di pile, del rapporto fra il numero di Froude della corrente a monte della ostruzione e il numero di Froude limite inferiore. Da questa osservazione, confermata anche dai risultati delle esperienze di Contessini e De Marchi sui misuratori a risalto [7] [8], deriva la possibilità di calcolare il rigurgito con un procedimento

(*) PROF. ING. ENRICO MARCHI - Direttore dell'Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova - Via Montallegro, 1 - 16145 - Genova.

analitico semplice in sostituzione del metodo grafico proposto da Yarnell.

2. - POSSIBILI TIPI DI DEFLUSSO - LIMITI DI SEPARAZIONE.

Il moto attraverso una ostruzione può verificarsi in tre modi differenti:

- 1) corrente sempre lenta, cioè sia nel restringimento, sia a monte e a valle di esso (moto subcritico);
- 2) corrente sempre veloce (moto supercritico);
- 3) corrente che passa attraverso la profondità critica nel restringimento, lenta a monte, lenta o veloce a valle (moto con transizione attraverso lo stato critico).

Nel primo caso il rigurgito è conseguenza esclusivamente di una dissipazione localizzata di energia. Per questo esso può essere valutato solo con formule ricavate sperimentalmente, come quelle proposte dagli Autori prima citati (cfr. da [1] a [5]). Nel secondo caso non si ha formazione di un rigurgito a monte dell'ostruzione ma soltanto a valle di essa. La situazione si verifica abbastanza raramente perchè richiede elevati numeri di Froude della corrente indisturbata. Il rigurgito deriva sempre da una perdita di energia localizzata valutabile solo per via sperimentale.

Il terzo caso è il più interessante dal punto di vista teorico. Ven Te Chow, nel suo libro « Open-Channel Hydraulics » [9], riportando il metodo di Yarnell, indica questa situazione con il nome di moto « supercritico ». Abbiamo preferito la denominazione di moto « con transizione » per mettere in evidenza quello che ci sembra l'aspetto più importante del fenomeno. In tal modo si evita inoltre ogni possibilità di confusione con la situazione di deflusso 2).

Affinchè, il moto, nella sezione ristretta, si realizzi con l'attraversamento dello stato critico, il carico specifico della corrente indisturbata dev'essere inferiore al minimo richiesto per il deflusso, in quella sezione, della portata assegnata Q .

La fig. 1 mostra schematicamente il moto con transi-

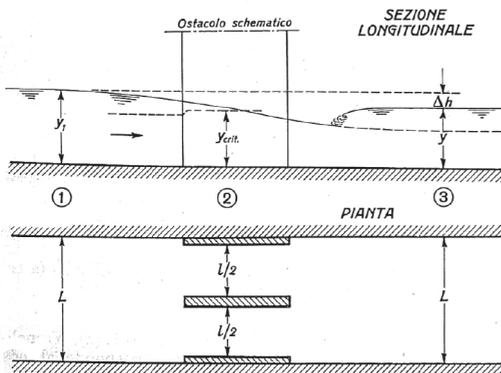


Fig. 1. - Schizzo rappresentativo del deflusso attraverso un'ostruzione con l'attraversamento dello stato critico.

zione. Nella sezione 3 dell'alveo rettangolare largo L è indicata la corrente indisturbata che ha profondità y e velocità media U . Nel restringimento la larghezza dell'alveo si riduce ad l . Dev'essere:

$$(1) \quad y + \frac{U^2}{2g} < \frac{3}{2} \sqrt{\frac{Q^2}{g l^2}}$$

In termini del numero di Froude F della corrente indisturbata

$$(2) \quad F = \frac{U}{\sqrt{g y}} = \frac{Q}{L y \sqrt{g y}}$$

la (1) diventa:

$$(3) \quad 1 + \frac{F^2}{2} < \frac{3}{2} F^{2/3} \left(\frac{L}{l}\right)^{2/3}$$

Indichiamo con r il rapporto di strozzamento

$$(4) \quad r = \frac{l}{L}$$

e con F_L i valori limite di F per i quali vale l'uguaglianza dei due membri della (3), ossia

$$(5) \quad r^{2/3} = \frac{3 F_L^{2/3}}{2 + F_L^2} \quad (1)$$

Per ogni assegnato valore di r (necessariamente < 1) la (5) ammette due sole soluzioni positive per F_L^2 , tali che

$$F'_L < 1 \quad \text{e} \quad F''_L > 1$$

Yarnell, come pure successivamente Ven Te Chow, hanno considerato soltanto la soluzione F'_L e indicato

(1) La (5) si può trasformare in un'equazione cubica della variabile

$$(A) \quad z = \left(\frac{F_L}{r}\right)^{2/3}$$

Si ottiene subito

$$(B) \quad z^3 - \frac{3}{r^2} z + \frac{2}{r^2} = 0$$

La (B) è l'equazione utilizzata da De Marchi [6] per lo studio del misuratore a risalito, nel caso di semplice strozzatura con fondo orizzontale. La variabile z , in base alla posizione (A) e al significato di F_L e di r , rappresenta anche il rapporto fra la profondità critica relativa alla portata Q nella sezione ristretta, cioè $y_{crit} = \sqrt[3]{Q^2/g l^2}$, e la profondità limite y_L corrispondente al numero di Froude F_L .

Le soluzioni fisicamente accettabili della (B) sono le due radici positive:

$$(C) \quad z' = \frac{2}{r} \cos \frac{1}{3} (\pi + \arccos r)$$

$$z'' = \frac{2}{r} \cos \frac{1}{3} (\pi - \arccos r)$$

Ad esse corrispondono le due profondità limite $y'_L = y_{crit}/z'$ e $y''_L = y_{crit}/z''$, fra le quali deve trovarsi la profondità y della corrente indisturbata affinché si realizzi il deflusso « con transizione » attraverso lo stato critico.

come subcritico il moto della corrente con $F \leq F'_L$ e supercritico il moto con $F > F'_L$.

Come si è detto prima, ci sembra più completa la seguente suddivisione:

- (6) $F \leq F'_L$ moto subcritico (rigurgito a monte della ostruzione, valutabile con formule empiriche);
- (7) $F'_L < F < F''_L$ moto con transizione (caso in esame);
- (8) $F \geq F''_L$ moto supercritico (rigurgito a valle dell'ostruzione).

Nella fig. 2 è riportato il diagramma della F_L in funzione del rapporto di strozzamento r , nel campo delle correnti lente (F'_L) e nel campo delle correnti veloci (F''_L) fino al

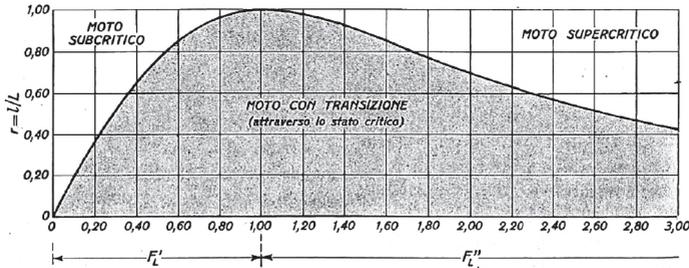


Fig. 2. - Campo dei numeri di Froude, in funzione del rapporto di strozzamento, per i quali il moto si realizza con transizione attraverso lo stato critico.

valore 3 del numero di Froude. La regione del moto con transizione è evidentemente quella tratteggiata sottostante alla curva $F_L(r)$.

3. - CALCOLO DEL RIGURGITO.

Per analizzare i risultati sperimentali di Yarnell, occorre esprimere il rigurgito $\Delta h = y_1 - y$ in funzione delle condizioni della corrente di valle, ossia in funzione del numero di Froude F . Da notare che, se la corrente di valle è veloce, essa non raggiunge la situazione indisturbata subito dopo l'ostruzione: in tal caso, detti y_3 ed F_3 la profondità e il numero di Froude nella sezione 3, immediatamente a valle dell'ostacolo, si può conservare tutto il procedimento che segue con la semplice sostituzione di y_3 ed F_3 al posto di y ed F .

Indichiamo con

$$(9) \quad F_1 = \frac{U_1}{\sqrt{g y_1}} = \frac{Q}{y_1 \sqrt{g y_1}}$$

il numero di Froude della corrente a monte dell'ostruzione.

Dalla condizione di continuità

$$(10) \quad U_1 y_1 = U y,$$

segue

$$(11) \quad \left(\frac{y_1}{y}\right) = \left(\frac{F}{F_1}\right)^{2/3},$$

ossia, introducendo il rigurgito Δh ,

$$(12) \quad \frac{\Delta h}{y} = \left(\frac{F}{F_1}\right)^{2/3} - 1.$$

Mediante l'interpolazione di numerosi e ben distribuiti risultati sperimentali, Yarnell [2] ha ottenuto una relazione grafica fra $\Delta h/y$ e il rapporto F/F'_L . Nella fig. 3 sono state riportate le curve di Yarnell relative a pile di larghezza costante terminanti a monte e a valle con fronti: 1) squadrati, 2) triangolari a 90°, 3) semi-circolari (2).

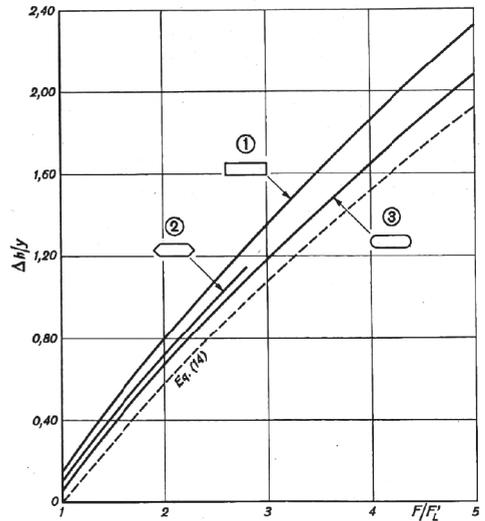


Fig. 3. - Le curve sperimentali di Yarnell $\Delta h/y = f(F/F'_L)$ (a tratto intero) a confronto con la (14) (tratteggiata).

(*) Nei grafici delle figg. 17 e 18 della memoria [2], Yarnell ha utilizzato in ascisse il rapporto ω/ω_L , che corrisponde al nostro $(F/F'_L)^2$.

Non sono stati riportati i risultati relativi al caso delle due pile circolari collegate con un diaframma, perchè tale situazione sperimentale si discosta sensibilmente dallo schema iniziale (cfr. fig. 1)

Per il confronto sperimentale, la (12) si può scrivere

$$(13) \quad \frac{\Delta h}{y} = \left(\frac{F}{F'_L} \right)^{2/3} \left(\frac{F'_L}{F_1} \right)^{2/3} - 1.$$

Nella condizione *ideale* di moto senza perdite il numero di Froude F_1 coincide con il valore limite inferiore F'_L , come si vede subito applicando il teorema di Bernoulli fra la sezione 1 e la sezione di controllo 2 (cfr. con la (1), nel caso di uguaglianza, e con la (5)). Con questa condizione la (13) diventa

$$(14) \quad \frac{\Delta h}{y} = \left(\frac{F}{F'_L} \right)^{2/3} - 1$$

ed è rappresentata dalla curva tratteggiata della fig. 3.

Essa si riduce evidentemente ad una retta in un diagramma logaritmico come quello della fig. 4 che ha in ascisse $\log(F/F'_L)$ e in ordinate $\log(1 + \Delta h/y)$, cioè $\log(y_1/y)$. In tale figura, oltre alla retta (14) tratteggiata,

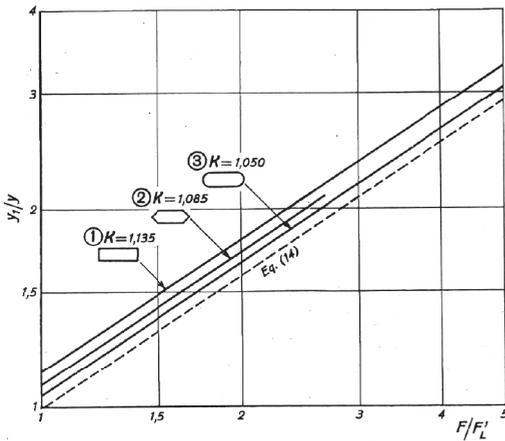


Fig. 4. - Le curve sperimentali di Yarnell nella forma $\log(y_1/y) = f(\log F/F'_L)$ a confronto con la retta tratteggiata che rappresenta la (14).

sono state riportate con tratto continuo le precedenti curve sperimentali di Yarnell. Il risultato significativo, detto inizialmente, deriva dal fatto che, con un'approssimazione sempre contenuta entro il 5%, si tratta di un fascio di rette *parallele*: quindi, dal caso ideale di moto senza dissipazioni, rappresentato dalla (14), si passa ad una riproduzione sufficientemente fedele delle curve sperimentali con la

$$(15) \quad \frac{\Delta h}{y} = K \left(\frac{F}{F'_L} \right)^{2/3} - 1,$$

alla quale si riconduce la (13) assumendo

$$(16) \quad \frac{F'_L}{F_1} = K^{3/2}$$

con K = costante determinata in base alla *forma delle pile*. Per la (16) il coefficiente K rappresenta anche il rapporto fra la profondità y_1 a monte dell'ostruzione e la profondità limite superiore y'_L , corrispondente a F'_L (v. nota (*)).

Il confronto con i risultati di Yarnell ha fornito i seguenti valori di K (fig. 4):

- 1) pile con fronti squadrate $K = 1,135$
- 2) pile con fronti triangolari a 90°. . . $K = 1,085$
- 3) pile con fronti semicircolari $K = 1,050$

Dalla (15), oppure dalla (16), si ottiene la profondità y_1 a monte dell'ostruzione in funzione della portata Q e del numero di Froude limite inferiore

$$(17) \quad y_1 = K \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g L^2 F'_L{}^3}}$$

Da notare che nel calcolo di y_1 non intervengono grandezze relative alla corrente indisturbata. Ciò era facilmente intuibile pensando all'analogia con il deflusso nel misuratore a risalto. Nella (17) si può mettere in evidenza la portata Q in funzione del carico y_1 : il coefficiente di portata vale $\mu_e = F'_L / \sqrt{2} r K^{3/2}$. Nel caso ideale di dissipazioni nulle ($K = 1$) si ritrova, con la $\mu = F'_L / \sqrt{2} r$, la soluzione teorica data da De Marchi [6] per un misuratore a risalto senza gradino di fondo. Nel caso attuale l'influenza della forma della ostruzione sul coefficiente di portata è rappresentata dal moltiplicatore $K^{-3/2}$.

La costanza di K , per una data forma di pile, significa perciò anche costanza del rapporto fra coefficiente di portata sperimentale μ_e e coefficiente teorico ideale μ . Le esperienze sistematiche eseguite da Contessini e De Marchi [7] [8] su misuratori a risalto con diverse forme hanno messo in evidenza, per ogni modello, le variazioni del rapporto $\mu_e/\mu (= K^{-3/2})$ in funzione di y_1/l (*). I risultati mostrano che, in tutti i modelli muniti di strozzatura, con o senza gradino di fondo, le variazioni massime di K rispetto al valor medio sono contenute entro $\pm 5\%$ finché la profondità y_1 è minore di $1,5 l$. Poiché questo è il campo delle esperienze di Yarnell ed esso comprende, salvo casi assolutamente eccezionali, tutte le situazioni pratiche di deflusso fra le pile dei ponti, appare confermata, per il processo in esame, l'accettabilità della costanza di K con l'approssimazione del 5%.

Dalle esperienze ora citate sono stati ricavati i seguenti valori medi di K , nel campo $y_1 \leq 1,5 l$, per i modelli di misuratori Venturi descritti dettagliatamente nelle memorie [7] [8] e qui indicati con lo stesso numero.

I modelli 4-5-6, 7, 8, mancanti del gradino di fondo a monte della strozzatura e 11, 12, 13, con fondo sempre orizzontale, sono i più vicini alla situazione esaminata in questa nota. Si osservi che il valor medio di K (intorno

(*) Nella memoria [8] il rapporto μ_e/μ è indicato con C e la profondità di monte y_1 , misurata in generale a partire dalla soglia del canale Venturi, è indicata con h_m .

Modello N.	Caratteristiche modello	$r = l/L$	Numero dei risultati		$K (= C^{-2/3})$ medio	Diff. max ‰
			considerati ($y_1 \leq 1,5 l$)	esclusi ($y_1 > 1,5 l$)		
4-5-6	Senza gradino a monte	$\sim 2/3$	3	—	1,018	+ 5 — 3
7	Senza gradino a monte	$\sim 2/3$	3	—	1,016	+ 3 — 1
8	Senza gradino a monte	$\sim 1/3$	4	2	1,022	+ 3 — 4
10	Con gradino di fondo	$\sim 2/3$	13	—	1,007	+ 4 — 3
11	Fondo orizzontale	$\sim 2/3$	12	—	1,023	+ 4 — 4
12	Fondo orizzontale	$\sim 1/3$	7	7	1,024	+ 3 — 5
13	Fondo orizzontale	$\sim 1/3$	5	4	1,023	+ 4 — 6
14	Con gradino di fondo	$\sim 1/3$	6	8	1,020	+ 3 — 5
15	Con gradino di fondo e semi-contrazione laterale	$\sim 2/3$	11	—	1,006	+ 4 — 5

a 1,020) è inferiore al più piccolo valore (1,050) ricavato dalle esperienze di Yarnell sulle pile con fronti semicircolari: il risultato è giustificato dalla accurata forma del restringimento nel misuratore a risalto e probabilmente anche dall'assenza di ostacoli interni alla corrente.

quando il deflusso si realizza con l'attraversamento dello stato critico ($F'_{L} < F < F''_{L}$):

a) Si determina il numero di Froude limite inferiore F'_{L} in funzione del dato rapporto di strozzamento $r = l/L$. A questo scopo si può utilizzare la tab. A numerica oppure

TABELLA A

$r = l/L$	F'_{L}	$r = l/L$	F'_{L}
0,1	0,0545	0,85	0,588
0,2	0,109	0,9	0,657
0,3	0,167	0,92	0,689
0,4	0,226	0,94	0,727
0,5	0,289	0,96	0,775
0,6	0,359	0,98	0,838
0,7	0,437	0,99	0,883
0,8	0,530	0,995	0,919

4. - CONCLUSIONI.

Il rigurgito provocato in una corrente a pelo libero da una ostruzione praticamente brusca — in particolare dalle pile di un ponte — si può calcolare nel modo seguente,

il diagramma della fig. 5 nel quale è stata riportata, ingrandita, la sola curva $F'_{L}(r)$ della fig. 2. La soluzione analitica diretta della (5) non è normalmente consigliabile (in caso di necessità v. nota (1)).

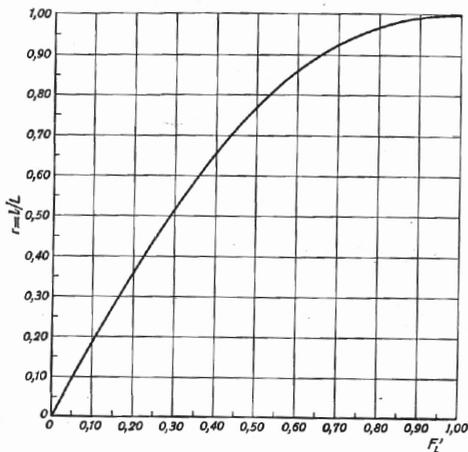


Fig. 5. - Il numero di Froude limite inferiore F'_L in funzione del rapporto di strozzamento r .

b) Trovato F'_L e assunto il valore di K in relazione alla forma delle pile, secondo i risultati del precedente confronto sperimentale, si calcola la profondità y_1 a monte dell'ostruzione con la (17). Conoscendo la situazione della corrente indisturbata (o della corrente a valle della ostruzione) è quindi immediata la valutazione del rigurgito.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. L. YARNELL: *Pile trestles as channel obstructions*. - United States Department of Agriculture, Washington, D.C., « Technical Bulletin » No. 429, July 1934.
- [2] D. L. YARNELL: *Bridge piers as channel obstructions*. - United States Department of Agriculture, Washington, D.C., « Technical Bulletin » No. 442, November 1934.
- [3] J. F. D'AUBUISSON DE VOISINS: *A treatise on hydraulics, for the use of engineers* - Translated from the french by J. Bennet, Boston, 1852.
- [4] F. A. NAGLER: *Obstruction of bridge piers to the flow of water*. - « Amer. Soc. Civ. Engin. Trans. », 82, 1918.
- [5] T. REHBOCK: *Betrachtungen über Abfluss, Stau und Walzenbildung*. - Berlin, 1917.
- : *Das Flussbaulaboratorium der technischen Hochschule in Karlsruhe*. - Berlin, 1926.
- [6] G. DE MARCHI: *Dispositivi per la misura della portata dei canali con minime perdite di quota*. - Parte I: *Esame del processo idraulico*. - « L'Energia Elettrica », n. 1, vol. XIII, Milano, gennaio 1936.
- [7] F. CONTESSINI: *Dispositivi per la misura della portata dei canali con minime perdite di quota* - Parte II: *Descrizione delle esperienze*. - « L'Energia Elettrica », n. 5, vol. XIII, Milano, maggio 1936.
- [8] G. DE MARCHI: *Dispositivi per la misura della portata dei canali con minime perdite di quota* - Parte III: *Risultati delle esperienze*. - « L'Energia Elettrica », n. 3, vol. XIV, Milano, marzo 1937.
- [9] VEN TE CHOW: *Open-Channel Hydraulics*. - McGraw-Hill Book Company Inc., Londra, New York, 1959.

Manoscritto pervenuto il 12 gennaio 1968.

Sul moto di correnti miste con bolle
in tubi orizzontali
Atti XI Conv. di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, 1968

XI CONVEGNO DI IDRAULICA E COSTRUZIONI IDRAULICHE

Genova, ottobre 1968

E. MARCHI (*)

Sul moto di correnti miste con bolle in tubi orizzontali

Two - phase bubble flow in horizontal pipes

Sommario

L'aumento di resistenza, rilevato sperimentalmente, nel moto con bolle di correnti bifasi entro tubazioni lisce orizzontali si giustifica con un modello che presuppone la formazione di una lamina liquida di scorrimento fra la parete del tubo e le bolle.

Il risultato, ottenuto nel campo delle portate gassose $\leq 5\%$ di quella liquida, consente una correlazione dei dati sperimentali di Mongiardini e di Marchi e Piva su correnti aria-acqua, con l'assunzione di uno spessore costante della lamina liquida, ossia di uno spessore indipendente dalle caratteristiche del moto e dalle dimensioni del tubo.

Synopsis

The increase of resistance, which is experimentally observed in the bubble-flow through horizontal smooth pipes, is justified with a model based on the formation of a liquid film between pipe wall and bubbles of gas.

The results, obtained with a ratio of volumetric gas discharge to liquid discharge $\leq 5\%$, permit a correlation of experimental data due to Mongiardini and to Marchi and Piva on water-air flow, under the position that the liquid film thickness is constant.

1. - PREMESSA.

1.1. - Una corrente bifase, la cui portata gassosa sia molto piccola, anche volumetricamente, rispetto a quella liquida, dell'ordine di qualche unità per cento, defluisce in un condotto orizzontale di norma con il trascinarsi di bolle distribuite lungo la generatrice superiore del tubo.

Il regime di moto con bolle è stato realizzato, in alternativa con altri regimi — deflusso stratificato, con onde, a tamponi, anulare, ecc. — in diverse ricerche sperimentali sui moti bifasi in tubi orizzontali. Ad esempio nelle esperienze degli AA. americani Martinelli e al. (1944), Johnson e Abou-Sabe (1952), Alves (1954), Baker (1954) e in quella dei russi Kosterin (1949), Krasiokova (1952), Mologin (1954-1956). In questi studi l'interesse è stato sempre rivolto alle situazioni con portate aeriformi consi-

derevoli rispetto a quelle liquide. Ne sono prova anche i criteri di correlazione proposti per calcolare le perdite di pressione, e in particolare il più accreditato dovuto a Martinelli-Lockhart [1]: essi forniscono indicazioni limitate alle portate gassose non inferiori al 10% di quelle liquide. Per un richiamo di questi risultati e delle loro interpretazioni si veda la documentata recensione critica di Mongiardini [2] del 1966 e il recente libro di Brodkey [3] dedicato ai problemi dei moti di correnti miste.

1.2. - Nel campo delle correnti bifasi in tubi orizzontali lisci, con portate gassose anche molto piccole, esperienze sistematiche sono state eseguite, utilizzando come fluidi acqua ed aria, da Mongiardini [4] a Roma nel 1950 su un tubo di vetro $D = 20,9$ mm, da Marchi e Piva [5] a Genova nel 1964 su una condotta di perspex $D = 99,2$ mm, ed ancora da Mongiardini [6] nel 1966 su tubi di perspex $D = 26-52-82$ mm.

Nelle pubblicazioni sono stati riportati i valori numerici di tutte le misure sperimentali. Le ricerche del 1964-66 furono coordinate fra gli Istituti di Idraulica di Roma e di Genova in modo da fornire elementi di osservazione complementari.

In ogni serie sperimentale, a parità o quasi di portata idrica, sono state impiegate portate d'aria progressivamente crescenti, in modo da passare dalla iniziale corrente idrica omogenea a una corrente mista con trasporto di bolle d'aria, isolate o a gruppi, ad un flusso continuo di bolle e quindi alla formazione di correnti stratificate. Per una descrizione dettagliata dei fenomeni sperimentali si rimanda alle relative pubblicazioni.

In questa nota viene esaminato il solo deflusso con bolle, in condizioni mediamente permanenti, con lo scopo di contribuire ad una interpretazione degli aspetti dinamici del fenomeno e di introdurre una possibile correlazione fra i risultati sperimentali citati.

2. - SCHEMATIZZAZIONE DEL FENOMENO.

2.1. - Quando il regime della corrente liquida è turbolento e finché la sua velocità resta contenuta entro qualche metro al secondo, il trascinarsi del gas in forma di bolle avviene senza apprezzabile scorrimento rispetto al liquido. Poiché la resistenza al moto offerta da un gas,

(*) PROF. ING. ENRICO MARCHI - Ordinario di Idraulica all'Università di Genova.

a parità di condizioni di velocità e di parete, è del tutto trascurabile in confronto a quella di un liquido (risultando grosso modo il rapporto fra le tensioni tangenziali pari al rapporto delle densità), sembrerebbe giustificato prevedere una diminuzione della perdita di carico passando da una corrente liquida omogenea ad una mista con trasporto di bolle gassose. La diminuzione, a parità di portata liquida, sarebbe conseguenza della riduzione, nello stesso tronco, della superficie di tubo bagnata dal liquido.

Il risultato sperimentale è invece l'opposto: la perdita di carico aumenta con l'aumentare della portata gassosa, almeno finché il flusso delle bolle non tende a divenire continuo e a rompersi dando inizio ad una corrente gassosa, eventualmente con formazione di onde o di tappi liquidi.

Nelle esperienze eseguite a Roma e a Genova si è osservato: nei tubi di piccolo diametro (20,9-26-52 mm) un aumento progressivo delle perdite con il crescere della portata d'aria rispetto alla portata d'acqua; nei tubi di diametro maggiore (82-99,2 mm) un aumento delle perdite più o meno accentuato inizialmente, seguito da una riduzione al momento della formazione del flusso continuo d'aria e successivamente da un nuovo deciso incremento con il crescere della portata d'aria in modo notevole.

Escludendo due serie di misure sperimentali ($Re = 47\ 000$ e $58\ 000$) relative alla condotta $D = 82$ mm, nelle quali le perdite con piccole portate d'aria sono rimaste praticamente invariate rispetto a quelle della corrente liquida omogenea, in tutte le altre prove eseguite nel ristretto campo del moto misto con trasporto di bolle d'aria — campo che in qualche serie è stato interessato anche solo da pochissime esperienze — le misure hanno messo in evidenza un sensibile aumento della resistenza della corrente bifase rispetto a quella omogenea.

2.2. — Il trasporto delle bolle, quando esse raggiungono forme mediamente invariati (come si verifica in condizioni di moto assimilabili ad uniformi) altera la distribuzione di velocità della fase liquida in tutta la regione interessata.

L'effetto dinamico prima richiamato può allora interpretarsi con uno schema semplice, ritenendo che lo scorrimento delle bolle non avvenga a diretto contatto con la parete ma attraverso l'intermediario di una sottile lamina liquida. In questo strato di separazione fra gas e parete il moto di scorrimento, mantenendosi laminare, incontra una resistenza proporzionale alla viscosità del liquido e al gradiente della velocità.

Il modello, che qui si propone per giustificare le osservazioni sperimentali, ha evidenti analogie con quello del substrato limite laminare del moto turbolento delle correnti omogenee nelle condotte, ma presenta rispetto a questo una differenza sostanziale. L'altezza del substrato limite di Prandtl è condizionata dalla transizione fra regione laminare e nucleo turbolento; essa quindi corrisponde ad un valore critico del numero di Reynolds calcolato con tale altezza. Nel caso invece delle bolle gassose, lo spessore della lamina liquida, pur potendo prevedibilmente dipendere da caratteristiche fisiche del

liquido (tensione superficiale e peso specifico) e forse del gas, sembra non essere influenzato dalle caratteristiche del moto. Questa indicazione, non intuitiva, è fornita dal confronto sperimentale riportato nei paragrafi seguenti.

3. — INTERPRETAZIONE ANALITICA.

3.1. — In un tronco di condotta *orizzontale liscia*, di lunghezza Δl sufficiente a rappresentare le condizioni medie del moto bifase, indichiamo con ΔS_L l'area media della superficie del tubo a contatto con il liquido e con ΔS_G l'area rimanente, cioè quella della superficie media di contorno adiacente alle bolle di gas.

L'equilibrio dinamico, in condizioni di moto che possano assumersi come mediamente uniformi, impone

$$(1) \quad \Omega \Delta p = \tau_L \Delta S_L + \tau' \Delta S_G$$

con evidente significato dei simboli (v. elenco in appendice).

La tensione tangenziale media τ_L esercitata dalla fase liquida della corrente è esprimibile in funzione della velocità media U_L e del coefficiente di attrito λ_L . Quest'ultimo, dato che le modifiche della corrente liquida con l'introduzione delle bolle d'aria sono molto modeste nei confronti del raggio medio e della forma, ed hanno influenze di segno opposto, si può assumere uguale al valore λ_0 relativo alla corrente liquida omogenea con la stessa portata (cioè con la velocità media U_0). Allora

$$(2) \quad \tau_L = \frac{1}{8} \rho \lambda_0 U_L^2$$

essendo $\lambda_0 = \lambda_0(\rho U_0 D/\mu)$ la consueta funzione di resistenza dei tubi lisci.

La tensione tangenziale media τ' , dovuta al moto laminare dello strato liquido di piccolo spessore δ , vale

$$(3) \quad \tau' = \mu \frac{U_G}{\delta}$$

dove la velocità U_G delle bolle si può confondere con la velocità alla parete della corrente omogenea, e quindi esprimere con la

$$(4) \quad U_G = \text{cost} \sqrt{\lambda_0} U_0.$$

L'eq. (1) diventa

$$(5) \quad \Omega \Delta p = \frac{1}{8} \rho \lambda_0 U_L^2 \Delta S_L + \text{cost} \sqrt{\lambda_0} \frac{\mu U_0}{\delta} \Delta S_G.$$

Le perdite di pressione della corrente bifase si possono scrivere commisurandole alla sola portata liquida e a tutta la sezione del tubo, ossia alla velocità media U_0 . Indicando con λ il relativo coefficiente di attrito, si ha

$$(6) \quad \Omega \Delta p = \frac{1}{8} \rho \lambda U_0^2 \Delta S$$

con

$$(7) \quad \Delta S = \Delta S_L + \Delta S_G = \pi D \Delta l.$$

Il rapporto λ/λ_0 rappresenta ovviamente anche il rapporto fra la perdita unitaria di pressione $(\Delta p/\Delta l)_{L,G}$ della corrente bifase e la corrispondente perdita $(\Delta p/\Delta l)_L$ della corrente liquida omogenea con la stessa portata.

Dalle eq.ni (5) e (6) deriva

$$(8) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{U_L}{U_0}\right)^2 \frac{\Delta S_L}{\Delta S} + \frac{\text{cost}}{\sqrt{\lambda_0} Re_\delta} \cdot \frac{\Delta S_G}{\Delta S}$$

avendo posto

$$(9) \quad Re_\delta = \frac{\rho U_0 \delta}{\mu}.$$

3.2. - Per procedere ad una semplificazione della (8), in modo da farvi intervenire quantità facilmente misurabili, è necessario prima di tutto precisare l'ordine di grandezza dei valori del rapporto A fra le portate volumetriche Q_G del gas e Q_L del liquido. Tale rapporto vale

$$(10) \quad A = \frac{Q_G}{Q_L} = \frac{p_0 Q_{OG}}{p_m Q_L}$$

se si indica con Q_{OG} la portata misurata alla temperatura di deflusso e alla pressione p_0 , anziché alla pressione media p_m di esercizio.

Nelle esperienze eseguite a Genova su miscugli aria-acqua in tubi di relativamente grande diametro (99,2 mm) il moto con bolle si è realizzato per valori di A contenuti sempre entro il 3%. Per le altre esperienze si limita qui il campo delle considerazioni a valori di $A \leq 5\%$, ossia a valori abbastanza piccoli da poterne trascurare i quadrati.

I rapporti Ω_G/Ω (fra la sezione del volume mediamente occupato dal gas nel tronco Δl e la sezione totale) e $\Delta S_G/\Delta S$ sono dell'ordine di grandezza di A e quindi, trascurandone i prodotti del 2° ordine, segue

$$(11) \quad \left(\frac{U_L}{U_0}\right)^2 \frac{\Delta S_L}{\Delta S} = \left(\frac{\Omega}{\Omega - \Omega_G}\right)^2 \left(\frac{\Delta S - \Delta S_G}{\Delta S}\right) \cong \cong 1 + 2 \frac{\Omega_G}{\Omega} - \frac{\Delta S_G}{\Delta S}.$$

La (8) si trasforma nella

$$(12) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + 2 \frac{\Omega_G}{\Omega} - \frac{\Delta S_G}{\Delta S} + \frac{\text{cost}}{\sqrt{\lambda_0} Re} \cdot \frac{\Delta S_G}{\Delta S}.$$

I rapporti Ω_G/Ω e $\Delta S_G/\Delta S$ sono funzioni del rapporto A fra le portate aeriforme e liquida.

Il primo è dato dal prodotto di A per U_0/U_G ; ossia, tenuto conto della (4),

$$(13) \quad \frac{\Omega_G}{\Omega} = \frac{\text{cost}}{\sqrt{\lambda_0}} \cdot A.$$

Il secondo dipende da A in modo non semplice, intervenendo su tale dipendenza la forma delle bolle. In generale poniamo

$$(14) \quad \frac{\Delta S_G}{\Delta S} = K A^n$$

con K ed n costanti da precisare.

L'eq. (12), sostituendovi le (13) e (14), e tenendo conto che $\sqrt{\lambda_0}$ varia normalmente abbastanza poco da poter essere conglobato nelle costanti, nei limiti delle schematizzazioni già introdotte, diventa

$$(15) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + k A - K A^n + \text{cost} \frac{A^n}{Re_\delta}.$$

4. - CONFRONTO SPERIMENTALE.

4.1. - Per una indicazione sui valori dell'esponente n da attribuire al rapporto volumetrico A nella (14), consideriamo due situazioni limite schematiche.

a - Bolle separate di forma semisferica.

La superficie adiacente alla parete è grosso modo proporzionale al quadrato del raggio, mentre il volume contenuto è proporzionale al cubo. Ne deriva

$$(16) \quad \frac{\Delta S_G}{\Delta S} = K_1 A^{2/3}.$$

b - Bolle distribuite fittamente, in modo tale da rendere il volume del gas assimilabile ad un semicilindro. La superficie adiacente alla parete è grosso modo proporzionale al raggio, mentre il volume è proporzionale al quadrato dello stesso. Allora

$$(17) \quad \frac{\Delta S_G}{\Delta S} = K_2 A^{1/2}.$$

Il confronto della (15) con le esperienze aria-acqua di cui si è parlato inizialmente è stato fatto utilizzando sia l'esponente $n = 2/3$, sia l'esponente $n = 1/2$.

Nei riguardi di tale scelta il confronto sperimentale, per le approssimazioni insite nelle misure e per le modeste differenze fra le due posizioni, non fornisce una indicazione decisiva: è solo apprezzabile un lieve miglioramento nella correlazione delle esperienze con l'esponente $n = 2/3$ (fig. 1) rispetto a $n = 1/2$ (fig. 2).

L'indicazione sperimentale è apparsa invece abbastanza chiara, fin dal primo esame sommario, nei confronti di δ . Come mostrano i diagrammi finali riportati nelle figure 1 e 2, la posizione $\delta = \text{cost}$ ha portato ad una buona interpretazione dei risultati sperimentali secondo un'equazione del tipo (15). Senza voler attribuire al confronto sperimentale un significato quantitativo che vada al di là delle approssimazioni delle misure, è indubbio ch'esso mette in evidenza una sostanziale indipendenza di δ dalle variazioni di velocità e di diametro, tenuto conto che tali

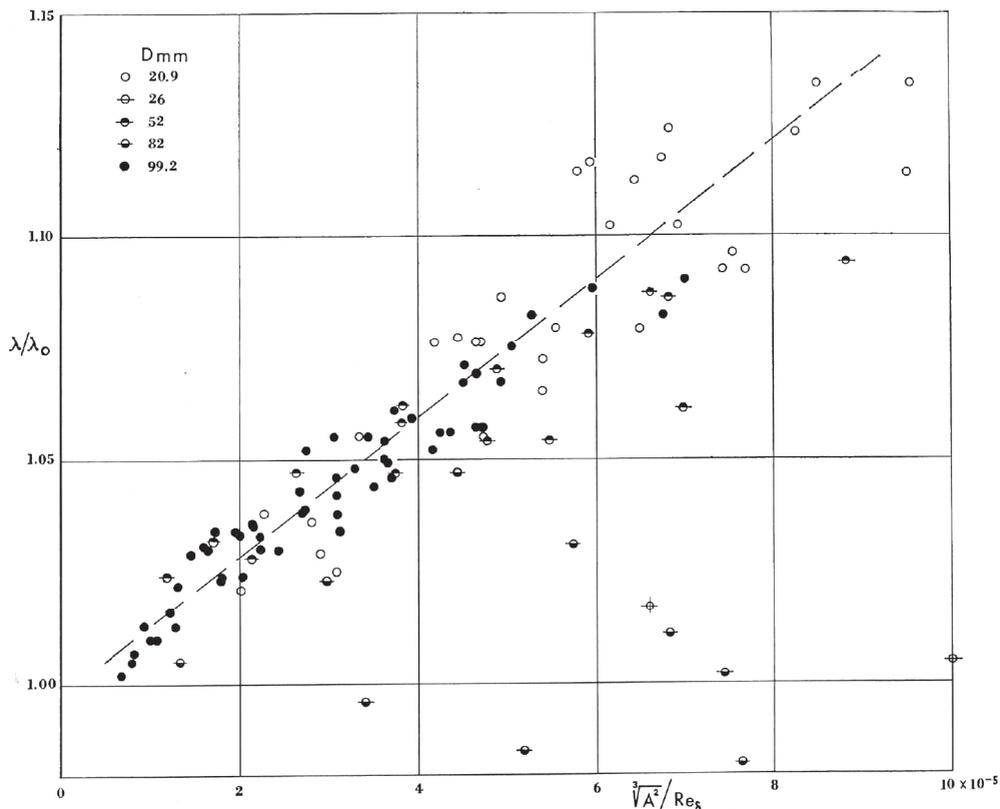


Fig. 1. - Correlazione dei risultati sperimentali di Mongiardini e di Marchi-Piva assumendo $n = 2/3$ e convenzionalmente $\delta = 1$ mm.

variazioni sono state notevoli fra serie e serie di esperienze (da $U_0 = 0,12$ m/s a 2,5 m/s e da $D = 20,9$ mm a 99,2 mm).

Nessuna informazione si può trarre naturalmente da queste esperienze (eseguite sempre su correnti acqua-aria) circa l'eventuale influenza su δ delle caratteristiche dei fluidi.

4.2. - Per la costruzione dei diagrammi delle figg. 1 e 2, che hanno λ/λ_0 in ordinate ed in ascisse rispettivamente $A^{2/3}/Re_\delta$ e $A^{1/2}/Re_\delta$, si è assunto convenzionalmente $\delta = 1$ mm, non essendo precisabile il valore effettivo di tale grandezza.

Nella situazione $D = 99,2$ mm sono stati riportati tutti e soltanto i valori λ/λ_0 relativi al deflusso con bolle, contrassegnati esplicitamente con asterisco nella relativa pubblicazione. Negli altri casi sono stati riportati tutti i punti le cui ascisse cadevano nel campo rappresentato nelle figure 1 e 2, corrispondente a valori di A contenuti entro il 5%.

La correlazione dei risultati sperimentali appare soddisfacente. L'eq. (15) è approssimata da una relazione del tipo

$$(18) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - m + \text{cost} \frac{A^n}{Re_\delta}$$

dove m è un numero poco maggiore di zero (per $A \neq 0$) e poco variabile nel campo di A considerato; esso rappresenta la differenza $K A^n - k A$ e può mantenersi effettivamente quasi-costante in tale campo per valori attendibili di K , k ed n .

Dalle figure 1 e 2 si rilevano i seguenti valori numerici delle costanti che intervengono nella curva interpolare (18):

con $n = 2/3$	$m = 0,004$	cost = 1 580
con $n = 1/2$	$m = 0,008$	cost = 820

5. - CONCLUSIONI.

Si è esaminato il comportamento dinamico di correnti bifasi defluenti nei tubi orizzontali lisci in regime di moto con bolle, con riferimento alle esperienze di Mongiardini e di Marchi - Piva, e limitatamente al campo delle portate d'aria $\leq 5\%$ della portata liquida. Tale limitazione è ri-

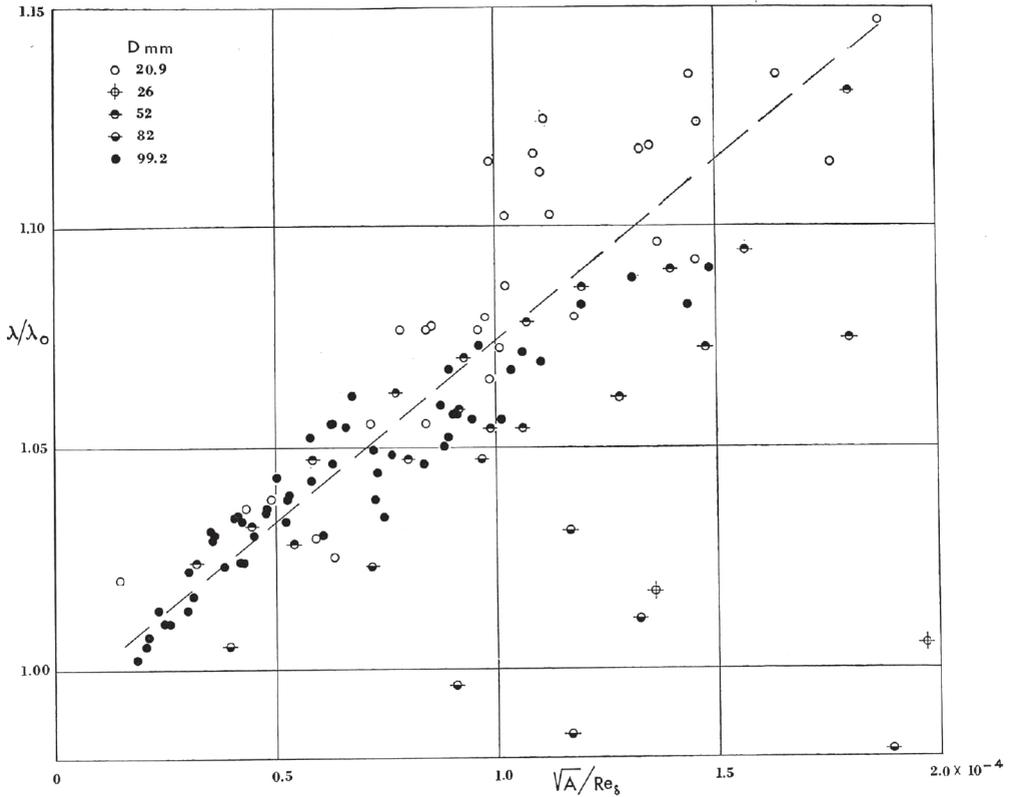


Fig. 2. - Correlazione dei risultati sperimentali di Mongiardini e di Marchi-Piva assumendo $n = 1/2$ e convenzionalmente $\delta = 1$ mm.

sultata superflua nei confronti delle esperienze sulle condotte di diametro maggiore (99,2 mm) perchè in quella situazione il deflusso con bolle si è realizzato solo con rapporti $A = Q_G/Q_L \leq 3\%$.

Nel regime considerato, il numero A^n/Re_δ con $n = 2/3 \div 1/2$ e con δ indipendente dalle caratteristiche del moto e dalle dimensioni del condotto, è risultato il parametro fondamentale della similitudine, consentendo una soddisfacente correlazione dei risultati sperimentali.

Tale correlazione non indica però i limiti di transizione ad altri regimi di deflusso. Il problema resta aperto, tenuto conto che i criteri di delimitazione finora proposti — diagramma di Baker [7] e diagramma di Alves [8] — non interpretano correttamente, o per lo meno non in modo significativo, i cambiamenti di regime osservati nelle nostre esperienze.

ELENCO DEI SIMBOLI

- | | | | |
|-------------|------------------------------------|--------------------------|---|
| ρ, μ | = densità e viscosità del liquido; | Ω | = area della sezione; |
| D | = diametro del tubo; | Ω_L, Ω_G | = aree medie attraversate dal liquido e dal gas; |
| | | Δl | = lunghezza di un tronco di condotta sufficiente a rappresentare le condizioni medie del moto bifase; |
| | | ΔS | = area della corrispondente superficie laterale; |
| | | $\Delta S_L, \Delta S_G$ | = aree delle superfici laterali mediamente adiacenti al liquido e al gas; |
| | | Δp | = differenza di pressione fra le sezioni estreme del tronco; |
| | | τ_L | = tensione tangenziale media esercitata dalla fase liquida; |
| | | τ' | = tensione tangenziale media su ΔS_G ; |
| | | Q_L | = portata liquida volumetrica; |

Q_G	= portata gassosa volumetrica, alle condizioni di deflusso: temperatura T e pressione media p_m ;	δ	= spessore del film liquido fra bolla e parete del tubo;
Q_{OG}	= portata gassosa volumetrica, alla temperatura T e alla pressione di riferimento p_0 ;	Re_δ	= n. di Reynolds definito dalla (9) = $= \rho U_0 \delta / \mu$;
$U_0 = Q_L / \Omega$	= velocità media della corrente liquida omogenea di portata Q_L ;	A	= rapporto fra le portate gassosa e liquida = $\frac{Q_G}{Q_L} = \frac{p_0 Q_{OG}}{p_m Q_L}$;
$U_L = Q_L / \Omega_L$	= velocità media della fase liquida;	n	= esponente della eq.ne approssimata (14): $\frac{\Delta S_G}{\Delta S} = K A^n$.
U_G	= velocità media delle bolle gassose;		
λ_0	= coefficiente di attrito della corrente liquida omogenea, definito dall'equazione		

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta l} \right)_L = \rho \frac{\lambda_0}{D} \cdot \frac{U_0^2}{2};$$

λ = coefficiente di attrito della corrente bifase, riferito a tutta la sezione del tubo e alla sola portata liquida:

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta l} \right)_{LG} = \rho \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U_0^2}{2};$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{(\Delta p / \Delta l)_{LG}}{(\Delta p / \Delta l)_L} =$$

rapporto fra la perdita di pressione della corrente bifase e la perdita di pressione della corrente liquida omogenea con la stessa portata;

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. W. LOCKHART, R. C. MARTINELLI: «Chem. Eng. Progr.», vol. 45, 39÷48 (1949).
- [2] V. MONGIARDINI: «L'Acqua», n. 3 (Maggio-Giugno 1966).
- [3] R. S. BRODKEY: *The phenomena of fluid motions*. - Cap. 16, 456÷494 Ed. Addison-Wesley Publ. Co. (1967).
- [4] V. MONGIARDINI: «L'Acqua», n. 5-6 (Maggio-Giugno 1950).
- [5] E. MARCHI, A. M. PIVA: «L'Energia Elettrica», n. 1, vol. XLII (1965).
- [6] V. MONGIARDINI: «L'Acqua», n. 2 (Marzo-Aprile 1966).
- [7] O. BAKER: «Oil and Gaz I.», vol. 53, n. 12, 185÷195 (1954).
- [8] G. E. ALVES: «Chem. Eng. Progr.», vol. 50, 449÷456 (1954).

La propagazione delle onde di piena
Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 1978

Meccanica dei fluidi. — *La propagazione delle onde di piena.*

Nota (*) del Corrisp. ENRICO MARCHI.

SUMMARY. — An approximate model of *de Saint-Venant* equations is proposed to study the motion of a flood wave down a channel. Its validity is not restricted to mild bottom slopes and the resulting parabolic equation can be integrated even if the variation of the wave speed with the flow rate is taken into account.

1. Il moto gradualmente vario di una corrente liquida a superficie libera in un alveo quasi-cilindrico è rappresentato dal sistema iperbolico di due equazioni classiche dell'idraulica:

(a) l'equazione dinamica

$$(1) \quad i_f - j = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

ottenuta dalla legge della quantità di moto sotto l'ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni nelle sezioni normali della corrente e di moto in blocco nella direzione x (corrente lineare o monodimensionale);

(b) l'equazione di continuità

$$(2) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

ottenuta dalla legge di conservazione della massa sotto la condizione di densità costante.

Il significato dei simboli è il seguente:

- x variabile indipendente spaziale, misurata lungo la linea di fondo;
- t variabile indipendente temporale;
- U velocità media della corrente in una generica sezione normale;
- Ω area della sezione normale;
- Q portata della corrente nella stessa sezione: $Q = \Omega U$;
- Y profondità della corrente, definita come quota del pelo libero rispetto ad una linea di fondo; effettiva, se il fondo è regolare, o assunta convenzionalmente in modo da mediane le irregolarità;
- i_f pendenza della linea di fondo;
- j perdita di carico totale per unità di percorso della corrente per effetto delle resistenze di attrito.

(*) Presentata nella seduta del 15 giugno 1978.

L'equazione (1) fu proposta nel 1871 da *Barrè de Saint-Venant* [1], ma le espressioni per il calcolo delle dissipazioni energetiche, rappresentate dalla pendenza j , sono per la maggior parte posteriori a quella data e derivano dalle conoscenze sulla resistenza al moto delle correnti permanenti, ed in particolare delle correnti uniformi. Si può porre in generale

$$(3) \quad j = \frac{U^2}{gC^2 R}$$

avendo indicato con

R il raggio idraulico, definito dall'equazione $R = \Omega/P$ con

P il perimetro bagnato della sezione;

C un coefficiente adimensionale di resistenza, funzione delle irregolarità e della scabrezza dell'alveo rapportate al raggio idraulico e, secondariamente, del numero di Reynolds della corrente e della forma della sezione.

2. Note che siano le condizioni iniziali e quelle al contorno, il calcolo numerico per differenze finite consente l'integrazione del sistema di equazioni (1) e (2). Tuttavia, nello studio delle *onde di piena*, trovano ancora largo impiego per la loro praticità, e per la significatività dei risultati che ne derivano, alcuni modelli semplificati dell'equazione dinamica di *de Saint-Venant*. I più noti sono (cfr. [2], [3]):

– il modello detto « cinematico », che deriva dall'eq. (1) considerando assolutamente prevalenti gli effetti resistivi e riducendola alla

$$(4) \quad i_f - j = 0;$$

– il modello detto « parabolico », [4] che si ottiene dalla stessa eq. (1) trascurando solo i termini inerziali, per cui resta

$$(5) \quad i_f - j = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

L'equazione (4) impone una relazione fra l'area Ω della sezione e la portata Q , chiamata tradizionalmente « scala di deflusso »:

$$(6) \quad Q = Q(\Omega).$$

Sostituendo la (6) nell'equazione di continuità (2), ed indicando con c la derivata parziale di Q rispetto ad Ω

$$(7) \quad c = \frac{dQ}{d\Omega} = c(Q)$$

si ottiene l'equazione a derivate parziali

$$(8) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

L'integrazione è immediata con il metodo delle caratteristiche, perché, definita tale famiglia di curve con l'equazione

$$(9) \quad \frac{dx}{dt} = c(Q),$$

deriva che su di esse $dQ = 0$, ossia Q deve restare costante.

È evidente il significato di velocità di propagazione della grandezza c : *celerità dell'onda*. Poiché c risulta crescente con Q , la propagazione è accompagnata da una distorsione che tende a rendere il fronte dell'onda sempre più ripido con l'avanzamento.

Analogamente (si veda, ad esempio, [5]) dall'eq. (5) del modello parabolico e dall'equazione di continuità (2) si ottiene l'equazione

$$(10) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + c(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = v(Q) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

nella quale il coefficiente v vale

$$(11) \quad v = \frac{gC^2 \Omega^2 R}{2 QB} \cong \frac{Q}{2 i_f B},$$

essendo B la larghezza del pelo libero della sezione di area Ω ⁽¹⁾.

La presenza dell'ultimo termine, essendo sempre $v > 0$, mette in evidenza che la propagazione è accompagnata non solo da una distorsione ma anche da un'attenuazione del colmo dell'onda (sul quale è $\partial^2 Q / \partial x^2 < 0$).

Assegnata, per $x = 0$, la condizione al contorno

$$(13) \quad Q(0, t) = F(t) \quad \forall t \geq 0,$$

e posta inoltre la condizione che Q sia limitata per $x \rightarrow \infty$, l'integrazione della (10) non presenta difficoltà se si linearizza l'equazione assumendo per c e v valori *costanti*; il risultato è riportato in diverse pubblicazioni (come le già citate [3] e [5]) e riveste un notevole interesse applicativo. Tuttavia la limitazione a valori costanti di c e v è abbastanza restrittiva; come si vedrà più avanti, la costanza di c si potrebbe anche rimuovere, ma sotto condizioni diverse da quelle premesse.

(1) La posizione espressa dall'eq. (5) del modello parabolico è equivalente ad assumere una scala di deflusso del tipo

$$(12) \quad Q = Q(\Omega) - v(Q) \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

dove v è funzione di Q secondo la (11), ma potrebbe evidentemente esprimersi anche in funzione di Ω .

Va osservato che la scala di deflusso (6) potrebbe in generale cambiare da sezione a sezione, cioè essere del tipo $Q = Q(\Omega, x)$, senza con questo modificare l'equazione derivata (9), salvo introdurre una dipendenza da x anche nella celerità: $c = c(Q, x)$ (si veda, ad esempio, [6]). Si può verificare che l'eq. (8) è ancora integrabile sotto la condizione (13) e l'integrale vale

$$(14) \quad Q(x, \tau) = F(\tau)$$

dove τ è un tempo definito implicitamente dalla

$$(15) \quad t = \tau + \int_0^x \frac{dx}{c\{F(\tau), x\}}$$

ottenuta integrando l'equazione delle caratteristiche.

Anche nella scala di deflusso (12) si potrebbe introdurre una dipendenza del termine $Q(\Omega)$ da x , senza con questo modificare l'equazione derivata (10). In tal caso però la dipendenza esplicita di c da x , oltre che da Q , renderebbe impossibile l'integrazione in forma chiusa.

3. Nel 1956 [7] avevo mostrato la possibilità, nel campo delle onde di piena, di ridurre l'equazione di *de Saint-Venant* ad una equazione del tipo

$$(16) \quad \Omega = \Omega(Q) - \eta \frac{\partial Q}{\partial t}$$

con η praticamente costante. Tale relazione, unita all'equazione di continuità, conduce ad un'equazione differenziale analoga all'eq. (10) del modello « parabolico », che allora non conoscevo pur essendo stato proposto da Hayami qualche anno prima, nel 1951 (cfr. [4]).

In questa Nota, riportato schematicamente il procedimento deduttivo dell'eq. (16), si vuole mettere in evidenza le differenze che tale modello presenta rispetto a quello « parabolico » di Hayami, differenze che, nonostante le analogie formali, incidono sensibilmente sui risultati.

4. In primo luogo chiariamo sulla base di quale ipotesi è lecito sostituire il sistema iperbolico, caratterizzato da un doppio valore della celerità, con una forma parabolica che consente una sola determinazione della celerità. Si è già detto che tale trasformazione è orientata allo studio di un particolare settore di fenomeni propagatori, quello delle onde di piena. Esse sono caratterizzate, oltre che da variazioni della sezione e della portata molto lente nel tempo e molto gradualmente nello spazio, anche e soprattutto da una sottintesa *condizione di regime* per cui tali grandezze si propagano con la *stessa celerità*, nel verso della corrente, con una forma che dipende solo da monte, senza possibilità di influenze da valle. Infatti la relativa condizione al contorno, per $x \rightarrow \infty$, è soltanto la limitazione di Q , mentre la situazione nella sezione $x = 0$ definisce la forma della $Q(0, t)$, oppure della $\Omega(0, t)$, restando imposta dalla condizione di regime l'associazione di una grandezza all'altra.

5. L'equazione di *de Saint-Venant*, nelle variabili Q ed Ω , assume la forma

$$(17) \quad i_f - j = \left(\frac{1}{B} - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{Q}{g\Omega^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{g\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{1}{g\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Date le ipotesi di estrema gradualità delle variazioni di Q ed Ω , e di propagazione caratterizzata dalla celerità c , unica per entrambe le grandezze,

$$(18) \quad c = \frac{dQ}{d\Omega} = c(Q, x),$$

si può assumere la $\Omega = \Omega(Q, x)$, che annullerebbe il primo membro della (17) in regime di moto uniforme, come soluzione di prima approssimazione, e ritenere piccolo del primo ordine lo scostamento dalla soluzione effettiva. Allora, a meno di termini piccoli del secondo ordine, per la (18), risulta

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Dato che $\partial Q / \partial x = -\partial \Omega / \partial t$ per l'equazione di continuità, tutte le derivate presenti nell'eq. (17) possono essere sostituite in funzione di $\partial Q / \partial t$. Complessivamente l'eq. (17) si trasforma quindi nella relazione già riportata, che ora riscriviamo mettendo in evidenza l'eventuale dipendenza esplicita della scala di deflusso da x :

$$(19) \quad \Omega = \Omega(Q, x) - \eta \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Sulla base dell'eq. (3), posto $j = i_f$, ed impiegando le ordinarie formule idrauliche di resistenza, si verifica che la funzione $\Omega = \Omega(Q)$ si può porre nella forma

$$(20) \quad \Omega(Q) = KQ^n$$

dove, affinché in una data sezione il coefficiente K si possa ritenere invariante, l'esponente n deve avere valori intorno a $2/3$. In pratica le situazioni limite sono: $n \rightarrow 3/5$ per rapporti $Y/B \rightarrow 0$ (sezioni infinitamente larghe) ed $n \rightarrow 3/4$ per $Y/B \rightarrow 1$.

Conseguentemente si ottiene, con buona approssimazione la seguente espressione per il coefficiente η

$$(21) \quad \eta = \frac{n^3}{2g i_f} \cdot \frac{1}{\Psi} \left\{ 1 - \Psi \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2 \right\}$$

nella quale si è indicato con Ψ il fattore adimensionale $Q^2 B / g\Omega^3$ che, ai fini del calcolo della (21), si può valutare con la

$$(22) \quad \Psi = \frac{Q^2 B}{g\Omega^3} \cong \frac{1}{gK^3} Q^{2-3n} B.$$

Questa equazione mostra che la Ψ , e quindi anche il coefficiente η , dipendono molto debolmente da Q . Se $n = 2/3$ e l'alveo è rettangolare, la dipendenza è addirittura nulla ⁽²⁾.

Indicando con

$$(23) \quad i_c = \frac{1}{C^2} \frac{P}{B}$$

la pendenza critica dell'alveo per assegnata profondità, e con

$$(24) \quad F_r = \frac{U}{\sqrt{g\Omega/B}} = \frac{Q}{\Omega \sqrt{g\Omega/B}}$$

il n^0 di Froude della corrente, la Ψ si può anche esprimere nelle forme

$$(25) \quad \Psi = \frac{i_f}{i_c} = F_r^2.$$

Si osserva allora che nella (21) il termine

$$(26) \quad \Psi \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2 = \frac{i_f}{i_c} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2 = F_r^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^2$$

è trascurabile rispetto ad 1 quando l'alveo ha debole pendenza (alveo fluviale con $i_f \ll i_c$) oppure, corrispondentemente, quando nella corrente quasi-uniforme è $F_r^2 \ll 1$. In tali condizioni sono trascurabili i corrispondenti termini dell'equazione di de Saint-Venant, che risultano essere proprio i termini inerziali. Resta così confermata la limitazione di applicabilità del modello di Hayami ad alvei fluviali con dolce pendenza.

6. Lo studio della propagazione di un'onda di piena, sia in alveo fluviale, sia in alveo torrentizio, può essere condotto associando all'equazione di continuità un'equazione dinamica nella forma (19). Eliminando Ω fra le due equazioni si ottiene

$$(27) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial Q}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$$

con

$$(28) \quad b = \frac{Q^{1-n}}{Kn}$$

uguale all'inverso della celerità c prima definita, ed η dato dalla (21).

(2) Per valutare la portata al passaggio di una piena in una sezione di un corso d'acqua dove è nota una scala di deflusso del regime permanente del tipo $Q = k\Omega^m$, si può utilizzare un'equazione analoga alla (19) ma esplicita in Q , anziché in Ω . Si ottiene, seguendo lo stesso procedimento, la relazione

$$Q = k\Omega^m + \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial t}$$

$$\text{con } \zeta = \frac{\Omega}{2 i_f m B} \{1 - \Psi (m - 1)^2\}.$$

Il coefficiente k e l'esponente m sono correlati, tramite le

$$k = K^{-1/n}, \quad m = \frac{1}{n},$$

ai corrispondenti valori K ed n dell'eq. (20).

Anche escludendo, per ora, una dipendenza esplicita di b da x , si nota che l'eq. (27) presenta, rispetto all'eq. (10), due differenze significative: (I) la sua validità non è limitata agli alvei a dolce pendenza, ma essa può sostituire il sistema iperbolico delle eq.ni (1)-(2) in tutti gli studi di propagazione delle onde, purché il moto si realizzi nelle condizioni di regime prima definito; (II) il coefficiente η dipende molto debolmente da Q , mentre il corrispondente coefficiente ν , dato dalla (11) dipende quasi linearmente da Q ; l'approssimazione $\eta = \text{cost}$ appare dunque decisamente più attendibile della $\nu = \text{cost}$.

7. Se le variazioni dell'alveo, rispetto alla forma cilindrica, non sono trascurabili, la legge $\Omega = KQ^n$ dipende dalla coordinata x ; generalmente si può assumere n invariante e $K = K(x)$. Di conseguenza, come mostra l'eq. (28), anche $b = b(Q, x)$.

In tal caso l'integrazione si può eseguire per differenze finite, operando con i procedimenti consueti, sul sistema equivalente alla (27) formato dall'equazione delle curve caratteristiche

$$(29) \quad \frac{dt}{dx} = b(Q, x)$$

e dall'equazione di compatibilità

$$(30) \quad \frac{dQ}{dx} = \eta \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

che vale su di esse.

Da notare che, per

$$(31) \quad \frac{i_f}{i_c} = F_r^2 > \frac{1}{(1/n - 1)^2} \cong 4,$$

il coefficiente η diventa negativo e quindi l'onda tende ad esaltarsi; si conferma così la condizione di instabilità dell'onda prevista per altra via (cfr. ad esempio [8]).

Nel caso invece che il tratto di alveo considerato sia abbastanza regolare da poter assumere $K = \text{cost}$, almeno mediamente, e quindi $b = b(Q)$, l'integrazione dell'eq. (27) può essere condotta in forma chiusa, trasformandola prima nell'equazione di Burger

$$(32) \quad \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial b}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}.$$

Ciò si ottiene derivando la (28) rispetto a x e rispetto a t , sostituendo i risultati nella (27) e trascurando $\eta (d^2 b/dQ^2) (\partial Q/\partial t)^2$ che è piccolo di ordine superiore rispetto a $\eta (\partial^2 b/\partial t^2)$.

Operando la trasformazione non lineare proposta da Cole e Hopf (loc. cit. [8])

$$(33) \quad b = -2\eta \frac{\partial}{\partial t} (\ln \Phi),$$

l'equazione (32) viene ridotta ad un'equazione del tipo *calore* nella nuova funzione Φ

$$(34) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

con evidente scambio delle variabili indipendenti rispetto alla forma tipica.

La classica soluzione del problema ai valori iniziali della propagazione del calore si trasforma, in questo caso, nel calcolo della funzione $\Phi(x, t)$, e quindi della $b(x, t)$, sotto la condizione

$$(35) \quad b(0, t) = f(t)^{(3)} \quad \forall t \geq 0$$

che deriva subito, attraverso la (28), da quella assegnata per la portata Q (cfr. eq. 12). La soluzione è data dalla

$$(36) \quad b(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - \tau}{x} e^{-(G/2\eta)} d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(G/2\eta)} d\tau},$$

essendo $G(\tau; x, t)$ la funzione definita dalla

$$(37) \quad G(\tau; x, t) = \int_0^{\tau} f(\tau') d\tau' + \frac{(t - \tau)^2}{2x}.$$

Naturalmente, nota la $b = b(x, t)$ si ottiene dalla (28)

$$(38) \quad Q(x, t) = (Knb)^{1/(1-n)}$$

ed eventualmente $\Omega(x, t)$ dalla eq. (19).

Dato il cambiamento di variabile indipendente nella derivata seconda passando dall'eq. (27) all'eq. (10) di Hayami, l'applicazione dello stesso procedimento all'eq. (10) richiederebbe la conoscenza della condizione iniziale $Q(x, 0) = F(x)$, per $x > 0$, conoscenza che difficilmente è consentita nei problemi tecnici di propagazione delle onde di piena.

(3) La corrispondente condizione su Φ è

$$\Phi(0, t) = e^{-\frac{(1/2\eta)}{x} \int_0^{\tau} f(t') dt'} \quad \forall t \geq 0.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. DE SAINT VENANT (1871) - «Compte Rendu de l'Ac. des Sciences». Paris, 73, n. 3, 147-154, n. 4, 237-240.
- [2] F.M. HENDERSON (1971) - *Open Channel Flow*. The MacMillan Co. Chap. 9.
- [3] M. GALLATI e U. MAIONE (1977) - *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*. J. Wiley and Sons, 169-179.
- [4] S. HAYAMI (1951) - «Bull. No. 1». Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Japan, Dec.
- [5] L. NATALE e E. TODINI (1977) - *Mathematical Models for Surface Water Hydrology*. J. Wiley and Sons, 109-147.
- [6] G. SUPINO (1965) - *Le reti idrauliche*. Pàtron, Cap. V.
- [7] E. MARCHI (1956) - *L'Energia Elettrica*, n. 8, 783-791.
- [8] G. B. WHITHAM (1974) - *Linear and Nonlinear Waves*. J. Wiley and Sons. Cap. 2, 3, 4.

Correnti veloci in curve a 90° molto strette
Idrotecnica, 1988

CORRENTI VELOCI IN CURVE A 90° MOLTO STRETTE

Enrico Marchi (*)

SOMMARIO — Un'indagine sperimentale è stata condotta sul comportamento di correnti supercritiche in presenza di curve a 90° con contorno rigido. La sezione della corrente era mediamente larga e il rapporto $b/2r_m$ tra la semilarghezza del canale e il raggio medio della curva è variato nel campo 0.25-1.00.

In ogni curva si è misurata la massima sopraelevazione del pelo libero in funzione del numero di Froude e si è osservato, al diminuire di Fr al di sotto di certi valori limite, il fenomeno di transizione da corrente veloce a corrente lenta rigurgitata a monte della curva. La correlazione tra il rapporto $b/2r_m$ ed il numero di Froude in fase di transizione è illustrata da un grafico di derivazione sperimentale.

1. INTRODUZIONE

Nel corso degli anni '30 e '40, sulla spinta delle esigenze provenienti dai servizi tecnici di controllo delle piene negli Stati Uniti, numerosi studi furono dedicati alla conoscenza dei fenomeni provocati da rapide variazioni di sezione o di direzione su correnti a pelo libero in condizioni supercritiche. Particolarmente importanti furono i risultati conseguiti nel California Institute of Technology, sotto la direzione di R.T. Knapp (1939, 1949), nel Massachusetts Institute of Technology, sotto la direzione di A. T. Ippen (1949) e nel Iowa Institute of Hydraulic Research, sotto la direzione di H. Rouse (1938, 1949).

Furono allora chiariti gli aspetti essenziali della meccanica della formazione di onde nei moti supercritici e fu data soddisfacente inquadratura alla risoluzione dei problemi di progetto in presenza sia di ostruzioni o di allargamenti, sia di deviazioni

o di curve. Su quest'ultimo argomento gli studi degli ultimi anni sono stati invece rivolti all'indagine del comportamento degli alvei naturali, costituiti da materiali incoerenti, ossia allo studio dei fenomeni di erosione e di trasporto di sedimenti con la formazione, nelle curve, di particolari profili trasversali del fondo; V. ad esempio, Engelund (1974).

La trattazione, ormai classica, del comportamento delle correnti supercritiche in curve a fondo piano «fisso», basata essenzialmente sui metodi proposti da Knapp e Ippen (1949), ha trovato diverse conferme sperimentali, in particolare anche in Italia attraverso una sistematica indagine condotta nel 1956 da B. Poggi. Tale trattazione ha lasciato ancora aperto il problema del comportamento delle correnti supercritiche in presenza di curve molto strette, cioè di curve aventi raggio medio confrontabile con la larghezza del canale. Il problema si riallaccia a quello di accentuate deviazioni od ostruzioni e, come in quei casi, è intuibile — e le esperienze lo hanno confermato — che in certe condizioni si possa formare per effetto della curva un tratto di corrente lenta rigurgitata a monte della curva stessa. Ma, mentre nel caso

(*) Prof. Ing. Enrico Marchi. Ordinario di Idraulica nell'Università di Genova.

dei restringimenti e delle deviazioni brusche il fenomeno è prevedibile già attraverso lo studio delle equazioni interpretative del moto, per le curve questo non è possibile, almeno sulla base delle trattazioni teoriche già citate.

Pur non essendo in pratica molto frequente, la condizione di alvei rivestiti con forte pendenza e forte curvatura trova oggi alcune realizzazioni nelle difese montane di sponde sulle quali sono temibili fenomeni franosi. Ma, al di là dell'interesse applicativo, l'approfondimento dei fenomeni in esame concorre a completare il quadro delle conoscenze sul problema generale del comportamento delle correnti supercritiche.

2. SCOPO DELLA RICERCA

L'indagine sperimentale è iniziata oltre due anni fa su un canale di sezione rettangolare largo circa 30 cm, utilizzato poi per metà larghezza, con una curva a 90° a spigolo vivo sul lato interno. In base alle osservazioni ottenute con queste prime prove il ciclo sperimentale è proseguito im-

piegando quattro canali rettangolari aventi larghezza 20 cm e rapporti semilarghezza/raggio medio pari a 0,25 - 0,33 - 0,50 - 0,76 - 1,00 (V. esempi di fig. 1).

Obiettivo delle esperienze è stato l'esame del comportamento di correnti supercritiche nel deflusso attraverso i predetti canali curvi al variare del numero di Froude da valori poco maggiori di 1 a 4 circa.

Sono state utilizzate correnti che, a monte della curva, avevano sezione rettangolare larga con rapporto larghezza/profondità (b/Y_0) intorno a 5. Solo eccezionalmente, in un canale ristretto ($b = 10$ cm) si è operato fino al valore minimo 2.2 del rapporto b/Y_0 , mentre nei canali larghi 20 cm tale rapporto ha raggiunto i valori estremi:

$$(b/Y_0)_{\min} \approx 3 \quad \text{e} \quad (b/Y_0)_{\max} \approx 9.$$

In ogni prova sono state misurate le seguenti grandezze: la profondità media Y_0 della corrente a monte della curva, l'altezza massima Y_{\max} del pelo libero sul fondo contro la sponda esterna della curva e la portata Q , oltre che la pendenza del fondo del canale e la temperatura dell'acqua.

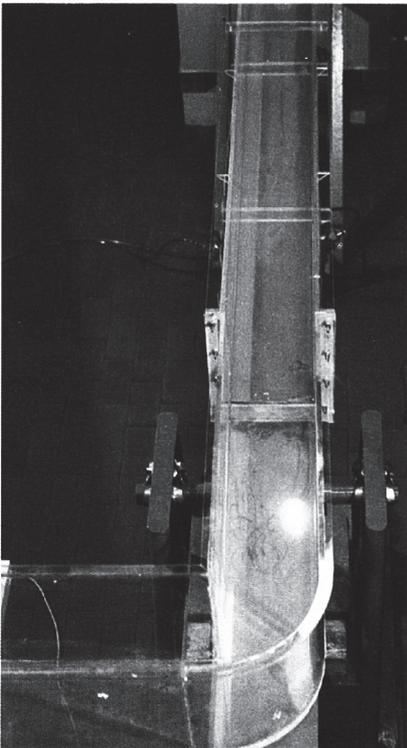


Foto 1

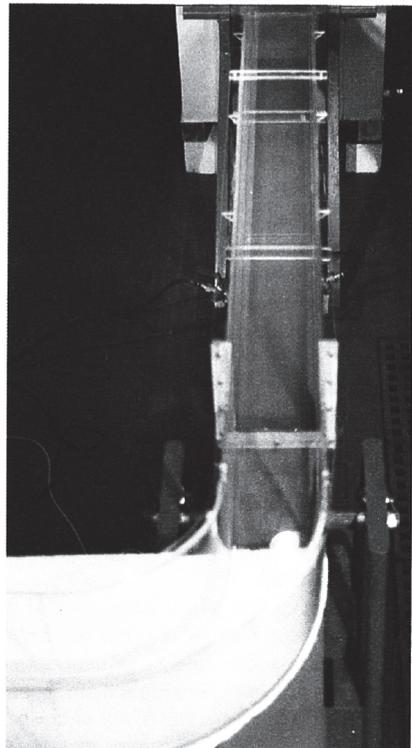


Foto 2

Fig. 1 Vista da valle dell'apparato sperimentale con le curve $b/2r_m = 1.00$ (foto 1) e $b/2r_m = 0.25$ (foto 2).

Si sono quindi valutati:

— la massima elevazione relativa $\eta = Y_{\max}/Y_0$

— il numero di Froude $Fr = U_0/(gY_0)^{1/2}$

essendo U_0 la velocità media della corrente veloce a monte della curva, misurata, come Y_0 , immediatamente prima del rialzo del pelo libero per effetto della curva. Ciascuna serie di misure è stata riferita ad un prefissato valore del rapporto di curvatura $b/2r_m$ tra la semilarghezza del canale rettangolare e il raggio medio di curvatura.

In alcune prove sperimentali si sono rilevati, in diverse sezioni trasversali a monte e lungo la curva, il profilo della superficie libera e la distribuzione del modulo delle velocità medie locali.

In ogni curva, al di sotto di certi valori del numero di Froude, si formava, a monte, un rigurgito di corrente lenta. La determinazione dei valori

di transizione si è dimostrata spesso difficile perché il fenomeno è all'inizio poco appariscente. Convenzionalmente si è assunto come limite di transizione la condizione il cui l'inizio del rapido rialzo della superficie libera — che, per valori più bassi di Fr , avanzava verso monte e costituiva il fronte di un risalto idraulico, spesso ondulato — incominciava a formarsi «mediamente» appena a monte della sezione iniziale della curva (V. foto di fig. 2).

Ulteriore motivo di dispersione dei valori di transizione è stato il fatto che alla formazione della corrente supercritica si è provveduto con modalità differenti: con una forte pendenza del fondo e lasciando la corrente libera, oppure con pendenze più modeste, anche inferiori alla critica, ma facendo defluire la corrente da una luce di fondo posta poco a monte della curva. È vero che in tal modo non era la stessa la distribuzione della velocità nel tratto rettilineo di monte, a parità di velocità e di profondità medie, e che non era nullo l'effetto della differente variazione di quota del fondo sulla massima altezza in curva, si è tuttavia ritenuto — ed è stato confermato dalle esperienze — che il legame fra η ed Fr fosse solo marginalmente influenzato dai fattori predetti e contenuto entro una fascia relativamente ristretta.

Pur risultando evidente, soprattutto per elevati valori di Fr , la separazione della corrente dalla sponda interna curvilinea e la formazione di moti secondari trasversali (TAMAI et al., 1983; HUSSEIN et al., 1986), questi fenomeni non sono stati indagati specificamente perché l'attrezzatura sperimentale non era predisposta allo scopo.

3. L'APPARATO SPERIMENTALE

Il primo impianto utilizzato per l'indagine in oggetto era costituito da una canaletta a pendenza variabile, in perspex, il cui tronco rettilineo, lungo circa 10 m, era seguito da una curva a 90° con spigolo vivo all'interno. Dopo qualche prova di controllo, la canaletta, larga 299 mm, è stata divisa in due canali larghi 142 mm con un setto centrale; lo scopo era quello di osservare contemporaneamente il comportamento di due curve, una con rapporto $b/2r_m = 1.00$ e l'altra, quella sul lato esterno della curva, con rapporto $b/2r_m = 0.31$. Le misure idrometriche risultarono però di difficile esecuzione a causa della posizione dell'impianto, che fa parte delle apparecchiature fisse in dotazione del laboratorio dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova. Per tale ragione, solo le misure sperimentali di velocità sono risultate sufficientemente affidabili.

Il secondo impianto fu costruito proprio allo scopo di esaminare e di confrontare in modo sistema-

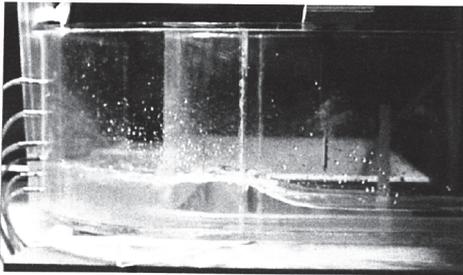


Foto 3

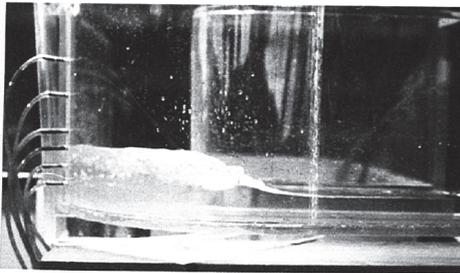


Foto 4



Foto 5

Fig. 2 Curva $b/2r_m = 0.50$. Foto 3: corrente rigurgitata ($Fr = 1.76$). Foto 4: corrente non rigurgitata, ma molto vicina alla condizione limite ($Fr = 2.39$). Foto 5: corrente non rigurgitata ($Fr = 3.39$).

tico il comportamento di diverse curve a 90°, con differenti raggi di curvatura, investite da correnti supercritiche di sezione mediamente larga (Cfr. § 2). Come mostra la fig. 3, l'apparato, a circuito chiuso, è costituito da una vasca di alimentazione da cui deriva un canale di sezione rettangolare in perspex comprendente un tratto rettilineo lungo circa 3 m, la curva in esame, sempre a 90°, e un breve tratto finale con sbocco in un serbatoio di scarico; di qui pesca una pompa che rinvia l'acqua alla vasca di alimentazione attraverso una condotta ϕ 100 mm, nella quale è installato il diaframma ϕ 70 mm tarato per la misura delle portate. La taratura del diaframma è stata eseguita con il metodo volumetrico utilizzando la vasca di controllo del laboratorio di Idraulica dell'Università di Genova. Per verifica è stato eseguito un controllo anche con le misure di una luce di fondo sotto paratoia verticale a spigolo vivo, collocata nel tronco rettilineo del canale a 2.50 m dal serbatoio di carico. L'approssimazione sulla misura delle portate può ritenersi contenuta entro $\pm 0.7\%$.

Le misure di profondità sono state eseguite con idrometri a punta, che si sono dimostrati più adatti dei misuratori piezometrici non solo per la loro facile adattabilità allo spostamento della sezione di misura, ma anche per la minore influenza della elevata velocità della corrente sull'operazione di misura. La precisione delle misure di profondità era mediamente dell'ordine dell'1% nel campo in esame.

In determinate condizioni sono state eseguite anche misure del modulo delle velocità medie locali utilizzando un micromolinello NOVAR, di fabbricazione inglese, con elica di diametro 10 mm e anello di sostegno dell'elica ϕ 14 mm.

Per il trasferimento delle misure dal contagiri

magnetico del molinello ai valori della velocità della corrente sono state utilizzate le curve di taratura fornite dal costruttore (Streamflo probe 403, serial No 889). Non si può escludere un errore sistematico nelle condizioni di funzionamento del misuratore ma ciò non incideva sulla distribuzione delle velocità locali nella sezione.

L'errore accidentale in queste misure è poco significativo perché l'incertezza deriva essenzialmente dalle pulsazioni temporali della velocità; pulsazioni che erano normalmente dell'ordine del 3-5% e potevano raggiungere il 10% in particolari posizioni.

Come si è detto al § 2, la corrente veloce a monte della curva poteva formarsi liberamente, a partire dal serbatoio di carico, per effetto della pendenza del fondo. Con questo sistema non era possibile però andare oltre certi valori di Fr , per i limiti imposti all'abbassamento dell'estremità del canale rispetto alla cerniera. Occorre in proposito osservare che parte della curva acquistava la stessa pendenza del tronco rettilineo e solo verso l'uscita il fondo della curva subiva una torsione trasversale per proseguire poi fino allo sbocco con una pendenza prossima a quella iniziale. Lo sviluppo elicoidale del fondo della curva non era ben controllabile se non alle estremità e, in seguito alla rigidità dell'apparato, si presentava sempre nel primo tratto della curva — il più importante per gli effetti di innalzamento del pelo libero — un fondo pendente trasversalmente verso l'esterno.

Per raggiungere più elevati valori del numero di Froude si è fatto ricorso alle correnti controllate da una luce di fondo, posta 0,90 m a monte del vertice esterno della curva; l'apertura della luce e l'inclinazione del setto erano regolate volta per volta fino ad ottenere le condizioni sperimentali volute per la corrente che investiva la curva.

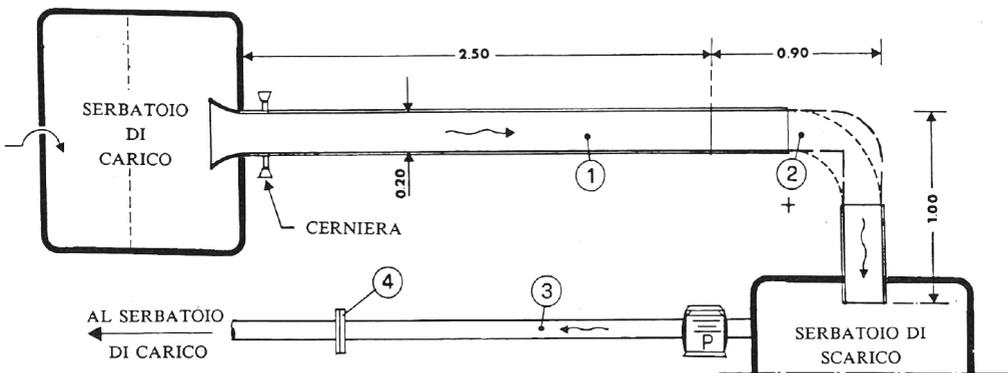


Fig. 3 L'apparato sperimentale.

- 1 — Canale trasparente rettangolare con pendenza regolabile.
- 2 — Tronco del canale 1 comprendente la curva in esame.
- 3 — Condotta ϕ 100 mm per l'alimentazione del serbatoio di carico.
- 4 — Diaframma di misura delle portate: ϕ 70 mm.

P — Pompa di circolazione.

4. IL PROCEDIMENTO DI MISURA

L'apparato sperimentale di fig. 3 è stato utilizzato con le seguenti curve (fig. 4).

(A₁) $b = 0.100$ m $r_m = 0.050$ m $b/2r_m = 1.00$
 (A₂) = 0.200 » = 0.100 » = 1.00

(B) $b = 0.203$ » $r_m = 0.133$ » $b/2r_m = 0.76$
 (C) = 0.200 » = 0.200 » = 0.50
 (D) = 0.200 » = 0.300 » = 0.33
 (E) = 0.200 » = 0.400 » = 0.25

Le esperienze sono state condotte, su ciascuna curva, facendo variare la portata, la profondità

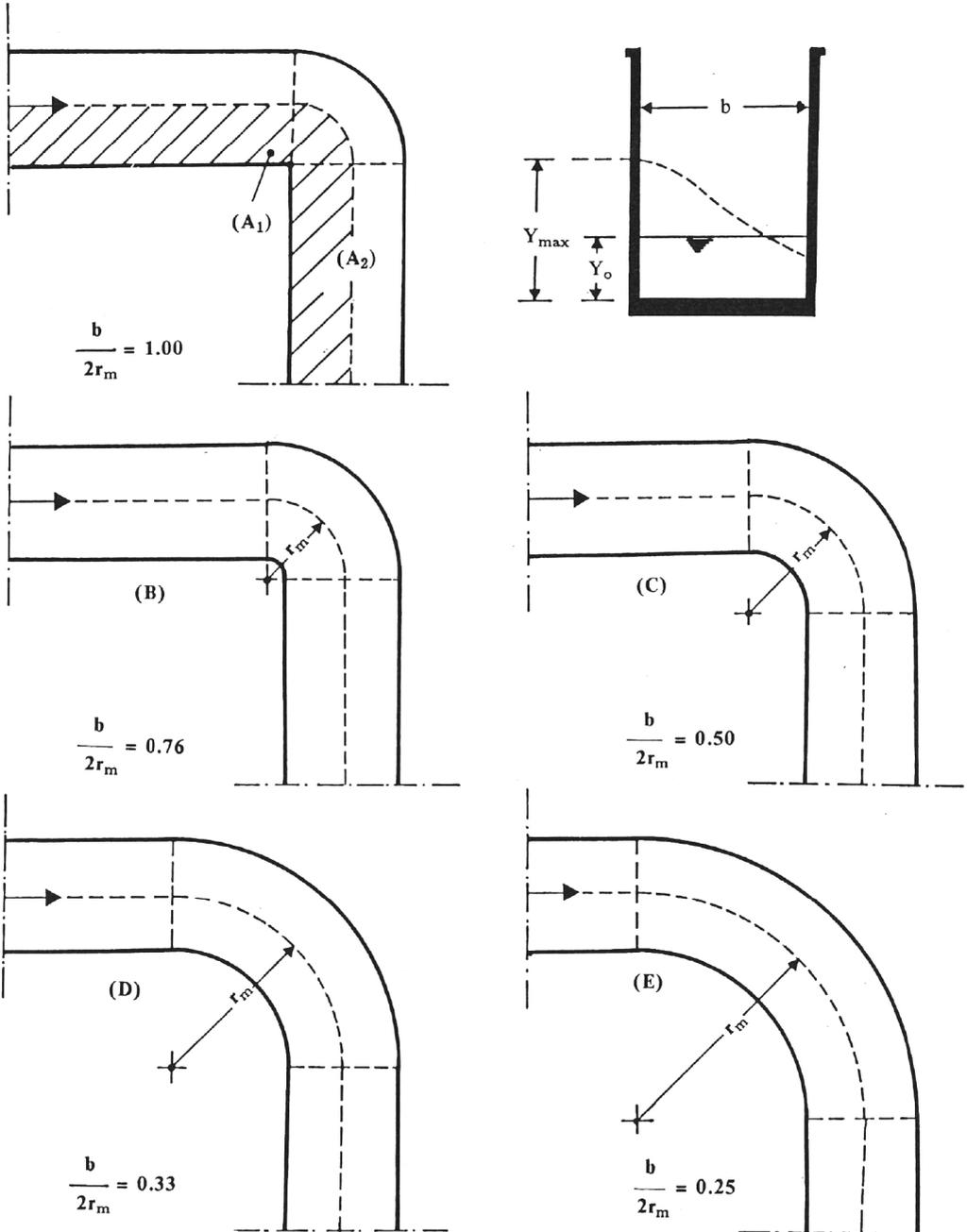


Fig. 4 Le curve utilizzate per le esperienze.

della corrente a monte ed eventualmente la pendenza del canale.

Dati, in ciascuna serie, i valori della larghezza b e della pendenza del fondo i_f , si sono misurati: la portata Q , la profondità a monte Y_0 e la profondità massima in curva Y_{max} . Si sono quindi calcolati i valori della velocità media U_0 , del numero di Froude Fr e del rapporto $\eta = Y_{max}/Y_0$.

Non si è proceduto sperimentalmente per valori progressivi di Fr , anche se poi i risultati saranno riportati in questa forma. Si è cercato invece di attenuare eventuali fenomeni di isteresi, per quanto le situazioni in esame non si possano assimilare a quelle note delle ostruzioni in correnti super-

critiche dato il differente effetto della curva sulla morfologia della superficie libera. Un approfondimento dell'indagine su questi aspetti, sull'influenza della pendenza del fondo e delle condizioni di valle è stato eseguito nel corso delle esperienze nella situazione indicata con (A_2) nel quadro predetto.

5. I RISULTATI SPERIMENTALI

5.1. — Nelle Tabelle I e II sono riportati i risultati delle esperienze eseguite rispettivamente sul-

Tabella I — Risultati sperimentali sulla curva (A_1) con $b = 0.100$ m e $b/2r_m = 1.00$

N	i_f ‰	Q l/s	Y_0 mm	U_0 m/s	Y_{max} mm	Fr		Osservazioni
1	11.5	9.95	46.0	1.108	112	1.65	2.43	L. Rig. (60 cm)
2	»	7.49	37.3	1.052	93	1.74	2.49	» » (50 cm)
3	»	6.70	33.4	1.050	85	1.83	2.54	» » (40 cm)
4	18.0	7.85	36.4	1.131	104	1.89	2.86	P. »
5	»	7.97	36.5	1.144	105	1.92	2.88	L. »
6	13.1	6.11	30.3	1.058	82	1.94	2.70	» » (20 cm)
7	18.0	7.85	34.0	1.210	108	2.10	3.18	P. »
8	»	»	33.4	1.232	109	2.15	3.26	» »
9	9.5	11.68	43.0	1.416	135	2.18	3.13	» » (30 cm)
10	18.0	7.85	32.1	1.282	117	2.29	3.64	» »
11	9.7	10.32	38.0	1.415	138	2.31	3.63	» » (15 cm)
12	1.30	8.43	33.2	1.331	114	2.33	3.43	» » (30 cm)
13	»	9.17	35.2	1.358	119	2.31	3.38	» »
14	18.0	10.85	37.3	1.516	155	2.49	4.15	» » (10 cm)
15	1.30	9.17	33.2	1.440	133	2.52	4.00	» » (25 cm)
16	»	11.52	38.0	1.577	153	2.59	4.03	» » (20 cm)
17	18.0	11.76	37.3	1.639	175	2.71	4.69	» » (8 cm)
18	1.30	12.38	38.2	1.685	170	2.75	4.45	» » (15 cm)
19	9.7	12.68	38.5	1.713	180	2.79	4.68	» » (10 cm)
20	5.36	12.75	38.4	1.727	180	2.81	4.69	» »
21	18.0	10.32	33.3	1.611	170	2.82	5.10	» » (3 cm)
22	»	12.30	37.2	1.720	185	2.85	4.97	» » (7 cm)
23	1.30	10.59	33.5	1.643	170	2.87	5.07	» »
24	18.0	10.23	32.6	1.632	165	2.88	5.06	» » (5-6 cm)
25	9.7	13.25	38.5	1.790	193	2.91	5.01	» »
26	5.36	13.39	38.5	1.809	195	2.94	5.06	» »
27	1.30	13.39	38.4	1.814	193	2.95	5.03	» »
28	18.3	13.00	37.3	1.813	200	2.99	5.36	» Rig. (?)
29	9.7	14.00	38.3	1.902	210	3.11	5.48	» Cond. limite
30	1.30	11.52	33.5	1.788	180	3.12	5.37	» »
31	18.0	11.68	33.5	1.813	190	3.16	5.67	» Non Rig. (?)
32	18.3	14.00	37.0	1.969	222	3.27	6.00	» Non Rig.
33	1.30	12.38	33.5	1.922	205	3.35	6.12	» »
34	18.0	14.79	36.7	2.096	240	3.49	6.54	» »
35	»	12.97	33.5	2.013	220	3.51	6.57	» »
36	18.3	12.82	32.4	2.058	232	3.65	7.16	» »
37	»	13.18	32.4	1.116	245	3.75	7.56	» »
38	»	13.60	32.4	2.183	255	3.87	7.87	» »

NOTAZIONI:

L. = Corrente di monte defluente libera dal serbatoio alla curva.

P. = Corrente di monte controllata da una paratoia con luce di fondo.

Rig. = Corrente lenta rigurgitata a monte della curva (distanza del risalto dall'inizio curva).

Rig. ondul. = Corrente lenta rigurgitata con ondulazioni stazionarie.

Non Rig. = Corrente che si conserva veloce in tutto il tronco a monte dell'inizio curva.

Tabella II — Risultati sperimentali sulla curva (A₂) con b = 0.200 m e b/2r_m = 1.0

N	i _f ‰	Q l/s	Y _o mm	U _o m/s	Y _{max} mm	Fr		Osservazioni
1	8.85	5.97	36.0	0.829	81	1.395	2.25	L. Rig. ond. (150)
2	»	7.84	42.3	0.927	93	1.44	2.20	» » » (160)
3	12.57	9.90	46.3	1.069	110	1.59	2.38	» Rig. (90 cm)
4	18.0	16.29	61.0	1.336	155.5	1.73	2.55	» » (75 cm)
5	»	10.64	43.2	1.231	122	1.89	2.82	» » (60 cm)
6	17.0	9.90	41.0	1.207	114	1.90	2.78	» » (30 cm)
7	18.0	8.21	34.0	1.207	103	2.09	3.03	» » »
8	»	»	33.9	1.210	100	2.10	2.95	P. » (20 cm)
9	»	9.34	35.5	1.315	119	2.23	3.35	» » (15 cm)
10	1.25	11.37	39.0	1.458	125	2.36	3.21	» » (50 cm)
11	18.0	11.43	38.7	1.455	145	2.36	3.75	» » (10 cm)
12	30.0	7.71	30.0	1.285	114	2.37	3.80	» » (7 cm)
13	18.2	»	39.0	1.464	148	2.37	3.79	» » (5-8 cm)
14	1.25	9.01	32.9	1.370	112	2.41	3.40	» » (20 cm)
15	30.0	9.23	33.4	1.382	135	2.41	4.04	L. » (4-5 cm)
16	9.90	11.43	38.5	1.485	135	2.42	3.51	P. » (20 cm)
17	30.0	10.66	36.3	1.469	150	2.46	4.13	L. » (5-6 cm)
18	18.0	11.20	37.4	1.497	145	2.47	3.88	P. » (10 cm)
19	1.25	9.23	32.8	1.407	122	2.48	3.72	» » (15 cm)
20	»	8.68	31.0	1.400	110	2.54	3.55	» » (20 cm)
21	2.90	11.43	37.2	1.536	128	2.54	3.41	» » (40 cm)
22	30.0	9.50	32.8	1.448	114	2.55	4.54	» » (2-3 cm)
23	»	7.18	27.0	1.330	119	2.58	4.41	» » »
24	1.25	13.33	40.1	1.662	165	2.65	4.11	» » (15 cm)
25	»	8.68	30.0	1.446	101	2.67	3.37	» » (40 cm)
26	18.0	10.19	33.2	1.530	148	2.69	4.44	» » (5 cm)
27	»	8.79	30.0	1.466	134	2.70	4.47	» » (0-2 cm)
28	1.25	5.36	21.3	1.259	74	2.75	3.47	» » (35 cm)
29	18.0	10.94	34.1	1.603	160	2.77	4.69	» » (0-2 cm)
30	»	9.39	30.5	1.539	145	2.81	4.75	» Rig. (?)
31	1.25	10.48	32.0	1.636	155	2.92	4.84	» » (5 cm)
32	»	10.75	32.5	1.654	158	2.93	4.86	» » »
33	18.0	12.02	34.7	1.731	188	2.97	5.42	» Cond. limite
34	30.0	11.11	32.8	1.694	190	2.99	5.79	» » »
35	18.0	12.50	34.7	1.800	200	3.09	5.76	» Non Rig.
36	1.25	8.68	26.8	1.619	144	3.16	5.37	» Cond. lim. (?)
37	18.0	12.88	34.8	1.851	210	3.17	6.03	» Non Rig.
38	1.25	11.37	31.6	1.799	150	3.23	5.70	» » » (?)
39	30.0	12.42	33.3	1.865	218	3.26	6.55	» » »
40	1.25	9.02	26.8	1.682	155	3.28	5.78	» » » (?)
41	18.0	13.54	35.0	1.934	230	3.30	6.57	» » »
42	»	11.43	30.7	1.862	210	3.39	6.84	» » »
43	1.25	13.33	33.8	1.971	210	3.42	6.21	» » »
44	18.0	11.94	30.7	1.944	220	3.54	7.17	» » »
45	»	12.88	31.9	2.018	235	3.61	7.37	» » »
46	1.25	9.90	26.6	1.861	185	3.64	6.95	» » »
47	18.4	14.04	33.5	2.095	250	3.66	7.46	» » »
48	30.0	13.97	33.2	2.104	260	3.69	7.83	» » »

NOTAZIONI: come nella TAB. I

le curve (A₁) e (A₂). Nei grafici delle figure 5 e 6 aventi in ascisse il numero di Froude Fr ed in ordinate il rapporto $\eta = Y_{\max}/Y_o$ sono riportati i corrispondenti punti sperimentali. Per confronto sono state riportate le seguenti curve:

I. Linea tratteggiata che rappresenta l'equazione di Knapp & Ippen

$$(1) \eta = Fr^2 \sin^2 (\beta + \Theta/2)$$

con $\beta = \arcsin (1/Fr)$ e $\Theta = \arctg [b/(r_m + b/2) \operatorname{tg} \beta]$;

II. Linea a tratto continuo che rappresenta la condizione $Y_{\max} = E_o$, essendo E_o il carico specifico della corrente a monte della curva; essa è definita dall'equazione

$$(2) \eta = 1 + Fr^2/2.$$

I punti sperimentali si scostano sensibilmente

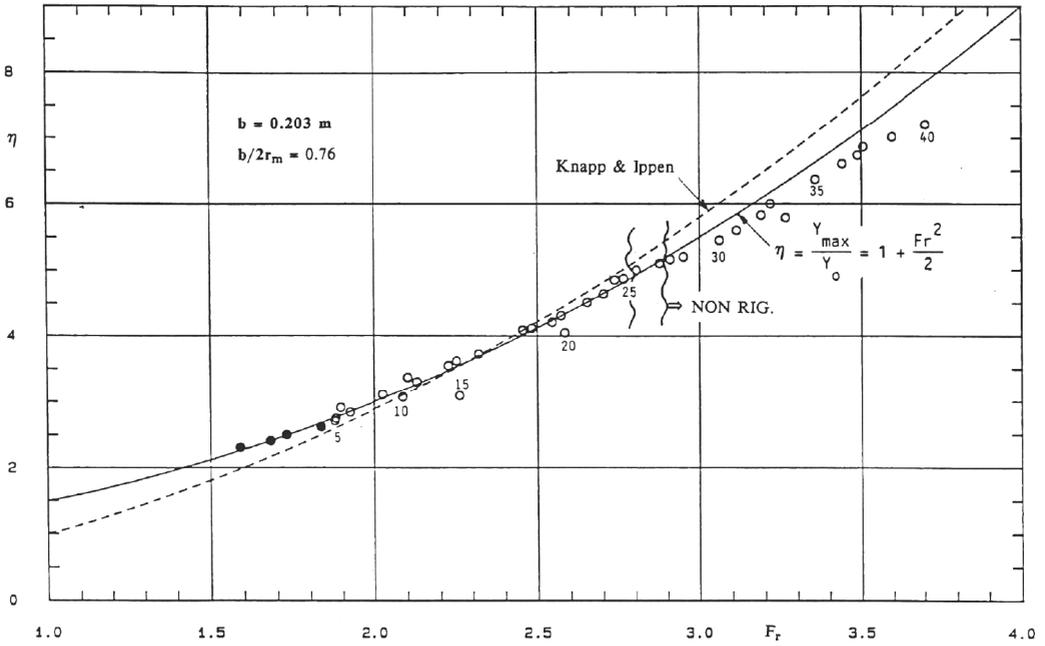


Fig. 5 Risultati sperimentali sulla curva (A₁) con $b = 0.100 \text{ m}$ e $b/2r_m = 1.00$. I punti pieni corrispondono a correnti lente rigurgitate a monte della curva per una lunghezza $\geq 15 \text{ cm}$. I punti con croce si riferiscono a situazioni di correnti originate da una luce di fondo sul canale con pendenza inferiore alla critica.

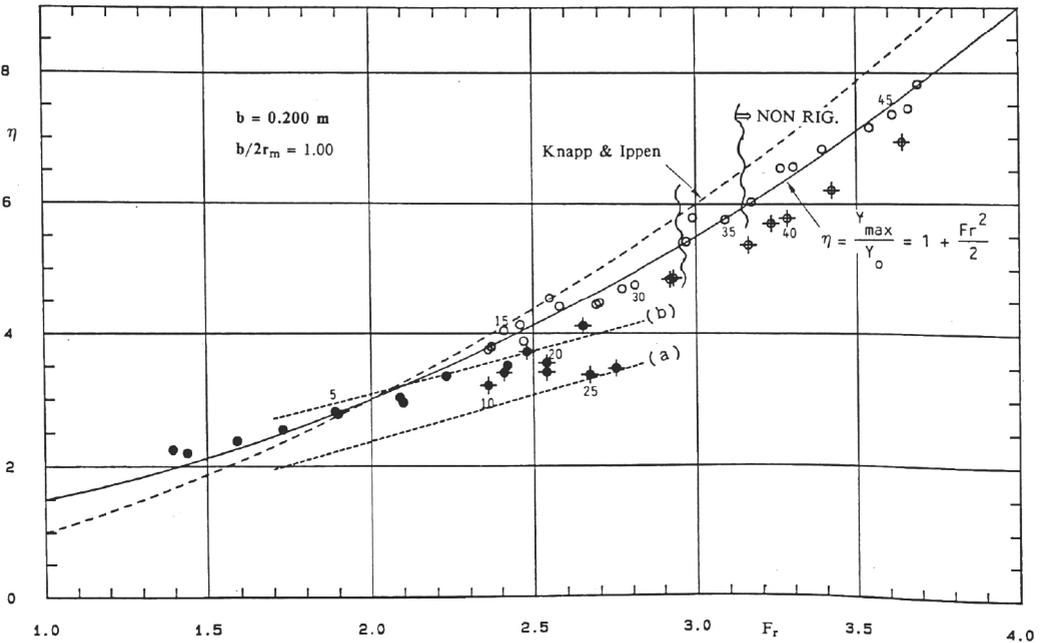


Fig. 6 Risultati sperimentali sulla curva (A₂) con $b = 0.200 \text{ m}$ e $b/2r_m = 1.00$. Indicazioni come nella fig. 5.

dalla curva di Knapp e Ippen al crescere di Fr e sono più vicini alla linea (II) che, per $Fr > 2$, è nettamente al di sotto della (I).

Nelle curve esaminate la condizione limite di separazione fra corrente a monte non rigurgitata e corrente rigurgitata si è osservata per valori di Fr compresi fra 3.0 e 3.15.

Non è apparsa trascurabile l'influenza delle differenti modalità di formazione della corrente veloce a monte della curva. L'indagine è stata approfondita particolarmente nella serie delle esperienze sulla curva (A_2), i cui risultati sono riportati nella fig. 6. I punti sperimentali rappresentati con cerchietti pieni neri corrispondono a situazioni in cui il tratto di corrente lenta rigurgitata a monte della curva raggiungeva una lunghezza ≥ 15 cm.

In tali condizioni è chiaro che l'effetto della curva non si esercita più su una corrente supercritica e il fenomeno non rientra nel quadro tipico dell'indagine.

Per un confronto sono state tracciate, nel diagramma della fig. 6, altre due curve. La curva (a) rappresenta il rapporto fra le profondità coniugate Y_1 a valle e Y_0 a monte del risalto, assumendo quest'ultima quale profondità della corrente supercritica incidente

$$(a) Y_1/Y_0 = (1/2) (-1 + \sqrt{1 + 8 Fr^2}) = \eta.$$

La curva (b) rappresenta invece la profondità massima in curva, rapportata alla profondità Y_0 , posto che la profondità media all'ingresso della curva fosse la precedente Y_1 e la sopraelevazio-

Tabella III — Risultati sperimentali sulla curva (B) con $b = 0.203$ m e $b/2r_m = 0.76$

N	i_f ‰	Q l/s	Y_0 mm	U_0 m/s	Y_{max} mm	Fr		Osservazioni
1	13.2	13.03	55.0	1.167	127	1.59	2.31	L. Rig. (45 cm)
2	13.9	13.03	53.0	1.211	128	1.68	2.41	» » (35 cm)
3	15.4	13.03	52.0	1.234	130	1.73	2.50	» » » »
4	17.2	13.03	50.0	1.284	131	1.83	2.62	» » (25 cm)
5	18.4	12.95	49.0	1.302	135	1.88	2.75	» » (10 cm)
6	»	11.54	45.4	1.252	123	1.88	2.71	» » » »
7	»	8.85	37.8	1.153	110	1.89	2.91	P. » (7-8 cm)
8	»	7.84	34.5	1.119	98	1.92	2.84	L. »
9	»	9.39	37.6	1.230	117	2.03	3.11	P. »
10	»	6.45	28.7	1.107	88	2.09	3.07	L. » (7 cm)
11	»	9.90	38.0	1.283	128	2.10	3.37	P. » (2 cm)
12	»	4.45	22.1	0.992	73	2.13	3.30	L. » (0-5 cm)
13	»	10.48	38.0	1.359	135	2.225	3.55	P. » (2 cm)
14	30.0	14.59	47.0	1.529	170	2.25	3.62	L. » (5 cm)
15	0.00	9.90	36.2	1.347	112	2.26	3.09	P. » (20 cm)
16	18.4	10.84	37.8	1.413	141	2.32	3.73	» » (5 cm)
17	»	11.52	37.9	1.497	155	2.455	4.09	» » (5 cm)
18	30.0	9.90	34.0	1.434	140	2.48	4.12	L. » (4 cm)
19	»	7.58	28.0	1.334	118	2.545	4.21	» » (0-2 cm)
20	18.4	12.02	37.8	1.566	163	2.57	4.31	P. » (5 cm)
21	»	11.69	37.0	1.556	150	2.58	4.05	» » (10 cm)
22	»	12.34	37.7	1.612	170	2.65	4.51	» » (5 cm)
23	18.3	12.57	37.7	1.643	175	2.70	4.64	» » » »
24	»	12.73	37.7	1.663	183	2.735	4.85	» » (2-5 cm)
25	»	12.80	37.6	1.677	183	2.76	4.87	» » (2 cm)
26	»	12.99	37.6	1.702	188	2.80	5.00	» Cond. limite
27	»	13.33	37.6	1.746	192	2.875	5.10	» » »
28	18.9	10.955	31.0	1.604	160	2.91	5.16	» Non Rig. (?)
29	18.3	13.62	37.5	1.789	195	2.95	5.20	» » »
30	18.1	13.69	36.7	1.837	200	3.06	5.45	» » »
31	18.9	10.75	30.9	1.714	173	3.11	5.60	» » »
32	18.9	11.00	30.9	1.755	180	3.19	5.83	» » »
33	18.3	14.85	37.5	1.951	225	3.215	6.00	» » »
34	0.00	15.37	38.0	1.992	220	3.26	5.79	» » »
35	18.3	15.62	37.7	2.041	240	3.355	6.37	» » »
36	13.6	11.94	31.0	1.897	205	3.44	6.61	» » »
37	18.3	12.34	31.3	1.942	215	3.505	6.87	» » »
38	13.6	12.10	31.0	1.922	209	3.49	6.74	» » »
39	»	12.42	30.9	1.980	217	3.595	7.02	» » »
40	»	12.73	30.8	2.036	222	3.70	7.21	» » »

NOTAZIONI: come nella TAB. I

ne esterna fosse valutabile con la formula di Gashof per le correnti lente; ossia

$$Y_{\max} = Y_1 + (U_1^2/g) (b/2r_m).$$

Essendo $b/2r_m = 1.00$ e $U_1/U_0 = Y_0/Y_1$ segue

$$(b) \eta = Y_{\max}/Y_0 = (Y_1/Y_0) + Fr^2 (Y_0/Y_1)^2 = (a) + Fr^2/(a)^2.$$

Si osserva che i punti in esame cadono all'interno della fascia compresa fra le curve (a) e (b).

Queste configurazioni di correnti con rigurgito di considerevole ampiezza sono generalmente correlate con una debole pendenza del canale e quindi con la formazione della corrente di monte attraverso l'efflusso da una luce di fondo. La stessa situazione — di debole pendenza del fondo — si dimostra influente, sebbene in minor misura, anche quando, per numeri di Froude sufficientemente elevati (>3.0), la corrente a monte della curva non è più rigurgitata. La rappresentazione grafica di fig. 6, dove i punti corrispondenti a pendenze del fondo inferiori alla critica sono indicati con cerchi e croce, mostra come detti punti siano tutti allineati più in basso di quelli relativi al canale con elevate pendenze. In altri termini, a parità di Fr , sono minori nel primo caso le altezze d'acqua massime contro la sponda esterna, con differenze fino al 10% circa.

5.2. — Nella Tabella III e nella fig. 7 sono riportati i risultati ottenuti dalle esperienze sulla curva (B) caratterizzata da un rapporto $b/2r_m = 0.76$ con una larghezza $b = 0.203$ m.

Si osserva che i punti sperimentali, come nel caso precedente, sono vicini alla curva $Y_{\max} = E_0$, mentre la curva di Knapp e Ippen resta tutta al di sopra per $Fr > 2.3$.

La separazione fra corrente rigurgitata a monte della curva e corrente non rigurgitata si è constatata nell'intervallo di valori $Fr = 2.8 + 2.9$.

5.3 — Nella Tabella IV e nella e nella fig. 8 sono riportati i risultati delle esperienze sulla curva (C) con rapporto $b/2r_m = 0.50$ e larghezza $b = 0.200$ m.

Si nota che la curva di Knapp e Ippen e la curva $Y_{\max} = E_0$ sono fra loro molto vicine; in questo caso la prima sta sotto alla seconda mentre i punti sperimentali per $Fr < 3.0$ cadono fra le due curve con tendenza ad approssimare, con lieve difetto, l'andamento della linea $Y_{\max} = E_0$.

La condizione limite fra corrente a monte rigurgitata o no è stata osservata nel campo dei valori $Fr = 2.03 - 2.14$.

5.4 — Nella Tabella V e nella fig. 9 sono riportati i risultati delle esperienze condotte sulla

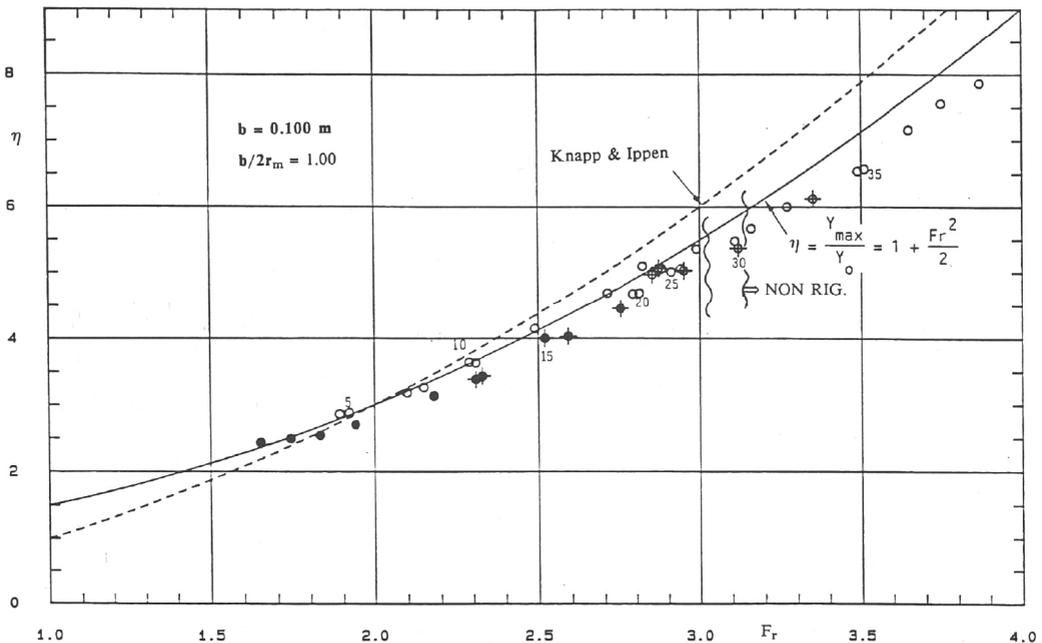


Fig. 7 Risultati sperimentali sulla curva (B) con $b = 0.203$ m e $b/2r_m = 0.76$. Indicazioni come nella fig. 5.

curva (D) con rapporto $b/2r_m = 0.33$ e larghezza $b = 0.200$ m.

La linea di Knapp e Ippen è qui nettamente più bassa della linea $Y_{\max} = E_0$. I punti sperimentali approssimano la prima curva per valori del numero di Froude > 2.5 e tendono alla seconda al diminuire di Fr.

La condizione limite di separazione fra corrente a monte rigurgitata o no è stata individuata intorno a $Fr = 1.55$.

Non sono state eseguite esperienze con pendenze del fondo inferiori alla critica.

5.5 — Nella Tabella VI e nella fig. 10 sono riportati i risultati delle esperienze eseguite sulla curva (E) con rapporto $b/2r_m = 0.25$ e larghezza $b = 0.200$ m.

In questa serie di prove la corrente è risultata non rigurgitata a monte della curva appena Fr superava il valore 1.30, dimostrando così che il raggio di curvatura era già sufficientemente ampio rispetto alla larghezza del canale.

Non si è ritenuto pertanto necessario procedere oltre le 20 prove e, per renderne più rapida l'esecuzione, si è operato a portata costante, variando la pendenza del fondo e la condizione a monte della corrente.

La linea di Knapp e Ippen è decisamente più bassa della linea $Y_{\max} = E_0$ e i punti sperimentali mostrano la tendenza ad approssimare la prima (la cui attendibilità è stata provata per bassi rapporti di curvatura). L'approssimazione della curva sperimentale è in eccesso rispetto a quella di Knapp e Ippen per $Fr < 2.5$ e in difetto per $Fr > 2.5$.

Tabella IV — Risultati sperimentali sulla curva (C) con $b = 0.200$ m e $b/2r_m = 0.50$

N	i_f ‰	Q l/s	Y_0 mm	U_0 m/s	Y_{\max} mm	Fr		Osservazioni
1	7.1	7.58	43.0	0.881	82	1.36	1.91	L. Rig. (60 cm)
2	»	5.81	31.5	0.922	70	1.66	2.22	» » (27 cm)
3	»	5.63	30.5	0.923	68	1.60	2.23	» » (33 cm)
4	»	5.97	31.5	0.949	72	1.71	2.29	» » (18 cm)
5	14.7	12.53	51.0	1.228	120	1.74	2.35	» » (5 cm)
6	7.1	6.45	32.5	0.993	77	1.76	2.37	P. » (10 cm)
7	17.0	12.53	50.3	1.248	128	1.78	2.55	L. » (3 cm)
8	7.1	6.90	33.1	1.042	84	1.83	2.54	P. » (2-3 cm)
9	19.2	12.53	48.3	1.297	134	1.88	2.77	L. » (1-2 cm)
10	7.1	7.04	32.3	1.090	85	1.94	2.63	P. » (3-5 cm)
11	20.8	12.53	46.0	1.362	137	2.03	2.98	L. Cond. limite
12	7.1	7.18	31.3	1.147	88	2.07	2.81	P. » »
13	1.4	9.26	37.0	1.251	106	2.08	2.86	» » »
14	7.1	7.32	31.4	1.165	89.5	2.10	2.85	» » »
15	»	7.52	31.6	1.190	92	2.14	2.91	L. » » (?)
16	»	7.71	31.9	1.209	97	2.16	3.04	» Non Rig.
17	»	7.84	32.1	1.221	99	2.18	3.08	» » »
18	»	8.33	33.2	1.254	107	2.20	3.22	P. » »
19	»	8.68	34.0	1.276	115	2.21	3.38	» » »
20	»	8.79	33.3	1.320	118	2.31	3.54	» » »
21	»	8.90	33.6	1.325	119	2.31	3.54	» » »
22	»	9.29	33.8	1.374	130	2.39	3.85	» » »
23	»	9.39	34.0	1.381	131	2.39	3.85	» » »
24	»	9.90	34.0	1.456	141	2.52	4.15	» » »
25	»	10.19	34.0	1.499	147	2.60	4.32	» » »
26	»	10.38	33.9	1.531	150	2.65	4.42	» » »
27	»	10.84	34.1	1.590	163	2.75	4.78	» » »
28	1.8	12.38	37.2	1.664	177	2.75	4.76	» » »
29	7.1	11.02	34.1	1.616	168	2.79	4.93	» » »
30	»	11.11	34.1	1.629	166	2.82	4.87	» » »
31	»	11.54	34.2	1.688	178	2.91	5.20	» » »
32	»	12.02	34.2	1.757	187	3.03	5.47	» » »
33	»	12.18	34.2	1.780	190	3.07	5.55	» » »
34	»	12.50	34.3	1.822	198	3.14	5.77	» » »
35	»	12.96	34.2	1.895	210	3.27	6.14	» » »
36	»	13.11	34.4	1.905	213	3.28	6.19	» » »
37	»	13.40	34.5	1.942	220	3.34	6.38	» » »
38	»	13.47	34.3	1.964	223	3.39	6.50	» » »
39	»	13.97	34.3	2.037	235	3.51	6.85	» » »

NOTAZIONI: come nella TAB. I

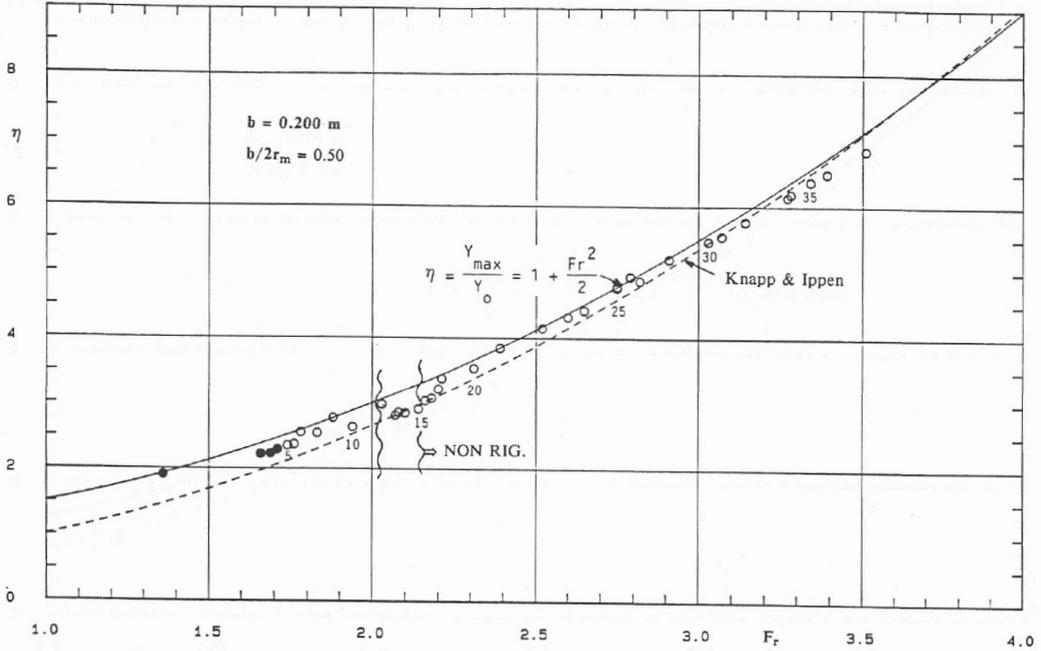


Fig. 8 Risultati sperimentali sulla curva (C) con $b = 0.200$ m e $b/2r_m = 0.50$. Indicazioni come nella fig. 5.

Tabella V — Risultati sperimentali sulla curva (D) con $b = 0.200$ m e $b/2r_m = 0.33$

N	i_f ‰	Q l/s	Y_0 mm	U_0 m/s	Y_{max} mm	Fr		Osservazioni
1	5.5	12.26	63.-	.973	101	1.24	1.60	L. Rig. (90 cm)
2	»	7.45	42.6	.874	73	1.35	1.71	» » (80 cm)
3	»	9.90	50.6	.978	89	1.39	1.76	» » (80 cm)
4	»	8.90	45.8	.972	82	1.45	1.79	P. » ondul.
5	8.4	10.0	47.5	1.053	92	1.54	1.94	L. idem (20 cm)
6	5.5	8.90	43.7	1.018	86	1.55	1.97	P. Cond. limite
7	»	»	43.4	1.025	84	1.57	1.94	P. » »
8	»	7.45	37.5	.993	80	1.64	2.13	» Non Rig.
9	11.1	10.0	44.8	1.116	95	1.68	2.12	L. » »
10	18.0	20.6	72.0	1.430	162	1.70	2.25	» » »
11	12.8	10.0	42.5	1.176	97	1.82	2.28	» » »
12	14.8	10.0	42.0	1.190	101	1.855	2.40	» » »
13	18.0	10.6	43.3	1.224	111	1.88	2.56	» » »
14	16.9	10.0	41.6	1.202	105	1.88	2.52	» » »
15	5.5	8.96	38.6	1.161	100	1.89	2.59	P. » »
16	18.0	9.39	37.8	1.242	108	2.04	2.86	» » »
17	»	9.90	38.0	1.303	114	2.13	3.00	» » »
18	5.5	10.3	38.4	1.341	119	2.185	3.10	» » »
19	18.0	10.6	38.0	1.395	122	2.28	3.21	» » »
20	»	11.2	38.0	1.474	131	2.41	3.45	» » »
21	»	11.7	38.0	1.539	138	2.52	3.63	» » »
22	»	12.1	38.0	1.592	145	2.61	3.82	» » »
23	5.5	12.5	38.4	1.628	145	2.65	3.78	» » »
24	18.0	12.8	38.1	1.680	155	2.75	4.07	» » »
25	»	13.3	38.2	1.741	161	2.84	4.21	» » »
26	»	13.9	38.2	1.819	172	2.97	4.50	» » »
27	5.5	14.45	38.5	1.877	180	3.05	4.67	» » »

NOTAZIONI: come nella TAB. I

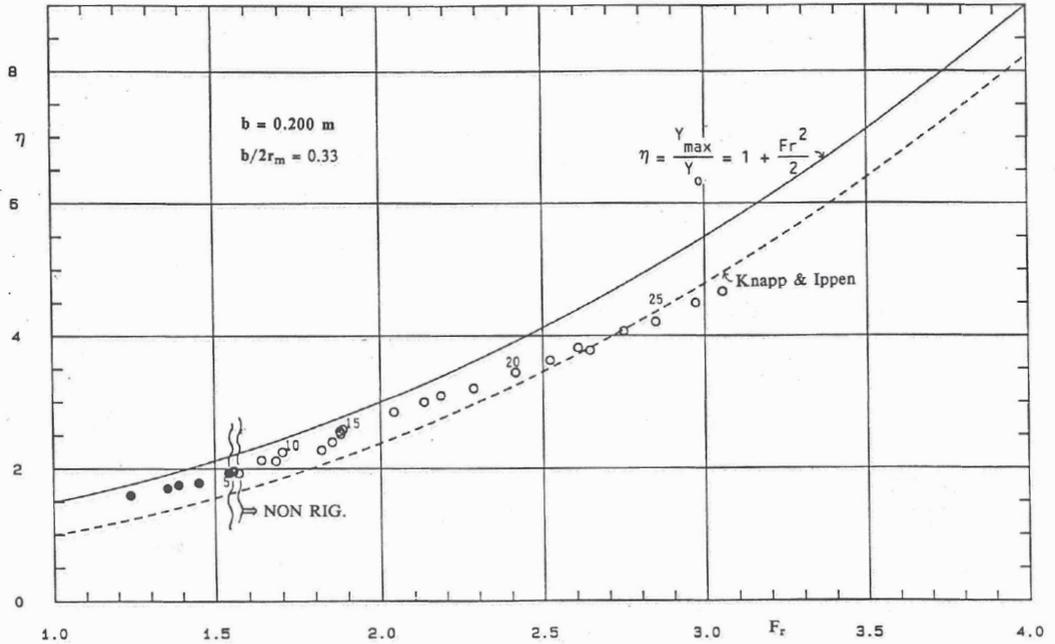


Fig. 9 Risultati sperimentali sulla curva (D) con $b = 0.200 \text{ m}$ e $b/2r_m = 0.33$. Indicazioni come nella fig. 5.

Tabella VI — Risultati sperimentali sulla curva (E) con $b = 0.200 \text{ m}$ e $b/2r_m = 0.25$

N	i_f ‰	Q l/s	Y_0 mm	U_0 m/s	Y_{\max} mm	Fr		Osservazioni
1	4.92	10.48	60	.873	83	1.14	1.38	L. Rig. ondul.
2	5.79	»	55	.953	82	1.30	1.49	» » »
3	6.50	»	55	.953	81	1.30	1.47	» » (?)
4	1.25	»	54.4	.963	87	1.32	1.60	P. Cond. limite
5	»	»	53.3	.983	88	1.36	1.65	» Non Rig.
6	»	»	50.6	1.035	91	1.47	1.80	» » »
7	9.37	»	49.0	1.069	85	1.54	1.73	L. » » (?)
8	1.25	»	48.9	1.071	92	1.55	1.88	P. » »
9	14.5	»	47.9	1.094	95	1.60	1.98	» » »
10	»	»	44.6	1.175	95	1.78	2.13	L. » »
11	»	»	41.7	1.257	101	1.96	2.42	P. » »
12	»	»	39.2	1.336	101	2.15	2.58	» » »
13	»	»	37.0	1.416	107	2.35	2.89	» » »
14	»	»	34.1	1.537	115	2.66	3.37	» » »
15	1.25	»	32.4	1.617	128	2.87	3.95	» » »
16	14.5	»	32.0	1.637	121	2.92	3.78	» » »
17	»	»	30.6	1.712	129	3.13	4.22	» » »
18	»	»	29.0	1.807	137	3.39	4.72	» » »
19	»	»	28.0	1.871	148	3.57	5.29	» » »
20	1.25	»	27.4	1.912	154	3.69	5.62	» » »

NOTAZIONI: come nella TAB. I

I punti relativi a situazioni del canale con pendenza del fondo inferiore alla critica non hanno indicato un andamento interpolare sostanzialmente diverso da quello degli altri punti; se mai sono risultati valori di η leggermente più alti della me-

dia, a differenza di quanto si era visto con $b/2r_m = 1.00$.

La transizione a corrente di monte rigurgitata è stata individuata, come si è detto, intorno a valori di $Fr = 1.30$.

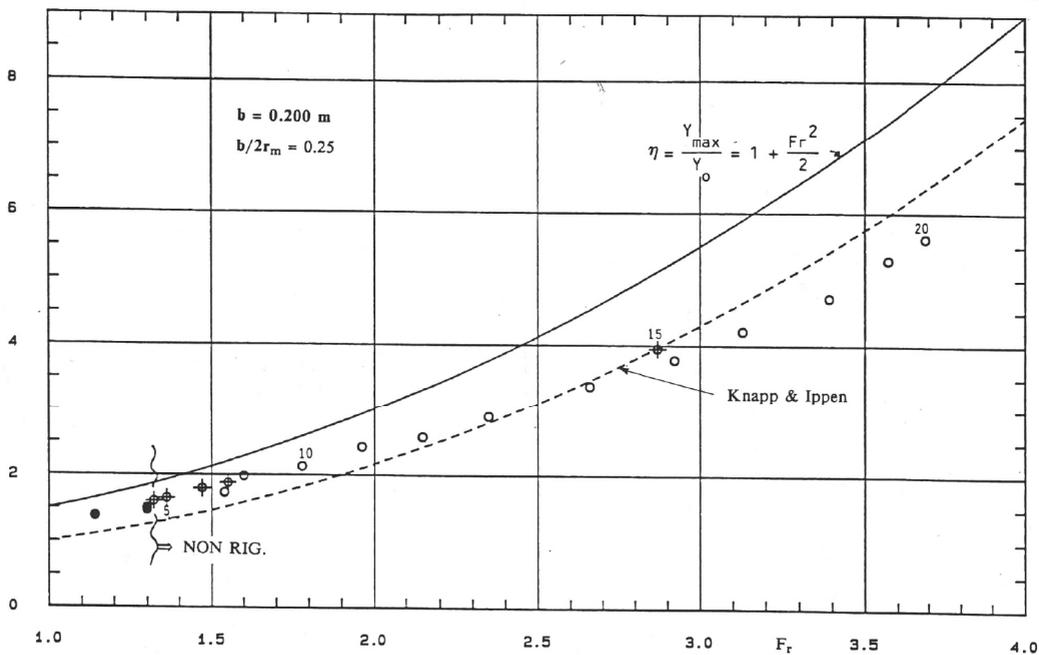


Fig. 10 Risultati sperimentali sulla curva (E) con $b = 0.200 \text{ m}$ e $b/2r_m = 0.25$. Indicazioni come nella fig. 5.

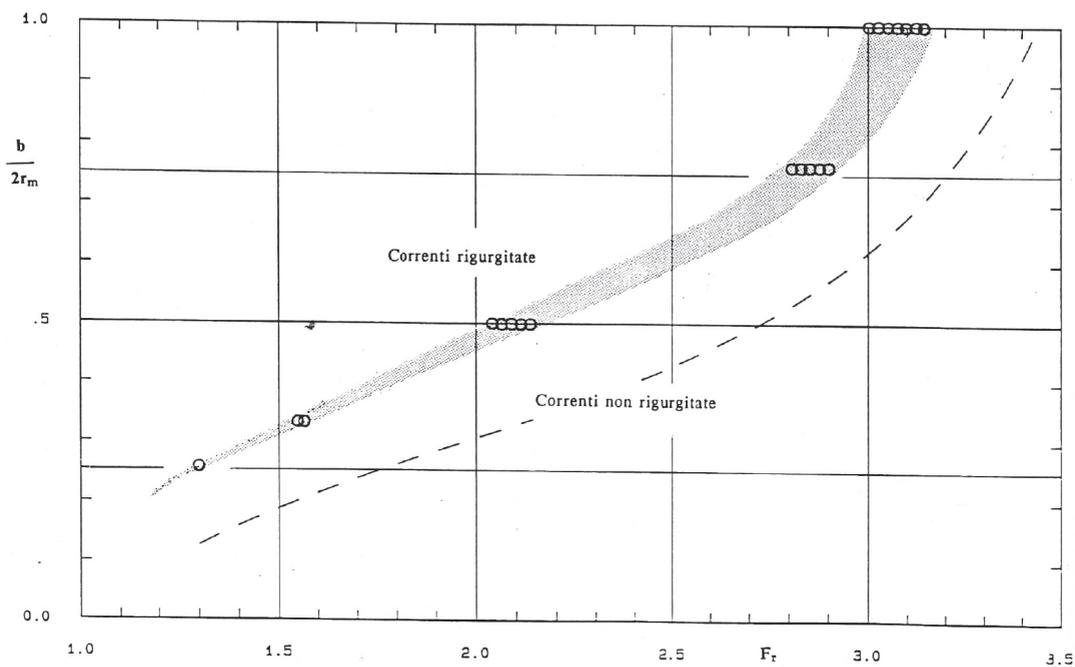
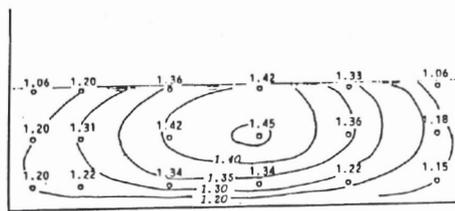


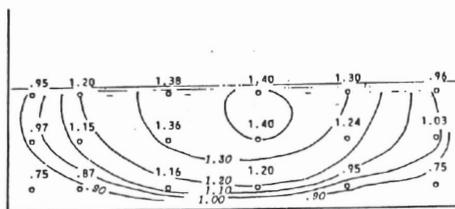
Fig. 11 Fascia di transizione individuata sperimentalmente tra correnti rigurgitate e non rigurgitate a monte di una curva.

5.6 — Infine, nel diagramma Fr , $b/2r_m$ della fig. 11 sono stati riportati i valori del numero di Froude osservati in ciascuna curva per la condizione limite di separazione fra corrente di monte non rigurgitata e corrente rigurgitata, intesa quest'ultima come si è detto al § 2. Tali valori sono stati raccordati con una striscia che indica quindi, in tutto il campo di variabilità del parametro $b/2r_m$, la condizione limite di separazione in termini di numero di Froude.

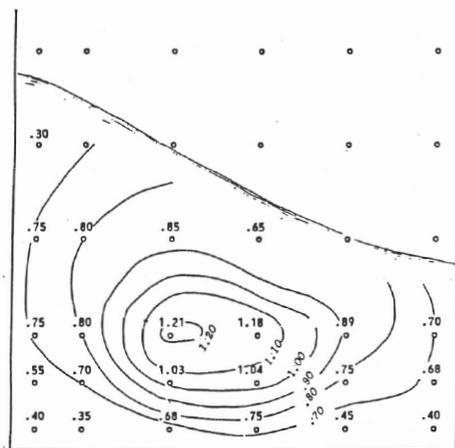
Nello stesso diagramma di fig. 11 è stata riportata a tratteggio una linea limite prevista dallo scrivente nel 1984 assumendo schematicamente che il comportamento di una curva potesse essere assimilato a quello di una deviazione brusca di un angolo pari alla metà dell'angolo al centro compreso fra la sezione iniziale e quella corrispondente alla massima sopraelevazione del pelo libero in curva, individuata quest'ultima seguendo il procedimento proposto da Knapp e Ippen. Tale valu-



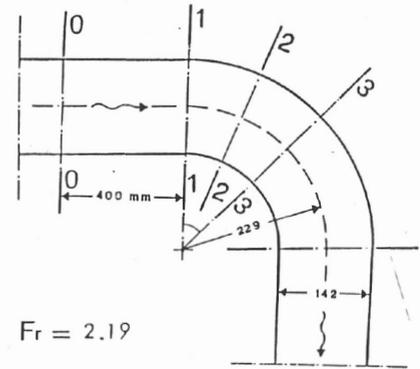
Sezione 0-0



Sezione 1-1

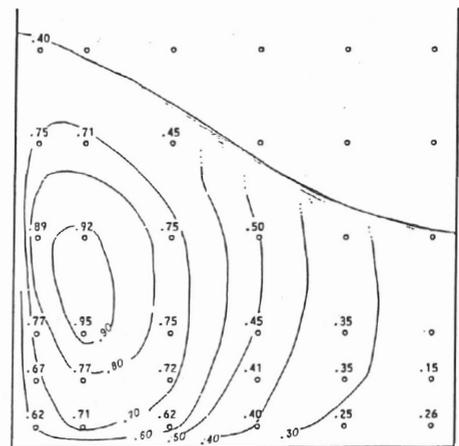


Sezione 2-2



$$Fr = 2.19$$

$$\frac{b}{2r_m} = 0.31$$

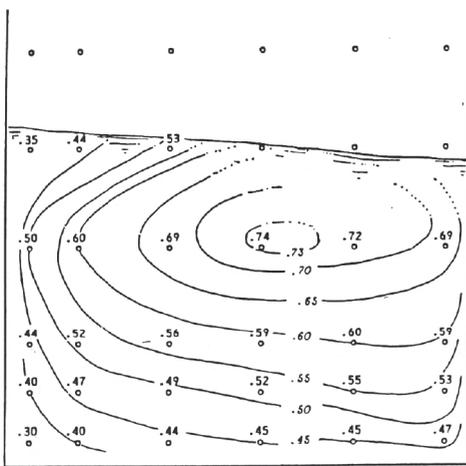


Sezione 3-3

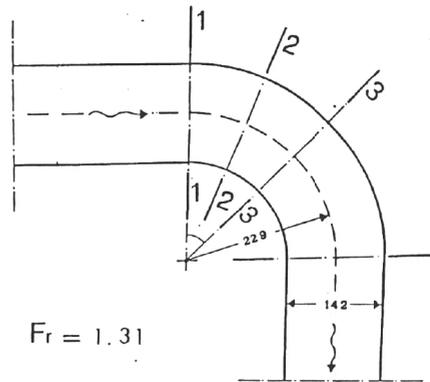
Fig. 12 Distribuzione delle velocità medie locali in una curva con $b/2r_m = 0.31$ ed $Fr = 2.19$. A monte della curva la corrente era veloce non rigurgitata.

tazione non ha notoriamente una rigorosa giustificazione teorica ed anche per questo era da attendersi che i risultati dello schema assunto avessero un significato soltanto indicativo. D'altra parte la corrispondenza dell'andamento della linea così trovata con la striscia di valori sperimentali conferma la sostanziale analogia fra deviazioni brusche e curve.

5.7 — Le misure della distribuzione del modulo delle velocità medie locali, eseguite in alcune sezioni delle curve, hanno mostrato la tendenza del filone della corrente ad avvicinarsi alla sponda interna della curva quando la corrente a monte era rigurgitata in forma di corrente lenta e a spostarsi invece verso la sponda esterna quando il deflusso attraverso la curva avveniva senza farsi

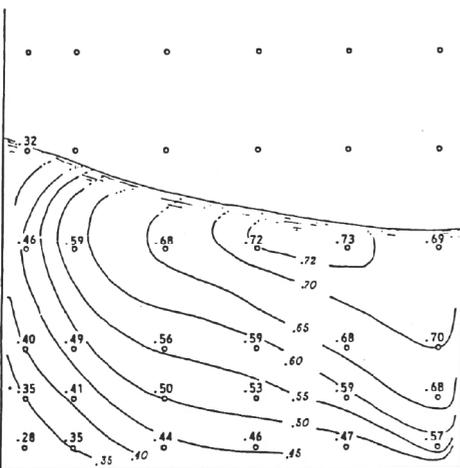


Sezione 1-1

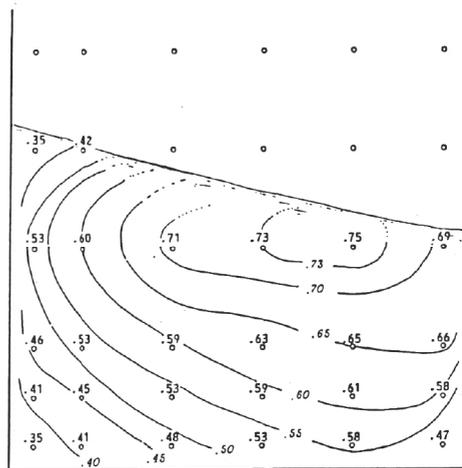


$$Fr = 1.31$$

$$\frac{b}{2r_m} = 0.31$$



Sezione 2-2



Sezione 3-3

Fig. 13 Distribuzione delle velocità medie locali in una curva con $b/2r_m = 0.31$ ed $Fr = 1.31$. A monte della curva la corrente era lenta rigurgitata.

risentire a monte della curva stessa.

A titolo di esempio si riportano nelle figure 12 e 13 i valori del modulo della velocità misurati e le conseguenti distribuzioni delle isotachie in una curva del primo impianto sperimentale ($b=0.142$ m) con rapporto $b/2r_m = 0.31$. Le misure si riferiscono a due diverse condizioni: $Fr = 2.19$, corrente non rigurgitata, ed $Fr = 1.31$, corrente lenta rigurgitata nella forma di risalto ondulato per una lunghezza di circa 1.20 m.

6. CONCLUSIONI

Sono stati esposti i risultati delle misure della massima elevazione del pelo libero, rapportata alla profondità della corrente incidente di sezione

rettangolare mediamente larga (b/Y_0 di norma intorno a 5), in funzione del numero di Froude della stessa corrente per curve con i seguenti rapporti fra la semilarghezza del canale e il raggio medio di curvatura: 0.25 - 0.33 - 0.50 - 0.76 - 1.00.

In particolare si è osservata, in ogni configurazione, la condizione alla quale l'inizio della rapida sopraelevazione del pelo libero provocata dalla curva si risentiva a monte superando la sezione iniziale della curva. Questa condizione è stata considerata convenzionalmente l'origine della situazione di corrente rigurgitata. Nel diagramma della fig. 11 è stata tracciata la striscia che individua la separazione fra correnti di monte non rigurgitate e correnti rigurgitate, ottenuta mettendo in relazione i rapporti di curvatura $b/2r_m$ con la condizione limite di numeri di Froude osservata sperimentalmente.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- ENGELUND F. — *Flow and Bed Topography in Channel Bends*, «J. of the Hydr. Div., A.S.C.E.», Nov. 1974.
 HUSSEIN A.S.A., SMITH K.V.H. — *Flow and Bed Deviation Angle in Curved Open Channels*, «J. of Hydr. Research», vol. 24, n. 2, 1986.
 IPPEN A.T. — *Mechanics of Supercritical Flow* «Proc. A.S.C.E.», Nov. 1949.
 IPPEN A.T., DAWSON J.H., — *Design of Channel Contractions*, «Proc. A.S.C.E.», Nov. 1949.
 KNAPP R. T., IPPEN A. T. — *Curvilinear Flow of Liquids with Free Surfaces at Velocities above that of Wave Propagation* Proc. Fifth Intern. Congress of Applied Mechanics. J. Wiley & Sons, 1939.
 KNAPP R.T. — *Design of Channel Curves for Supercritical Flow* «Proc. A.S.C.E.», Nov. 1949.
 MARCHI E. — *Fenomeni dissipativi nei corsi d'acqua montani*. Seminario su: Idraulica del territorio Montano, Bressanone 8-13 ottobre 1984.
 POGGI B. — *Correnti veloci nei canali in curva*, «L'Energia Elettrica», vol. XXXIII, n. 5, 1956.
 ROUSE H. — *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, McGraw-Hill, New York, 1938.
 ROUSE H., et Al. — *Design of Channel Expansions*, Proc. A.S.C.E., Nov. 1949.
 TAMAI N., et Al. — *Experimental Analysis on the Open Channel Flow in Rectangular Continuous Bends*, «J. of Hydrosience and Hydr. Engineering» vol. 1, n. 2, 1983.

Sulla stabilità delle bocche lagunari a marea
Rendic. dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 1990

Oceanografia. — *Sulla stabilità delle bocche lagunari a marea.* Nota (*) del Socio
ENRICO MARCHI.

ABSTRACT. — *On the stability of tidal lagoon inlets.* The sea-lagoon inlet channels reach a stable cross-section when the maximum velocity of the tidal currents does not exceed the value corresponding to the threshold shear stress for bed erosion. From this the A. deduces the relations involving the inlet cross-sectional area with: (a) the flow maximum velocity, or (b) the surface area of the lagoon, or (c) the tidal prism; the last, in particular, confirms well-known surveys and empirical observations. The numerical results carried out refer to the mouths of the Venice Lagoon.

KEY WORDS: Coastal engineering; Tidal inlets; Channel stability.

RIASSUNTO. — I canali di comunicazione mare-laguna raggiungono una stabile sezione trasversale quando la massima velocità delle correnti di marea non supera il valore corrispondente alla tensione limite per l'erosione del fondo. Da questa condizione l'A. deduce le relazioni dell'area della sezione della bocca con: (a) la massima velocità della corrente, oppure (b) la superficie del bacino lagunare, oppure (c) il prisma di marea; quest'ultima relazione, in particolare, conferma ben noti rilievi e osservazioni empiriche. I risultati numerici riportati si riferiscono alle bocche della Laguna di Venezia.

1. INTRODUZIONE

I bacini lagunari comunicano e interagiscono con il mare attraverso varchi che si formano e si mantengono aperti entro i cordoni litoranei per effetto delle maree. Le aperture hanno spesso forma di veri e propri canali: un tipico esempio è rappresentato dalle tre «bocche» di comunicazione della laguna di Venezia con il mare Adriatico. Fra la metà dell'800 e i primi anni del '900 le tre bocche di Malamocco, Lido e Chioggia sono state progressivamente munite di moli guardiani che ne hanno delimitato la larghezza. L'azione delle correnti di marea ha via via abbassato i fondali fino a raggiungere o ad approssimare una situazione di equilibrio stabile che corrisponde evidentemente al bilanciamento fra l'azione erosiva dovuta ai flussi mareali e la resistenza opposta dal fondo agli sforzi tangenziali, e che tende a ricostituirsi se una delle azioni viene temporaneamente alterata.

La rappresentazione analitica di questo bilancio consente quindi, da un lato, di verificare l'attuale area delle sezioni di bocca ed i relativi fondali medi, dall'altro, di prevedere le possibili variazioni dovute a cause naturali e, soprattutto, ad interventi artificiali.

2. LE EQUAZIONI DEL PROCESSO

Si fa riferimento ad un canale lagunare schematizzato con una sezione larga e regolare, nel quale il flusso da mare a laguna si sviluppa nella direzione positiva della coordinata spaziale x e nel tempo t (v. fig. 1).

(*) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1989.

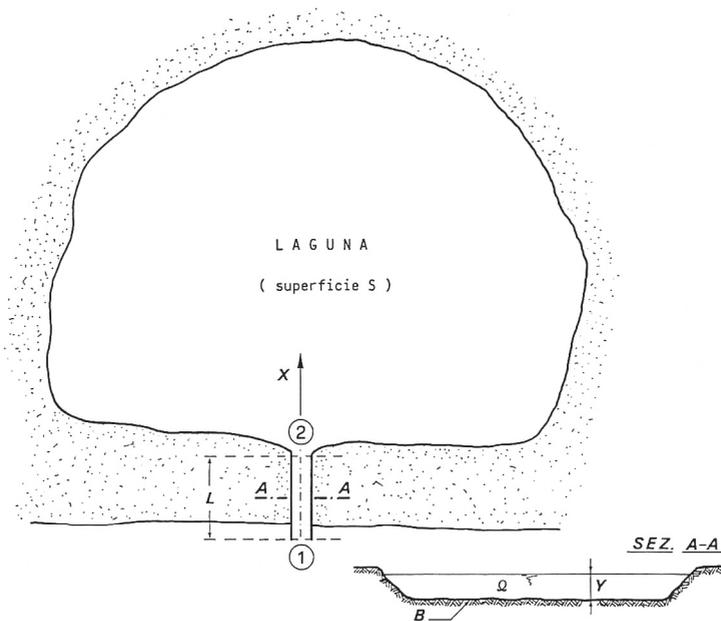


Fig. 1. - Schizzo del sistema mare, canale di bocca, laguna.

Indicando con T il periodo dell'onda di marea, con c la sua velocità di propagazione nel canale e con L la lunghezza del canale stesso, si verifica che è normalmente $L \ll cT$.

In tali condizioni, le variazioni spaziali della velocità media U della corrente lungo il canale, variazioni di scala L/T , sono trascurabili rispetto alle variazioni locali dovute alla marea, di scala c . L'equazione della quantità di moto della corrente (eq.ne di de Saint Venant) può essere integrata fra le estremità 1 e 2 del canale assumendo $\partial U/\partial t$ invariante rispetto ad x , ossia ponendo $U = U(t)$. Detti $h_1(t)$ e $h_2(t)$ le quote del pelo libero alle estremità del canale, rispettivamente in mare e in laguna (dove le altezze cinetiche sono nulle), si ha:

$$(2.1) \quad h_1(t) - h_2(t) = g^{-1}(dU/dt)L + (\xi_1 + \xi_2 + \lambda L/4R)U|U|(2g)^{-1}$$

essendo ξ_1 e ξ_2 i coefficienti delle perdite localizzate alle estremità del canale e λ il coefficiente delle perdite distribuite. Il raggio idraulico R rappresenta, come al solito, il rapporto fra l'area Ω della sezione e il suo perimetro bagnato B . Per le sezioni molto larghe il perimetro tende ovviamente a confondersi con la larghezza, ossia $B \approx b$, e il raggio idraulico con la profondità media Y della corrente, ossia $R \approx Y$.

Normalmente il numero di Reynolds ha scarsa influenza sulle resistenze in esame e il coefficiente λ può essere espresso in funzione del parametro di Strickler k_S che tiene conto insieme dell'effetto della scabrezza e della morfologia del fondo. Si ricorda che

$$(2.2) \quad \lambda/4R = 2g k_S^{-2} R^{-4/3}$$

e che i coefficienti ξ_1 e ξ_2 non sono di solito ben determinabili e sono diversi nelle fasi di

flusso e riflusso. Tuttavia, dato che si modifica poco la loro somma, si può scrivere

$$(2.3) \quad \xi_1 + \xi_2 + 2gk_S^{-2} R^{-4/3} L = 2gk_S^{-2} R^{-4/3} L_e$$

conglobando nella lunghezza «equivalente» L_e gli effetti delle perdite di imbocco, di sbocco e distribuite. Con tale lunghezza si può naturalmente mettere in conto anche l'effetto di eventuali altre perdite localizzate.

Facendo riferimento alla fase di flusso, l'equazione dinamica (2.1) diventa quindi

$$(2.4) \quad b_1(t) - b_2(t) = g^{-1}(dU/dt)L + k_S^{-2} R^{-4/3} U^2 L_e$$

e analoga, con ovvia modifica di segno dell'ultimo termine, per la fase di riflusso.

Ad essa va associata l'equazione di continuità

$$(2.5) \quad \Omega U = dV/dt$$

dove il secondo membro rappresenta il tasso di variazione del volume di marea che entra nel bacino lagunare.

Infine la *stabilità del fondo* impone che lo sforzo massimo tangenziale che la corrente esercita su di esso non superi un valore limite τ_{er} :

$$(2.6) \quad \tau_{max} = \rho \lambda U_{max}^2 / 8 = \rho g k_S^{-2} R^{-1/3} U_{max}^2 \leq \tau_{er}$$

essendo U_{max} il valore più elevato raggiunto dalla velocità della corrente in un ciclo e τ_{er} la tensione alla quale inizia l'erosione, dipendente dalla natura del materiale e dalla coesione del fondo del canale lagunare. Nei confronti di questo fenomeno, e della modellazione del fondo, è da ritenere che il valore di U_{max} efficace sia l'estremo corrispondente alle maree ordinarie più ampie, cioè alle maree di sizigie.

3. IL PRISMA DI MAREA E IL COEFFICIENTE RIDUTTORE α

Le variazioni dV del volume di marea si possono correlare alle variazioni di livello della superficie libera S della laguna con l'equazione

$$(3.1) \quad dV = \alpha S db_2$$

dove il *coefficiente riduttore* α mette in conto l'effetto delle differenze contemporanee fra le variazioni di livello della superficie libera in ogni punto del bacino e la variazione db_2 del livello allo sbocco del canale mare-laguna. Naturalmente il valore di α è tanto più vicino ad 1 quanto più piccola è la dimensione spaziale del bacino rispetto alla lunghezza dell'onda di marea.

Nel seguito indicheremo con P il cosiddetto «prisma di marea», cioè il volume totale d'acqua entrante nel bacino lagunare in un ciclo di marea. Assumeremo inoltre α ed S costanti, con i valori corrispondenti al livello medio in laguna. Quindi, dalla (3.1) segue anche

$$(3.2) \quad P = \alpha 2A_2 S$$

essendo $2A_2$ l'ampiezza totale di escursione della marea all'estremità del canale mare-laguna.

4. VALUTAZIONE DEL COEFFICIENTE RIDUTTORE α

L'oscillazione di marea ordinaria di origine astronomica può essere rappresentata sostanzialmente con una forma sinusoidale del tipo

$$(4.1) \quad h_1(t) = h_0 + A_1 \sin \omega t$$

dove h_0 indica il livello medio del mare rispetto al riferimento assunto ed ω è la pulsazione, pari a $2\pi/T$.

L'oscillazione del livello in laguna segue invece una legge più complessa, non esprimibile in forma chiusa (si veda, ad esempio, Bruun, 1978). Ai fini del presente lavoro sono tuttavia sufficienti le osservazioni che seguono. L'oscillazione di h_2 (allo sbocco del canale mare-laguna) avviene con un ritardo, rispetto ad h_1 variabile periodicamente e il dislivello corrispondente alla massima velocità coincide con il dislivello massimo, perché il termine inerziale è trascurabile nell'intorno di $U = U_{\max}$.

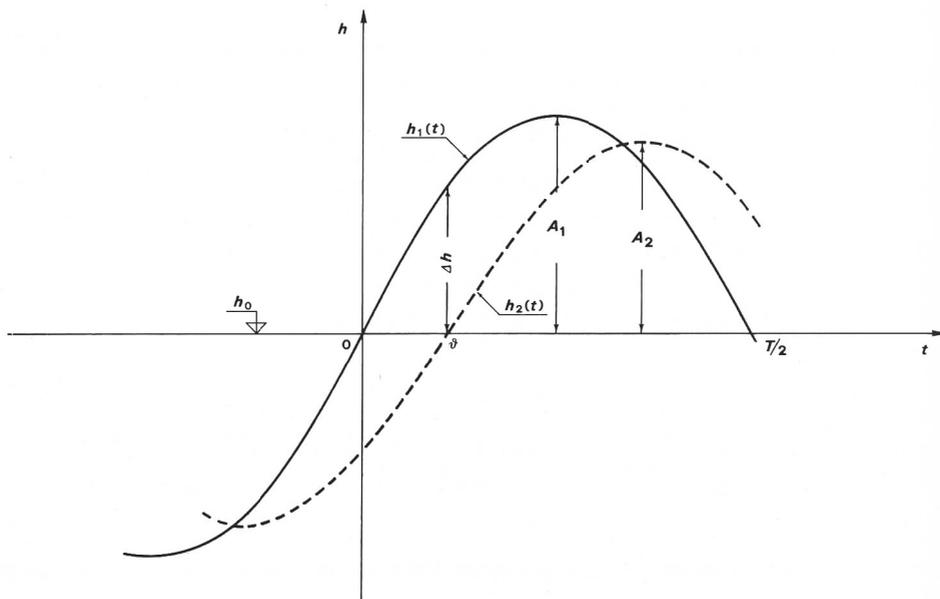


Fig. 2. - Rappresentazione schematica di un'onda di marea astronomica in mare (h_1) ed in laguna (h_2), alle estremità del canale di bocca.

Come mostra la fig. 2, tale valore massimo differisce normalmente molto poco dal dislivello Δb al tempo $t = \theta$, tempo che rappresenta il valore del ritardo quando h_2 coincide con il livello h_0 del medio mare. Con buona approssimazione si può scrivere quindi, per la (4.1):

$$(4.2) \quad |h_1 - h_2|_{U_{\max}} = A_1 \sin \omega \theta$$

valida finché $0 < \omega \theta \leq \pi/2$.

Indichiamo con η la quota del pelo libero in laguna rispetto al livello medio del

mare. L'oscillazione di η , dovuta a maree ordinarie, si propaga dallo sbocco del canale in ogni punto dal bacino lagunare raggiungendo, al momento del massimo all'origine, altezze contemporanee che sono ridotte soprattutto per effetto dello sfasamento e, in minor misura, delle dissipazioni. Trascurando quest'ultimo effetto, anche perché può essere in parte attenuato dalle riflessioni sul contorno, si può rappresentare l'oscillazione di η , per valori di t intorno a θ con la

$$(4.3) \quad \eta(r, t) = A_2 \sin \omega(t - \theta - r/c_l)$$

essendo $A_2 = b_2 - b_0$ la semiampiezza della marea all'estremità della bocca lagunare sul lato laguna, r la distanza del punto considerato da tale estremità e c_l la velocità di propagazione della marea nel bacino lagunare.

Differenziando la (4.3) si ottiene

$$(4.4) \quad d\eta = \omega A_2 \cos \omega(t - \theta - r/c_l).$$

All'istante $t = \theta$ è $U = U_{\max}$ e

$$(4.5) \quad [d\eta]_{t=\theta} = \omega A_2 \cos(\omega r/c_l) dt$$

$$(4.6) \quad [d\eta]_{t=\theta, r=0} = \omega A_2 dt.$$

Per una indicazione quantitativa si può schematizzare la forma del bacino in semicircolare di raggio r_0 , e valutare α per $t = \theta$ (ossia per $b_2 = b_0$) come segue

$$(4.7) \quad \alpha = \int_0^{r_0} [d\eta]_{t=\theta} \pi r dr / [d\eta]_{t=\theta, r=0} \pi r_0^2 / 2 = 2r_0^{-2} \int_0^{r_0} \cos(\omega r/c_l) r dr$$

da cui

$$(4.8) \quad \alpha = (2c_l^2/\omega^2 r_0^2) [\cos(\omega r_0/c_l) + (\omega r_0/c_l) \sin(\omega r_0/c_l) - 1]$$

od anche, essendo $\pi r_0^2/2 = S$,

$$(4.9) \quad \alpha = (\pi c_l^2/\omega^2 S) [\cos(\omega c_l^{-1} \sqrt{2S/\pi}) + (\omega c_l^{-1} \sqrt{2S/\pi}) \sin(\omega c_l^{-1} \sqrt{2S/\pi}) - 1].$$

Per diversi valori di S e di c_l , i valori di α sono riportati nella tabella I.

Se $\omega r_0/c_l < 0.5$ si può scrivere semplicemente

$$(4.10) \quad \alpha = 1 - \omega^2 R^2/4c_l^2 = 1 - \omega^2 S/2\pi c_l^2.$$

Nella tabella I i risultati a sinistra della linea spezzata a gradino differiscono da quelli calcolabili con la (4.10) meno dello 0.2%.

TABELLA I. - Coefficiente α (marea di periodo 12 ore).

Celerità marea in laguna (m/s)	Prof. media lagunare (m)	$S=50$ ($r_0=5640$)	100 7980	150 9770	$200 \cdot 10^6 \text{ m}^2$ 11 285 m)
2.0	0.41	0.958	0.917	0.877	0.838
2.5	0.64	0.973	0.947	0.921	0.895
3.0	0.92	0.981	0.963	0.945	0.926
5.0	2.55	0.993	0.987	0.980	0.973
7.0	5.00	0.997	0.993	0.990	0.986

5. VALUTAZIONE DELLA VELOCITÀ MASSIMA

L'equazione dinamica (2.4), tenendo conto che per $U = U_{\max}$ è $dU/dT = 0$ e che il corrispondente dislivello $|b_1 - b_2|$ si può approssimare con la (4.2), fornisce l'espressione della velocità massima

$$(5.1) \quad U_{\max} = k_S(\Omega/B)^{2/3} (A_1/L_e)^{1/2} (\sin \omega\theta)^{1/2}$$

sempre con la condizione $0 < \omega\theta \leq \pi/2$. La (5.1) rappresenta una relazione fra U_{\max} ed Ω , determinata però attraverso lo sfasamento θ che è di solito incognito.

Si può ricavare un'altra relazione fra le stesse grandezze partendo dall'equazione di continuità (2.5), che per la (3.1) si può scrivere

$$(5.2) \quad \Omega U = \alpha S (db_2/dt).$$

Quando la velocità U è pari ad U_{\max} , per quanto già detto, la variazione db_2/dt uguaglia la db_1/dt . Quest'ultima si può calcolare a partire dall'assunzione sinusoidale della marea, eq. (4.1), e dall'approssimazione già richiamata sulla realizzazione di $\Delta h_{U_{\max}}$ all'istante $t = \theta$. Si ottiene

$$(5.3) \quad (db_2/dt)_{U_{\max}} \cong \omega A_1 \cos \omega\theta.$$

Accettando tale approssimazione, dalla (5.2) segue

$$(5.4) \quad \Omega U_{\max} = \alpha S \omega A_1 \cos \omega\theta$$

che fornisce la seguente espressione della velocità massima

$$(5.5) \quad U_{\max} = \alpha S \omega A_1 \Omega^{-1} \cos \omega\theta.$$

Fra le equazioni (5.1) e (5.5) si può eliminare θ per giungere ad una espressione della velocità U_{\max} in funzione della sezione Ω della corrente e di grandezze che sono di norma note o prevedibili.

Per semplicità di scrittura conviene indicare con

$$(5.6) \quad M = k_S B^{-2/3} (A_1/L_e)^{1/2} \Omega^{2/3}$$

$$(5.7) \quad N = \alpha S \omega A_1 \Omega^{-1}$$

per cui

$$(5.1') \quad U_{\max} = M (\sin \omega\theta)^{1/2},$$

$$(5.5') \quad U_{\max} = N \cos \omega\theta.$$

Ne deriva

$$(5.8) \quad \sin \omega\theta = (1/2)(M/N)^2 [-1 + \sqrt{1 + 4(N/M)^4}]$$

e quindi

$$(5.9) \quad U_{\max} = (1/\sqrt{2}) M^2 N^{-1} \{-1 + [1 + 4(N/M)^4]^{1/2}\}^{1/2}.$$

L'eq. (5.9) esprime la dipendenza cercata di U_{\max} da Ω . La condizione di equilibrio del fondo si verifica quando il valore di tale velocità è pari a quello correlato con la tensione di erosione τ_{er} al fondo, ossia quando esso eguaglia il valore di U_{\max} dato dalla (2.6) per $\tau_{\max} = \tau_{er}$. In altre parole, si tratta di individuare l'intersezione fra la curva

rappresentata dall'eq. (5.9) e la curva

$$(5.10) \quad U_{\max} = (\tau_{er}/\rho g)^{1/2} k_S \Omega^{1/6} B^{-1/6}$$

dedotta dalla (2.6).

6. LA VELOCITÀ MASSIMA DI EQUILIBRIO STABILE

Per determinare, sia analiticamente che graficamente, l'intersezione fra le curve (5.9) e (5.10) conviene utilizzare variabili adimensionali ottenute scalando le lunghezze rispetto a $2A_1$, che rappresenta l'ampiezza totale di escursione della marea⁽¹⁾. Indicando con un soprassegno le variabili spaziali adimensionalizzate si ha:

$$(6.1) \quad \begin{cases} (a) & \tilde{L}, \tilde{B}, \tilde{L}_e, \dots = L/2A_1, B/2A_1, L_e/2A_1, \dots \\ (b) & \tilde{\Omega}, \tilde{S}, \dots = \Omega/(2A_1)^2, S/(2A_1)^2, \dots \\ (c) & \tilde{P}, \dots = P/(2A_1)^3, \dots \end{cases}$$

Si sono inoltre introdotte le seguenti adimensionalizzazioni

$$(6.2) \quad \begin{cases} (a) & \tilde{U}_{\max} = U_{\max}/\sqrt{2gA_1} \\ (b) & \tilde{k}_S = k_S(2A_1)^{1/6}/\sqrt{g} \\ (c) & \tilde{\omega} = \omega\sqrt{A_1/g} \\ (d) & \tilde{\tau}_{er} = \tau_{er}/2\rho g A_1. \end{cases}$$

L'eq. (5.9), adimensionalizzata, si può scrivere

$$(6.3) \quad \tilde{U}_{\max} = (1/2) K_1 D^{-1} \tilde{\Omega}^{7/3} [(1 + 4D^4 \tilde{\Omega}^{-20/3})^{1/2} - 1]^{1/2}$$

con

$$(6.4) \quad K_1 = \tilde{k}_S \tilde{B}^{-2/3} \tilde{L}_e^{-1/2},$$

$$(6.5) \quad D = \alpha \tilde{\omega} \tilde{S} K_1^{-1}.$$

L'eq. (5.10), adimensionalizzata diventa

$$(6.6) \quad \tilde{U}_{\max} = K_2 \tilde{\Omega}^{1/6}$$

con

$$(6.7) \quad K_2 = \tilde{k}_S (\tilde{\tau}_{er})^{1/2} \tilde{B}^{-1/6}.$$

La relazione $\tilde{U}_{\max} = f(\tilde{\Omega})$ rappresentata dalla (6.3) - risultato dell'applicazione dell'equazione della quantità di moto e dell'equazione di continuità — è una curva che presenta un massimo nel suo campo di validità. L'eq. (6.6) — risultato della condizione di stabilità del fondo — mostra invece un andamento sempre crescente di \tilde{U}_{\max} con $\tilde{\Omega}$. Se le due curve si intersecano, i punti corrispondenti indicano due possibili *stati di equilibrio* della bocca. Di essi è *stabile* quello per cui ad una riduzione della sezione corrisponde, secondo l'eq. (6.3), un aumento della velocità, perché esso presenta la tendenza al ripristino della situazione originaria. Ad un aumento della sezione della

⁽¹⁾ Per la laguna di Venezia il riferimento $2A_1$ presenta un ulteriore vantaggio: quello che, per le maree di sizigie, le più interessanti per la valutazione in esame, si può ritenere $2A_1 = 1$ m.

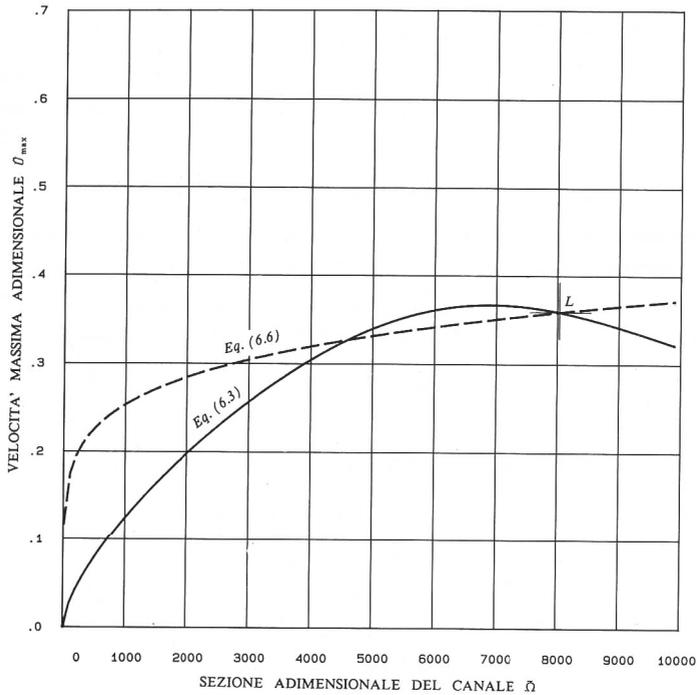


Fig. 3. – Bocca di Lido. Condizioni di equilibrio stabile nel punto d'intersezione L : $\bar{U}_{\max} = 0.358$, $\bar{Q} = 8030$.

bocca corrisponde ovviamente una diminuzione della velocità massima, ma ciò non comporta l'automatico deposito dei sedimenti trasportati dalla corrente perché la tensione critica di trascinamento sul fondo di tali materiali incoerenti è sempre inferiore alla tensione τ_{er} di erosione del materiale compattato che costituisce il fondo stesso. Il punto considerato rappresenta quindi l'inizio di una situazione stabile.

Tale condizione si verifica sempre e soltanto per l'intersezione della (6.6) con il ramo della (6.3) discendente per \bar{Q} crescente, cioè con il ramo a destra del massimo.

Nelle figure 3, 4 e 5 le curve (6.3) e (6.6) sono state riportate con i seguenti dati (arrotondati) relativi alle bocche della laguna di Venezia.

Bocche	B (m)	L (m)	L_e (m)	S (m ²)	α
Lido	900	4500	6000	$1.55 \cdot 10^8$	0.93
Malamocco	500	3000	5000	$1.30 \cdot 10^8$	0.96
Chioggia	570	2000	4000	$0.82 \cdot 10^8$	0.97

Le superfici S dei bacini afferenti a ciascuna bocca della laguna di Venezia sono state ricavate dal rilievo del Magistrato alle Acque (1987) per quanto riguarda l'area totale dello specchio liquido (a quota zero) e dagli studi eseguiti dalla Technital per

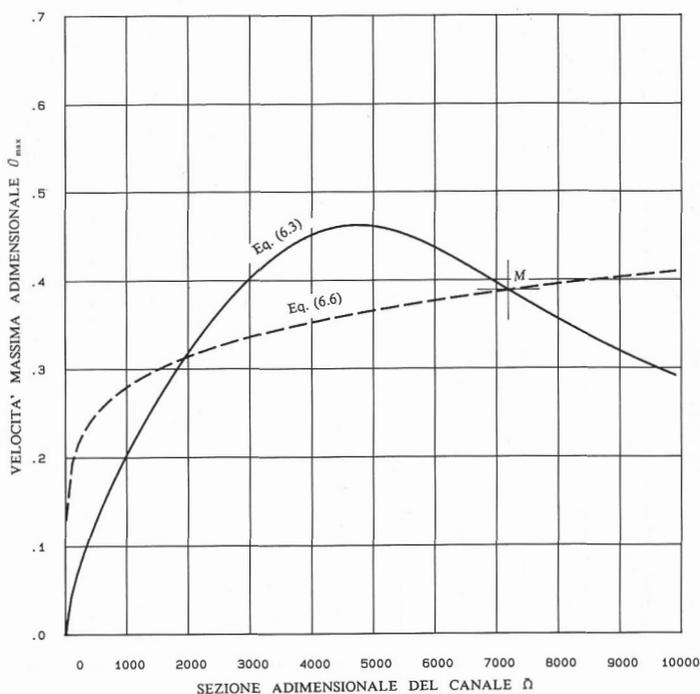


Fig. 4. - Bocca di Malamocco. Condizioni di equilibrio stabile nel punto d'intersezione M: $\tilde{U}_{\max} = 0.388$, $\tilde{\Omega} = 7200$.

conto del Consorzio Venezia Nuova (1989) per quanto riguarda la suddivisione dell'area fra i tre bacini.

I valori adimensionali delle grandezze precedenti coincidono con i valori numerici prima riportati. Infatti, per la marea (di sizigie) sono stati assunti i seguenti valori:

ampiezza totale $2A_1 = 1$ m, periodo $T = 12$ ore da cui deriva $\omega = 1.454 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ($\tilde{\omega} = 3.2838 \cdot 10^{-5}$).

Per quanto riguarda le caratteristiche del fondo dei canali di bocca, sono stati assunti i seguenti valori

$$\tau_{\text{er}} \cong 3.8 \text{ N m}^{-2}, k_s = 40 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1} \quad (\tilde{\tau}_{\text{er}} = 3.80 \cdot 10^{-4}, k_s = 12.771).$$

Dalle figure 3, 4, e 5, tenuto conto che $U_{\max} = \tilde{U}_{\max} \sqrt{2gA_1}$ e $\Omega = \tilde{\Omega}(2A_1)^2$, si traggono le seguenti condizioni di equilibrio stabile:

Lido	$U_{\max} = 1.12 \text{ m/s}$	$\Omega = 8030 \text{ m}^2$
Malamocco	$U_{\max} = 1.22 \text{ m/s}$	$\Omega = 7200 \text{ m}^2$
Chioggia	$U_{\max} = 1.12 \text{ m/s}$	$\Omega = 4850 \text{ m}^2$

I risultati corrispondono molto bene ai valori che si rilevano sul posto. Si veda in proposito la pubblicazione *Le correnti di marea nella Laguna di Venezia* a cura

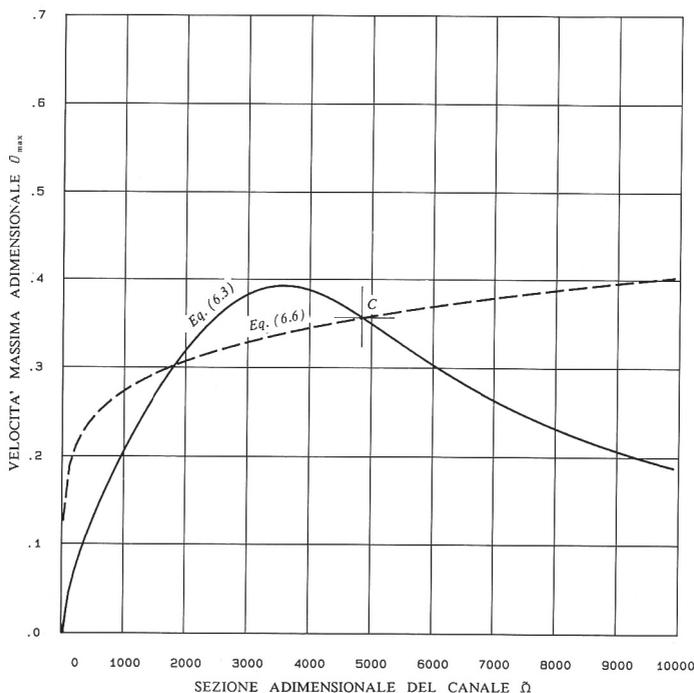


Fig. 5. - Bocca di Chioggia. Condizioni di equilibrio stabile nel punto d'intersezione C: $\tilde{U}_{\max} = 0.356$, $\tilde{Q} = 4850$.

dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Padova (1979). È chiaro che la conoscenza della situazione sperimentale ha guidato la scelta dei valori da attribuire a k_s e a τ_{cr} , senza peraltro uscire dal campo dei valori a priori prevedibili e senza introdurre variazioni fra le bocche. Resta inoltre importante il fatto che, tarate le equazioni sullo stato di fatto attuale, esse consentono di valutare l'effetto di modifiche.

Si fa notare infine che la (6.3), derivando dalla condizione di continuità, presenta una forte dipendenza di \tilde{U}_{\max} da \tilde{Q} , mentre la (6.6), esprimendo la condizione di equilibrio del fondo, mostra una dipendenza più debole di \tilde{U}_{\max} da \tilde{Q} . I valori della velocità massima, in situazioni stabilizzate, sono quindi contenuti in una fascia abbastanza stretta.

7. LA RELAZIONE FRA LA SEZIONE DELLA BOCCA E L'AREA DEL BACINO LAGUNARE

Eliminando \tilde{U}_{\max} fra la (6.3) e la (6.6), si deduce una relazione di equilibrio fra \tilde{S} ed \tilde{Q} . Si ha

$$(7.1) \quad (1/2)K_1 D^{-1} \tilde{Q}^{7/3} [(1 + 4D^4 \tilde{Q}^{-20/3})^{1/2} - 1]^{1/2} = K_2 \tilde{Q}^{1/6}$$

da cui si trae l'equazione

$$(7.2) \quad D = \sqrt{2} (K_2/K_1) \tilde{Q}^{7/6} [(1 - 4(K_2/K_1)^4 \tilde{Q}^{-2})]^{-1/2}$$

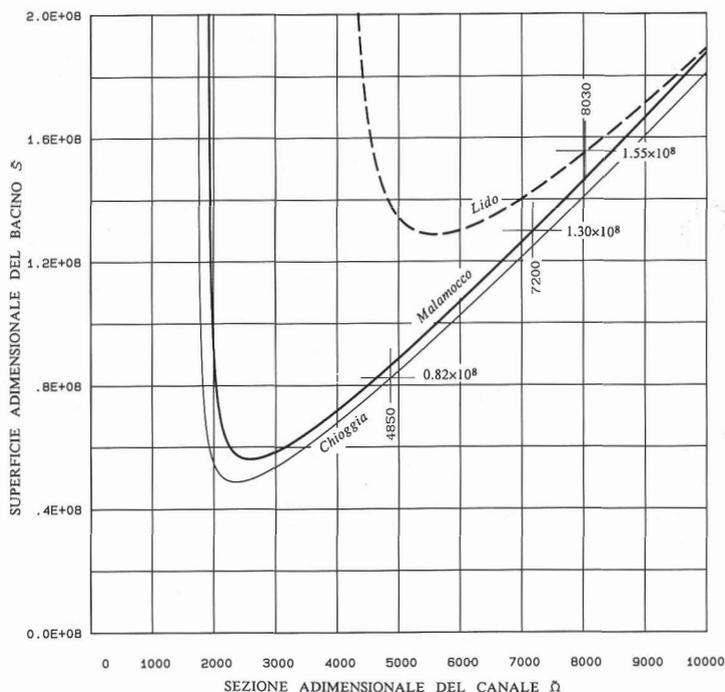


Fig. 6. - Le curve $\bar{S} = \bar{S}(\bar{\Omega})$ rappresentative dell'eq. (7.3) per le tre bocche della laguna di Venezia.

che, sostituita nella (6.5) tenendo conto delle espressioni di K_1 e K_2 , fornisce

$$(7.3) \quad \bar{S} = \bar{k}_s (2\bar{\tau}_{cr})^{1/2} (\alpha\bar{\omega} \bar{B}^{1/6})^{-1} [1 - (2\bar{\tau}_{cr} \bar{B} \bar{L}_c / \bar{\Omega})^2]^{1/2} \cdot \bar{\Omega}^{7/6}$$

valida per $\bar{\Omega} > 2\bar{\tau}_{cr} \bar{B} \bar{L}_c$.

L'eq. (7.3) esprime la relazione cercata $\bar{S} = \bar{S}(\bar{\Omega})$. Essa è rappresentata nella fig. 6 per le tre bocche di Venezia, con i dati predetti. Ogni curva fornisce, per un dato valore di \bar{S} , superiore al punto di minimo, due valori di $\bar{\Omega}$. Come in precedenza, solo il ramo destro di ciascuna curva (cioè quello con i valori di $\bar{\Omega}$ più elevati, a parità di \bar{S}) rappresenta condizioni di equilibrio stabile. Infatti, su tale ramo, ad un aumento della superficie \bar{S} del bacino corrisponde un aumento della sezione $\bar{\Omega}$ del canale.

Con questa relazione, conoscendo le caratteristiche dell'onda di marea A_1 e T , la natura e la scabrezza del fondo del canale τ_{cr} e \bar{k}_s , e almeno approssimativamente, data la sua modesta influenza sul risultato, il contorno bagnato B (o la larghezza) del canale di bocca, è possibile prevedere l'area Ω della sezione trasversale del canale stesso in funzione della superficie S del bacino lagunare.

L'eq. (7.3), al crescere di Ω , tende ad una relazione quasi lineare fra $\bar{\Omega}$ ed \bar{S} , precisamente alla $\bar{S} \propto \bar{\Omega}^{7/6}$; risultato che ricorda il legame, già suggerito da misure sul campo, fra la stessa area della sezione trasversale ed il prisma di marea. Il procedimento per ottenere quest'ultima relazione è riportato nel paragrafo seguente.

8. LA RELAZIONE FRA LA SEZIONE DEL CANALE LAGUNARE E IL PRISMA DI MAREA

Se si trascurano gli effetti inerziali, allo sbocco del canale in laguna è accettabile una relazione approssimata del tipo (4.3)

$$(8.1) \quad b_2 = b_0 + A_2 \sin \omega(t - \theta)$$

anche intorno al colmo della marea con lo stesso valore θ del ritardo già proposto per i livelli al valor medio b_0 . Allora l'escursione A_2 massima in laguna rispetto al livello medio coincide con il valore dell'escursione del livello del mare al tempo $t = \pi/2\omega + \theta$, sicché

$$(8.2) \quad A_2 = A_1 \cos \omega\theta.$$

Il prisma di marea, dato dall'eq. (3.2), assume quindi l'espressione

$$(8.3) \quad P = \alpha 2A_1 S \cos \omega\theta.$$

Sostituendo la (8.3) nell'eq. (5.5) che fornisce la velocità massima, si ottiene

$$(8.4) \quad U_{\max} = (1/2) \omega P \Omega^{-1}$$

o, in termini adimensionali ricordando anche la definizione (6.1.) di \tilde{P} ,

$$(8.5) \quad \tilde{U}_{\max} = (1/\sqrt{2}) \tilde{\omega} \tilde{P} \tilde{\Omega}^{-1}.$$

Eliminando \tilde{U}_{\max} fra questa equazione e quella derivante dalla condizione di

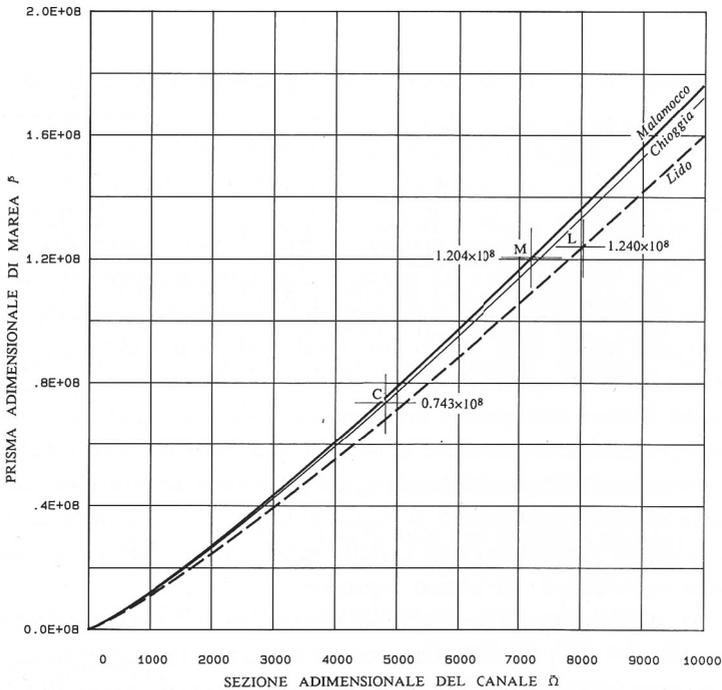


Fig. 7. - Le curve $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\Omega})$ rappresentative dell'eq. (8.7) per le tre bocche della laguna di Venezia.

equilibrio del fondo (eq. 6.6), segue

$$(8.6) \quad \tilde{\omega} \tilde{P} \tilde{\Omega}^{-1} = \sqrt{2} K_2 \tilde{\Omega}^{1/6}$$

ossia, sostituendo a K_2 la sua espressione (6.7):

$$(8.7) \quad \tilde{P} = (\sqrt{2} \tilde{k}_S \tilde{\tau}_{er}^{1/2} \tilde{B}^{-1/6} \tilde{\omega}^{-1}) \cdot \tilde{\Omega}^{7/6}.$$

La relazione $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{\Omega})$ espressa dalla (8.7) è rappresentata per le bocche di Venezia dalle curve riportate nella fig. 7.

In termini dimensionali la (8.7) diventa

$$(8.8) \quad P = 2k_S B^{-1/6} \omega^{-1} (\tau_{er}/\rho g)^{1/2} \cdot \Omega^{7/6}$$

che si può scrivere nella forma

$$(8.9) \quad \Omega = KP^{6/7}$$

con

$$(8.10) \quad K = (\rho g \pi^2 B^{1/3} k_S^{-2} T^{-2} \tau_{er}^{-1})^{3/7}$$

avendo sostituito la pulsazione ω con la sua espressione $2\pi/T$.

Ai valori delle aree delle sezioni delle bocche lagunari di Venezia, ottenuti precedentemente, corrispondono i seguenti volumi di marea

	$\Omega(m^2)$	$P(m^3)$
Lido	8030	$1.240 \cdot 10^8$
Malamocco	7200	$1.204 \cdot 10^8$
Chioggia	4850	$0.743 \cdot 10^8$

Il notevole avvicinamento fra i valori dei prismi di marea a Lido e a Malamocco, malgrado la sensibile differenza di superficie dei rispettivi bacini lagunari e delle aree dei canali di bocca, corrisponde a noti risultati delle misure sperimentali. Si vedano, in particolare, le misure continue di portata eseguite, nel settembre 1970, durante una marea di sizigie dal Consorzio Obbligatorio per il Nuovo Ampliamento del Porto e della Zona Industriale di Venezia-Marghera (in «Le correnti di marea nella Laguna di Venezia», 1979. Cfr., in particolare, il contributo di D'Alpaos e Di Silvio nella Parte Seconda).

L'eq. (8.9) conferma la proporzionalità di Ω a $P^{0.85}$ dedotta da O'Brien (1969) e sostenuta da altri Autori, in particolare da Jarrett (1976) sulla base del confronto con diverse osservazioni sperimentali sul campo. All'osservazione che il valore del coefficiente di proporzionalità K non può ritenersi lo stesso in qualunque ambiente e per qualunque canale lagunare risponde proprio la (8.10), mettendo in evidenza i fattori da cui esso è influenzato; in particolare si nota la sua forte dipendenza dal parametro di scabrezza k_S e, al contrario, la debole influenza della larghezza B del canale. Per quanto riguarda il primo, le variazioni di K sono in realtà attenuate dal fatto che le variazioni del prodotto $k_S^2 \tau_{er}$ restano limitate: infatti, valori elevati di k_S ,

indicativi di una minore scabrezza, sono generalmente associati a più bassi valori della tensione di erosione τ_{er} . Si osservi, infine, la non dipendenza di K dall'ampiezza della marea.

L'impiego del prisma di marea, in luogo della superficie del bacino lagunare, ha il vantaggio di non richiedere la conoscenza del fattore di attenuazione α , ma presenta l'inconveniente che il prisma stesso è misurabile con difficoltà e con errori molto maggiori della superficie.

La relazione fra \bar{P} ed \bar{Q} non presenta situazioni instabili. Tuttavia si deve rilevare che il prisma di marea non è una variabile indipendente su cui si possa direttamente influire: esso è funzione dell'area della superficie lagunare afferente alla bocca e dell'ampiezza di escursione della marea in laguna. Ed è soprattutto quest'ultima che può essere artificialmente modificata intervenendo sulle caratteristiche del canale di bocca. La conservazione nel tempo degli effetti di tali interventi resta condizionata al raggiungimento di una nuova situazione di equilibrio, situazione che può essere prevista nelle sue linee essenziali utilizzando i risultati riportati in questa nota.

BIBLIOGRAFIA

- BRUN P., 1978. *Stability of Tidal Inlets*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York.
- CONSORZIO VENEZIA NUOVA, 1989. *Interventi alle bocche lagunari per la regolazione dei flussi di marea*. Capitoli 10 e 11 del Progetto Preliminare di massima a cura della TECHNITAL, resp. A. Scotti.
- JARRETT J. T., 1976. *Tidal Prism - Inlet Area Relationships*. G.I.T.I. Report 3, US Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Fort Belvoir, Virginia.
- MINISTERO DEI LAVORI PUBBLICI, 1979. *Le correnti di marea nella Laguna di Venezia*. Cura dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Padova, Padova.
- MINISTERO DEI LAVORI PUBBLICI, 1987. *Variazione delle superfici componenti il bacino lagunare*. Cura dell'Ufficio Idrografico del Magistrato alle Acque, dir. A. Rusconi, Pubblicazione n. 160, Venezia.
- O'BRIEN M. P., 1969. *Equilibrium Flow Areas of Inlets of Sandy Coasts*. J. of the Waterways and Harbour Division, ASCE, vol. 95, No. WW1, Proc. Paper 6405.

Istituto di Idraulica - Facoltà di Ingegneria
 Università degli Studi di Genova
 Via Montallegro, 1 - 16145 GENOVA

The nappe profile of a free overfall
Rend. Mat. Accademia Nazionale dei Lincei, 1992

Meccanica dei fluidi. — *The nappe profile of a free overfall.* Nota(*) del Socio
ENRICO MARCHI.

ABSTRACT. — The phenomenon of the free overfall at the sharp drop of a channel bed has been deeply investigated experimentally since the pioneering work of Rouse (1933). Its behaviour is well known at least in the usual case of a wide rectangular channel. However, no complete theoretical solution has yet been obtained. Assuming the steady flow to be two-dimensional, irrotational and frictionless, an analytical solution for the flow field is obtained accounting for the presence of two free boundaries. By applying the conservation laws we then derive an equation for the lower nappe profile which is found to fit the observed data satisfactorily.

KEY WORDS: Open-channel; Free overfall; Nappe.

RIASSUNTO. — *Il profilo della vena fluente in una caduta libera.* Il fenomeno della caduta libera di una corrente nel salto brusco di fondo di un canale è stato esaminato con cura sperimentalmente fin dall'iniziale lavoro di Rouse del 1933. Il suo comportamento è ben noto almeno nella situazione consueta di canale rettangolare largo. Tuttavia, una completa soluzione teorica non è stata ancora ottenuta. Assumendo che il moto permanente sia bidimensionale, irrotazionale e senza resistenze, si ricava una soluzione analitica per il campo di moto mettendo in conto la presenza di due contorni liberi. Applicando le leggi di conservazione, si deduce quindi un'equazione del profilo inferiore della vena libera che risulta in accordo con i rilievi sperimentali noti.

NOTATIONS

ρ = liquid density;

g = acceleration of gravity;

q^* = rate of discharge per unit span;

Y_c^* = $(q^{*2}/g)^{1/3}$ = critical depth.

Dimensionless variables:

$x = x^*/Y_c^*$ = horizontal co-ordinate;

$y = y^*/Y_c^*$ = vertical co-ordinate;

$h = h^*/Y_c^*$ = vertical co-ordinate of the upper profile;

$z = z^*/Y_c^*$ = vertical co-ordinate of the lower profile;

$Y = h - z$ = stream depth or vertical dimension of the nappe;

$Y_0 = Y_0^*/Y_c^*$ = brink depth (depth at the cross section $x = 0$);

$Y_u = Y_u^*/Y_c^*$ = depth for uniform supercritical flow ($x \rightarrow -\infty$);

$Y_L = Y_L^*/Y_c^*$ = vertical dimension of the nappe at the limit section ($x \rightarrow \infty$);

$v_x = v_x^*/(g Y_c^*)^{1/2}$ = horizontal velocity component;

$v_y = v_y^*/(g Y_c^*)^{1/2}$ = vertical velocity component;

$\Psi = \Psi^*/q^*$ = stream function;

$p = p^*/\rho g Y_c^*$ = pressure (over the atmospheric value);

$H = H^*/Y_c^*$ = total head;

$M = M^*/\rho g Y_c^{*2}$ = total momentum per unit span.

(*) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1992.

1. INTRODUCTION

The open-channel flow at the sharp drop of a wide rectangular channel – the so-called free overfall (see [7, 8] and fig. 1) – is studied below, under steady conditions, as a *frictionless, irrotational* and *two-dimensional flow*. Reference is made to an orthogonal system x^* , y^* with x^* the horizontal axis and the origin located at the edge of the channel. Denoting by $y^* = h^*(x^*)$ and $y^* = z^*(x^*)$ the equations of the upper and lower profiles of the flowing stream, v_x^* and v_y^* the velocity components, p^* the pressure, ρ the constant density and g the gravity, in any vertical section we write:

$$(1.1) \quad Y^* = h^* - z^*,$$

$$(1.2) \quad H^* = y^* + p^*/\rho g + (v_x^{*2} + v_y^{*2})/2g,$$

$$(1.3) \quad M^* = \int_{z^*}^{h^*} (p^* + \rho v_x^{*2}) dy^*,$$

where Y^* is the depth of the stream or the vertical dimension of the nappe, H^* is total head referred to the x^* -axis and M^* is the «total» momentum, *i.e.* the momentum flow rate corrected for changes in the horizontal pressure force.

With reference to a discharge q^* per unit span, the following scaling is introduced:

a) lengths are scaled by the critical depth Y_c^* defined as

$$(1.4) \quad Y_c^* = (q^{*2}/g)^{1/3};$$

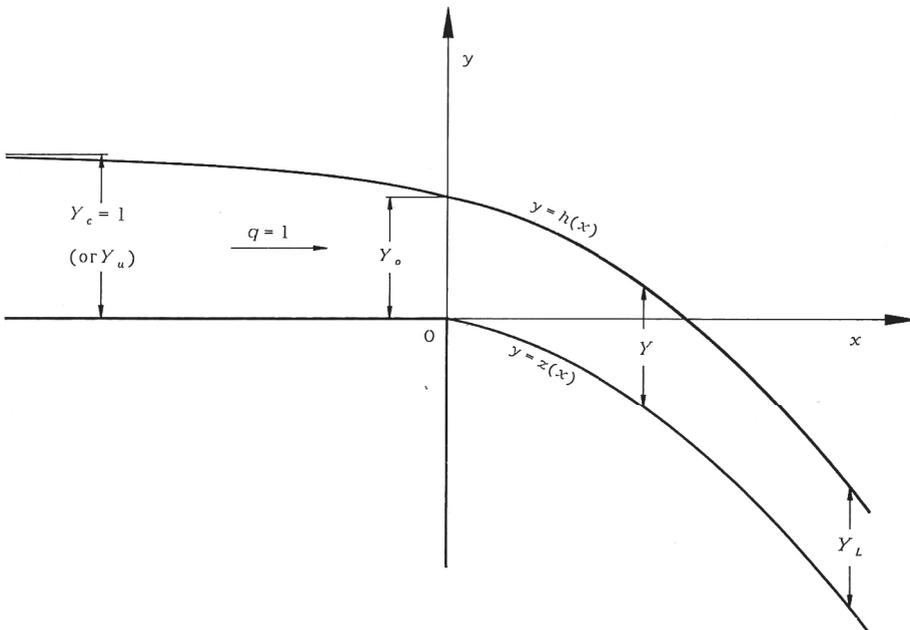


Fig. 1. – Definition sketch of the free overfall.

- b) velocities are scaled by the critical speed $(gY_c^*)^{1/2}$;
- c) pressures are scaled by the pressure $\rho g Y_c^*$;
- d) the stream function Ψ^* is scaled by the discharge q^* .

Each dimensionless variable will be written using the same symbol as for the dimensional one dropping the star: $x = x^*/Y_c^*$, etc.

2. EQUATIONS OF MOTION

The dimensionless stream function $\Psi(x, y)$ is assumed to be zero at $y = z$ and, consequently, $\Psi = 1$ at $y = b$. It is expanded in a power series of $(y - z)$, truncated at the third order. The procedure follows that proposed by Benjamin and Lighthill [1] to study cnoidal waves flowing over a flat horizontal bottom.

Since the function Ψ must be a harmonic function, it can be written in the form

$$(2.1) \quad \Psi(x, y) = (y - z)f(x) + \frac{1}{2}(y - z)^2(2z'f' + z''f) - \frac{1}{3!}(y - z)^3f''$$

where $f(x)$ is arbitrary and a prime denotes differentiation with respect to x .

By imposing the boundary condition

$$(2.2) \quad \psi(x, b) = 1$$

and by using the dimensionless form of eq. (1.1)

$$(2.3) \quad Y = b - z$$

it follows

$$(2.4) \quad f(x) = 1/Y - (1/2)(2z'f' + z''f)Y + (1/6)f''Y^2.$$

We then differentiate twice eq. (2.4) and neglect terms contributing to the fourth order in eq. (2.1) to obtain

$$(2.5) \quad f' = -(1/Y^2)(b' - z'),$$

$$(2.6) \quad f'' = (1/Y^3)[2(b' - z')^2 - Y(b'' - z'')].$$

Substituting f' and f'' from (2.5) and (2.6) in eq. (2.1), we can write the expression of the stream function Ψ to the previous order of approximation and, consequently, the velocity components

$$(2.7) \quad v_x = \Psi_{,y} = \frac{1}{Y} \left\{ 1 + \left(\frac{y-z}{Y} - \frac{1}{2} \right) [Yz'' - 2z'(b' - z')] + \left[\left(\frac{y-z}{Y} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \left[\frac{Y}{2}(b'' - z'') - (b' - z')^2 \right] \right\},$$

$$(2.8) \quad v_y = -\Psi_{,x} = \frac{1}{Y} \left\{ z' + \frac{y-z}{Y} (b' - z') \right\}.$$

The total head is then derived from (1.2) in the dimensionless form

$$(2.9) \quad H = H^*/Y_c^* = y + p + (1/2)(v_x^2 + v_y^2).$$

Now, in any steady, inviscid and irrotational flow the quantities H and M must

take constant values; hence, we can calculate H with reference to the streamline $y = b = Y + z$ where the relative pressure vanishes

$$(2.10) \quad H = Y + z + \frac{1}{2Y^2} \left[1 + \frac{Y}{3} (2b'' + z'') - \frac{1}{3} b'^2 + \frac{2}{3} z'^2 + \frac{2}{3} b' z' \right].$$

The total momentum M^* , given by eq. (1.3), is equivalent to

$$(2.11) \quad M^* = \int_{z^*}^{Y^* + z^*} \rho g \left[H^* - y^* + \frac{1}{2g} (v_x^{*2} - v_y^{*2}) \right] dy^*$$

and, in non-dimensional form:

$$(2.12) \quad M = \frac{M^*}{\rho g Y_c^2} = HY - \frac{Y^2}{2} - Yz + \frac{1}{2} \int_z^{Y+z} (v_x^2 - v_y^2) dy.$$

Substituting (2.7) and (2.8) in eq. (2.12), we obtain

$$(2.13) \quad b'^2 + z'^2 + b'z' = -3Y^3 + 6HY^2 - 6MY + 3 - 6Y^2z$$

which reduces to the equation of Benjamin and Lighthill [1, p. 458] when z and z' vanish everywhere (flat horizontal bottom).

Eliminating H from eqs. (2.10) and (2.13) and solving for M we finally find

$$(2.14) \quad M = \frac{Y^2}{2} + \frac{1}{Y} \left[1 + \frac{Y}{6} (2b'' + z'') - \frac{b'^2}{3} + \frac{z'^2}{6} + \frac{b'z'}{6} \right].$$

3. PRESSURE DISTRIBUTION

Recalling that the flow is steady and irrotational (hence $H = \text{const}$), from eq. (2.9) we obtain

$$(3.1) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -1 - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Differentiating eqs. (2.7) and (2.8) to the order of approximation stated before and substituting in eq. (3.1), we have

$$(3.2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -1 - \frac{z''}{Y^2} + \frac{z'(b' - z')}{Y^3} + \frac{y - z}{Y^4} [(b' - z')^2 - Y(b'' - z'')]$$

from which the following pressure distribution is obtained

$$(3.3) \quad p(x, y) = - \int_y^b \frac{\partial p}{\partial y} dy = b - y + \frac{z''(b - y)}{Y^2} - \frac{z'(b' - z')(b - y)}{Y^3} - \left[\frac{b^2 - y^2}{2Y^4} - \frac{z(b - y)}{Y^4} \right] [(b' - z')^2 - Y(b'' - z'')]$$

where $p(x, b) = 0$.

On the lower profile ($y = z$) the pressure reads

$$(3.4) \quad p(x, z) = Y + \frac{b'' + z''}{2Y} - \frac{b'^2 - z'^2}{2Y^2}.$$

Therefore, in order for the pressure to vanish on the lower profile of the nappe the following condition

$$(3.5) \quad 2Y^3 + Yb'' + Yz'' - b'^2 + z'^2 = 0 \quad (\text{for } x \geq 0)$$

must be satisfied.

4. FORMS OF FREE OVERFALL

Free overfall is the flow which takes place at the drop of a flat channel when the bottom presents a discontinuity such that the stream detaches from the bottom (see, for example, [5]). The flow may originate upstream from a subcritical state or from a supercritical state depending on the channel slope, respectively smaller or greater than the critical slope for the given discharge. In the supercritical case, the upstream flow is assumed to take always the uniform depth.

Proceeding upstream from the *brink section* – the cross section at the end of the channel ($x = 0$) – it was experimentally observed that the flow reaches the critical depth Y_c^* (or the uniform depth Y_u^* in the supercritical case) at a distance not greater than $4Y_c^*$ (or $4Y_u^*$). Since this channel stretch – represented by the whole field of negative abscissae in the present model – is very short, we may neglect the energy dissipation and assume the channel bottom to be horizontal. In fact, physically, this assumption is equivalent to considering the slope of the total head line coincident with the slope of the channel bottom.

Therefore the above two configurations are characterized by the following conditions:

a) Upstream subcritical flow

$$(4.1) \quad [Y]_{x \rightarrow -\infty} = 1; \quad H = 3/2; \quad M = 3/2;$$

b) Upstream supercritical flow (uniform stream)

$$(4.2) \quad [Y]_{x \rightarrow -\infty} = Y_u; \quad H = H_u = Y_u + 1/2Y_u^2; \quad M = M_u = Y_u^2/2 + 1/Y_u.$$

5. THE NAPPE

A number of approximate solutions have been proposed to obtain the nappe profile. They are based on relaxation methods [9], iterative methods [3] or electrical analogy [4]. Here we propose an analytical solution derived on the basis of the above mentioned hypothesis, namely that the total momentum M , expressed by eq. (2.14), maintains a constant value. Inserting eq. (3.5), valid for $x \geq 0$, in eq. (2.14) the result is

$$(5.1) \quad Yb'' - b'^2 + b'z' = -Y^3 + 6MY - 6$$

and

$$(5.2) \quad Yz'' + z'^2 - b'z' = -Y^3 - 6MY + 6.$$

Subtracting (5.2) from (5.1) it follows

$$(5.3) \quad Y(b'' - z'') - (b' - z')^2 = 12MY - 12,$$

that is

$$(5.4) \quad YY''' - Y'^2 - 12MY + 12 = 0.$$

The integral of eq. (5.4) is

$$(5.5) \quad Y = Y_L + Ae^{-Bx}$$

where A and B are arbitrary constants and Y_L is the *limit* value of Y for $x \rightarrow \infty$ (where $Y' = Y'' = 0$). This gives

$$(5.6) \quad Y_L = 1/M.$$

In the case of *upstream subcritical flow* Y_L has the well known [8] value

$$(5.7) \quad Y_L = 2/3.$$

Otherwise, if the jet derives from an *upstream supercritical flow* with uniform depth Y_u , the value of Y_L is

$$(5.8) \quad Y_L = 1/M_u = 2Y_u(Y_u^3 + 2)^{-1}$$

as obtained from (4.2).

As regards the constant A , we refer to the section $x = 0$. Denoting by Y_0 the *brink depth*, it follows

$$(5.9) \quad A = Y_0 - Y_L.$$

In order to determine the constant B we differentiate twice eq. (5.5)

$$Y' = -ABe^{-Bx}; \quad Y'' = AB^2 e^{-Bx}$$

and substitute these expressions in eq. (5.4)

$$(5.10) \quad YAB^2 e^{-Bx} - A^2 B^2 e^{-2Bx} - 12MY + 12 = 0.$$

Inserting (5.5) in the latter relationship, it becomes

$$(5.11) \quad Y_L B^2 - 12M = 0$$

that is

$$(5.12) \quad B = \sqrt{12M/Y_L}.$$

Summarizing we find:

$$(5.13) \quad \text{upstream subcritical flow: } B = 3^{3/2};$$

$$(5.14) \quad \text{upstream supercritical flow: } B = 3^{1/2} \cdot 2M_u.$$

6. THE PRESSURE DISTRIBUTION ON THE NAPPE

By applying eq. (3.2) to the nappe profiles – where eqs. (5.1) and (5.2) hold – we obtain

$$(6.1) \quad [\partial p / \partial y]_{y=z} = (6MY - 6) / Y^3,$$

$$(6.2) \quad [\partial p / \partial y]_{y=b} = -(6MY - 6) / Y^3.$$

These equations show that the y -component of the pressure gradient has the same absolute value on both profiles; along any vertical section of the jet the pressure distribution is symmetric.

In particular, at the *limit section*, where $b' = z'$ and $Y = Y_L = 1/M$, it follows from (5.1) and (5.2) that

$$(6.3) \quad b'' = z'' = -Y^2$$

and hence, by means of eq. (3.2)

$$(6.4) \quad [\partial p / \partial y]_{Y=Y_L} = 0.$$

Thus we find the known result that the pressure p attains the atmospheric value in every point of the limit vertical section.

7. THE LOWER NAPPE PROFILE

The relative difference between the vertical dimension of the jet at an arbitrary section and the dimension of the limit section is given by eq. (5.5)

$$(7.1) \quad (Y - Y_L) / Y_L = (Y_0 / Y_L - 1) e^{-Bx}.$$

When the upstream flow is *subcritical* we can assume the brink depth Y_0 to take the experimental mean value 0.716 found by Rouse [8]. Using the value $B = 3^{3/2}$ (see (5.13)), eq. (7.1) leads to results some of which are listed in table I.

TABLE I.

x	$(Y - Y_L) / Y_L$	x	$(Y - Y_L) / Y_L$
0	0.074	0.3	0.016
0.1	0.044	0.4	0.009
0.2	0.026	0.5	0.005

The relative difference given by eq. (7.1) has the maximum value of about 7% at $x = 0$ and becomes smaller than 1% if $x \geq 0.4$. In the case of an upstream *supercritical flow* this difference is even less, because Y_0 / Y_L is smaller than 1.074 and B is larger than $3^{3/2}$.

On the basis of these observations, in order to calculate the lower profile of the jet, we may assume Y to be constant and equal to Y_L along the whole jet. Under this con-

dition it follows that $b' = z'$, $b'' = z''$ and, by eq. (3.5),

$$(7.2) \quad z'' = -Y_L^2$$

just as in the limit section.

The integral of eq. (7.2) is

$$(7.3) \quad z' = -Y_L^2 x - b$$

where b (assumed to be positive) can be derived from eq. (2.13) at $x = z = 0$, that is

$$(7.4) \quad 3[z']_0^2 = -3Y_L^3 + 6HY_L^2 - 6MY_L + 3$$

with the previous assumption that $[Y]_0 = Y_L$. Therefore, we have

$$(7.5) \quad b = (-Y_L^3 + 2HY_L^2 - 2MY_L + 1)^{1/2}.$$

Inserting (7.5) in eq. (7.3), it follows that

$$(7.6) \quad -z = \frac{1}{2} Y_L^2 x^2 + x(-Y_L^3 + 2HY_L^2 - 2MY_L + 1)^{1/2}$$

being $z = 0$ at $x = 0$.

For *upstream subcritical flow*, where $Y_L = 2/3$, eq. (7.6) becomes

$$(7.7) \quad -z = 0.222 x^2 + 0.192 x$$

which is valid for a gravitational jet flowing from a smooth channel and unaffected by surface tension [2, 6].

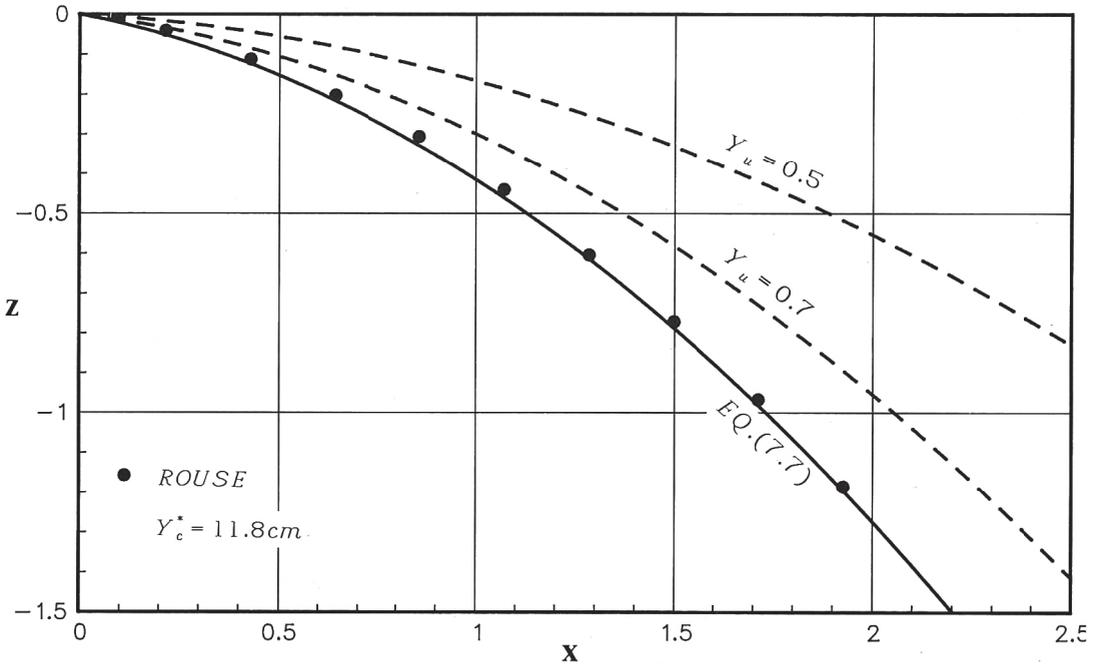


Fig. 2. - The lower profile (7.7) of the nappe - corresponding to upstream subcritical flow - compared with the experimental data of Rouse [7]. The theoretical profiles corresponding to $Y_u = 0.5$ and $Y_u = 0.7$ are also plotted (dashed lines).

Recalling the expression (5.6) for Y_L , eq. (7.6) may be written in the form:

(7.8)
$$-z = ax^2 + bx$$

with

(7.9)
$$a = (1/2)M^{-2}$$

(7.10)
$$b = (2HM^{-2} - M^{-3} - 1)^{1/2}.$$

Some values of a and b , as functions of Y_u , are given in table II.

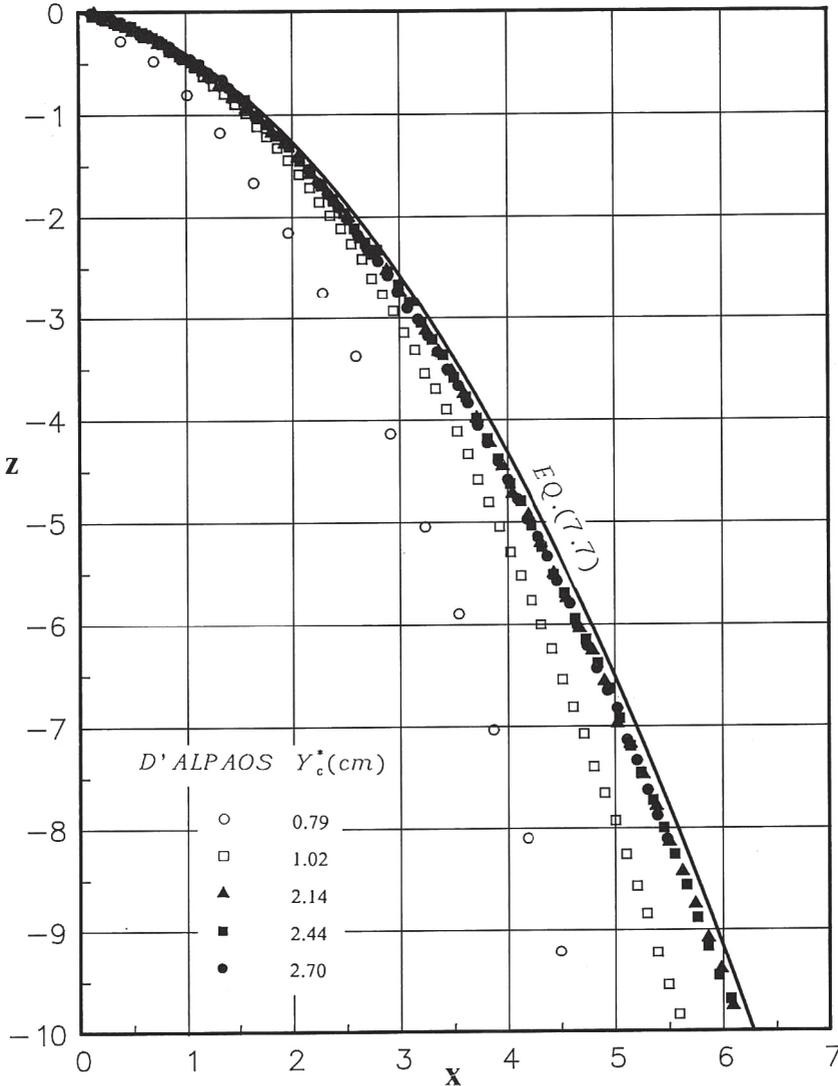


Fig. 3. - Comparison of the lower profile (7.7) of the nappe with the experimental data of D'Alpaos [2] referring to small values of the critical depth.

TABLE II.

$[Y]_{-\infty}$	H	M	Y_L	a	b
$Y_c = 1$	3/2	3/2	2/3	0.222	0.192
$Y_u = 0.9$	1.517	1.516	0.660	0.217	0.182
$Y_u = 0.8$	1.581	1.570	0.637	0.203	0.157
$Y_u = 0.7$	1.720	1.674	0.597	0.178	0.123
$Y_u = 0.6$	1.989	1.847	0.541	0.147	0.087
$Y_u = 0.5$	2.500	2.125	0.471	0.111	0.055

The nappe lower profile corresponding to $Y_c = 1$ (eq. (7.6)) is plotted in fig. 2 together with the experimental points of Rouse [7] referring to a horizontal smooth channel. The agreement appears to be satisfactory. In the same fig. 2 two profiles corresponding to the upstream condition $Y_u = 0.5$ and $Y_u = 0.7$ are also plotted.

In fig 3 we have plotted the experimental data of D'Alpaos [2], related to water streams characterized by small values of the critical depth ($0.79 \div 2.70$ cm), so as to point out the influence of surface tension on the nappe. As Y_c^* increases – hence the Weber number decreases – the effect of surface tension on the lower profile is found to vanish. We may observe that our curve (7.7), representing the theoretical profile of inviscid liquid subject only to gravity, fits satisfactorily the experimental points corresponding to the larger values of critical depth tested by D'Alpaos.

REFERENCES

- [1] T. B. BENJAMIN - M. J. LIGHTHILL, *On Cnoidal Waves and Bores*. Proc. Roy. Soc. A, vol. 224, 1954, 448-460.
- [2] L. D'ALPAOS, *Effetti scala nei moti di efflusso fortemente accelerati*. XX Conv. Idr. e Costr. Idr., Padova 1986.
- [3] W. B. FRASER, *Gravity-deflected Jets in Two-Dimensional Flow*. M.E. Thesis, University of Canterbury, N.Z., 1961 (see [5]).
- [4] N. HAY - E. MARKLAND, *The Determination of the Discharge over Weirs by the Electrolytic Tank*. Proc. I.C.E. col. 10, London 1958, 59.
- [5] F. M. HENDERSON, *Open Channel Flow*. The Macmillan Co., New York 1966.
- [6] E. NAUDASCHER, *Scale Effects in Gate Model Test*. Symposium on *Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures*, A.I.R.H., Technische Akademie Esslingen 1984.
- [7] H. ROUSE, *Verteilung der hydraulischen Energie bei einem Lotrechten Absturz*. Verlag von R. Oldenbourg, Munchen und Berlin 1933.
- [8] H. ROUSE, *Discharge Characteristics of the Free Overfall*. Civil Engineering, vol. 6, 4, 1936, 257-260.
- [9] R. V. SOUTHWELL - G. VAISEY, *Relaxation Methods Applied to Engineering Problems: XII, Fluid Motions Characterized by «free» Streamlines*. Phil. Trans. Roy. Soc. A, vol. 240, 1946, 117.

Istituto di Idraulica
Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1 - 16145 GENOVA

On the free overfall
J. of Hydr. Research, 1993

On the free overfall

A propos du déversement libre



ENRICO MARCHI
*Professor of Hydraulics,
Institute of Hydraulics,
Faculty of Engineering,
University of Genoa,
Genoa, Italy*

ABSTRACT

The phenomenon of the free overfall, experimentally investigated since the pioneering work of H. Rouse (1933) but not enough known analytically, is studied here assuming the steady flow to be two-dimensional, irrotational and frictionless and accounting for the presence of two free curvilinear boundaries. We derive a more general equation than the known one valid for the flow over a flat bottom. By adopting this equation together with the conservation laws, we can deduce: (a) an equation for the lower profile of the nappe, (b) the value of the brink depth and (c) an equation for the free surface profile of the flow upstream from the brink depth. The results are confirmed by the already available experimental data and by new measurements of the author.

RÉSUMÉ

Le phénomène du déversement libre, étudié expérimentalement depuis le premier travail de H. Rouse (1933) mais pas assez connu analytiquement, est étudié ici en supposant que l'écoulement permanent est plan, irrotationnel, sans frottement en prenant en considération la présence de deux limites libres curvilignes. On dérive une équation plus générale que celle valable pour l'écoulement sur fond plan. En appliquant cette équation, en même temps que les lois de conservation, on peut déduire : (a) une équation pour le profil inférieur du jet, (b) la valeur de la profondeur d'eau à l'extrémité du canal et (c) une équation du profil de la surface libre du courant en amont de cette extrémité. Les résultats sont confirmés par les données expérimentales déjà disponibles et par des nouvelles mesures de l'auteur.

1 Introduction

The phenomenon of the "free overfall" – meaning the stream flow in the neighbourhood of a sharp channel drop (see Fig. 1) – has been deeply examined from the experimental point of view. Fundamental in this field was the research carried out by Rouse [11] in the Karlsruhe laboratory in 1933. Further studies, turned to various purposes, were subsequently undertaken also in Italy. In particular, we can remember the experimental research performed by Paderi [10] in the fifties, with the aim of considering the effect of the bottom slope especially around its critical condition, and the more recent study of D'Alpaos [2] to point out the influence of the surface tension on the free jet.

The theoretical analysis of the phenomenon, even if *gravitational effects* are the only actions, has been focused on the search for approximate solutions based on simplified models of the phenomenon [7, 13] or obtained by using numerical methods [4, 6] or relaxation methods [14] or analogical methods [5].

Revision received November 11, 1992. Open for discussion till June 30, 1994.

The *brink depth* must be imposed by the state of minimum energy for the steady flow but, in spite of the apparent simplicity of the process which should condition the result, so far it has not a satisfactory theoretical determination. This is probably due to the fact that the phenomenon, also in the essential formulation of an *inviscid, irrotational* and *two-dimensional* flow assumed here, appears as a steady flow confined between two profiles which are both *curvilinear*, at least along a stretch. Therefore a more general equation needs to be used than the known equations valid for the flow over a flat bottom (such as, for instance, the Benjamin and Lightill's equation [1]). Under the foresaid hypotheses the author – in a previous paper [8] – has already derived an equation suitable to represent the flow with two curvilinear boundaries and used it for computing the lower profile of the nappe.

In the present study all the free overfall behaviour is considered. The stream function is obtained, as in the paper [8], through the expansion in a power series of the vertical distance from the lower flow profile, truncated at the third order. At this order of approximation we can so write the equations of the velocity, the total head and the total momentum in terms of $h(x)$ and $z(x)$ variables, that represent the (dimensionless) vertical coordinates respectively of the upper and lower profiles of the stream.

By applying these equations to the case of the free overfall we can derive, in addition to the equation for the lower nappe profile downstream to the sharp edge of the channel [8], a condition that imposes a definite value for the depth at the brink section. Finally, we deduce the flow profile equation upstream from this section. The results are obtained both in the case of *upstream sub-critical flow*, consequent upon a mild or zero slope of the channel, and of *upstream supercritical flow*, coming from a steep slope or controlled by a gate.

Furthermore, the theoretical results are compared with the already known experimental data and with new measurements carried out by the author.

2 Equations of motion

2.1

The *inviscid, irrotational* and *two-dimensional* flow is referred to an orthogonal x^*, y^* plane with horizontal x^* -axis located on the channel bottom and the origin at the sharp edge of the channel (see Fig. 1, where stars are dropped using dimensionless notations as defined below in this chapter). The bottom may be always considered horizontal: in fact, we think that the resistance losses – for the steady flow under consideration – are negligible if the bottom is horizontal or are balanced by the gravity effects if the bottom has a positive slope. The consideration is justified by the smoothness of the bed and, mainly, by the short length of channel to which the effects of the brink are confined. This is a channel stretch, spread along the abscissae from 0 to $-\infty$ in the theoretical model, but which is experimentally proved to have a length not greater than four times the *upstream depth* [12]. The latter is assumed to be the *critical depth* if the flow is subcritical, the depth Y_n^* at a distance $\sim 4Y_n^*$ upstream from the channel edge if the flow is *supercritical*. Being $y^* = h^*(x^*)$ and $y^* = z^*(x^*)$ the equations respectively of the upper and lower profiles, v_x^* and v_y^* the velocity components, p^* the pressure, ρ the constant density and g the gravity, in any vertical section we can write:

– the depth of the stream or the vertical dimension of the nappe

$$Y^* = h^* - z^* ; \tag{2.1}$$

- the total head referred to the x^* -axis

$$H^* = y^* + p^*/\rho g + (v_x^{*2} + v_y^{*2})/2g; \quad (2.2)$$

- the total momentum, i.e. the momentum flow rate corrected for changes in the horizontal pressure force

$$M^* = \int_z^h (p^* + \rho v_x^{*2}) dy^*. \quad (2.3)$$

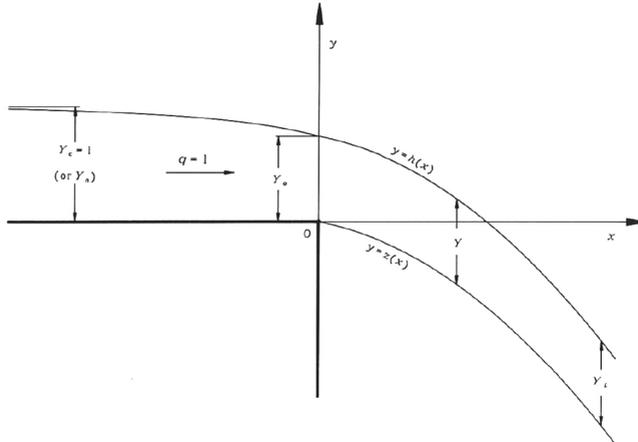


Fig. 1. Definition sketch for the free overfall at the edge of a channel.
Schéma de définition de la chute libre à l'extrémité d'un canal.

With reference to a discharge q^* per unit width, the following scaling is introduced:

i) lengths are scaled by the critical depth

$$Y_c^* = (q^{*2}/g)^{1/3}; \quad (2.4)$$

ii) velocities are scaled by the critical speed $(gY_c^*)^{1/2}$;

iii) pressure are scaled by the pressure $\rho g Y_c^*$;

iv) the stream function Ψ^* is scaled by the discharge q^* .

Each dimensionless variable will be written with the same symbol of the corresponding dimensional variable dropping the star. Notations are reported at the end of the paper.

2.2

We assume the dimensionless stream function $\Psi(x, y)$ to be zero at $y = z(x)$ and consequently $\Psi = 1$ at $y = h(x)$. Following the procedure proposed by Benjamin and Lighthill [1] to study cnoidal waves on a flat horizontal bottom, we may expand the function Ψ in a power series of $(y - z)$, truncated at the third order. By imposing the condition that Ψ is a harmonic function, we can write

$$\Psi = (y-z)f(x) + \frac{1}{2}(y-z)^2(2z'f' + z''f) - \frac{1}{3!}(y-z)^3f'' \quad (2.5)$$

where $f(x)$ is arbitrary and a prime denotes differentiation with respect to x .

By introducing the dimensionless form of (2.1) in (2.5) when it represents the boundary condition $\Psi(x, h) = 1$, we obtain

$$f(x) = 1/Y - (1/2)(2z'f' + z''f)Y + (1/6)f''Y^2. \quad (2.6)$$

Differentiating twice this equation and neglecting the terms that contribute to the fourth order in (2.5) we find

$$\begin{aligned} f' &= -(1/Y^2)(h' - z') \\ f'' &= (1/Y^3)[2(h' - z')^2 - Y(h'' - z'')] \end{aligned}$$

which can be substituted in (2.5) to express the stream function Ψ to the previous order of approximation. The differentiation of this function with respect to x and y gives the velocity components

$$\begin{aligned} v_x = \Psi_{,y} &= \frac{1}{Y} \left\{ 1 + \left(\frac{y-z}{Y} - \frac{1}{2} \right) [Yz'' - 2z'(h' - z')] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{y-z}{Y} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \left[\frac{Y}{2}(h'' - z'') - (h' - z')^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

and

$$v_y = -\Psi_{,x} = \frac{1}{Y} \left\{ z' + \frac{y-z}{Y}(h' - z') \right\}. \quad (2.8)$$

By means of these expressions we can calculate the dimensionless total head

$$H = \frac{H^*}{Y_c} = y + p + (1/2)(v_x^2 + v_y^2). \quad (2.9)$$

Since the steady flow is inviscid and irrotational, the total head H and the total momentum M must take constant values. With reference to the upper streamline $y = z + Y$, where the relative pressure vanishes, we have

$$H = Y + z + \frac{1}{2Y^2} \left[1 + \frac{Y}{3}(2h'' + z'') - \frac{1}{3}h'^2 + \frac{2}{3}z'^2 + \frac{2}{3}h'z' \right]. \quad (2.10)$$

The momentum M^* , given by (2.3) is equivalent to

$$M^* = \int_{z^*}^{h^*} \rho g \left[H^* - y^* + \frac{1}{2g}(v_x^{*2} - v_y^{*2}) \right] dy^* \quad (2.11)$$

and in dimensionless form it is expressed by

$$M = \frac{M^*}{\rho g Y_c^2} = HY - \frac{Y^2}{2} - Yz + \frac{1}{2} \int_z^{z+Y} (v_x^2 - v_y^2) dy$$

which, using the forms (2.7) and (2.8) of v_x and v_y , leads to

$$h'^2 + z'^2 + h'z' = -3Y^3 + 6HY^2 - 6MY + 3 - 6Y^2z. \quad (2.12)$$

This equation has the required general form and reduces to Benjamin and Lighthill's equation [1, pag. 458] when z and z' vanish everywhere, i.e. in the case of flow over a flat horizontal bottom. Finally we can derive the expression of M from (2.10) and (2.12)

$$M = \frac{Y^2}{2} + \frac{1}{Y} \left[1 + \frac{Y}{6} (2h'' + z'') - \frac{h'^2}{3} + \frac{z'^2}{6} + \frac{h'z'}{6} \right]. \quad (2.13)$$

It is evident that only two of the three equations (2.10), (2.12) and (2.13) are independent.

3 Boundary conditions

We consider the free overfall in the usual situation involving values of the Weber number $We = Y_c^* \sqrt{\sigma/\rho g}$ greater than 1.5. In such case [2, 9], which for water in ordinary conditions means $Y_c^* > 4$ cm, the influence of surface tension σ is negligible. Therefore, on the free profiles the pressure has always the atmospheric value, assumed to be zero.

As regards the upstream conditions the following situations are considered:

a) flow originates from a *subcritical* state, i.e. the channel has a horizontal bottom or a mild slope ($S_0 \leq S_c$); the theoretical model is characterized by the conditions

$$[Y]_{x \rightarrow -\infty} = Y_c; \quad H = 3/2; \quad M = 3/2; \quad (3.1)$$

b) flow originates in a *supercritical* state; in this case the channel has a steep slope ($S_0 > S_c$) or the flow is controlled by a sluice gate. Then it takes a non-dimensional depth Y_n (coincident with the *normal depth* of the uniform flow in the case of a sloping channel) at a distance of about $4 Y_n$ from the edge of the channel. As said in § 2, this condition is spread to $x \rightarrow -\infty$ in the theoretical model; therefore, we assume

$$[Y]_{x \rightarrow -\infty} = Y_n; \quad H = H_n = Y_n + 1/2 Y_n^2; \quad M = M_n = Y_n^2/2 + 1/Y_n. \quad (3.2)$$

4 The free jet

We may write the equation (2.9) for the total head along the lower profile of the nappe (where $y = z$ and $p = 0$) and make it equal to the equation (2.10). From this equation we derive the condition

$$2Y^3 + Yh'' + Yz'' - h'^2 + z'^2 = 0 \quad (4.1)$$

to be valid for $x \geq 0$

Inserting (4.1) in (2.13) and recalling that M is constant, the following equations are derived:

$$Yh'' - h'^2 + h'z' = -Y^3 + 6MY - 6 \quad (4.2)$$

$$Yz'' + z'^2 - h'z' = -Y^3 - 6MY + 6 \quad (4.3)$$

Now, we may subtract the second equation from the first one and obtain

$$Y Y'' - Y'^2 - 12MY + 12 = 0 \quad (4.4)$$

taking in account that $h - z = Y$.

The integral of equation (4.4) is

$$Y = Y_L + Ae^{-Bx} \tag{4.5}$$

where Y_L is obviously the limit value of Y for $x \rightarrow \infty$. In such a situation there is $Y' = Y'' = 0$ and equation (4.4) indicates that

$$Y_L = 1/M. \tag{4.6}$$

The quantities A and B are constants that can be determined as follows. For $x = 0$ it must be

$$Y = Y_o - Y_L \tag{4.7}$$

denoting by Y_o the *brink depth*.

By differentiating twice (4.5) and substituting in (4.4) we obtain

$$B = \sqrt{12M/Y_L}. \tag{4.8}$$

For the two different upstream conditions (see (3.1) and (3.2)) we have:

- upstream *subcritical* flow

$$Y_L = 2/3; \quad B = 3^{3/2} \tag{4.9}$$

- upstream *supercritical* flow

$$Y_L = 1/M_n = 2Y_n(Y_n^3 + 2)^{-1}; \quad B = \sqrt{12M_n}. \tag{4.10}$$

The relative difference between the vertical dimension Y of the jet at an arbitrary section and the dimension Y_L at the limit section has a maximum value of about 7% at $x = 0$ and becomes smaller than 1% for $x \geq 0.4$, assuming $Y_o = 0.716$ as found by Rouse. In order to compute the lower profile of the jet, the assumption $Y = Y_L$ may be therefore justified not only for $x \geq 0.4$ but also along the whole jet. Consequently we have $h' = z', h'' = z''$ and equation (4.1) reduces to

$$z'' = -Y_L^2 \tag{4.11}$$

whose first integral is

$$z' = -Y_L^2 x - b. \tag{4.12}$$

The b constant has been assumed positive and can be computed by writing equation (2.12) for $x = z = 0$, that is

$$3[z']_0^2 = -3Y_L^3 + 6HY_L^2 - 6MY_L + 3 \tag{4.13}$$

and substituting (4.12) for z' it follows

$$b = (-Y_L^3 + 2HY_L^2 - 2MY_L + 1)^{1/2}. \tag{4.14}$$

The integral of equation (4.12) is

$$z = -\frac{1}{2}Y_L^2 x^2 - bx. \tag{4.15}$$

Recalling that $Y_L = 1/M$, equation (4.15) may be written

$$-z = ax^2 + bx \tag{4.16}$$

with

$$a = \frac{1}{2M^2} \text{ for } b = \left(\frac{2H}{M^2} - \frac{1}{M^3} - 1 \right)^{1/2}. \tag{4.17}$$

For upstream subcritical flow, where $H = M = 3/2$, equation (4.16) becomes

$$-z = 0.222x^2 + 0.192x. \tag{4.18}$$

For upstream supercritical flow the values of a and b may be computed as functions of Y_n using the expressions of H and M given by (3.2).

Fig. 2 shows some experimental points of the lower profiles, carried out by H. Rouse [11] and by the author, in comparison with the corresponding theoretical curves. The channel was horizontal in the cases $Y_n = Y_c = 1$ and with $Y_n = 0.68$ and 0.49 (flow controlled by a sluice gate) and had a slope $S = 0.009$ in the case $Y_n = 0.65$, with reference of the profile to a orthogonal system which has always horizontal x -axis.

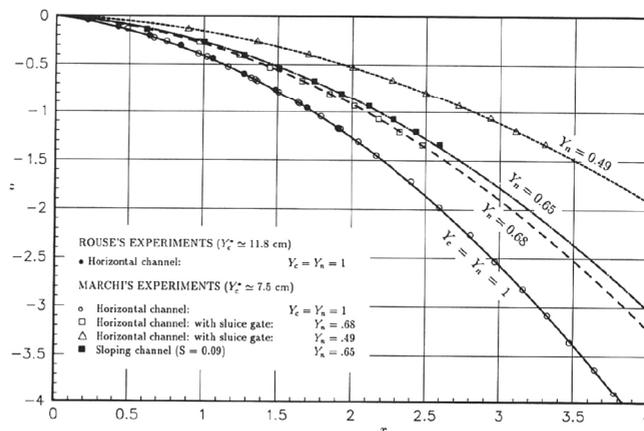


Fig. 2. The lower profiles of the jet for $Y_n = Y_c = 1$ and $Y_n = 0.68; 0.65; 0.49$.
Les profils inférieurs du jet pour $Y_n = Y_c = 1$ et $Y_n = 0,68; 0,65; 0,49$.

5 Pressure distribution

The vertical pressure variation may be obtained by differentiating equation (2.9) with respect to y , recalling that $H = \text{const}$ and the flow is irrotational. We find

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -1 - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{5.1}$$

By means of (2.7) and (2.8), at the aforesaid order of approximation (see 2.2), it follows

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -1 - \frac{z''}{Y^2} + \frac{z'(h' - z')}{Y^3} + \frac{y - z}{Y^4} [(h' - z')^2 - Y(h'' - z'')]. \tag{5.2}$$

By integration we obtain

$$p = - \int_y^h \frac{\partial p}{\partial y} dy = h - y + \frac{z''(h-y)}{Y^2} - \frac{z'(h'-z')(h-y)}{Y^3} - \left[\frac{h^2 - y^2}{2Y^4} - \frac{z(h-y)}{Y^4} \right] [(h'-z')^2 - Y(h'' - z'')] \quad (5.3)$$

with $p(x, h) = 0$.

We can write equation (5.2) on the nappe boundary where (4.2) and (4.3) hold; it follows

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=z} = (6MY - 6)/Y^3 \quad (\text{for } x \geq 0) \quad (5.4)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=h} = -(6MY - 6)/Y^3 \quad (\text{for } x \geq 0). \quad (5.5)$$

The vertical gradient of the pressure has the same absolute value on both profiles and so the pressure distribution along any vertical section of the free jet is symmetrical. At the limit section ($Y_L = 1/M$) the pressure gradient is zero and p has the atmospheric value in every point of the section.

6 The brink depth

The pressure vertical variation given by equation (5.2) assumes on the lower profile ($y = z$) and on the upper one ($y = h$) the following values

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=z} = -1 + \frac{-Yz'' - z'^2 + h'z'}{Y^3} \quad (6.1)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=h} = -1 + \frac{-Yh'' + h'^2 - h'z'}{Y^3} \quad (6.2)$$

The vertical gradient expressed by (6.1) must be ≥ 0 and, since the extraneous forces are only the gravity, its value must fall in the range 0, + 1. Analogously, the gradient expressed by (6.2) must be only ≤ 0 and thus it must take values that fall in the range 0, - 1.

Now, let us consider the situation

$$x < 0$$

for which there is: $z = z' = z'' = 0$. Equation (2.12) becomes

$$h'^2 = -3Y^3 + 6EY^2 - 6MY + 3 \quad (6.3)$$

and its derivative is given by

$$h'' = -(9/2)Y^2 + 6EY - 3M \quad (6.4)$$

being $Y' = h'$.

Replacing (6.3) and (6.4) in (6.2) we obtain the following vertical gradients of the pressure at the boundaries of the flow upstream from the brink section

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=z=0} = -1 \quad (\text{for } x < 0) \quad (6.5)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{y=h} = \frac{Y^3 - 6MY + 6}{2Y^3} \leq 0 \quad (\text{for } x < 0). \quad (6.6)$$

In order to obtain $Y^3 - 6MY + 6 \leq 0$, there must be

$$Y \geq Y_0 \quad (6.7)$$

where Y_0 is the (dimensionless) depth expressed by the only root > 0 and < 1 of the cubic equation

$$Y^3 - 6MY + 6 = 0. \quad (6.8)$$

If we consider the situation

$$x \geq 0$$

it is evident that the flow becomes a free jet and the pressure gradients on the upper and lower profiles are expressed by (5.4) and (5.5).

In order for the gradient given by (5.4) to be ≥ 0 and ≤ 1 , the condition

$$0 \leq 6MY - 6 \leq Y^3 \quad (6.9)$$

must be verified and the same inequalities must be satisfied in order for the gradient given by (5.5) to be ≤ 0 and ≥ -1 .

From the first inequality (6.9) it derives

$$Y \geq \frac{1}{M} = Y_L \quad (6.10)$$

recalling that Y_L is the limit vertical dimension of the stream.

From the second inequality (6.9), which can be written

$$Y^3 - 6MY + 6 \geq 0, \quad (6.11)$$

we derive

$$Y \leq Y_0 \quad (6.12)$$

being Y_0 the already found root > 0 and < 1 of the cubic (6.8).

Resuming: as it must be

$$Y \geq Y_0 \quad \text{for } x < 0 \quad (6.13)$$

$$Y \leq Y_0 \quad \text{for } x \geq 0 \quad (6.14)$$

it follows that the continuity of the upper profile is assured only if

$$Y = Y_0 \quad \text{for } x = 0. \quad (6.15)$$

The value Y_0 depends obviously on the value of M which is present in equation (6.8).

In the case of *upstream subcritical flow* we know that $M = 3/2$ and hence

$$Y_0 = 0.706. \quad (6.16)$$

In the case of *upstream supercritical flow* we can substitute for M its expression (3.2) in equation (6.8) obtaining

$$Y^3 - 3Y_n^2 Y - \frac{6}{Y_n} Y + 6 = 0; \quad (6.17)$$

from this equation the values of the root Y_o are derived as a function of Y_n . Some numerical values are reported in Table 1 and the graph of the function $Y_o = f(Y_n)$ is plotted in Fig. 3. We may observe that for $Y_n < .5$ the free overfall does not yield an appreciable contraction of the stream.

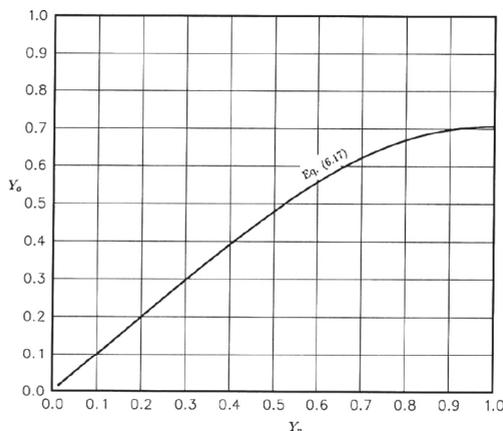


Fig. 3. The brink depth Y_o as a function of the upstream depth Y_n .

La profondeur Y_o a l'extrémité d'un déversoir en fonction de la profondeur amont Y_n .

Table 1

$Y_n \rightarrow \infty$	M	E	Y_o	F_r	S_o/S_c
$Y_n = 1$	1.500	1.500	.706	≤ 1	≤ 1
$Y_n = .90$	1.516	1.517	.697	1.171	1.421
.80	1.570	1.581	.669	1.398	2.104
.70	1.674	1.720	.621	1.707	3.283
.60	1.847	1.989	.557	2.151	5.489
.50	2.125	2.500	.479	2.828	10.08

7 Other forms for the brink depth

The *brink depth* Y_o may be expressed also as a function of the Froude number

$$Fr = \frac{q^*}{g^{1/2} Y_n^{3/2}} = Y_n^{-3/2}. \quad (7.1)$$

In Table 1 the Fr values are reported; $Fr \leq 1$ represents all the flows at the end of a mild slope channel.

The depths Y_n^* and Y_c^* are related to the channel slope S_o and to the critical slope S_c through the equation

$$\frac{S_o}{S_c} = \left(\frac{Y_c^*}{Y_n^*} \right)^{10/3} = Y_n^{-10/3} \quad (7.2)$$

if we assume the Manning equation to be valid for uniform flow. Using equation (7.2), the values of the last column in Table 1 have been computed. The result $Y_o = 0.706$ in the subcritical case is very close to the well known mean experimental result of Rouse $Y_o = 0.716$ [12]. The difference is in fact only 1.25%; Henderson [6] says that “a brink depth $Y_o = 0.715$ can safely be used for flow measurements, with a likely error of only 1 or 2 percent”.

Fig. 4 shows the dependence of Y_o from S_o/S_c , as it derives theoretically from (6.15) and (7.2). The experimental results, obtained by Delleur, Dooge and Gent [3] are plotted for comparison with the previous curve.

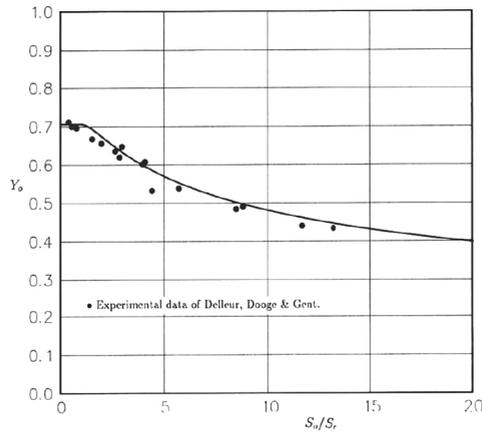


Fig. 4. The theoretical brink depth Y_o as a function of the slope ratio S_o/S_c in comparison with the experimental points of Delleur, Dooge and Gent [3].

La profondeur théorique Y_o en fonction des rapport des pentes S_o/S_c en comparaison aux points expérimentaux de Delleur, Dooge et Gent [3].

8 The open-channel profile of the free overfall

The *brink depth* being known, we can also search for the profile of the free overfall upstream from this depth, i.e. for $x \leq 0$. Given the conditions $z = z' = 0$, equation (2.12) becomes

$$h'^2 = -3Y^3 + 6HY^2 - 6MY + 3 \quad (8.1)$$

where H and M have the constant values given by (3.1) or (3.2).

Being $h' = Y'$, (8.1) is a separable equation and may be written

$$dx = -[-3Y^3 + 6HY^2 - 6MY + 3]^{1/2} dY \quad (8.2)$$

where the negative sign derives from the selected direction of the x -axis.

In the case of *upstream subcritical flow* there is $H = M = 3/2$ and it follows that

$$\int_0^x dx = - \int_{Y_o}^Y 3^{-1/2} (1 - Y)^{-3/2} dY \quad (8.3)$$

Integration yields

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-Y_0}} - \frac{1}{\sqrt{1-Y}} \right) \quad (\text{for } x \leq 0) \quad (8.4)$$

which represents the profile of the free overfall *upstream from the brink depth* Y_0 .

In Fig. 6 this computed profile, with $Y_0 = 0.706$, is compared with the data measured by Rouse [11].

In the case of *upstream supercritical flow* equation (8.2) becomes

$$dx = - \left[-3Y^3 + \left(6Y_n + \frac{3}{Y_n^2} \right) Y^2 - \left(3Y_n^2 + \frac{6}{Y_n} \right) Y + 3 \right]^{1/2} dY; \quad (8.5)$$

the cubic in the square brackets admits the roots $Y = Y_n$ (double) and $1/Y_n^2$. Therefore we can rewrite equation (8.5) in the form

$$dx = (Y - Y_n)^{-2} [3(Y_n^2 - Y)]^{-1/2} dY. \quad (8.6)$$

This equation may be easily integrated through a numerical procedure starting from the value given for Y_0 (which is a known function of Y_n). The profiles calculated for $Y_n = Y_c = 1$ and $Y_n = 0.68$ and 0.49 are plotted in Fig. 5 together with the experimental points of Rouse [11] and with the points measured by the author in a horizontal channel on the surface of the free flow and of two flows controlled by a sluice gate.

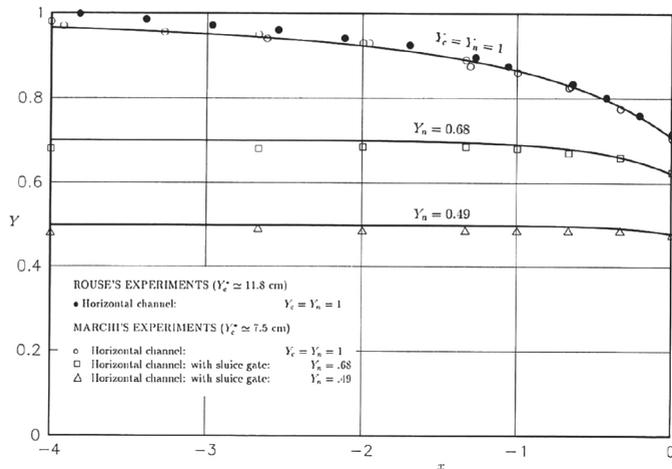


Fig. 5. The open-channel profiles of the free overfall for $Y_n = 1; 0.68; 0.49$.
Les profils de la surface d'un écoulement en chute libre pour $Y_n = 1; 0,68; 0,49$.

9 Conclusions

Using the equations of an inviscid, irrotational and two-dimensional flow, we have obtained the results which the following summarizes:

i) *Upstream subcritical flow*

$$[Y]_{x \rightarrow -\infty} = Y_c = 1; \quad H = 3/2; \quad M = 3/2$$

The *nappe lower profile* is represented by the equation (4.18)

$$-z = 0.222x^2 + 0.192x.$$

The *brink depth* (scaled in dimensionless form by the critical depth) emerged to be equal to

$$Y_o = 0.706$$

and the *upstream water-surface profile* is represented by the curve (8.4)

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-Y_o}} - \frac{1}{\sqrt{1-Y}} \right).$$

ii) *Upstream supercritical flow*

$$[Y]_{x \rightarrow -\infty} = Y_n; \quad H = H_n = Y_n + 1/2 Y_n^2; \quad M = M_n = Y_n^2/2 + 1/Y_n$$

The *nappe lower profile* is given by the curve (4.16) (see Fig. 2)

$$-z = ax^2 + bx$$

with $a = 1/2M^2$

and $b = (2HM^{-2} - M^{-3} - 1)^{1/2}$.

The *brink depth* is given by the root ($0 < Y_o < 1$) of the cubic (6.8)

$$Y^3 - 6MY + 6 = 0$$

or (6.17)

$$Y^3 - 3Y_n^2Y - (6/Y_n)Y + 6 = 0$$

and it is therefore known as a function of the depth Y_n (see Table 1 and Fig. 3).

The water-surface profile upstream from the brink section may be computed by numerical integration of the equation (8.2)

$$dx = -(-3Y^3 + 6HY^2 - 6MY + 3)^{1/2} dY$$

or (8.6)

$$dx = (Y - Y_n)^{-2} [3(Y_n^{-2} - Y)]^{-1/2} dY$$

starting from the previous value $Y_o = f(Y_n)$, as shown by Fig. 3 and Fig. 5.

iii) Considering the correlation between Y_n and S_o/S_c (see equation 7.2), the numerical dependence of Y_o on S_o/S_c , has been derived, as illustrated in Fig. 4.

Notations

ρ	liquid density
σ	surface tension
g	acceleration of gravity
q^*	rate of discharge per unit span
Y_c^*	$(q^{*2}/g)^{1/3}$ = critical depth
v_x^*, v_y^*	velocity components
	Dimensionless variables
x	x^*/Y_c^* = horizontal co-ordinate
y	y^*/Y_c^* = vertical co-ordinate
h	h^*/Y_c^* = vertical co-ordinate of the upper profile
z	z^*/Y_c^* = vertical co-ordinate of the lower profile
Y	$h - z$ = stream depth and vertical dimension of the nappe
Y_o	Y_o^*/Y_c^* = brink depth (depth at the cross section $x = 0$)
Y_n	Y_n^*/Y_c^* = depth for uniform supercritical flow ($x \rightarrow \infty$)
Y_L	Y_L^*/Y_c^* = vertical dimension of the nappe at the limit section ($x \rightarrow \infty$)
p	$p^*/\rho g Y_c^*$ = pressure (over the atmospheric values)
H	H^*/Y_c^* = total head
M	$M^*/\rho g Y_c^{*2}$ = total momentum per unit span
Fr	$q^*/\sqrt{g Y_n^3}$ = Froude number
S_o	channel slope
S_c	critical slope

References

1. T. B. BENJAMIN and M. J. LIGHTHILL, On Cnoidal Waves and Bore. Proc. Roy. Soc. A, vol. 224, 1954, 448-460.
2. L. D'ALPAOS, Effetti scala nei moti di efflusso fortemente accelerati. XX Conv. Idr. e Costr. Idr., Padova, 1986.
3. J. W. DELLEUR, J. C. I. DOOGE and K. W. GENT, Influence of Slope and Roughness on the Free Overfall. Proc. ASCE, vol. 82, no. HY4, 1956, 1038-30/35.
4. W. B. FRASER, Graver-deflected Jets in Two-Dimensional Flow, M.E. Thesis, University of Canterbury, N.Z., 1961 (see [6]).
5. N. HAY and E. MARKLAND, The Determination of the Discharge over Weirs by the Electrolytic Tank. Proc. I.C.E. col. 10, London 1958, 59.
6. F. M. HENDERSON, Open Channel Flow. The Macmillan Co, New York, 1966.
7. C. JAEGER, Hauteur d'eau à l'extrémité d'un long déversoir. La Houille Blanche, Mars-Avril, 1948, 185-6.
8. E. MARCHI, The Nappe Profile of a Free Overfall. Rend. Mat., Acc. Lincei, s.9, v.3, 131-140, 1992.
9. E. NAUDASCHER, Scale Effects in Gate Model Tests. Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures, A.I.H.R., Technische Akademie Esslingen, 1984.
10. F. PADERI, Correnti in arrivo veloci in zona terminale di canale a forte pendenza prossima alla critica. L'Energia Elettrica, vol. XXXVIII, n. 10, 1961.
11. H. ROUSE, Verteilung der Hydraulischen Energie bei Leinem Lotrechten Absturz. Verlag von R. Oldenbourg, Munchen und Berlin, 1933.
12. H. ROUSE, Discharge Characteristics of the Free Overfall. Civil Engineering, vol. 6, no. 4, 1936, 257-260.
13. S. K. ROY, Note on the Stream Depth at the Edge of a Free Overfall. La Houille Blanche, Nov.-Dec., 1949, 832-837.
14. R.V. SOUTHWELL and G. VAISEY, Relaxation Methods Applied to Engineering Problems: XII, Fluid Motions Characterized by 'free' Streamlines. Phil. Trans. Roy. Soc. A, vol. 240, 1946, 117.

Il rigurgito dovuto alle pile di ponte di forma circolare
Idrotecnica, 1994

IL RIGURGITO DOVUTO ALLE PILE DI PONTE DI FORMA CIRCOLARE

Enrico Marchi (*)

SOMMARIO — Il rigurgito provocato dalle pile di ponte, a parità di forma del fronte delle pile e di entità del restringimento, dipende ancora dalla lunghezza delle pile. Infatti quest'ultima influisce sulla pendenza e sulla curvatura del pelo libero nel restringimento; in modo particolare se il moto si realizza con transizione attraverso lo stato critico. In tali condizioni, e quando il deflusso a valle dell'ostruzione è completamente libero, si può calcolare la profondità della corrente a monte delle pile utilizzando il rapporto di restringimento geometrico r purché diviso per un coefficiente correttivo k .

La valutazione sperimentale di k , in funzione del parametro r e della profondità della corrente rapportata al diametro delle pile circolari, è esposta nella presente memoria.

1. INTRODUZIONE

Alcuni comportamenti delle correnti liquide in tronchi brevi sembrano essere accompagnati da variazioni energetiche relativamente grandi se si limita l'osservazione alle variazioni della grandezza

$$E = Y + U^2/2g \quad (1)$$

che rappresenta il carico specifico di una corrente monodimensionale di profondità Y e velocità media U (assumendo unitario il coefficiente di ragguglio dell'altezza cinetica per il moto turbolento).

In situazioni come quelle rappresentate da una corrente a pelo libero all'imbocco o allo sbocco di un canale, oppure in presenza di ostruzioni, l'evoluzione energetica non è correttamente interpretabile se non si supera lo schema monodimensionale del moto, il classico schema alla de Saint-Venant. In particolare, le correnti a pelo libero che attraversano un restringimento possono assumere configurazioni differenti non solo in funzione dell'entità del restringimento ma anche, a parità di restringimento, secondo la maggiore o minore lunghezza del tratto ristretto, relativamente alla profondità della corrente.

È noto che, oltre certi limiti del rapporto di restringimento — limiti valutabili in funzione del numero di Froude della corrente indisturbata — il deflusso nel

tratto ristretto impone necessariamente la formazione di una corrente lenta a monte e la transizione attraverso lo stato critico nel restringimento. Allora la lunghezza relativa del tratto ristretto, a parità di restringimento, può influire in modo significativo sulla forma del profilo del pelo libero e modificare la profondità della corrente rigurgitata di monte senza che intervengano apprezzabili variazioni di energia specifica lungo il tratto interessato. In altre parole, in condizioni di moto permanente a pelo libero, le pile di ponte relativamente lunghe, con fronti semicircolari, provocano un rigurgito decisamente maggiore delle stesse pile ridotte alla forma solo circolare e la differenza, che può raggiungere anche il 20% della profondità se il deflusso a valle è del tutto libero, non è giustificata dal differente, ma sempre marginale, effetto delle resistenze.

La spiegazione del fenomeno premesso sta nel fatto che, accorciandosi il tratto ristretto, si modifica la configurazione della corrente, cioè si accentuano la pendenza e la curvatura del pelo libero fino ad influenzare sensibilmente il valore del carico specifico, che, nelle condizioni di moto piano bidimensionale, può essere valutato con l'espressione

$$E = Y + \frac{U^2}{2g} \left(1 + \frac{2}{3} Y Y'' - \frac{1}{3} Y'^2 \right) \quad (2)$$

dove gli apici indicano le derivate della profondità Y rispetto alla coordinata corrente nella direzione del moto

(*) Prof. Ing. Enrico Marchi, ordinario di Idraulica nella Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova.

(SERRE 1953, BENJAMIN e LIGHTILL 1954, MARCHI 1992). Evidentemente questa espressione si riduce alla (1) quando Y'' e YY'' diventano molto piccoli rispetto all'unità.

Il problema è stato trattato analiticamente dall'autore in una memoria (MARCHI 1994) presentata al XXIV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche di Napoli. Qui, richiamati i risultati di quella memoria, si espone il confronto con una serie sistematica di misure sperimentali, eseguite dall'autore, per ricavare i valori del coefficiente necessario ai fini applicativi.

2. L'EQUAZIONE INTERPRETATIVA

In un canale di sezione rettangolare a fondo fisso indichiamo con

$$r = b/B \tag{3}$$

il rapporto di restringimento, essendo B la larghezza ordinaria del canale e b quella della sua sezione più stretta; inoltre indichiamo con

$$F = U/\sqrt{gY} \tag{4}$$

il numero di Froude della corrente in una sezione generica (dove la velocità media è U e la profondità Y) e con

$$Y_{cb} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \tag{5}$$

la profondità critica della corrente, considerata monodimensionale, con la portata Q e la larghezza ristretta b .

La condizione che, in presenza di un restringimento, impone l'attraversamento della profondità critica è notoriamente (si vedano (MARCHI 1968, MARCHI e RUBATTA 1981, FRENCH 1985)

$$F'_{lim} \leq F_o \leq F''_{lim} \tag{6}$$

dove F_o è il numero di Froude della corrente indisturbata ed F'_{lim} e F''_{lim} sono le radici positive dell'equazione

$$r = 3^{3/2} \frac{F_{lim}}{(2 + F_{lim}^2)^{3/2}} \tag{7}$$

Per quanto riguarda la condizione limitativa superiore vi sarebbero alcune osservazioni da fare su un fenomeno di isteresi che conferma o sposta il limite a seconda che si ci avvicini ad esso partendo da un F_o maggiore o minore di F'_{lim} . Per l'analisi particolare di questo fenomeno si rimanda a Becchi e al. (BECCHI 1973); in termini generali, si veda AUSTRIA 1987. Nello studio presente si presuppone senz'altro che il moto avvenga con transizione attraverso lo stato critico nel restringimento.

Seguendo la memoria citata (MARCHI 1994), con riferimento alla fig. 1, scriviamo il bilancio dell'energia specifica fra la sezione 1 a monte dell'ostruzione e la sezione C nella quale la corrente attraversa la profondità critica Y_{cb} definita dalla (5)

$$Y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = Y_{cb} + \frac{U_{cb}^2}{2g} \left[1 + \frac{2}{3} \gamma Y'' - \frac{1}{3} Y'^2 + \xi \right] \tag{8}$$

dove $U_{cb} = \sqrt{gY_{cb}}$ è la velocità critica relativa alla profondità Y_{cb} nelle predette condizioni di riferimento. Il coefficiente ξ rappresenta una correzione, in termini di altezza cinetica, per tener conto dell'effetto delle perdite fra 1 e C (quelle non compensate dall'eventuale variazione di quota del fondo) e dell'effetto della parziale tridimensionalità della corrente nell'attraversamento di Y_{cb} . Tale attraversamento, infatti, nel caso di moto in presenza di pile circolari, si realizza a valle della sezione più stretta (di larghezza b), come mostra la fig. 1. Per quanto riguarda gli altri termini del fattore fra parentesi, evidentemente il secondo mette in conto l'influenza della curvatura ed il terzo quella della pendenza del profilo della superficie libera, come nella (2).

Posto

$$k = \left[1 + \frac{2}{9} \gamma Y'' - \frac{1}{9} Y'^2 + \frac{\xi}{3} \right]^{3/2} \tag{9}$$

si deduce senza difficoltà (v. MARCHI 1994) che la profondità Y_1 a monte del restringimento è valutabile con la

$$Y_1 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2 F_L'^2}} \tag{10}$$

essendo F_L' la minore delle radici positive dell'equazione

$$\frac{r}{k} = 3^{3/2} \frac{F_L}{(2 + F_L^2)^{3/2}} \tag{11}$$

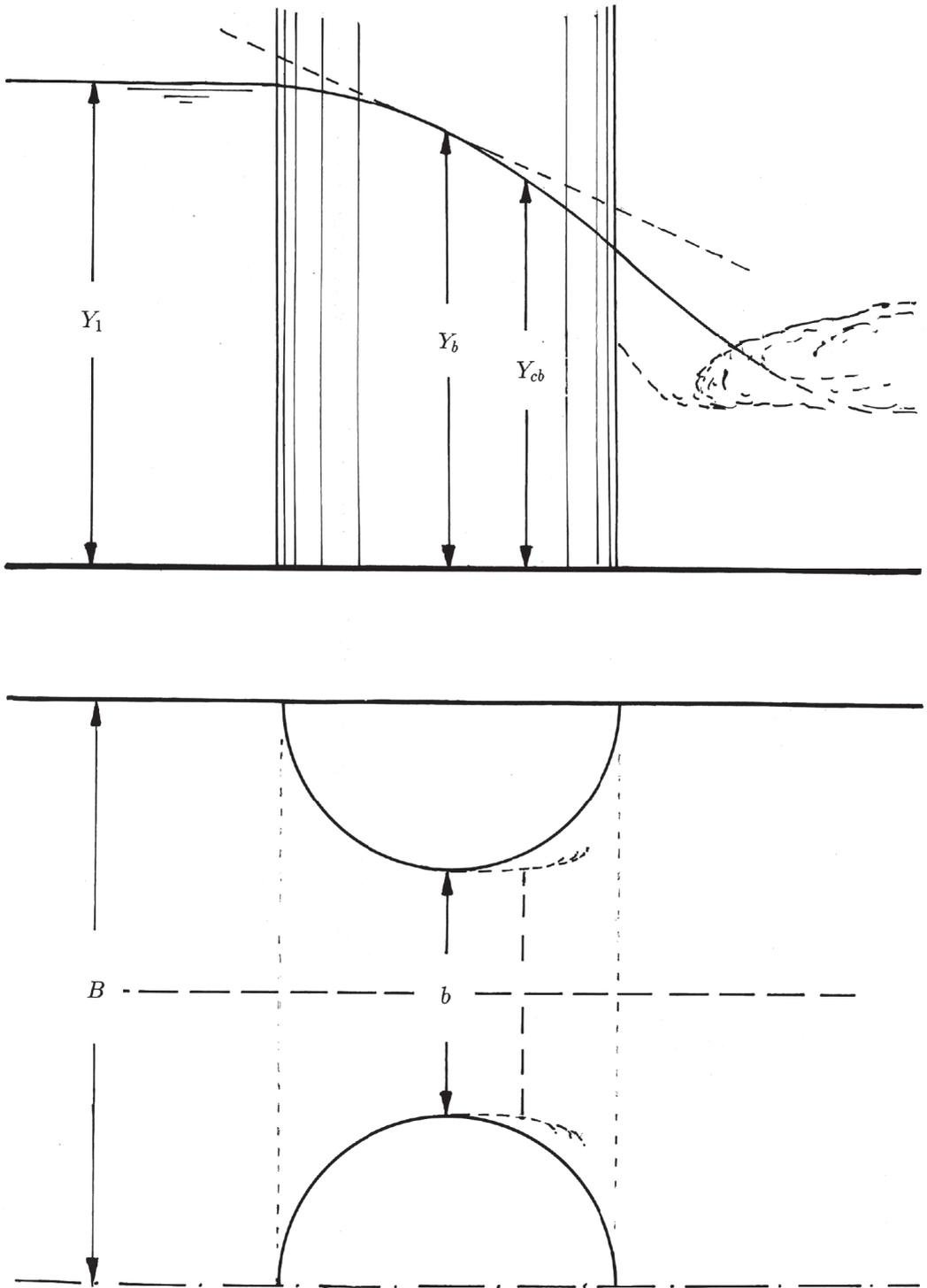


Fig. 1. - Il moto attraverso il restringimento provocato da pile circolari, con fondo fisso e deflusso a valle libero.

Il rapporto

$$\frac{r}{k} = \frac{b}{kB} \quad (12)$$

rappresenta il *rapporto di restringimento corretto* per tener conto non solo del restringimento geometrico ma anche degli altri fattori influenti sul fenomeno di cui si è detto in precedenza.

Si può esprimere F_L in funzione della *profondità critica* Y_{cB} della corrente cilindrica defluente con la portata Q nell'alveo indisturbato di *larghezza* B :

$$Y_{cB} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} \quad (13)$$

risulta così

$$F_L = \frac{Q}{g^{1/2}BY_1^{3/2}} = \left(\frac{Y_{cB}}{Y_1}\right)^{3/2} \quad (14)$$

sostituendo nella (11) al posto di F_L il valore soprascritto della sua radice minore positiva, segue

$$\frac{r}{k} = \left[\frac{3(Y_{cB}/Y_1)}{2 + (Y_{cB}/Y_1)^3} \right]^{3/2} \quad (15)$$

che, per ogni $0 < r/k < 1$, fornisce un unico valore di Y_{cB}/Y_1 nel campo $0 < Y_{cB}/Y_1 < 1$.

Si può calcolare Y_1/Y_{cB} in funzione di r/k anche utilizzando il grafico di fig. 2 che riporta la curva di eq. (15) nel campo di interesse applicativo.

3. VALUTAZIONE DEL RIGURGITO

Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile di ponte di forma circolare richiede dunque, oltre alla conoscenza del rapporto r di restringimento geometrico, ovviamente dato, anche quella del coefficiente correttivo k , la cui determinazione deve essere fatta per via sperimentale. Come si è già detto, il valore di k dipende sia dalla forma e dall'entità del restringimento sia dalla sua lunghezza relativa alla profondità della corrente.

Quando le pile sono *lunghe*, almeno più del doppio della profondità della corrente a monte dell'ostruzione, i valori di k risentono solo gli effetti dovuti alle eventuali contrazioni di vena e alle dissipazioni, perché i termini dipendenti dalla curvatura e dalla penden-

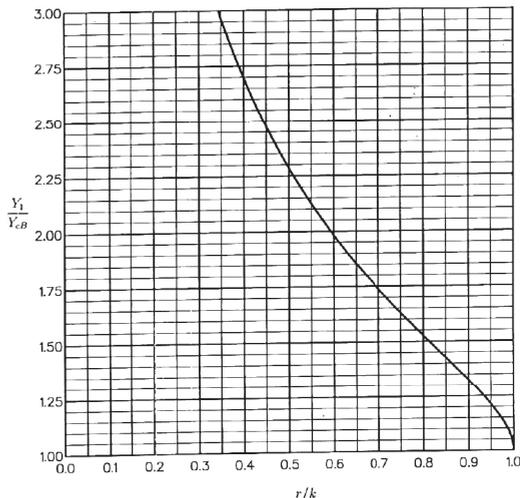


Fig. 2. - La profondità relativa Y_1/Y_{cB} a monte delle pile in funzione del rapporto di restringimento corretto r/k .

za del pelo libero hanno valori trascurabili. In tal caso si vede dalla (9) che, essendo $\xi > 0$, k deve avere valori maggiori di 1, tendenti all'unità al diminuire delle perdite.

Un confronto con i risultati sperimentali di Yarnell (1994) ha fornito i seguenti valori di k per *pile lunghe*:

pile con fronti squadrati	$k = 1.14$
pile con fronti triangolari	$k = 1.09$
pile con fronti semicircolari	$k = 1.03-1.05$
restringimenti graduali ben sagomati	$k = 1.02-1.03$

In presenza, invece, di *pile circolari* gli effetti del termine di curvatura YY'' e del termine legato alla pendenza $-Y^2$ nella (9) sono concordemente negativi e comportano valori di k che possono essere < 1 , ossia un effetto analogo ad una attenuazione del restringimento. Non potendo prevedere teoricamente l'importanza quantitativa dei diversi fattori che compaiono nella (9), si è proceduto ad una valutazione sperimentale del coefficiente k .

4. LE MISURE E I RISULTATI SPERIMENTALI

Le esperienze sono state eseguite nel laboratorio dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova utilizzando una canaletta a pendenza variabile, con pareti e fondo lisci in perspex, di sezione rettangolare larga $B = 402$ mm.

Sono state sottoposte alle prove pile circolari in perspex di diametro $D = 110$ mm e $D = 35.7$ mm ed alcune pile lunghe $L = 300$ mm con teste semicircolari di diametro $D = 110$ mm.

Le misure della profondità sono state eseguite con

idrometri a punta che consentivano, anche con i più piccoli valori delle profondità (circa 25 mm), un errore accidentale $\leq 0.4\%$, tenuto anche conto che ogni misura era la media di diverse ripetizioni. Le misure della portata, eseguite sulla condotta di alimentazione del canale con due diaframmi preventivamente tarati, potevano essere affette da errori accidentali entro $\pm 0.5\%$.

A parità di tutte le altre condizioni, la profondità della corrente rigurgitata a monte dell'ostacolo dipende anche dalla profondità della corrente a valle, nonostante la presenza della sezione di controllo rappresentata dall'attraversamento della profondità critica.

Il fatto era già osservabile nei rilievi sperimentali di Yarnell del 1934. A pari restringimento, come s'è detto, la modifica della profondità di monte con il diminuire del livello della corrente di valle è dovuta essenzialmente all'accentuarsi della pendenza e della curvatura del pelo libero della vena contratta. Se, invece, il livello di valle si alza fino al limite consentito per il mantenimento del deflusso con transizione critica, l'effetto bidimensionale della corrente si attenua ed il valore di k si avvicina o raggiunge quello delle pile lunghe con fronti semicircolari ($k \leq 1.05$). Dato che questo valore rappresenta il *limite superiore di variabilità di k* , abbiamo ritenuto utile determinare il *limite inferiore* ed ab-

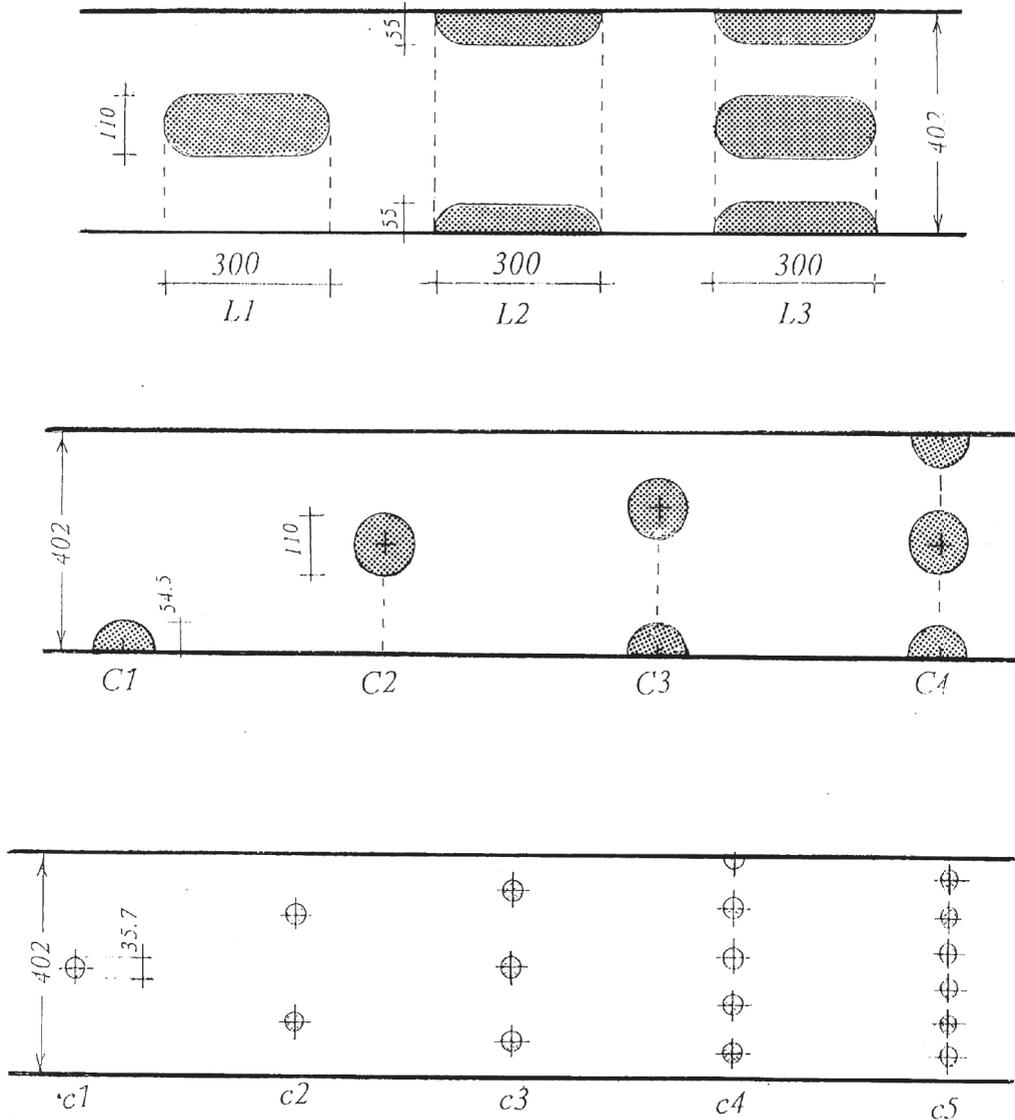


Fig. 3. - Schema delle configurazioni.

biamo quindi operato sperimentalmente sempre in condizioni di *deflusso a valle completamente libero*.

Sono state esaminate le configurazioni riportate nella fig. 3. In ogni prova è stata misurata la profondità media Y_1 a monte dell'ostacolo, in una sezione abbastanza vicina al fronte delle pile (alla distanza di 100-150 mm) dove la differenza del livello fra i punti più significativi (asse, fronte pile, parete) era contenuta entro l'1%. Contemporaneamente si è misurata la portata che defluiva in moto permanente nel canale, la cui pendenza era stata prefissata in modo da assicurare il deflusso libero a valle dell'ostacolo.

Le tabelle I, II e III riportano i risultati sperimentali.

Per ogni serie, oltre ai dati L = lunghezza pila, D = diametro pila ($L = D$ per pile circolari), B = larghezza totale del canale, b = larghezza della sezione più stretta, $r = b/B$ = rapporto di restringimento, e ai valori misurati Q = portata ed Y_1 = profondità di monte, sono riportati:

a) il valore teorico Y_{1t} dato dalla (10) nell'ipotesi che sia $k = 1$

$$Y_{1t} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2F_{lim}^2}} \quad (16)$$

TABELLA I

PILE LUNGHE $L = 300 \text{ mm } D = 110 \text{ mm } B = 402 \text{ mm}$											
N	Conf.	b (mm)	r	Q l/s	Y_1 (mm)	F'_{lim}	Y_{1t} (mm)	F'_L	r/k	k	Y_{1t}/L
1	L1	292	0.726	25.3	130	0.459	124.2	0.429	0.690	1.052	0.414
2	L2	292	0.726	25.3	129.5	0.459	124.2	0.431	0.693	1.048	0.414
3	L3	183	0.455	25.3	186.5	0.261	181.0	0.249	0.437	1.041	0.603

TABELLA II

PILE CIRCOLARI $L = D = 35.7 \text{ mm } B = 402 \text{ mm}$											
N	Conf.	b (mm)	r	Q l/s	Y_1 (mm)	F'_{lim}	Y_{1t} (mm)	F'_L	r/k	k	Y_{1t}/L
1	c.1	366.3	0.911	3.37	25.9	0.675	25.0	0.642	0.890	1.024	0.700
2	"	"	"	3.60	27.0	"	26.2	0.644	0.892	1.021	0.734
3	"	"	"	3.89	28.2	"	27.6	0.652	0.897	1.016	0.773
4	"	"	"	5.23	34.0	"	33.6	0.663	0.904	1.008	0.941
5	"	"	"	6.45	39.0	"	38.6	0.665	0.905	1.007	1.081
6	"	"	"	8.45	45.7	"	46.2	0.687	0.918	0.992	1.294
7	"	"	"	11.2	54.2	"	55.8	0.705	0.928	0.981	1.563
8	"	"	"	17.6	72.9	"	75.4	0.710	0.931	0.979	2.112
9	"	"	"	25.2	91.0	"	95.8	0.729	0.940	0.969	2.683
10	"	"	"	25.3	91.8	"	96.0	0.722	0.937	0.972	2.689
11	c2	330.6	0.822	12.0	62.3	0.555	66.6	0.613	0.870	0.945	1.865
12	"	"	"	18.3	82.5	"	88.2	0.613	0.870	0.945	2.470
13	"	"	"	25.2	102.5	"	109.1	0.610	0.868	0.947	3.056
14	c3	294.9	0.733	12.0	69.2	0.466	74.8	0.524	0.794	0.923	2.095
15	"	"	"	18.4	89.7	"	99.4	0.544	0.812	0.903	2.784
16	"	"	"	25.2	110.2	"	122.6	0.547	0.815	0.899	3.434

Segue tabella II

17	c4	241.4	0.600	4.54	43.2	0.359	46.5	0.401	0.656	0.915	1.302
18	"	"	"	5.53	48.7	"	53.1	0.409	0.666	0.901	1.487
19	"	"	"	6.84	55.6	"	61.2	0.414	0.673	0.891	1.714
20	"	"	"	8.92	64.2	"	73.0	0.435	0.698	0.860	2.045
21	"	"	"	11.1	73.5	"	84.5	0.442	0.706	0.850	2.367
22	"	"	"	14.0	85.0	"	98.6	0.449	0.714	0.840	2.762
23	"	"	"	17.6	98.0	"	114.9	0.456	0.722	0.831	3.218
24	"	"	"	20.7	110.0	"	128.0	0.451	0.717	0.837	3.585
25	"	"	"	25.3	124.0	"	146.3	0.460	0.727	0.825	4.098
26	c5	187.7	0.467	5.05	52.8	0.268	60.7	0.331	0.561	0.832	1.700
27	"	"	"	9.30	75.7	"	91.2	0.354	0.594	0.786	2.554
28	"	"	"	12.0	88.1	"	108.2	0.365	0.609	0.767	3.031
29	"	"	"	18.5	114.4	"	144.3	0.380	0.629	0.742	4.042
30	"	"	"	25.3	140.0	"	177.8	0.383	0.633	0.738	4.980

TABELLA III

PILE CIRCOLARI $L = D = 110 \text{ mm } B = 402 \text{ mm}$											
N	Conf.	b (mm)	r	Q l/s	Y_1 (mm)	F'_{lim}	Y_{1r} (mm)	F'_L	r/k	k	Y_{1r}/L
1	C1	347.5	0.864	22.1	96.3	0.605	94.4	0.587	0.850	1.016	0.858
2	"	"	"	25.2	102.0	"	103.1	0.614	0.871	0.992	0.937
3	"	"	"	25.3	104.3	"	103.3	0.596	0.857	1.008	0.939
4	C2	292	0.726	15.65	90.6	0.459	90.2	0.456	0.722	1.005	0.820
5	"	"	"	25.3	122.0	"	124.2	0.472	0.740	0.981	1.129
6	"	"	"	25.3	122.3	"	124.2	0.470	0.738	0.984	1.129
7	C3	237.5	0.591	5.58	55.0	0.352	54.1	0.343	0.578	1.022	0.492
8	"	"	"	7.75	67.0	"	67.4	0.355	0.595	0.993	0.613
9	"	"	"	12.1	88.0	"	90.7	0.368	0.613	0.964	0.825
10	"	"	"	15.45	101.5	"	106.7	0.379	0.627	0.943	0.970
11	"	"	"	19.7	118.0	"	125.5	0.386	0.637	0.928	1.141
12	"	"	"	25.3	137.0	"	148.2	0.396	0.650	0.909	1.347
13	C4	183	0.455	4.97	60.0	0.261	61.2	0.268	0.467	0.974	0.556
14	"	"	"	6.41	70.0	"	72.5	0.275	0.478	0.952	0.659
15	"	"	"	10.8	94.0	"	102.6	0.298	0.513	0.887	0.933
16	"	"	"	12.2	101.5	"	111.3	0.300	0.515	0.883	1.012
17	"	"	"	14.7	112.4	"	126.0	0.310	0.531	0.857	1.145
18	"	"	"	25.3	157.0	"	181.0	0.323	0.550	0.827	1.645

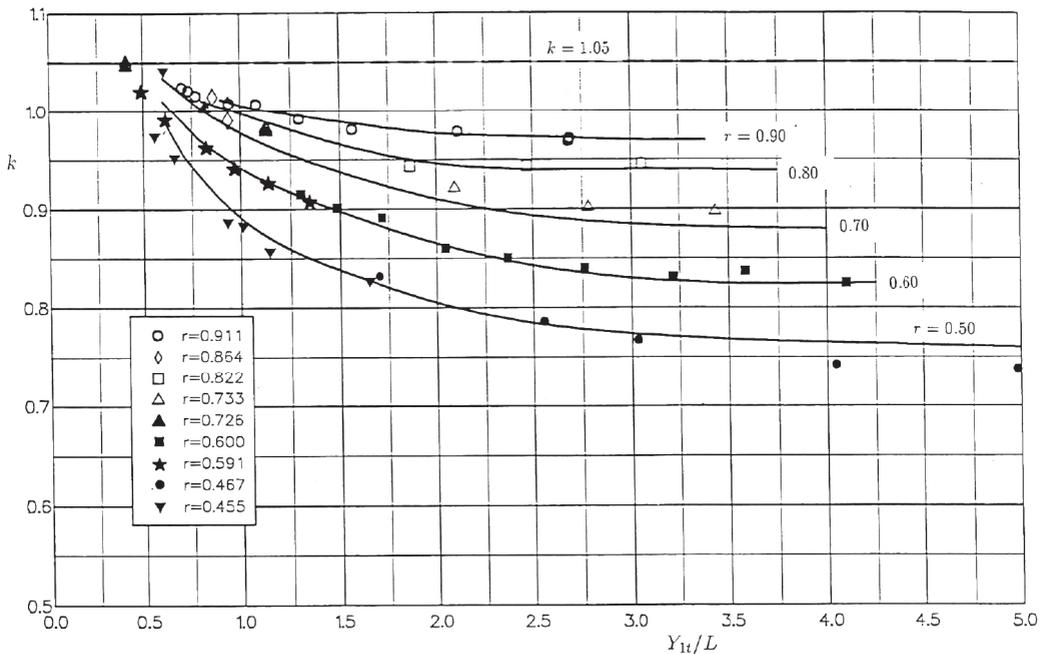


Fig. 4. - Valori sperimentali e curve interpolari del coefficiente di correzione k in funzione del rapporto Y_{1t}/L (L è la lunghezza della pila, pari al diametro nel caso di pile circolari).

dove F'_{lim} è il valore di F'_L definito dalla (11) con $k = 1$, ossia è la minore radice positiva dell'equazione (7). Per valutare Y_{1t} si può utilizzare anche il grafico di fig. 2, sempre assumendo $k = 1$;

b) il valore sperimentale F'_L corrispondente alla profondità misurata Y_1 , dato dalla

$$F'_L = \frac{Q}{B\sqrt{gY_1^3}}; \quad (17)$$

c) il valore r/k dato dalla (11) con il valore precedente di F'_L e quindi, conoscendo r , il valore sperimentale di k .

Fra i dati rilevati non è riportata la temperatura dell'acqua perché non influente sul fenomeno in esame. Ad ogni modo essa è rimasta quasi costante in tutte le prove, con valori compresi fra 17° e 18°C.

Dato che il coefficiente k dipende dalla forma della corrente nel restringimento, i fattori essenziali che possono influire sono il rapporto di restringimento e la lunghezza relativa del tratto ristretto. Per definire quest'ultima si è ritenuto significativo rapportare la lunghezza della pila L alla profondità della corrente a monte del restringimento, assumendo per essa il valore teorico Y_{1t} che è noto a priori.

I valori sperimentali di k sono stati riportati nel grafico della fig. 4 in funzione del rapporto Y_{1t}/L . Si osserva che i punti sperimentali sono ben raccordati da curve a rapporto di restringimento $r = \text{cost}$. Nel grafico sono state tracciate le curve interpolari corrispondenti ai valori 0.5 - 0.6 - 0.7 - 0.8 - 0.9 della costante.

5. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

L'impiego pratico del grafico di fig. 4 è immediato. Dati b , B e Q si calcola Y_{CB} con la (13) e si valuta Y_{1t}/Y_{CB} con l'eq. (15) o con il grafico di fig. 2, essendo noto r ed assumendo $k = 1$, per cui $Y_1 = Y_{1t}$. Si conosce quindi il rapporto Y_{1t}/L delle pile con fronti semicircolari ($L = D$ se le pile sono circolari) e nel grafico di fig. 4 si individua il valore di k corrispondente al dato r . Noto ora r/k , ancora l'eq. (15) o la curva di fig. 2 forniscono Y_{1t}/Y_{CB} e quindi il valore cercato della profondità Y_1 di monte.

Occorre infine ricordare che i valori di k determinati sperimentalmente si riferiscono alla situazione di deflusso a valle del restringimento completamente libero. In casi diversi, il valore di k può aumentare, come si è detto, fino al massimo 1.05 (pile lunghe con fronti semicircolari) che corrisponde alle normali situazioni di comportamento monodimensionale della corrente.

BIBLIOGRAFIA

- AUSTRIA, P.M., — *Catastrophe model for the forced hydraulic jump*. J. of Hydraulic Research, 25 (3), 1987, pp. 269-279.
- BECCHI, I., LA BARBERA, E., TETAMO, A., — *Studio sperimentale sul rigurgito provocato da pile di ponte*. Giornale del Genio Civile, v. 111, n. 6-7-8, 1973, pp. 277-290.
- BENJAMIN, T.B. e LIGHTILL, M.J., — *On cnoidal waves and bores*. Proc. Roy Soc., vol. 224, 1954, pp. 448-460.
- FRENCH, R.H., — *Open Channel Hydraulics*. Mc-Graw Hill, N.Y. 1985.
- MARCHI, E., — *Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile dei ponti*. L'Energia Elettrica, 45, 4, 1968.
- MARCHI, E. e RUBATTA, A., — *Meccanica dei Fluidi*. UTET, 1981.
- MARCHI, E., — *The nappe profile of a free overfall*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s.9, v. 3, 1992, pp. 131-140.
- MARCHI, E., — *Effetti locali dovuti alla pendenza e alla curvatura del pelo libero in un restringimento*. XXIV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Napoli, Sett. 1994.
- SERRE, F., — *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux*. La Houille Blanche n. 3-6, 1953.
- YARNELL, D.L., — *Pile trestles as channel obstruction*. Tech. Bulletins 429-442, U.S. Dept. of Agriculture, Washington July-November 1934.

La difesa di Venezia dalle acque alte
Atti Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, 2002

LA DIFESA DI VENEZIA DALLE ACQUE ALTE

ENRICO MARCHI

Relazione tenuta il 25 novembre 2002
in occasione del conferimento del premio Augusto Ghetti

Premessa

Prima di entrare nell'argomento della mia conversazione desidero ricordare un breve periodo, a me particolarmente caro, della vita del professore Augusto Ghetti, l'uomo al cui nome è legato il premio che ho avuto l'onore di ricevere. Lo faccio sebbene sappia, per lunga esperienza, come agitare il fondo dei ricordi porti sempre ad affiorare la malinconia.

Non intendo illustrare la figura straordinaria dello scienziato e umanista che ha presieduto l'Istituto Veneto, perché in questa sede la sua opera e il suo magistero hanno già ricevuto il doveroso e autorevole riconoscimento. Voglio sottolineare soltanto un tratto della sua vita: l'importanza della partecipazione di Augusto Ghetti alla Commissione nominata dal Ministero dei Lavori Pubblici per lo studio del problema della salvaguardia di Venezia.

Al momento dell'istituzione della Commissione, nell'autunno 1980, Ghetti era l'unico, dei sette membri che la costituivano, a conoscere già profondamente la situazione lagunare e in particolare quella veneziana. Lui fu prima il *Maestro* di tutti noi e seppe inquadrare i problemi non solo sotto l'aspetto idraulico, ma anche dal punto di vista storico, urbanistico e ambientale; poi Egli rappresentò la *coscienza critica* del Gruppo, analizzando profondamente e in modo assolutamente obiettivo tutte le proposte progettuali che via via emergevano, suggerite da un entusiasmo che a distanza di tanti anni è difficile capire anche da parte di chi ha vissuto quell'esperienza.

Augusto Ghetti aveva una cultura eccezionale sui problemi di

Venezia, unita ad un vero e proprio amore per la città, ed aveva uno spirito di osservazione così acuto che gli consentiva di individuare subito il punto debole di ogni soluzione e di suggerirne, quand'era possibile, i rimedi. All'inizio di una riunione, magari otto o dieci giorni dopo la precedente, esordiva con: "Ho avuto modo di ripensarci...", ed era chiaro a tutti che quel punto avrebbe dovuto essere rivisto e modificato. Eppure il lavoro del cosiddetto "progettone" si concluse alla fine del maggio 1981, negli otto mesi previsti. Forse quella sua estrema *sensibilità* rese difficile a Lui qualche decisione, ma, al contrario, essa fu una spinta decisiva per noi a rendere concreto l'esame della fattibilità del progetto che si andava delineando.

Di questa, come ho detto, *coscienza critica*, che contribuì in modo essenziale al conseguimento dei risultati della Commissione, tutti i membri di allora – Agema, Frassetto, Matildi, Passino, Pezzoli e chi vi parla – devono essere riconoscenti ad Augusto Ghetti, e mi fa piacere darne atto qui, all'Istituto Veneto, la sede che Lui prediligeva.

Le cause dell'incremento delle acque alte

Parlando a Venezia, e nella sede dell'Accademia che più di ogni altra istituzione ha contribuito ad approfondire l'esame di tutti gli aspetti dell'attuale situazione veneziana, dai problemi connessi con le maree a quelli di conservazione dell'ambiente lagunare e dei litorali, dai problemi idrodinamici e sedimentologici a quelli geomorfologici e biologici, dalla difesa delle strutture al recupero architettonico, dalla politica di sviluppo industriale alla evoluzione marittimo-portuale (data la vastissima bibliografia, mi limito a riportare in [1.] i titoli di importanti convegni e rapporti di studio), in questa sede, ripeto, non ho bisogno di spiegare che cosa sono le "acque alte" e posso anche sintetizzare al massimo l'analisi del loro incremento nell'ultimo secolo.

Le maree a Venezia, praticamente i massimi livelli che si registrano a Punta della Salute, sono andati crescendo dall'inizio alla fine del '900 sia come valori della massima elevazione sia come frequenza con la quale sono stati superati i diversi livelli. Ad esempio il livello di 70 cm sullo zero idrometrico di Punta della Salute, che corrisponde alla quota delle zone più basse di piazza San Marco e rappresenta convenzionalmente l'inizio delle "acque alte", si verificava mediamen-

te 15 volte ogni anno negli anni '20 e si presenta mediamente più di 100 volte all'anno negli ultimi dieci anni. La fig. 1 [2.] mette in evidenza l'andamento, dal 1923 al 2001, della frequenza di superamento del livello di 110 cm, inizio delle acque alte eccezionali. La fig. 2 [2.] mostra l'andamento negli stessi anni della media dei valori massimi e minimi di marea; si osserva che ad un primo aumento del livello medio negli anni precedenti il 1920, – mostrato nel grafico dalla sopraelevazione rispetto al livello medio marino del 1897 – è seguito un breve periodo di stasi e quindi un rialzo molto più consistente fino intorno agli anni 1970.

Considerato che le maree del mare Adriatico, nel periodo in esame, non mostrano variazioni statisticamente rilevanti, le cause del predetto incremento delle acque alte vanno ricercate in:

- a) aumento della "ampiezza" della marea all'interno della laguna a parità di ampiezza in mare;
- b) aumento del livello medio del mare (eustatismo) e abbassamento di quota del territorio lagunare (subsidenza), in particolare del territorio soggetto agli insediamenti veneziani.

La prima causa, la variazione di *ampiezza della marea fra mare e laguna*, è essenzialmente correlata con l'influenza delle tre bocche lagunari – Lido, Malamocco e Chioggia – sulla trasmissione dell'onda di marea. Le operazioni di allargamento delle bocche, iniziate verso il 1850 e concluse nel 1920, hanno incrementato le ampiezze di escursione delle maree in laguna fino a renderle praticamente pari a quelle del mare Adriatico.

Un'analisi statistica [3.] di un lungo periodo di *maree sizigiali* successive al 1920 mostra che il rapporto tra l'ampiezza della marea alla Salute e l'ampiezza al Lido è stato mediamente pari a 0.98, sia in flusso che in riflusso, nei periodi 1924-1940 e 1948-1965. Nel periodo bellico 1942-47, la mancanza di dragaggi ha portato alla formazione di parziali interrimenti delle bocche, specialmente della bocca di Lido, e ad un conseguente maggiore effetto attenuante delle resistenze: il rapporto medio dell'ampiezza di escursione della marea tra Punta della Salute e il Lido si è ridotto a 0.95 sia in flusso che in riflusso, per poi risalire a 1.01 per entrambi dopo il 1968, cioè dopo la realizzazione del canale Malamocco-Marghera. L'A. dell'op. cit. [3.] mette anche in evidenza che le variazioni non avvengono in modo simmetrico, ma sono più sensibili nei cavi che nei colmi. Ulteriori cause di

incremento delle ampiezze all'interno della laguna si possono individuare nell'approfondimento dei fondali lagunari e dei canali navigabili. Tuttavia, quest'ultimo fattore appare poco influente sull'ampiezza della marea a Venezia, perché la città è molto vicina alla bocca di Lido. Così la fig. 3 [4.] mostra che i livelli medi annui delle alte maree hanno registrato un forte incremento dal 1920 al 1970 circa, ma che lo stesso incremento si è verificato anche per i livelli medi annui delle basse maree, sicché l'ampiezza dell'escursione media non ha subito variazioni superiori a 3-4 cm nel periodo considerato.

Si tratta, come si vede, di effetti modesti, dovuti in modo preponderante alle resistenze al moto nei canali di bocca. L'attraversamento dei canali genera uno sfasamento in ritardo dell'onda di marea all'ingresso in laguna rispetto all'onda in mare; a tale sfasamento corrisponde, tenendo conto delle sole resistenze, un'attenuazione del livello massimo, che è tanto meno pronunciato quanto più l'onda tende ad allungarsi nel tempo, ossia quanto minore è il gradiente della sua fase di crescita. Quindi, com'è noto, e come si può dimostrare analiticamente mettendo in conto anche gli effetti inerziali, un aumento delle resistenze alle bocche esercita sulle maree atipiche, di durata maggiore di un ciclo, un effetto attenuante decisamente minore che sulle maree ordinarie, quelle periodiche semi-diurne ¹.

In conclusione, l'ultimo secolo ha visto un massiccio cambiamento della morfologia delle bocche lagunari a causa dell'erosione del fondo e una sostanziale modifica delle profondità dei fondali lagunari. Ma le conseguenze *sull'ampiezza* della marea in laguna sono state poco importanti, almeno dopo il 1920, e non possono giustificare l'incremento di frequenza delle acque alte che ha avuto luogo decisamente a partire da quegli anni.

La causa di tale radicale cambiamento va ricercata quindi nel secondo fattore, ossia negli effetti concomitanti di due fenomeni diversi: l'eustatismo e la subsidenza.

¹ La propagazione della marea dal mare a tutta la Laguna è stata ampiamente studiata sia con modelli matematici, sia con modelli fisici e analogici. In particolare, nel riferimento [5.], si richiamano alcuni lavori significativi.

Eustatismo e subsidenza

L'*eustatismo*, ossia il rialzo del livello medio del mare, si è verificato nel periodo storico di Venezia e fino alla fine del '800 in misura modesta, ma non trascurabile. Una prova elementare quanto evidente di questa tendenza secolare la fornisce l'osservazione delle soglie dei portoni degli edifici veneziani affacciati sull'acqua: si nota che le soglie delle costruzioni del '400-'500 (la Ca' d'Oro, per fare un esempio emblematico) sono oggi molto più vicine al livello medio dell'acqua di quelle dei palazzi del '700-'800, pur essendo state costruite con gli stessi criteri.

Ma, dall'inizio del '900 e fino agli anni '70, si è verificata una variazione più marcata del livello del medio mare. Senza entrare nei dettagli del fenomeno ampiamente studiato (cfr. [6.]) si può dire che il confronto con la situazione registrata a Trieste fa stimare mediamente in circa 1.5 mm/anno l'incremento *medio* del livello dell'Alto Adriatico in quel periodo.

Sulla riduzione del dislivello fra il territorio veneziano e il medio mare ha influito però in modo affatto anomalo nel periodo di tempo considerato – e particolarmente fra il 1930 e il 1970 – il fenomeno della *subsidenza antropica*. Dettagliati studi e indagini (cfr. [7.]) hanno chiarito le responsabilità delle estrazioni di acqua dal sottosuolo veneziano sul fenomeno in esame. Lo sfruttamento delle risorse idriche sotterranee fu particolarmente intenso nella zona industriale di Marghera, dove si verificò l'apice del cono di depressione locale. La rimozione di queste cause ha fatto registrare una confortante stabilità negli ultimi decenni, forse con un modesto recupero di quota dovuto alla risposta delle falde acquifere ripressurizzate in modo naturale.

I risultati dell'abbassamento, misurati rispetto al mare, pur variando di alcuni centimetri da località a località (cfr. livellazioni altimetriche con base Treviso [8.]) sono abbastanza concordi nell'indicare in 23 *cm* il valore del dislivello attuale del medio mare rispetto allo zero idrometrico del 1897 di Punta della Salute, conseguenza complessivamente dei citati fenomeni di *eustatismo* e di *subsidenza*. Il primo è indipendente dalle azioni umane, per lo meno a livello locale, e tutta una serie di osservazioni sui cambiamenti climatici in atto fanno temere una ripresa del fenomeno dopo l'attuale inatteso periodo

di stasi [9.]. Il pericolo della subsidenza, oltre che al processo naturale di assestamento degli strati superficiali, è invece strettamente connesso con attività antropiche quali l'estrazione di liquidi e di gas dal sottosuolo. Sull'importanza di prevenirle in modo rigoroso in un ampio raggio intorno alla laguna di Venezia tornerò anche nelle conclusioni.

Interpretazione statistica dei massimi livelli a punta della salute: l'effetto della riduzione del dislivello mare-territorio

Nel diagramma della fig. 4² sono riportati in ordinate i valori dei massimi *livelli di marea raggiunti o superati* a Punta della Salute dal 1966 al 2001 (con intervalli di 10 cm fino a 110 cm e di 2 cm sopra 110 cm dove gli eventi sono meno frequenti) e in ascisse, in scala logaritmica, il numero di volte medio annuo con cui si sono verificati nel periodo preso in considerazione (per comodità di lettura si è riportata la frequenza in termini decennali, anziché annuali). Si osserva uno straordinario allineamento dei punti rappresentativi dei diversi livelli. Rilevo questo comportamento come risultato sperimentale, senza volerne dare giustificazioni teoriche. D'altra parte, la linearità della rappresentazione grafica nel diagramma semi-logaritmico è comoda e rende più semplici e immediate le considerazioni che seguono, ma la validità delle conclusioni è del tutto indipendente dalla forma della curva di frequenza dei livelli massimi (tant'è vero che in una memoria del 1986 avevo già esposto le osservazioni che ora vedremo sulla base di un diagramma a scale naturali [10.]).

Se ora si abbassa di 23 cm la retta interpolare della fig. 4 - linea tratteggiata della fig. 5 - ci si riporta, dal punto di vista del dislivello mare-territorio, alle condizioni del primo '900. Ebbene, si può notare che le frequenze dei livelli massimi individuabili con la retta tratteggiata corrispondono bene a quelle che effettivamente si verificavano un secolo fa. Per esempio, il livello 110 cm che ha mediamente una frequenza attuale di circa 30-35 volte in 10 anni si sarebbe presentato 4-5 volte nello stesso periodo. Nel grafico - seguendo Seminario [11.], ma con un intervallo minore fra i livelli - sono riportati anche

² Questo grafico rappresenta una versione integrata e aggiornata al 2001 di uno precedente riferito al 1994 [12.].

alcuni punti rappresentativi delle frequenze di accadimento delle acque alte in alcuni periodi intorno al 1920 di cui ho a disposizione i dati: 1875-1938, 1923-1938, 1920-1929, [13.]. Si può notare la conferma delle osservazioni predette con l'evidente avvicinamento di questi punti alla retta tratteggiata.

E un'ulteriore conferma la offre la fig. 6 sulla distribuzione delle durate medie di intervalli prefissati di livelli di marea: come già osservato dagli AA. della pubblicazione [14.], da cui è tratta la fig. 6, si vede che una traslazione di poco più di 20 cm porta la curva del decennio 1920-29 praticamente a sovrapporsi a quella del periodo 1970-77 (non un decennio perché l'indagine si ferma alla data della pubblicazione citata).

È chiara la conclusione su cui insisto da tanti anni: la riduzione del dislivello fra il medio mare e il territorio lagunare, il territorio veneziano in particolare, è la causa *essenziale* dell'aumento di frequenza delle acque alte nell'ultimo secolo e rappresenta anche per il futuro il più grave rischio di allagamento di Venezia. Ciò non significa che l'approfondimento dei canali di bocca, la sottrazione di aree al bacino lagunare, la sparizione delle barene, le erosioni dei fondali, l'inquinamento delle acque, non siano stati cambiamenti dannosi, cambiamenti da contrastare e tendenze da invertire, ma non si devono confondere le conseguenze di tali interventi artificiali o naturali con l'aggravarsi del problema delle acque alte, se si vogliono individuare correttamente i rimedi. Affermare che un fenomeno dipende da una serie numerosa di fattori non ha un vero significato scientifico se non si sa individuare la loro maggiore o minore importanza sul problema specifico.

Alla luce di queste considerazioni appare evidente che il sollevamento del territorio edificato di Venezia, delle altre isole lagunari e del cordone litoraneo fino a ripristinare un sufficiente dislivello minimo rispetto alla media alta marea sarebbe la soluzione ideale per riportare Venezia nelle condizioni di un secolo fa nei confronti delle acque alte. A parte l'attuale – e probabilmente anche futura – impossibilità tecnica di un'operazione di tale portata, resterebbe tuttavia aperto il rischio di allagamento da acque alte con un carattere di eccezionalità paragonabile a quello della marea del 1966 (com'era già accaduto, per esempio, nel 1686).

Le forme di provvedimenti possibili

L'obiettivo del mio intervento è concentrato, come dice il titolo, sulla considerazione degli interventi possibili rivolti alla *difesa di Venezia dalle acque alte*. La limitazione è importante perché le situazioni "critiche" veneziane sono tante e differenti ed esse richiedono provvedimenti specifici che possono essere affatto diversi tra loro. Così la ricostruzione di un "modello di morfologia lagunare" (perché tale è l'obiettivo che ci si propone oggi, più che un ritorno ad un indefinibile equilibrio naturale [15.]) o un'operazione di miglioramento della qualità delle acque, si perseguono con interventi che non incidono apprezzabilmente sulle maree in città. Tuttavia, non si può dire il contrario, e le ricadute di un intervento di salvaguardia sulle altre situazioni più o meno critiche devono essere esaminate.

E' ben noto, e l'ho richiamato all'inizio di questa conversazione, che Venezia non deve affrontare soltanto il problema della difesa dalle acque alte (per una visione generale ricordo la [16.] di W. Dorigo). Una corretta progettazione di interventi richiede il loro coordinamento e la loro integrazione al fine di prendere in esame e di porre rimedio a tutte, o a quasi tutte, le situazioni critiche. Ma non si può pretendere che le opere destinate alla difesa dalle acque alte siano in grado di risolvere anche gli altri problemi, né che tutti gli interventi possano essere realizzati con la stessa scala temporale. Si può e si deve richiedere che i primi non aggravino le altre situazioni o che ne minimizzino le ricadute quando queste sono inevitabili. Non credo, infatti, che esista soluzione che non comporti qualche rischio e qualche conseguenza negativa.

Esclusa tecnicamente la possibilità di ripristinare il rapporto mare-territorio di fine '800, per raggiungere lo scopo di salvaguardia previsto per Venezia restano aperte due vie d'intervento *concettualmente diverse*: ridurre apprezzabilmente *l'ampiezza* delle maree in laguna, in modo da abbassare il livello massimo, agendo soprattutto dentro e intorno alle bocche con opere fisse che contrastino passivamente la propagazione dell'onda di marea; oppure *controllare attivamente* il passaggio dell'onda alle bocche con opere mobili, in modo da poter bloccare ad un livello stabilito l'ingresso della marea in laguna.

La scelta è in sostanza concentrata fra i seguenti due tipi di provvedimenti, a ciascuno dei quali si possono dare forme diverse di rea-

lizzazione tecnica:

- I) creare delle *resistenze artificiali* nell'alveo dei canali di bocca e/o davanti alle loro aperture a mare con strutture fisse – dighe foranee davanti agli imbocchi, pennelli di restringimento lungo i canali, rialzo del loro fondo, inserimento in esso di scabrezze artificiali, o altro – così da ridurre in modo significativo *l'ampiezza di escursione* della marea in laguna rispetto a quella in mare aperto; oppure
- II) inserire nei canali di bocca delle *barriere mobili*, tali da non interferire, in condizioni di paratoie abbattute, con i flussi e i reflussi delle maree ordinarie, ma capaci, con la loro chiusura, di *intercettare completamente il flusso* della marea montante quando è previsto il superamento di un *dato livello di guardia*.

Non entrerà negli aspetti ingegneristici dei due tipi d'intervento, ma cercherò di analizzare sinteticamente le loro differenze concettuali.

Il primo tipo di intervento, affinché possa produrre una riduzione apprezzabile dei livelli massimi, richiede un'attenuazione dell'*ampiezza* della marea almeno del 20%, ma per arrivare, se fosse possibile³, fino al 40%. Così, nell'esempio di un'alta marea, non particolarmente eccezionale, riportato nella fig. 7, per ridurre il suo livello massimo (di 121 cm) a non superare, poniamo, 110 cm a Punta della Salute, si rende necessaria una riduzione complessiva fra colmo e cavo di circa 23 cm sull'escursione totale di 113 cm dell'onda ascendente, ossia una riduzione del 20% (che diventerebbe del 36% circa se, ad esempio, si volesse imporre ad un livello massimo di marea di 130 cm di non superare sempre 110 cm).

Pressoché la stessa riduzione s'impone necessariamente su tutte le maree periodiche, semidiurne, di carattere prevalentemente astronomico, che si verificano quotidianamente durante il corso dell'anno. A parità di condizioni del bacino lagunare, la *stessa riduzione percentuale* si verifica sui *prismi di marea*, cioè sui volumi scambiati fra mare e laguna (anche nel periodo estivo quando l'esigenza del ricambio idrico è più sentita)⁴.

³ Sulla difficoltà di aumentare oltre certi limiti le dissipazioni distribuite di energia, si veda [17.].

⁴ Anche la superficie "attiva" della laguna si riduce, perché la sua area è correlata con la sezione efficace dei canali di bocca secondo una regola individuata sperimentalmente da O'Brien [18.] e da Jarrett [19.] e giustificata teoricamente da Marchi [20.].

Nel secondo tipo di intervento il taglio dell'onda di mare, con il limite precedente del livello massimo di 110 cm, è rappresentato schematicamente nella fig. 8 (dove si è assunta l'onda di marea inalterata fino alla barriera). Essa mostra come l'influenza riduttiva sul volume di marea sia molto modesta, pur restando correlata ovviamente al numero delle chiusure annue.

A questa differenza sostanziale di comportamento, che si evidenzia specialmente nei riguardi della "vivacità" della laguna, si deve aggiungere l'osservazione importante che, nei confronti di *onde anomale aperiodiche*, con forti componenti meteorologiche – *le più pericolose per le inondazioni* – l'effetto attenuante sull'ampiezza d'onda si riduce sensibilmente rispetto al caso delle onde periodiche; e altrettanto accade, ovviamente, per il massimo livello raggiungibile a Venezia.

Il secondo tipo di intervento consente, invece, di mantenere ferma la quota del livello di salvaguardia in laguna, indipendentemente dal livello della marea in mare (qualche incremento di livello, oltre che dal passaggio d'acqua tra gli elementi mobili della barriera, può derivare da un'azione concordemente negativa di pioggia e vento [21.]; questo effetto, ovviamente inevitabile con qualunque forma di chiusura della laguna, è normalmente di pochi centimetri a Venezia [22.]).

Altre conseguenze negative, come quelle sulla navigazione, non sono confrontabili in termini generali perché dipendono dalla tipologia delle strutture fisse che si scelgono nel primo tipo di intervento e dal livello di salvaguardia che si assume nel secondo; si tratta, comunque, di conseguenze tecnicamente rimediabili.

Considerazioni conclusive

Visto nei termini attuali, il problema della scelta del tipo di intervento per difendere Venezia dalle acque alte sembra semplice. Non era così all'inizio degli anni '80 quando la Commissione ministeriale di cui ho parlato nella premessa dovette affrontare il tema assegnatole della *difesa della Laguna di Venezia dalle acque alte*. L'opinione comune era che si potesse raggiungere l'obiettivo con opere fisse alle bocche di porto e verso tale direzione era orientato inizialmente il Ministero dei Lavori Pubblici e la stessa Commissione di studio. Il

dibattito interno fu acceso e vivace, coordinato con esemplare obiettività da Augusto Ghetti. Numerose soluzioni tecniche furono analizzate, ma l'approfondimento riguardò soprattutto la scelta del criterio di intervento e si concluse con la convinzione unanime che *l'unica* risposta esauriente al tema assegnato, con i vincoli imposti dalla legge per Venezia, poteva darla il ricorso a chiusure totali temporanee effettuate con barriere mobili su tutte e tre le bocche di porto. Negli oltre vent'anni trascorsi da allora mi sembra che questo criterio, pur con tutte le critiche, le riserve, le posizioni aprioristicamente e talvolta forzatamente contrarie, sia stato accettato da autorevoli organismi, quali il Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici e il Collegio di esperti internazionali nominato dalla Presidenza del Consiglio dei Ministri.

La scelta oggi appare più semplice. Non vorrei però essere frainteso. Semplice è la soluzione concettuale, non la sua realizzazione che comporta problemi di ingegneria non banali.

Se la progettazione esecutiva delle opere mobili non è ancora in atto, se si continuano a presentare alternative che non offrono risposte affidabili ed esaurienti, penso che non sia solo una questione di decisione politica. La realizzazione degli sbarramenti mobili su tutte e tre le bocche lagunari è un'opera impegnativa sia in fase di costruzione (basti pensare all'imponenza degli scavi e delle opere di fondazione; che, d'altra parte, sono un necessario supporto per qualunque struttura di chiusura dei canali di bocca), sia anche nelle fasi di manutenzione e di gestione.

L'evento alluvionale dovuto alla marea del novembre 1966 ha un carattere decisamente eccezionale: la sua probabilità di verificarsi è ritenuta intorno a 1 volta in 200 anni (ma con tutte le riserve sull'interpretazione della probabilità di verificarsi degli eventi a bassissima frequenza, specialmente in sistemi in continua evoluzione). Sono, tuttavia, convinto che poco dopo quell'inondazione disastrosa una larga maggioranza dei cittadini e degli amministratori locali avrebbe voluto interventi *drastici e definitivi* per la difesa dalle acque alte, pur pensando di appartenere a una generazione che non vedrà più un evento analogo.

Ma la domanda che nasce spontanea di fronte a grandi opere d'ingegneria destinate a proteggere territori e popolazioni da rischi temibili con una probabilità molto bassa è se il beneficio atteso valga i costi previsti. O se non sarebbe più conveniente accettare i danni e i

disagi, conoscendone *con sicurezza* il grado di rischio.

Ebbene, per Venezia questa scelta non è accettabile. Non solo per l'alta frequenza e il costo dell'impatto economico degli allagamenti [23.], ma anche perché nell'ecosistema veneziano la probabilità di verificarsi degli eventi eccezionali non può essere valutata in modo affidabile di fronte ad un'incombente ripresa di rialzo del medio mare. Basta che si alzi di pochi centimetri la retta interpolare della fig.5 per rendersi conto di come cambiano le frequenze delle acque alte: è sufficiente un incremento di 8 cm del medio mare per raddoppiare mediamente le frequenze degli stessi livelli massimi.

Credo che una ripresa consistente dell'*eustatismo* – una ripresa già tante volte annunciata e che, dato l'andamento delle variazioni climatiche [24.], è realmente oggi temibile – farà precipitare le decisioni. Per questo, sarebbe per lo meno conveniente che la progettazione esecutiva delle opere mobili alle bocche fosse già preparata e fosse adeguata ad uno scenario secolare largamente cautelativo.

D'altra parte, si deve riconoscere che molti interventi utili al miglioramento della situazione lagunare sono stati eseguiti in questi anni dal Magistrato alle Acque, con il concessionario Consorzio Venezia Nuova, e dalle Amministrazioni locali. Mi riferisco alle difese locali delle "insulae" [25.], al rinforzo e al ripascimento dei litorali, alla ristrutturazione dei moli foranei, al recupero morfologico dell'ecosistema lagunare e all'inversione dei processi di degrado ambientale con gli interventi di disinquinamento. Sono azioni che hanno riflessi molto importanti su Venezia, azioni rivolte ad obiettivi specifici di sicuro interesse, ma non direttamente alla sua salvaguardia dalle acque alte; anche se qualcuna di queste azioni, come il rinforzo dei litorali e la difesa delle insulae, può ritenersi una premessa indispensabile ad essa.

Personalmente, serbo una convinzione che ha una semplicità direi lapalissiana: penso che, prima di tutto, l'attenzione vada posta nel *non aggravare la situazione esistente*.

Come scrivevo nella memoria [12.] che ho qui in gran parte richiamato, due operazioni mi sembrano subito indispensabili: una attiva, *l'esclusione dalla laguna del traffico petrolifero* - è un provvedimento che è stato ampiamente esaminato con tutte le possibili integrazioni, ma al quale non si è ancora voluto o potuto dar corso -. Una seconda operazione è, invece, passiva: *impedire qualunque forma di estra-*

zione di liquidi o di gas dal sottosuolo in un raggio di almeno 50 km da Venezia. E' un'operazione di salvaguardia preventiva che dovrebbe trovare concordi tutte le correnti politiche.

Al contrario, quello che non mi sembra giustificato è, invece, pensare ad interventi diffusi, difficilmente reversibili, che, in vista di conseguire benefici sull'abbassamento dei livelli massimi di marea a Venezia - benefici che, comunque, appaiono modesti e poco affidabili - comportano ricadute pesanti su attività che sono state storicamente fondamentali per il prestigio della città e che continuano a rappresentare una sua autentica risorsa, come la *navigazione commerciale e quella turistica*. Modificare *sostanzialmente* l'assetto morfologico dei canali navigabili e, soprattutto, dei *canali di porto*, riducendo i loro fondali e le loro imboccature, è un'operazione che rischia di compromettere le capacità attuali e future della portualità veneziana. Negli anni del grande sviluppo commerciale dopo l'apertura del canale di Suez, gli errori della politica ferroviaria del nuovo Stato italiano - che, anziché aprire la via al Gottardo e alla valle del Reno, aveva preferito puntare sul Frejus, più vicino a Torino - tagliarono fuori Venezia dal grande traffico internazionale [26.]. Non vorrei che si ripetessero quegli errori. Molti provvedimenti si possono prendere per conservare e per migliorare il sistema lagunare rispettandone la complessità, ma una sola strada si può seguire per difendere Venezia dalle acque alte: il controllo della marea alle bocche di porto. Una decisione questa che richiede però la partecipazione della città e della sua popolazione.

Franco Venturi, nella sua storia de *L'Italia fuori d'Italia* (Storia d'Italia Einaudi, Vol. 3°, Fabbri Ed. 1985, pag1136), parla delle difficoltà ch'ebbe Bonaparte quando venne a trovarsi dinanzi a Venezia. "*Era un problema ben più complicato di quanti egli aveva dovuto risolvere fino allora. Genova, per un corso, non aveva misteri, ma Venezia era per lui, come per tanti suoi contemporanei, un mondo oscuro...*"

Non solo per i contemporanei di Bonaparte Venezia era un mondo oscuro e troppo complicato! Certamente lo è anche per me. Non per Augusto Ghetti, che si sentiva veneziano, e che, quel mondo, era in grado di capirlo. Il suo pensiero, che non pretendo di interpretare, anche se ad esso ho cercato qui di ispirarmi, sarebbe prezioso in questo delicato momento.

BIBLIOGRAFIA

1. Fra le tante iniziative in difesa di Venezia promosse dall'ISTITUTO VENE-
TO DI SCIENZE LETTERE ED ARTI si richiamano, per i riferimenti biblio-
grafici, gli atti seguenti:
 - Convegno su *Conservazione e difesa della città di Venezia*, 1960.
 - Simposio internazionale su *Influenze meteorologiche e oceanografiche sulle
variazioni del livello marino*, 1962.
 - Convegno su *Cultura per Venezia*, 1984.
 - Giornata di studio su *A vent'anni dall'evento di marea del Novembre
1966*, 1987.
 - Convegno su *Conterminazione lagunare. Storia, ingegneria, politica e dirit-
to nella laguna di Venezia*, 1992.
 - Rapporti e Studi della *Commissione di studio dei provvedimenti per la con-
servazione e difesa della Laguna e della città di Venezia*, Vol. I – XII,
pubbl. nel periodo 1961 – 1996.
 - Convegno su *Venezia: città a rischio*, XVII Giornata dell'Ambiente,
con l'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 4 giugno 1999. Atti
dei Convegni Lincei, Roma, 2000.
 - *La ricerca scientifica per Venezia*, Il Progetto Sistema Lagunare Venezia-
no, Venezia, 2000
2. CENTRO PREVISIONI E SEGNALAZIONI MAREE della Città di Venezia –
UFFICIO IDROGRAFICO MAREOGRAFICO di Venezia – ISTITUTO PER LO
STUDIO DELLA DINAMICA DELLE GRANDI MASSE, CNR Venezia: *Previsio-
ni delle altezze di marea per il bacino di San Marco...*, Bollettino 2002,
pag. 12.
3. A. ADAMI: *Analisi statistica di un lungo periodo di maree sizigiali contempo-
ranee all'interno e all'esterno della laguna di Venezia*, Riv. Ital. di Geofisica,
XXII, 5/6, 1974, pagg. 3, 7.
4. P. CANESTRELLI, A. RUSCONI, A. TOMASIN: *Aggiornamenti delle statistiche
sui livelli di marea registrati alla Punta della Salute: suggerimenti per il loro
uso in sede di previsione*, Laguna, fiumi, lidi: cinque secoli di gestione delle
acque nelle Venezia, Atti del Convegno indetto dal Magistrato alle
Acque, Venezia, 10 – 12 giugno 1983, pag. 342.
5. L'elenco che segue, pur necessariamente incompleto, mette in evidenza
la progressione dei modelli matematici di simulazione del comporta-
mento idrodinamico della laguna di Venezia: A. GHETTI, L. D'ALPAOS,
R. DAZZI: *Il comportamento della Laguna di Venezia indagato con il metodo
statico*, Istituto di Idraulica dell'Università di Padova, 1970.
G. PEZZOLI: *Alcuni problemi sulla propagazione delle maree*, Giornale del
Genio Civile, 9-10, 1970.

C. DATEI: *Sulla propagazione della marea in una laguna schematica secondo l'impostazione bidimensionale*, Ist. Veneto di S.L.A., Comm. Studio per la Difesa di Venezia, Rapporti e Studi, 1972, V. [1.].

G. DI SILVIO, L. D'ALPAOS: *Validità e limiti di un modello matematico unidimensionale nella propagazione di onde lunghe in campi di moto con caratteri parzialmente bidimensionali*, Atti XII Convegno di Idraulica e Costruzioni idrauliche, Milano, 1972.

GOLDMANN, R. RABAGLIATI, P. SGUAZZERO: *Characteristics of the tidal wave in the Lagoon of Venice*, IBM Tech. Rep., CRV 009/513-3539, 1975.

G. PEZZOLI: *Sul calcolo delle foci lagunari*, Atti Acc. Scienze di Torino, vol. 111, 1976-77.

G. UMGIESSER, J. SUDERMANN, E. RUNCA: *A semi-implicit finite element model for the lagoon of Venice*, Rapporto Tecnico, 1988.

L. D'ALPAOS: *Evoluzione morfologica della laguna di Venezia dal tempo del Denaix ad oggi e sue conseguenze sul regime idrodinamico*, Ist. Veneto di S.L.A., Atti del Convegno di Studio su *Conterminazione lagunare...*, 1992, cfr. [1.].

CONSORZIO VENEZIA NUOVA:

Modello matematico idrodinamico unidimensionale della laguna di Venezia, Convenzione n. 6393 con Technital e L. D'alpaos, 1985.

Modello matematico idrodinamico bidimensionale alle differenze finite della laguna veneta, Convenzione n. 5479 con Danish Hydraulic Institute, 1987-1988.

Modello matematico idrodinamico bidimensionale agli elementi finiti, 1988.

Modelli idrodinamici di dettaglio delle bocche di porto, 1986 - 1989.

Modelli aerodinamici delle tre bocche, Convenzioni n. 6393 e 6479 con Istituto di Idraulica Univ. di Padova e Soc. Protecno, 1985 - 1988.

Per una sintetica esposizione di questi modelli e dei loro risultati si veda la pubblicazione del Consorzio Venezia Nuova: *REA, Progetto preliminare di massima delle opere alle bocche*, Vol. 2, Parte I, 1989.

Una documentata analisi sull'affidabilità dei modelli matematici si trova in:

DATEI: *Esame comparato delle caratteristiche dei modelli matematici della laguna di Venezia*, Ist. Veneto di S.L.A., Atti del Convegno di Studio su *Conterminazione lagunare...*, 1992, op. cit. [1.].

Una sintesi esauriente dell'attività sperimentale svolta con modelli fisici delle bocche lagunari si trova in:

A. ADAMI: *I modelli impiegati per lo studio delle opere alle bocche*, Atti del convegno "Venezia: città a rischio", Accademia dei Lincei e Istituto Veneto di S.L.A. Roma, giugno 1999.

6. Sul fenomeno dell'eustatismo a Venezia si vedano, ad esempio:

- A. RUSCONI, M. FERLA, M. FILIPPI; *Tidal Observations in the Venice Lagoon – The Variations in Sea Level observed in the last 120 Years*, Convegno Int.: Sea Level Changes and their Consequences for Hydrology and Water Management, Noordwijkerhout, Netherlands, aprile 1993.
- L. CARBOGNIN, G. TARONI: *Eustatismo a Venezia e Trieste nell'ultimo secolo*, Atti Istituto Veneto di S.L.A., Tomo CLIV, 1996, pag. 281-298.
7. Sul fenomeno della subsidenza del territorio veneziano si vedano, ad esempio:
- G. GAMBOLATI, R. A. FREEZE: *Mathematical Simulation of the Subsidence of Venice. 1 Theory*, Water Resources Research, Vol. IX, n. 3, 1973.
- G. GAMBOLATI, P. GATTO, R. A. FREEZE: *Mathematical simulation of the subsidence of Venice. 2 Results*, Water Resources Research, Vol. X, n.3, 1974, pag. 563-577.
- G. GAMBOLATI, P. GATTO, R. A. FREEZE: *Predictive simulation of the subsidence of Venice*, Science, 183, 1974, pag. 1023-1024.
- P. GATTO, L. CARBOGNIN: *The Lagoon of Venice; natural environmental trend and man-induced modification*, Hydrol. Sci.Bull., Vol. 26, 1981, pag.379-391.
- L. CARBOGNIN, G. GAMBOLATI, F. MARABINI, G. TARONI, P. TEATINI, L. TOSI: *Analisi del processo di subsidenza nell'area veneziana e sua simulazione con un modello tridimensionale non lineare*, in “La ricerca scientifica per Venezia” [1.], Vol. II, Tomo II, Venezia, 2000, pag.1017-1048.
8. L. BALESTRI, G. GATTO, G. MAGNONI, G. MOZZI, R. SANTANGELO, G. ZAMBON: *Altimetria del territorio veneziano nell'ultimo secolo da livellazioni di precisione*, in “La ricerca scientifica per Venezia” [1.], Vol. II, Tomo II, Venezia, 2000, pag. 1051-1082.
9. Sull'influenza a Venezia dei cambiamenti climatici si vedano le seguenti relazioni presentate al Convegno “Venezia: città a rischio”, Atti dei Convegni Lincei, cfr [1.], Roma, 2000:
- C. CLINI: *Venezia 2050: scenari climatici, vulnerabilità e strategie di risposta nel protocollo di Kyoto*, pag. 59-72.
- R. FRASSETTO: *Rischi climatologici e impegni scientifici dell'I.S.D.G.M. a Venezia: nuove sfide di ricerca*, pag. 87-100.
10. E. MARCHI: *I problemi di Venezia e della sua laguna*, Atti Accademia Ligure di Scienze e Lettere, Vol. XLIII, 1986, pag. 87-117.
11. G. SEMINARA: *Sviluppo sostenibile ed evoluzione dei sistemi idrici naturali*, in “Giornata mondiale dell'acqua – L'uso dell'acqua per lo sviluppo”, Accademia dei Lincei, Roma, marzo 2002.
12. E. MARCHI: *Protection of Venice and of the other Inhabited Areas in the Lagoon from High Water*, Symposium “Venice and Florence: a complex dialogue with water”, Firenze, 1987, pag. 13-26.

13. A. RUSCONI, M. FERLA, M. FILIPPI: *Tidal Observations in the Venice Lagoon* -...Op. cit. in [6.].
Per i dati storici, dal 1875, si veda il rif. [14.].
14. C. AVANZI, V. FOSSATO, P. GATTO, R. RABAGLIATI, P. ROSA SALVA, A. ZITELLI: *Ripristino, conservazione ed uso dell'ecosistema lagunare veneziano*, Pubbl. del Comune di Venezia (senza data; intorno al 1980).
15. A. RINALDO: *Equilibrio Fisico e Idrogeologico della Laguna*, in "Venezia Sostenibile", I. Musu ed., Il Mulino, Bologna, 1998, pag. 101-146.
16. W. DORIGO: *Una legge contro Venezia. Natura storia interessi sulla questione della città e della laguna*, Officine Edizioni, Roma 1973.
17. C. DATEI: *Note sull'articolo di Georg Umgiesser "Valutazione degli effetti degli interventi morbidi e diffusi sulla riduzione delle punte di marea a Venezia, Chioggia e Burano"*, Atti dell'Istituto Veneto di S.L.A., Tomo CLVII, 1999, pag. 287-297.
18. M. P. O'BRIEN: *Equilibrium Flow Areas of Inlets of Sandy Coasts*, J. of the Waterways and Harbour Division, ASCE, vol. 95, No. WW1, Proc. Paper 6405, 1969.
19. J. T. JARRETT: *Tidal Prism-Inlet Area Relationships*, G.I.T.I. Report 3, U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Fort Belvoir, Virginia, 1976.
20. E. MARCHI: *Sulla stabilità delle bocche lagunari a marea*, Atti Accademia dei Lincei, Serie IX, Vol. I, Fasc. 2, 1990, pag. 137-150.
21. R. DAZZI, G. ROSSI, A. RUSCONI, A. TOMASIN: *Meteorologia e laguna: l'ammonimento delle più recenti bufere per l'efficacia degli interventi di difesa*, Rapporti e Studi dell'Istituto Veneto di S.L.A., Vol. X, Venezia, 1987.
22. C. DATEI: *La laguna e il bacino scolante: aspetti idraulici*, Convegno su "Venezia: città a rischio", Atti dei Convegni Lincei, cfr. [1.], Roma, 2000, pag. 31-46.
23. R. CELLERINO: *Impatto economico delle acque alte*, Convegno su "Venezia: città a rischio", Atti dei Convegni Lincei, cfr. [1.], Roma, 2000, pag. 81-86.
24. Si vedano in particolare le pubblicazioni:
INTERNATIONAL PANEL ON CLIMATE CHANGE, 1995: *The Science of Climate Change*, Cambridge University Press, 1995.
D. SCHNEIDER: *The Rising Seas*, Scientific American, 3, 1997, pag. 112-118.
INTERNATIONAL PANEL ON CLIMATE CHANGE, 2001: *The Scientific Basis*, Cambridge University Press, 2001.
25. M. FOLIN: *Difesa dalle acque alte. Rialzare Venezia, impatto architettonico e ambientale*, Quaderni trimestrali del Consorzio Venezia Nuova, n. 1, 2001, pag. 5-25.
26. I. INSOLERA: *L'urbanistica*, Documenti della Storia d'Italia Einaudi, Fabbrì Ed., pag.450-453.

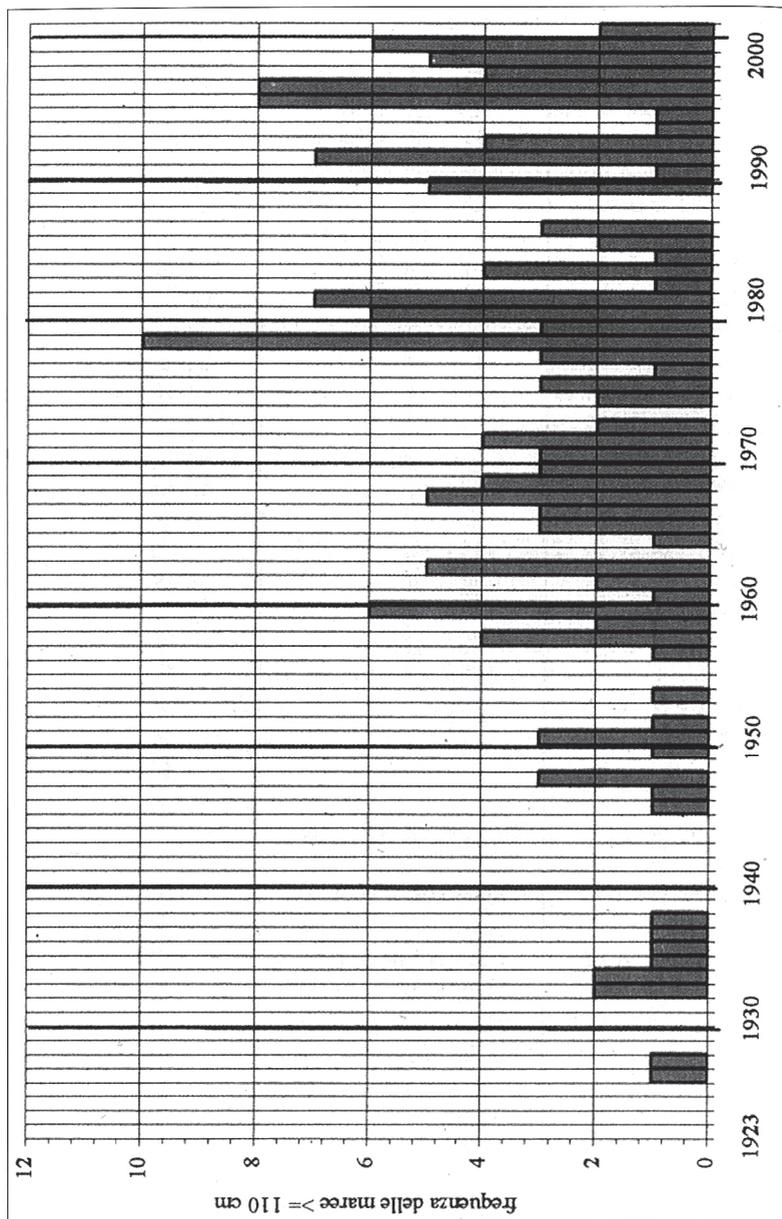


Fig. 1 - Frequenze di superamento del livello di 110 cm dal 1923 al 31 ottobre 2001 a Punta della Salute.

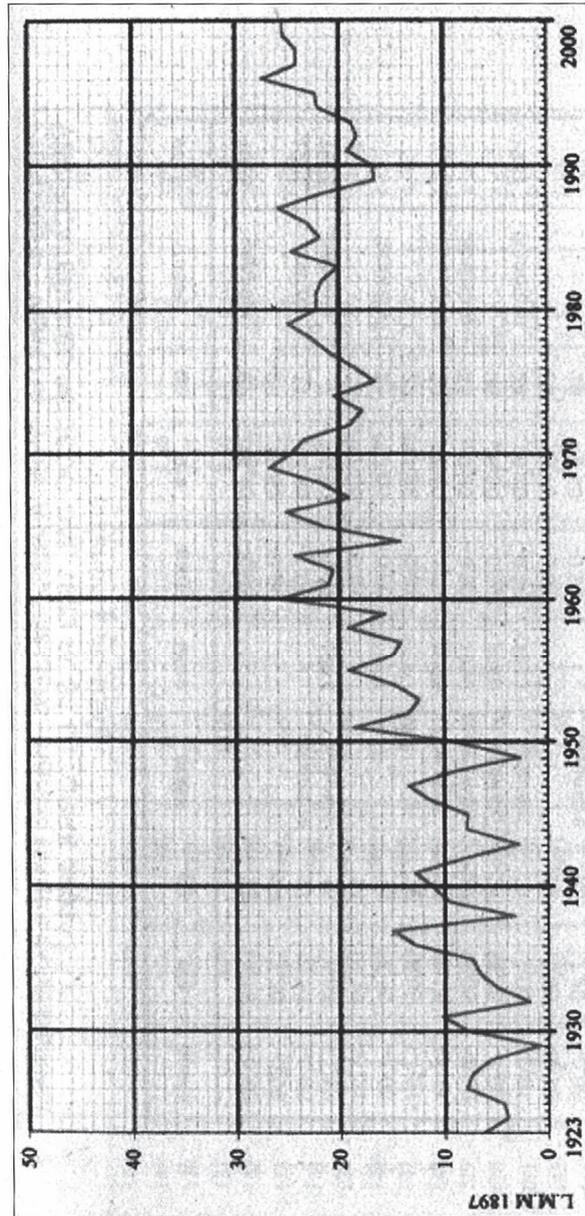


Fig. 2 - Andamento della media dei valori massimi e minimi annui di marea a Punta della Salute dal 1923 al 2000 [2.].

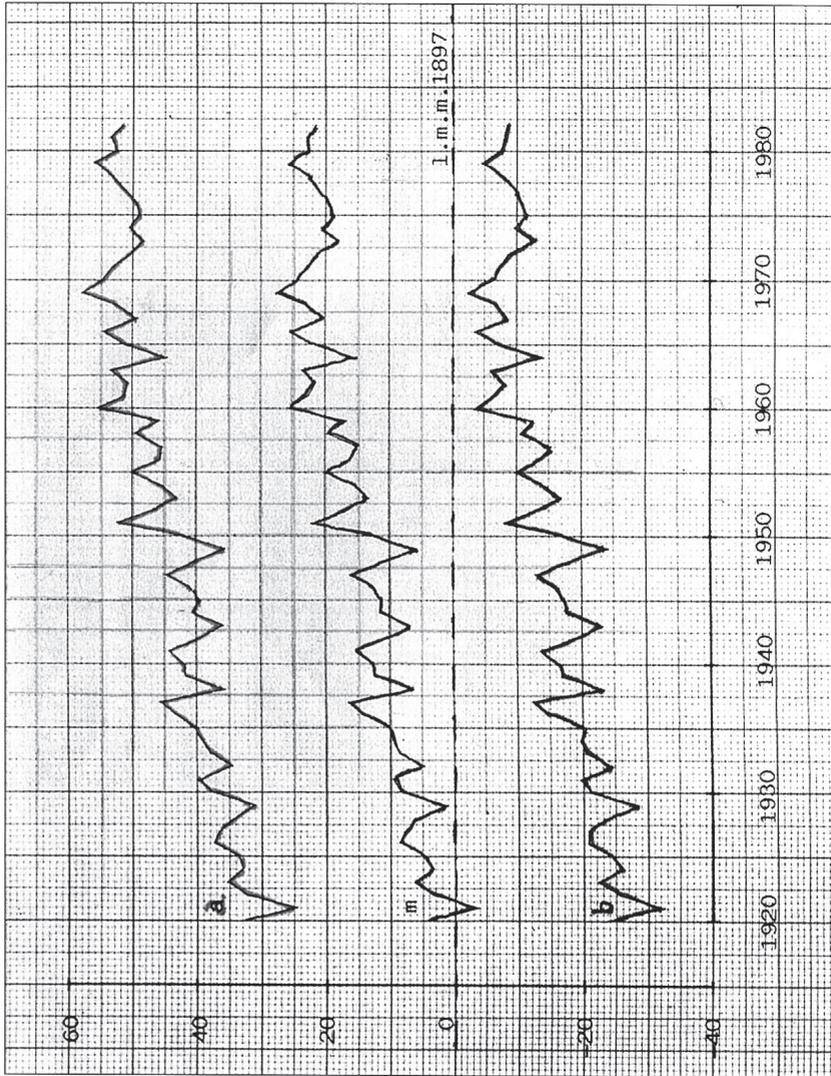


Fig. 3 - Andamento dei livelli medi annui delle alte maree (a), delle basse maree (b), e del livello medio del mare (m) dal 1920 al 1982 a Punta della Salute [4.].

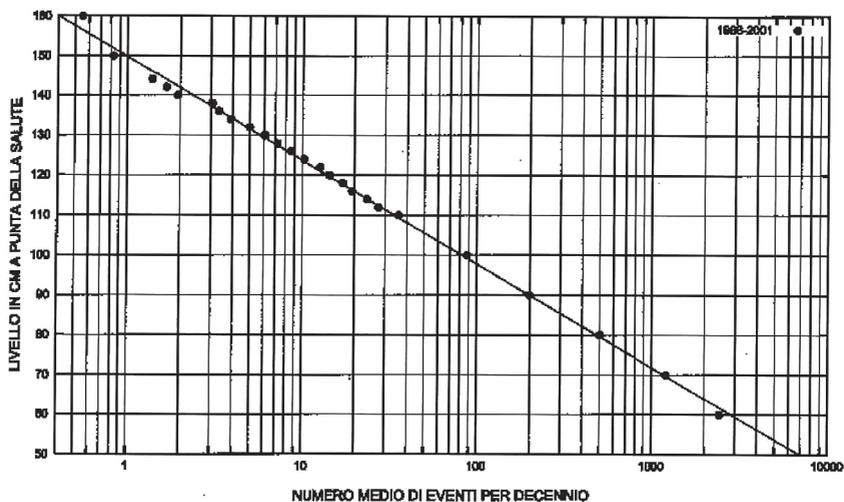


Fig. 4 - Frequenza media, nel periodo 1966-2001, di raggiungimento o superamento di diversi livelli massimi di marea.

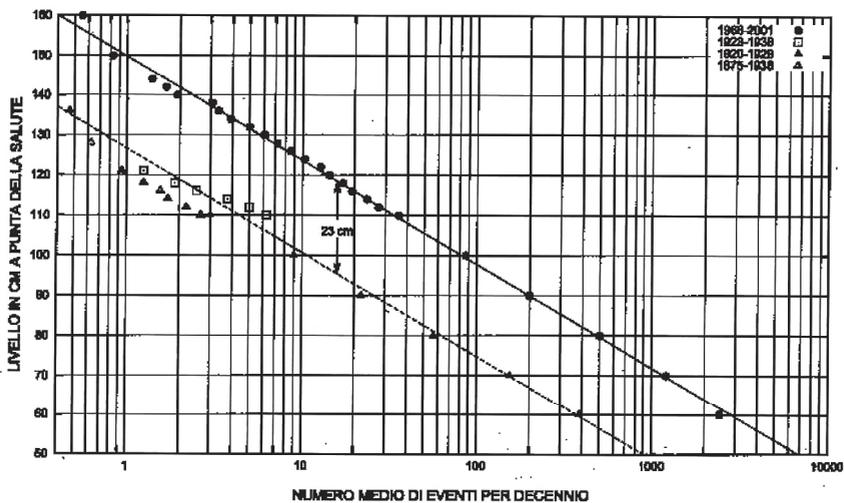


Fig. 5 - La retta tratteggiata è parallela alla interpolare del grafico di fig.4, abbassata di 23 cm. Sono indicati, inoltre, i punti rappresentativi delle frequenze medie di superamento dei diversi livelli di marea nei periodi indicati nella didascalia.

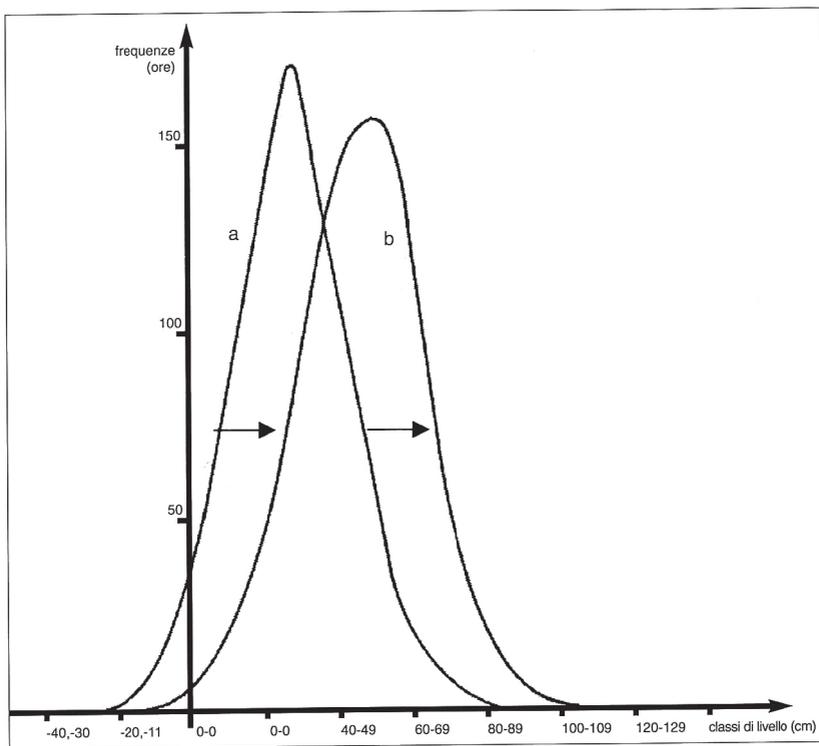


Fig. 6 - Distribuzione delle durate medie di intervalli prefissati dei livelli di marea nei periodi 1920-29 curva (a), e 1970-77 curva (b). Cfr. [14].

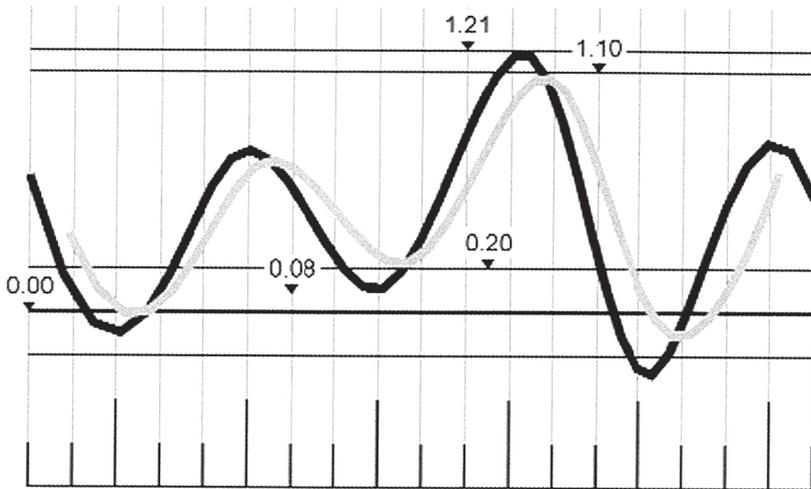


Fig. 7 - Esempio di riduzione dissipativa di una curva di marea in mare (in nero) ad una curva di marea in laguna (in grigio) con limitazione al livello massimo di 110 cm.

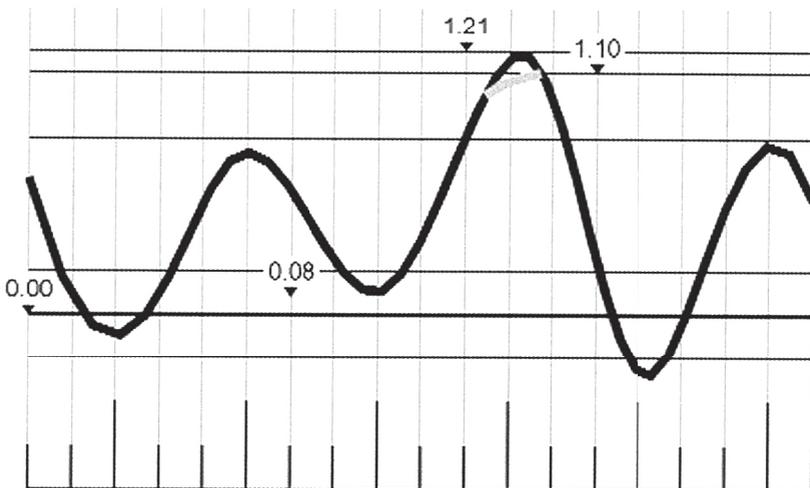


Fig. 8 - Esempio di troncamento (in grigio) al livello massimo di 110 cm del colmo dell'onda di marea della figura precedente.

Indice

Enrico Marchi: Uomo, Scienziato e Maestro	5
Elenco delle memorie scelte	15
Elenco delle pubblicazioni	17
Sul moto uniforme nelle condotte in pressione	27
Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente	41
Le onde di regime a lungo periodo (onde di piena)	59
Un criterio per la verifica alla filtrazione delle arginature in terra	71
L'attenuazione delle onde periodiche non di regime (Parti I e II)	83
Ricerca sperimentale sugli sfioratori a calice (in coll. con A.Rubatta)	129
Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide (Nota I)	141
Sul moto uniforme turbolento delle correnti liquide (Nota II)	151
Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti. Parte I: Sezioni circolare e rettangolare larghissima	163
Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi e aperti. Parte II: Sezioni di forma qualunque	179
Contributo allo studio del risalto ondulato	203
Open-channel Flow near the Critical Depth	217
Resistance to Flow in Fixed-bed Channels with the Influence of Cross-sectional Shape and Free Surface	223
Il calcolo del rigurgito provocato dalle pile dei ponti. Deflusso con transizione attraverso lo stato critico	235
Sul moto di correnti miste con bolle in tubi orizzontali	243
La propagazione delle onde di piena	251
Correnti veloci in curve a 90° molto strette	263
Sulla stabilità delle bocche lagunari a marea	283
The nappe profile of a free overfall	299
On the free overfall	311
Il rigurgito dovuto alle pile di ponte di forma circolare	327
La difesa di Venezia dalle acque alte	339

