

Capitolo 1

INTRODUZIONE ALLA MECCANICA DEL TRASPORTO DEI SEDIMENTI

1.1 Considerazioni introduttive

Il fondo e le sponde dei corsi d'acqua sono tipicamente erodibili, cioè consistono di ammassi di sedimenti, privi o parzialmente dotati di coesione. L'azione della corrente fluida può condurre al distacco delle particelle ed al loro *trasporto idrodinamico*. La capacità di descrivere la meccanica del trasporto solido costituisce un ingrediente fondamentale per lo studio delle correnti fluviali.

L'*origine* della maggior parte dei sedimenti è la *decomposizione delle rocce* dovuta ad agenti chimici (come l'atmosfera), agenti meccanici (ghiaccio che si forma nelle fessure delle rocce), agenti di natura organica (crescita di radici nelle fessure). Particelle di sedimenti possono poi originare dalla *precipitazione di minerali* contenuti nelle acque naturali.

La *produzione di sedimenti* in un bacino è quindi un processo naturale la cui intensità dipende dalle caratteristiche delle rocce, dal clima e dalla vegetazione. Tale processo può tuttavia essere modificato dagli effetti dell'antropizzazione, quali attività agricole, minerarie, costruzioni, opere di sistemazione fluviale, etc.

La *velocità di produzione dei sedimenti* può esprimersi in tonnellate/(km² · anno) o mm/anno e varia considerevolmente nei diversi bacini, come mostra la tab. 1.1, assumendo valori tipici compresi fra alcuni micron/anno ed alcuni mm/anno.

Il materiale eroso viaggia tipicamente dalla sua *sorgente al pozzo*, costituito dagli abissi oceanici, sotto l'azione di varie forze che svolgono ruoli diversi nelle diverse fasi del processo.

Corso d'acqua	Area bacino (10^6 km ²)	Vel. prod. sed. (mm/anno)
Rio delle Amazzoni (foce)	7	0.09
Mississippi (foce)	3.9	0.055
Congo (foce)	3.7	0.015
Nilo (delta)	2.9	0.015
Volga (foce)	1.5	0.01
Missouri (foce)	1.4	0.1
Gange (delta)	1.0	1.
Danubio (foce)	0.82	0.06
Hwang Ho (foce)	0.77	1.75
Reno (delta)	0.36	0.001
Po (delta)	0.07	0.15
Tevere (foce)	0.016	0.27
Waipapa (kanakahala)	0.0016	5

Tabella 1.1: La velocità di produzione di sedimenti di alcuni importanti bacini.

Nella parte alta dei bacini il moto dei sedimenti è dominato dagli effetti della gravità e delle collisioni intergranulari. Esso si manifesta nella forma dei cosiddetti *debris flows*, miscugli di materiale grossolano e matrice fangosa mobilitati dall'azione di piogge intense. Per tali moti le azioni idrodinamiche svolgono un ruolo meno rilevante.

Solo una parte modesta (10%-20%) del materiale eroso nella parte alta dei bacini raggiunge il corso d'acqua ed è quindi trasportata verso valle. La gran parte dei sedimenti viene depositata in uno stadio intermedio per effetto della ridotta capacità di trasporto delle acque superficiali. I sedimenti si accumulano tipicamente ai piedi dei versanti nella forma dei cosiddetti *coni di deiezione* e si distribuiscono nelle valli alluvionali.

I processi di erosione e deposito continuano lungo la *rete fluviale* dando luogo alla sua evoluzione altimetrica e planimetrica. In tale fase il meccanismo di trasporto dominante è *idrodinamico*. All'analisi di tale meccanismo sono dedicati i paragrafi che seguono.

1.2 Proprietà dei sedimenti

1.2.1 Proprietà delle singole particelle

Forma delle particelle

La forma delle particelle è conseguenza in parte del processo di formazione (cristallizzazione del magma, degradazione delle rocce, etc.), in parte del processo di abrasione.

Fra i numerosi parametri proposti per caratterizzare la forma di sedimenti è utile ricordare il *fattore di forma* di Corey (1949) definito come rapporto c/\sqrt{ab} , essendo a, b, c le lunghezze degli assi maggiore, intermedio e minore di un ellissoide con cui la particella viene approssimata. Valori tipici di tale fattore si aggirano intorno a 0.7.

Un secondo parametro, spesso utilizzato per descrivere l'effetto della forma delle particelle sulla velocità di sedimentazione è la *sfericità* ψ , rapporto fra l'area di una sfera di ugual volume e l'area della superficie della particella. Valori tipici di ψ sono riportati in tab. 1.2.

Forma	ψ
Sfera	1
Cubo	0.8806
Tetraedro	0.670
Ottaedro	0.846

Tabella 1.2: Valori del parametro di sfericità ψ per alcune forme caratteristiche.

Dimensione delle particelle

Poiché la forma delle particelle è irregolare le loro dimensioni possono essere definite solo convenzionalmente.

Diametri compresi fra 1/16 e 16 mm vengono misurati per *setacciatura*: il diametro è definito come lunghezza del lato della maglia quadrata di un setaccio attraverso cui le particelle 'passano appena'.

Diametri minori di 1/16 mm si misurano facendo sedimentare le particelle sotto condizioni controllate, in particolare lontano da pareti, e misurando la *velocità di sedimentazione* raggiunta asintoticamente dalle particelle stesse.

Il loro diametro è allora definito come diametro di sfere di ugual peso specifico che sedimentano nello stesso fluido e nelle stesse condizioni con uguale velocità.

Diametri maggiori di 16 mm vengono misurati per immersione della singola particella in acqua. Il *diametro nominale* delle particelle è quello di una sfera che spostata per immersione un uguale volume d'acqua.

Nel caso di grossi massi il diametro è definito approssimando il corpo con un ellissoide e misurando la *lunghezza dell'asse intermedio*.

In tab. 1.3 è riportata la classificazione classica di Wentworth (1922).

Composizione minerale e peso specifico

Il peso specifico delle particelle dipende strettamente dalla loro composizione minerale, cioè dal tipo di roccia madre da cui derivano.

Per il 90%, le rocce in natura sono costituite da *silicati*, per lo più nella forma di *feldspati e quarzi*, che rappresentano i minerali più diffusi nelle rocce ignee, sia intrusive (*graniti*) che diffusive (*basalti*). Essi sono inoltre presenti in alcune rocce sedimentarie come le *arenarie*.

Altri minerali sono meno abbondanti nella crosta terrestre. In particolare *carbonati*, come la *calcite* e la *dolomite*, sono costituenti fondamentali delle rocce sedimentarie quali i *calcari* e le *dolomie*. I calcari non sono rocce resistenti, esse degradano facilmente nel limo: dunque sedimenti calcarei si trovano difficilmente lontano dalla loro sorgente.

La gran parte dei minerali ha *densità relative* che si aggirano intorno a 2.6-2.9. Pochi minerali, quali quelli contenenti *magnetite*, sono molto più pesanti (vedi tab. 1.4).

1.2.2 Proprietà degli ammassi

Distribuzione granulometrica

I sedimenti naturali contengono tipicamente un ampio spettro di dimensioni caratteristiche, sicché la descrizione dei miscugli va data in termini statistici e l'uso di una scala lineare per i diametri dei granuli non è appropriata.

Sia dunque d il diametro dei granuli ed introduciamo la *scala sedimentologica* nella forma:

$$d = d_r 2^{-\phi} \quad (1.2.1a)$$

	Tipo	Diametro D (mm)	$\phi = \lg_2(1/D)$
Massi	Molto grossi	4096-2048	-11, -12
	Grossi	2048-1024	-10, -11
	Medi	1024-512	-9, -10
	Piccoli	512-256	-8, -9
Ciottoli	Grossi	256-128	-7, -8
	Piccoli	128-64	-6, -7
Ghiaia	Molto grossa	64-32	-5, -6
	Grossa	32-16	-4, -5
	Media	16-8	-3, -4
	Fine	8-4	-2, -3
	Molto fine	4-2	-1, -2
Sabbia	Molto grossa	2-1	0, -1
	Grossa	1-0.5	1, 0
	Media	0.5-0.25	2, 1
	Fine	0.125-0.0625	3, 2
	Molto fine	0.0625-0.03125	4, 3
Limo	Grossolano	1/16-1/32	5, 4
	Medio	1/32-1/64	6, 5
	Fine	1/64-1/128	7, 6
	Molto fine	1/128-1/256	8, 7
Argilla	Grossolana	1/256-1/512	9, 8
	Media	1/512-1/1024	10, 9
	Fine	1/1024-1/2048	11, 10
	Molto fine	1/2048-1/4096	12, 11

Tabella 1.3: Classificazione delle dimensioni di particelle di sedimenti secondo Wentworth (1922).

Materiale	Densità relativa
Granito	2.6-2.7
Calcere	2.6-2.8
Basalto	2.7-2.9
Plastica	1.0-1.5
Carbone	1.3-1.5
Gusci di noce	1.3-1.4

Tabella 1.4: Densità relativa di alcuni materiali.

con d_r diametro di riferimento convenzionalmente posto pari ad 1 mm. Dunque ϕ è una variabile adimensionale definita nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ che misura il logaritmo (in base 2) del rapporto fra diametro di riferimento d_r e diametro d del granulo. Si noti che valori positivi di ϕ corrispondono a diametri inferiori ad 1 mm, mentre valori negativi implicano diametri maggiori di 1 mm, dunque d cresce al decrescere di ϕ .

La definizione (1.2.1a) è inutilmente complicata. È opportuno ridefinire ϕ nella forma

$$\psi = -\phi \quad (1.2.1b)$$

Definiamo ora una *distribuzione cumulata* dei diametri $F(\psi)$ come la funzione tale che una frazione $F(\psi)$ in peso del campione è più fine di $\psi(D)$. Segue, per definizione

$$F(+\infty) = 1 \quad F(-\infty) = 0 \quad (1.2.2)$$

Analogamente si definisce una *funzione di distribuzione* $f(\psi)$ nella forma:

$$f(\psi) = \frac{dF}{d\psi} \quad (1.2.3)$$

che deve soddisfare al vincolo integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\psi) d\psi = 1 \quad (1.2.4)$$

È quindi possibile definire alcuni utili parametri atti a caratterizzare il miscuglio.

i) *Diametro medio* d_{50} .

È il diametro tale che il 50% del campione di miscuglio (in peso) è più fine di d_{50} .

In generale questa definizione è estendibile ad un diametro d_x qualsiasi (con x compreso fra 0 e 100). Dunque

$$F(d_x) = \frac{x}{100} \quad (1.2.5)$$

ii) *Media geometrica d_g e deviazione standard σ_g .*

Tali quantità si definiscono a partire dai momenti primo e secondo della funzione di distribuzione $f(\psi)$. Si ha:

$$\bar{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi f(\psi) d\psi ; \quad \sigma_{\psi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi - \bar{\psi})^2 f(\psi) d\psi \quad (1.2.6 a, b)$$

donde

$$d_g = d_r 2^{+\bar{\psi}} , \quad \sigma_g = 2^{\sigma_{\psi}} \quad (1.2.7 a, b)$$

Il valore di σ_g misura l'assortimento granulometrico.

Un andamento tipico della funzione $F(\psi)$ è riportato in fig. 1.1. Essa rappresenta il caso di corsi d'acqua sabbiosi in cui la distribuzione è molto prossima ad una distribuzione uniforme. Nel caso di fig. 1.1 i diametri si addensano tutti intorno al valore di 0.3-0.5 mm, mentre sono assenti praticamente ghiaia e limo.

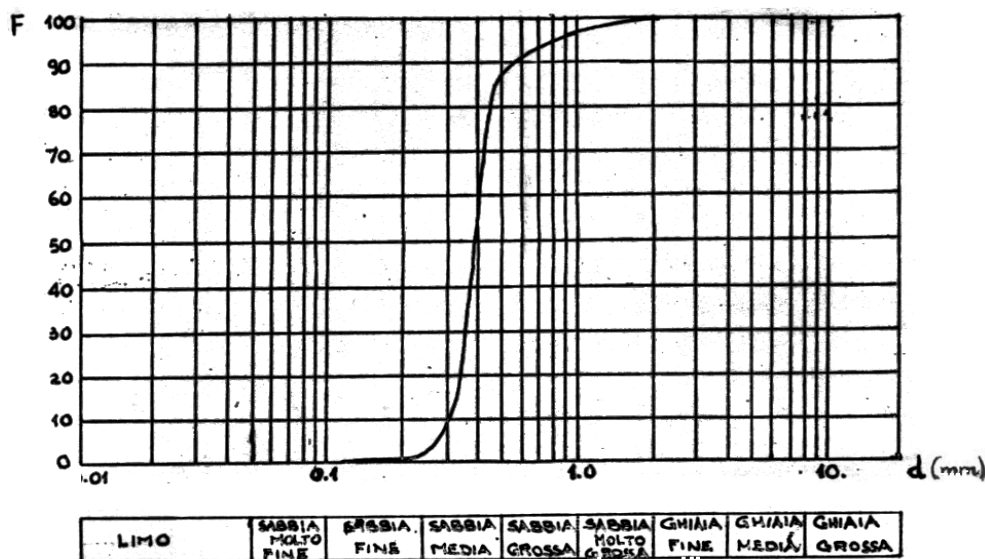


Figura 1.1: Distribuzione cumulata tipica di alvei in sabbia.

La forma ad *S* della distribuzione in fig. 1.1 suggerisce che la funzione di distribuzione $f(\psi)$ possa approssimarsi con una Gaussiana. Poniamo dunque:

$$f(\psi) = \frac{1}{\sigma_{\psi} \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(\psi - \bar{\psi})^2}{2\sigma_{\psi}^2} \quad (1.2.8)$$

donde

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\psi - \bar{\psi}}{\sqrt{2}\sigma_\psi} \right) \right] \quad (1.2.9)$$

con $\operatorname{erf}(z)$ funzione errore definita nella forma:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp -\zeta^2 d\zeta \quad (1.2.10)$$

Essendo $\operatorname{erf}(0) = 0$ segue

$$F(\bar{\psi}) = \frac{1}{2} \quad (1.2.11)$$

cioè il valor medio $\bar{\psi}$ di una distribuzione gaussiana in ψ corrisponde al diametro d_{50} .

Inoltre si trova:

$$\begin{aligned} F(\bar{\psi} + \sigma_\psi) &= \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 0.84 \\ F(\bar{\psi} - \sigma_\psi) &= \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = 0.16 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\psi_{50} = \frac{1}{2} [(\bar{\psi} + \sigma_\psi) + (\bar{\psi} - \sigma_\psi)] = \frac{1}{2}(\psi_{84} + \psi_{16})$$

o

$$\lg_2 \frac{d_{50}}{d_r} = \lg_2 \left(\frac{d_{84}}{d_r} \cdot \frac{d_{16}}{d_r} \right)^{1/2} \Rightarrow d_{50} = d_g = \sqrt{d_{84}d_{16}} \quad (1.2.12)$$

Analogamente:

$$\sigma_\psi = \frac{1}{2} [(\bar{\psi} + \sigma_\psi) - (\bar{\psi} - \sigma_\psi)] = \frac{1}{2}[\psi_{84} - \psi_{16}]$$

donde

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{d_{84}}{d_{16}}} \quad (1.2.13)$$

Si noti che le relazioni (1.2.12) ed (1.2.13) sono valide unicamente se la funzione di distribuzione è lognormale nei diametri. Altrimenti le espressioni di d_g e σ_g vanno ricavate direttamente a partire dalle (1.2.6) e (1.2.7).

In fig. 1.2 è riportato un andamento tipico della distribuzione granulometrica di un alveo in granulometria grossolana. Si noti tuttavia, la presenza di una consistente frazione relativamente fine. Si noti inoltre come tipicamente negli alvei in ghiaia lo strato superficiale (detto *pavimento*) tende ad essere

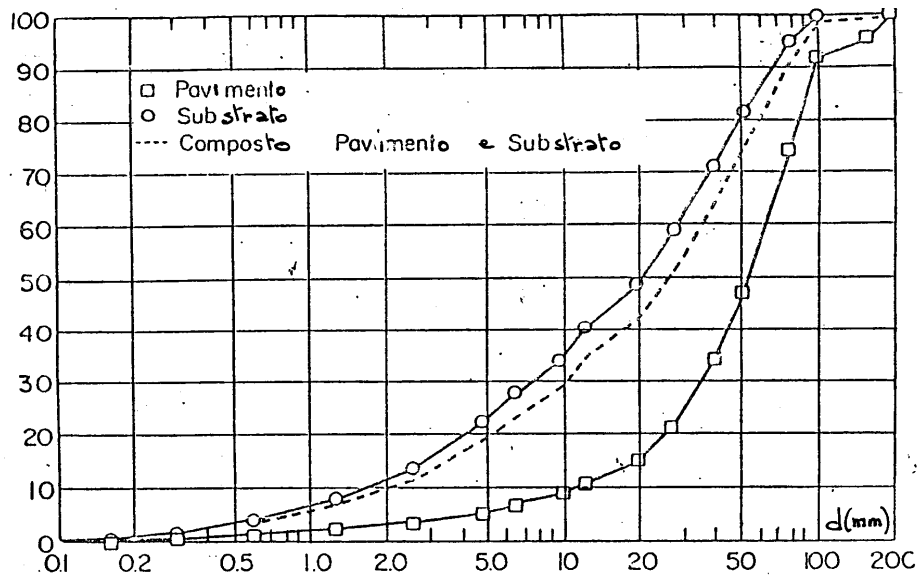


Figura 1.2: Distribuzione tipica di alvei in granulometria grossolana (Oak Creek, Oregon).



Figura 1.3: Istogramma che fornisce la frequenza con cui diversi valori del d_{50} relativo allo strato superficiale si osservano in 78 corsi d'acqua nella regione di Alberta, Canada (Parker & Peterson, 1980).

più grossolano del substrato. Inoltre la distribuzione granulometrica risul-

ta tipicamente concava verso l'alto, salvo al più nella regione dei diametri maggiori. Ciò contrasta con le distribuzioni relative agli alvei in sabbia, che presentano un punto di flesso per valori di d intorno a d_{50} .

Si noti infine che una interessante caratteristica delle distribuzioni granulometriche degli alvei in sabbia come degli alvei in granulometria grossolana è l'assenza di un apprezzabile contenuto di sedimenti di diametro compreso nell'intervallo 1-10 mm (vedi fig. 1.3).

Conseguenza di tale 'gap granulometrico' è il frequente passaggio brusco da alveo con $d_{50} > 10$ mm ad alveo con $d_{50} < 1$ mm. A tale passaggio è spesso associata la transizione da una morfologia dell'alveo di tipo intrecciato ad una morfologia di tipo meandriforme.

Porosità degli ammassi

La *porosità* λ_p di un ammasso di sedimenti si definisce come rapporto fra volume occupato dai pori dell'ammasso e volume totale di quest'ultimo.

Nel caso di *sedimenti artificiali* costituiti da particelle di forma regolare la porosità dipende dall'assetto delle particelle. In particolare nel caso di particelle sferiche appilate con assetto tetraedrico (fig. 1.4a), detto anche *a palle di cannone* il valore della porosità è minimo e pari a 0.26. Nel caso di assetto *cubico* (fig. 1.4b) il valore di λ_p cresce molto ed è pari a 0.48.

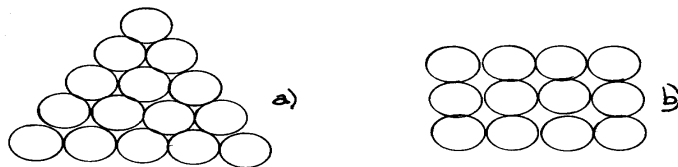


Figura 1.4: a) Assetto tetraedrico (a palle di cannone); b) assetto cubico.

Nel caso di materiali incoerenti *naturali* il valore di λ_p varia in dipendenza della distribuzione granulometrica e della forma delle particelle. Nel caso di sabbie omogenee λ_p si aggira intorno a 0.3-0.4. Nel caso di ghiaie poco omogenee, i pori sono spesso occupati da materiale più fine e la porosità si riduce fino a valori intorno a 0.2.

Una relazione empirica che associa λ_p al diametro d_{50} caratteristico dell'ammasso è stata proposta da Komura (1963):

$$\lambda_p = \quad \quad \quad (d_{50} \text{ in cm}) \quad (1.2.14)$$

I dati sui quali è fondata la (1.2.14) si riferiscono a sedimenti caratterizzati da valori di d_{50} variabili da 4×10^{-4} mm ad 80 mm. Si noti che i valori

più bassi corrispondono ad argille, cioè a materiali dotati di coesione, i quali sono soggetti al fenomeno della *consolidazione*, per il quale la porosità di argilla appena depositata va riducendosi col tempo (processo che può avere la durata di anni o decenni), a causa dell'effetto di compressione esercitato dal peso proprio dell'ammasso sui granuli e sul fluido interstiziale, che viene lentamente espulso dai pori.

La trattazione della meccanica del processo di consolidazione è di competenza della Geomeccanica, ma presenta importanti riflessi su diversi aspetti dell'Ingegneria Fluviale. In particolare la progettazione degli argini fluviali deve tener conto di tale fenomeno, così come i depositi di sedimenti nei serbatoi artificiali danno luogo ad una riduzione del volume idrico disponibile che dipende in misura non trascurabile dal loro processo di consolidazione.

1.3 Richiami sulle azioni idrodinamiche esercitate su particelle in moto

Il processo fondamentale che interviene nel trasporto dei sedimenti da parte di una corrente idrica è il moto della singola particella in un fluido viscoso incompressibile. È quindi opportuno richiamarne le caratteristiche principali.

È opportuno qui distinguere fra particelle sufficientemente piccole perché la loro dinamica sia dominata dagli effetti viscosi e particelle per le quali l'inerzia svolge un ruolo significativo.

1.3.1 Moto di particelle a bassi numeri di Reynolds

Consideriamo anzitutto il moto di una singola particella in un fluido indefinitamente esteso.

Traslazione uniforme di particelle rigide in fluidi in quiete

Assumiamo che l'ambiente sia occupato da un fluido viscoso incompressibile, in quiete o soggetto ad uniforme traslazione, siano cioè assenti velocità di rotazione o deformazione nel moto del fluido lontano delle particelle.

Poniamo che il numero di Reynolds R del moto relativo della particella sia sufficientemente piccolo, sia $Ud/\nu \leq 0.5$, con U velocità relativa costante della particella, d la sua dimensione lineare caratteristica e ν la viscosità cinematica del fluido. In tal caso la teoria di Stokes ci assicura che il moto relativo del fluido è assialsimmetrico, gli effetti viscosi dominano nelle

immediate vicinanze del fluido e la *resistenza* F_D incontrata dalla particella è puramente *d'attrito*, è assente cioè la componente *di forma* associata a dissimmetria nella distribuzione di pressione agente sulla superficie della particella.

Nel caso in cui la particella è di forma *sferica* il classico risultato di Stokes (1851) fornisce:

$$F_D = 3\pi d\mu U \quad (1.3.1)$$

con μ viscosità dinamica del fluido. In forma adimensionale, definito il *coefficiente di resistenza* C_D , si trova facilmente

$$C_D = \frac{F_D}{(1/2\rho U^2)\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{24}{R} \quad (1.3.2)$$

Malgrado l'importanza fondamentale di tali risultati, la loro rilevanza pratica è limitata dal vincolo $R \leq 0.5$.

Una estensione della (1.3.2) è stata ottenute da Kaplun e Lagerstrom (1957) e, indipendentemente, da Proudman e Pearson (1957) che hanno ottenuto teoricamente la seguente espressione di C_D

$$C_D = \frac{24}{R} \left(1 + \frac{3}{16}R \right) \quad (1.3.3)$$

valida per valori di R fino ad 1.

Nel caso di particelle di forma non sferica la dinamica può essere assai più complessa di una semplice traslazione.

Nel caso di ellissoidi di rotazione che traslano nella direzione dell'asse di rotazione, sono disponibili risultati teorici da cui si evincono alcuni limiti interessanti (Oberbeek, 1876).

Per un *disco* che trasla in direzione ortogonale al suo piano si ha

$$F_D = \kappa(3\pi\mu d\mathcal{U}) \quad (1.3.4)$$

con \mathcal{U} e d velocità e diametro del disco rispettivamente

$$\kappa = 1.798 \quad (1.3.5)$$

Nel caso di ellissoidi di rotazione *molto allungati* che traslano nella direzione dell'asse maggiore, vige ancora la (1.3.4) con d lunghezza dell'asse minore e

$$\kappa = \frac{2a}{3d} \left[\ln \frac{a}{d} + 0.19315 \right]^{-1} \quad (1.3.6)$$

essendo a la lunghezza dell'asse maggiore.

Rotazione di una sfera in un fluido in quiete

La semplice rotazione, con velocità costante, di una sfera a bassi numeri di Reynolds R non dà luogo ad alcuna forza resistente bensì ad una semplice *coppia resistente* \mathbf{M} allineata col vettore velocità di rotazione $\boldsymbol{\Omega}$. Si trova

$$\mathbf{M} = -\pi\mu d^3 \boldsymbol{\Omega} \quad (1.3.7)$$

o

$$C_M = \frac{M}{\rho \frac{\Omega^2 d^2}{4} \frac{\pi d^3}{4}} = \frac{32}{R_\Omega}; \quad R_\Omega = \frac{\Omega d^2}{4\nu} \ll 1 \quad (1.3.8)$$

Simultanea traslazione e rotazione di una sfera in un fluido in quiete

Rubinov e Keller (1961) hanno mostrato che, in presenza di simultanea traslazione e rotazione (uniformi e a bassi numeri di Reynolds), una sfera è soggetta alla resistenza di Stokes, alla coppia resistente (1.3.7) e ad un'ulteriore *azione portante*. Se \mathbf{e}_1 è il versore della direzione di traslazione ed \mathbf{e}_2 è il versore della direzione di $\boldsymbol{\Omega}$, la portanza L agisce nella direzione \mathbf{e}_3 del versore di un asse che forma con \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 una terna destrorsa e si trova

$$\mathbf{L} = -\frac{\pi\mu U \Omega d^3}{8\nu} \mathbf{e}_3 \quad (1.3.9)$$

o

$$C_L = \frac{L}{(\rho U^2/2)(\pi d^2/4)} = \frac{R_\Omega}{R} \quad (1.3.10)$$

Dunque, l'effetto combinato della traslazione e rotazione di una particella può dar luogo a deviazioni della traiettoria rispetto alla direzione del moto di traslazione (particle-drift).

Portanza indotta da una non uniforme traslazione del fluido che investe la particella

Lo studio di tale problema (Saffman, 1956) fu stimolato fra l'altro dall'osservazione (Segré e Silberberg, 1962) secondo la quale i globuli rossi nei vasi sanguigni si mantengono a distanza dalla parete dei vasi.

Poniamo dunque che la velocità del fluido a distanza dalla particella abbia la struttura (fig. 1.5):

$$\mathbf{v} = (U + kz) \mathbf{e}_2 \quad (1.3.11)$$

e la particella ruoti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_1$ essendo z la coordinata dell'asse \mathbf{e}_1 .

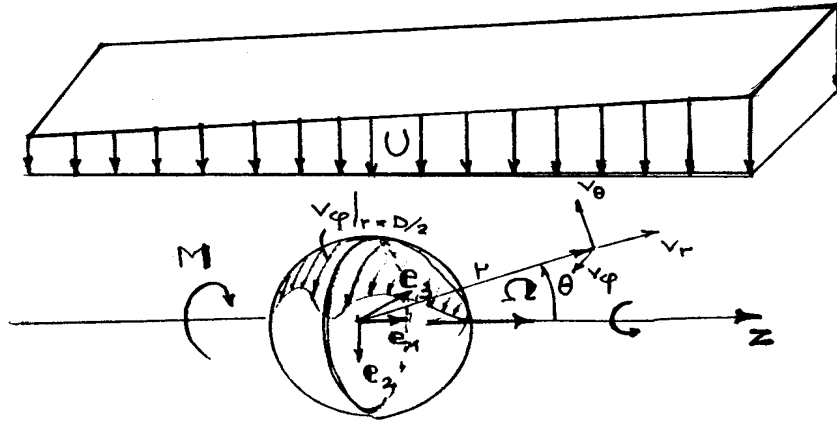


Figura 1.5: Schema di particella che trasla e ruota in un fluido soggetto a traslazione non uniforme.

Saffman (1956) ha mostrato che sotto tali condizioni si sviluppa un ulteriore contributo alla portanza che assume la forma:

$$C_L = \frac{81.2 R_\kappa}{\pi R} \quad (1.3.12)$$

essendo R_κ un numero di Reynolds definito come segue:

$$R_\kappa = \frac{\kappa d^2}{4\nu} \ll 1 \quad (1.3.13)$$

soggetto all'ulteriore condizione

$$R_\kappa^{1/2} \gg R \quad (1.3.14)$$

Un secondo effetto che emerge dalla trattazione di Saffman (1956) è la presenza di un termine correttivo della coppia resistente. Si trova:

$$C_M = 16 \frac{R_\kappa}{R_\Omega^2} \quad (1.3.15)$$

Tali risultati mostrano che l'effetto della non uniformità della traslazione modifica di un ordine di grandezza la portanza cui è soggetta la particella mentre la coppia resistente subisce una correzione paragonabile all'effetto della rotazione.

Effetti della non uniformità spaziale e temporale del moto del fluido

Consideriamo infine il caso generale di una sfera che trasla con velocità $\mathbf{V}(t)$ di scala U e ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}(t)$ in un fluido in moto con velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ variabile nello spazio e nel tempo (fig. 1.6).

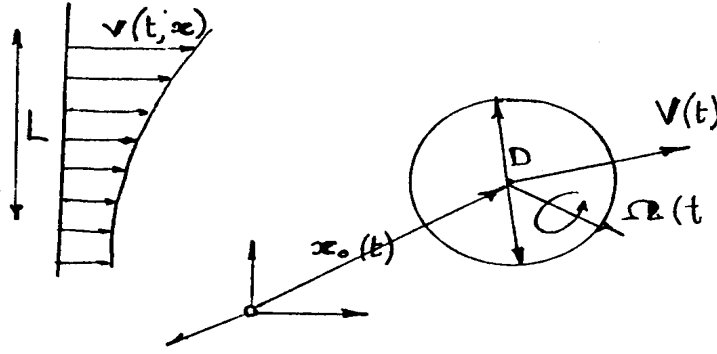


Figura 1.6: Schema di una sfera in moto in un campo di moto variabile nello spazio e nel tempo.

Assumiamo che un tipico valore del numero di Reynolds del moto relativo sia piccolo e la scala L delle variazioni spaziali di \mathbf{v} sia grande rispetto al diametro della particella in modo tale che risulta:

$$R \equiv \frac{Ud}{\nu} \ll 1 \quad R_\kappa = \frac{Ud^2}{L\nu} \ll 1 \quad (1.3.16a, b)$$

La (1.3.16b) implica che la scala temporale viscosa d^2/ν è assai minore della scala temporale convettiva.

Sotto queste condizioni Maxey e Riley (1983) hanno ricavato un'espressione generale per la spinta esercitata dal fluido sulla particella. Essa può porsi nella forma:

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{F}^{AF} + \mathbf{F}^{AM} + \mathbf{F}^V + \mathbf{F}^{st} \quad (1.3.17)$$

con le seguenti definizioni

\mathbf{F}^{AF} = spinta associata all'accelerazione della massa fluida

$$= \left(\rho \frac{\pi d^3}{6} \right) \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \Big|_{\mathbf{x}_o} = \left(\rho \frac{\pi d^3}{6} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{x}_o} \quad (1.3.18)$$

\mathbf{F}^{AM} = spinta associata alla *massa aggiunta*, contributo che origina dal fatto che, per poter accelerare, la particella deve far lavoro sul fluido per farne variare l'energia cinetica. Il fluido agisce cioè in modo da accrescere la massa effettiva del corpo.

$$= -\frac{1}{2} \left(\rho \pi \frac{d^3}{6} \right) \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{V}(t) - \mathbf{v}_o) - \frac{d^2}{40} \frac{d}{dt} (\nabla^2 \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{x}_o(t)} \right] \quad (1.3.19)$$

essendo $\mathbf{v}_o = \mathbf{v}(\mathbf{x}_o, t)$ la velocità che il fluido avrebbe in corrispondenza del baricentro della particella $\mathbf{x}_o(t)$ in assenza della particella e d/dt la derivata materiale calcolata con la velocità della sfera:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \Big|_{\mathbf{x}_o(t)} \quad (1.3.20)$$

\mathbf{F}^V = resistenza di Stokes, modificata dall'effetto della non uniformità del moto del fluido (contributo evidenziato per la prima volta da Faxen, 1922).

$$\mathbf{F}^V = -3\pi d\mu \left[\mathbf{V}(t) - \mathbf{v}_o - \frac{d^2}{24} \nabla^2 \mathbf{v} |_{\mathbf{x}_o} \right] \quad (1.3.21)$$

\mathbf{F}^{st} = termine legato alla storia del moto della particella, evidenziato per la prima volta da Basset (1888) e qui corretto dagli effetti della non uniformità del moto del fluido

$$\mathbf{F}^{st} = -\frac{3}{2}\pi d^2\mu \int_0^t \frac{(d/d\tau)[\mathbf{V}(\tau) - \mathbf{v}_o(\tau) - (d^2/24)\nabla^2\mathbf{v}|_{\mathbf{x}_o}]}{[\pi\nu(t-\tau)]^{1/2}} d\tau \quad (1.3.22)$$

Si noti che l'espressione di Maxey e Riley (1983) non comprende il contributo di portanza (1.3.12) che risulta di almeno un ordine di grandezza inferiore alla resistenza di Stokes, come emerge da un confronto fra la (1.3.12) e la (1.3.2).

L'equazione del moto di una sfera in moto a bassi numeri di Reynolds in un fluido in moto non uniforme e non stazionario

In generale la dinamica della particella è retta dall'equazione:

$$\varrho_s \left(\frac{\pi d^3}{6} \right) \dot{\mathbf{V}} = (\varrho_s - \varrho) \left(\pi \frac{d^3}{6} \right) \mathbf{g} + \mathbf{F}_D \quad (1.3.23)$$

Tuttavia, come osservato da Maxey e Riley (1983) i termini \mathbf{F}^{AF} , \mathbf{F}^{AM} , \mathbf{F}^{st} e la correzione della resistenza di Stokes risultano trascurabili rispetto alla resistenza di Stokes salvo che in rapidi transitori. Si ha infatti:

$$\frac{|\mathbf{F}^{AF}|}{|\mathbf{F}^V|} \sim \frac{|\mathbf{F}^{AM}|}{|\mathbf{F}^V|} \sim \frac{|\mathbf{F}^{st}|}{|\mathbf{F}^V|} \sim \frac{\varrho\pi d^3/6 \frac{U}{L/U}}{3\pi d\mu U} \sim \frac{R}{18} \frac{d}{L} \quad (1.3.24)$$

sicché nella (1.3.23) \mathbf{F}_D può semplicemente porsi pari a \mathbf{F}_V .

1.3.2 Moto di particelle a moderati ed elevati numeri di Reynolds

La traslazione e rotazione non uniformi di una particella in un fluido quando il moto relativo è caratterizzato da alti Reynolds, costituisce un problema sostanzialmente irrisolto e di formidabile complessità.

Esaminiamone alcuni aspetti, su cui esistono risultati consolidati.

Traslazione uniforme di particelle rigide in fluidi in quiete

Com'è noto dalla Meccanica dei Fluidi (vedi fascicolo 'Moti viscosi incompressibili' della collana) la conseguenza principale della crescita del numero di Reynolds del moto relativo consiste nella tendenza del fluido a mantenere gli effetti viscosi confinati in uno strato, di spessore decrescente al crescere del numero di Reynolds, adiacente la parete e in una scia similmente sottile. L'intensa convezione impedisce infatti alla vorticità generata dalla parete di diffondere lontano da essa. Se la particella è tozza, come tipicamente avviene in natura, il problema è reso più complesso poiché com'è noto, lo strato limite subisce una rapida decelerazione e si distacca dalla parete dando luogo, per conseguenza, ad un forte ispessimento della scia e ad una marcata dissimmetria monte-valle del campo delle pressioni da cui origina una significativa *componente di forma* dell'azione idrodinamica esercitata sulla particella.

Tale componente dipende essenzialmente dalla forma del corpo e dal numero di Reynolds del moto relativo.

Nel caso di una sfera deviazioni dal comportamento alla Stokes si manifestano per $R \geq 0.5$ per effetto di una dissimmetria del campo di moto in prossimità della sfera. Per valori di R intorno a 24 si forma nella regione immediatamente a valle del corpo un anello vorticoso la cui intensità cresce al crescere del numero di Reynolds. Per valori di R intorno a 130 l'anello diventa instabile, oscilla ed emette vorticità all'interno della scia. A ciò corrisponde un regime in cui la dipendenza della resistenza dalla velocità del moto relativo è non più lineare ma non ancora quadratica. Quest'ultima dipendenza si raggiunge nell'intervallo $10^3 < R < 10^5$ in cui C_D mantiene un valore costante e pari a 0.4 circa. Si ha quindi una brusca caduta di C_D dovuta alla transizione turbolenta nella regione in cui lo strato limite è separato, che conduce ad un riattacco e quindi ad una ritardata separazione. Per $R \geq 7 \cdot 10^5$ la transizione si sposta lungo la porzione attaccata dello strato limite, rianticipando la separazione con conseguente crescita della resistenza di forma e quindi di C_D .

La fig. 1.7 mostra il classico andamento della funzione $C_D(R)$ per la sfera, il cilindro ed il disco ortogonale alla direzione del moto. Si noti come, in

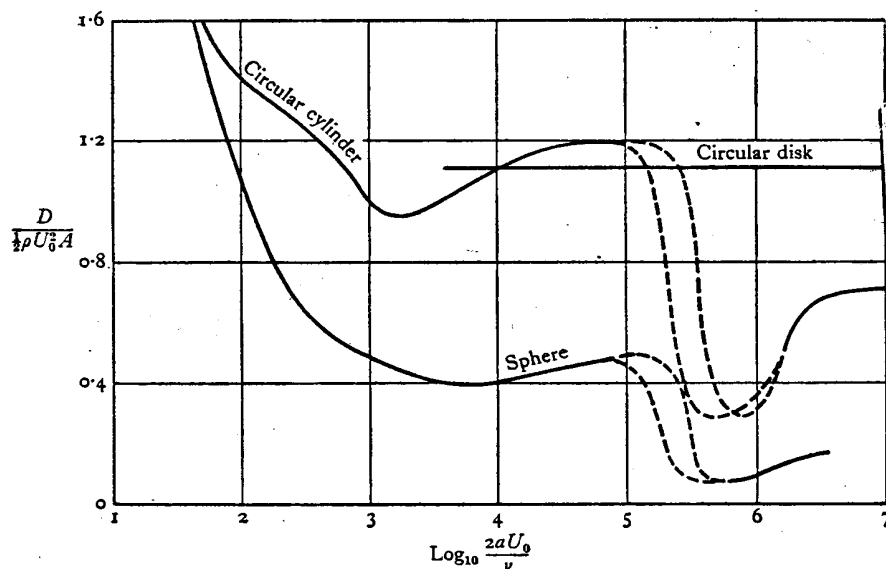


Figura 1.7: Andamento del coefficiente di resistenza per sfera, cilindro e disco.

quest'ultimo caso, C_D assume valori prossimi ad 1. La cosa non sorprende: se la pressione sulla faccia di monte assumesse il valore di Bernoulli ($p_a + \rho U^2/2$) uniformemente e la pressione sulla faccia di valle il valore della pressione ambiente p_a è facile mostrare che il valore di C_D risulterebbe esattamente pari ad 1.

Nel caso di particelle di forma diversa dalla sferica i risultati di Mc Nown e al. (1951) mostrano che, in generale, particelle che sedimentano con valori di R inferiori ad una soglia che si aggira intorno a 100-1000 in dipendenza dalla loro forma, assumono una configurazione di moto stabile con l'asse minore allineato con la direzione del moto.

Posto

$$F_D = \kappa(3\pi\mu\ell) \quad (1.3.25)$$

con ℓ diametro nominale della particella, i risultati di Mc Nown e al. (1951) mostrano che κ cresce in modo monotono con il numero di Reynolds R mentre la forma della particella risulta ben descrivibile attraverso il rapporto fra la lunghezza degli assi principali (fig. 1.8).

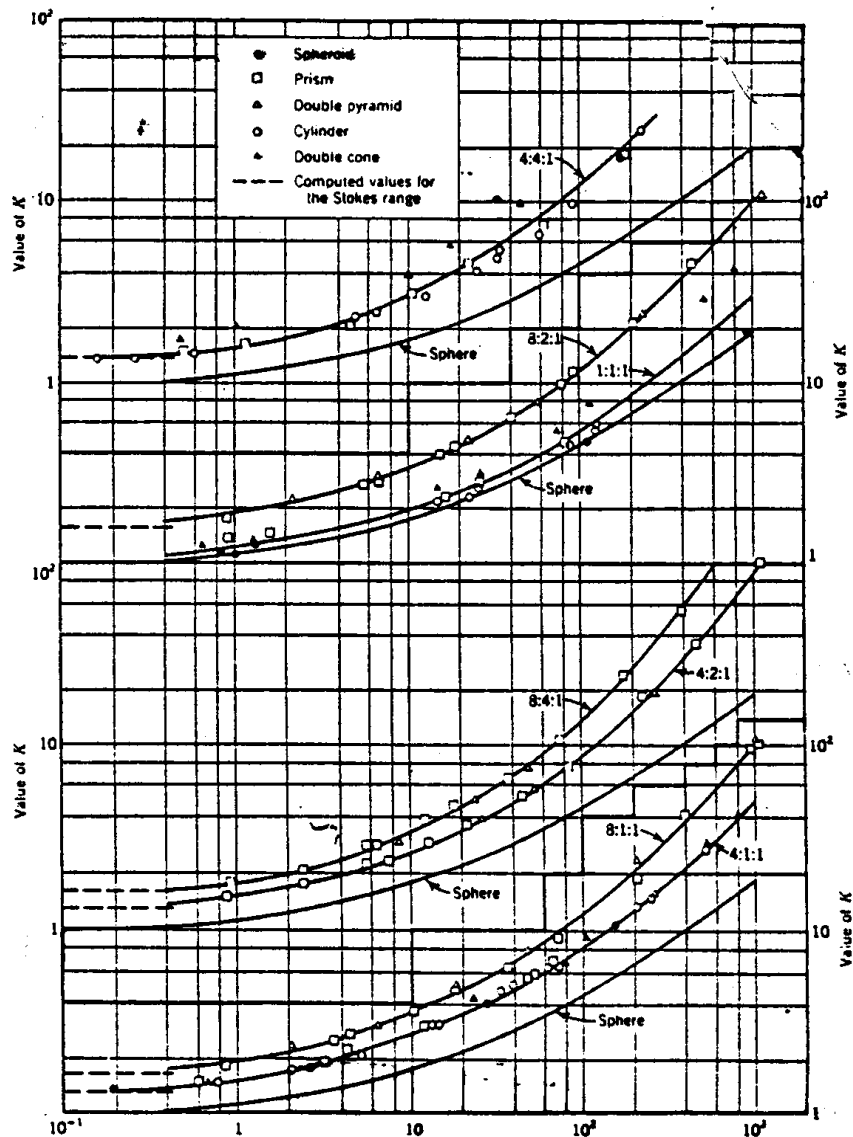


Figura 1.8: Risultati di Mc Nown e al. (1951) relativi alla resistenza al moto di traslazione di particelle di forma diversa (R costruito col diametro nominale della particella e κ definito dalla (1.3.25)).

Resistenza di massa aggiunta in presenza di accelerazione della particella e del fluido che la investe

L'effetto della massa aggiunta risulta agevolmente calcolabile nell'ambito dello schema di moto irrotazionale. Tale schema descrive bene la risposta del campo di moto a rapide variazioni di velocità del corpo poiché gli effetti

viscosi non riescono in tal caso a diffondere a distanza del corpo.

Consideriamo una sfera rigida di raggio d che trasla con velocità $V(t)\mathbf{e}_1$ in un fluido che, lontano dal corpo, trasla con velocità $U(t)\mathbf{e}_1$.

L'azione cui la sfera è soggetta è diretta secondo il versore \mathbf{e}_1 e comprende una spinta associata all'accelerazione del fluido ed una resistenza di massa aggiunta proporzionale all'accelerazione relativa della sfera. Detto \mathcal{V} il volume della sfera si trova:

$$F_D = \varrho\mathcal{V}\frac{dU}{dt} - c_a\varrho\mathcal{V}\frac{d(V-U)}{dt} \quad (1.3.26)$$

con c_a coefficiente di massa aggiunta pari ad $1/2$.

Risultato simile si ottiene nel caso di cilindri rigidi in cui c_a assume il valore 1.

L'effetto di disuniformità spaziale del moto irrotazionale del fluido che investe la sfera

È noto da tempo (Lord Kelvin, 1873) che un sfera immersa in un moto irrotazionale ideale stazionario è soggetto ad una forza (detta *horizontal buoyancy*) diretta come il gradiente di pressione (indipendentemente dalla direzione del moto del fluido) e pari al gradiente di pressione moltiplicato per $1.5\mathcal{V}$ essendo \mathcal{V} il volume della sfera.

Lavori successivi (si veda in particolare Auton, 1983) hanno mostrato che la spinta \mathbf{F} può porsi nella forma generale

$$\mathbf{F} = \varrho\mathcal{V} \left[(1 + c_a) \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \Big|_{\mathbf{x}_o(t)} - c_a \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right] \quad (1.3.27)$$

La portanza generata dalla presenza di vorticità nel moto ideale che investe una sfera

La presenza di vorticità nel fluido indisturbato, pur trattata nell'ambito dello schema ideale, rende il problema in generale assai più complesso.

Posto che la *vorticità sia debole* (cioè la variazione di velocità del moto indisturbato su una scala pari al diametro sia piccola rispetto alla velocità) e sia inoltre *lentamente variabile* la forma generale della forza esercitata su una sfera che accelera in un moto ideale rotazionale non stazionario è stata ricavata da Auton, Hunt e Proudhomme (1988) nella forma

$$\mathbf{F} = \varrho\mathcal{V} \left[(1 + c_a) \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \Big|_{\mathbf{x}_o(t)} - c_a \frac{d\mathbf{V}}{dt} - c_L(\mathbf{V} - \mathbf{v}_o) \times \boldsymbol{\omega} \right] \quad (1.3.28)$$

con ω vorticità costante del moto indisturbato e c_L coefficiente di portanza pari a 0.5.

Il confronto fra la (1.3.28) e la (1.3.27) mostra che l'effetto di una vorticità costante è quello di aggiungere alla spinta irrotazionale (1.3.27) che permane inalterata, una componente di portanza identica (Auton, 1957) a quella ottenuta per una sfera ferma immersa in un moto ideale debolmente rotazionale.

1.4 Sedimentazione di una particella isolata in un fluido in quiete

Anche in questo caso è opportuno distinguere fra il caso di particelle che sedimentano a bassi o moderati-alti numeri di Reynolds.

1.4.1 Sedimentazione a bassi R

Il caso della sfera

La sedimentazione di una sfera solida in un fluido indefinitamente esteso a partire da condizioni di quiete si realizza attraverso un transitorio a valle del quale la sfera raggiunge condizioni di equilibrio dinamico caratterizzate da velocità di sedimentazione costante W_s .

In tali condizioni si ha:

$$P - A = F_D \quad (1.4.1)$$

con P peso della particella, A spinta di Archimede, F_D resistenza di Stokes. Si ottiene quindi:

$$W_s = \frac{gd^2}{18\nu}(s - 1) \quad (1.4.2)$$

Dunque W_s cresce col quadrato del diametro. Si noti tuttavia che la validità della (1.4.2) è ristretta alla condizione:

$$\frac{W_s d}{\nu} = \frac{gd^3}{18\nu^2}(s - 1) < 0.5 \Rightarrow d < 0.085 \text{ mm} \quad (1.4.3)$$

sicché solo particelle più fini della sabbia fine soddisfano alla 1.4.2.

Effetto della forma delle particelle

La sedimentazione di particelle di forma diversa dalla sferica può avvenire attraverso una dinamica più complessa della semplice traslazione, ciò a causa di un'eventuale componente di portanza, agente sulla particella in direzione ortogonale al moto, che può dar luogo ad una deviazione della traiettoria dall'andamento rettilineo.

In altre parole la forza agente sulle particelle dipende ora dalla loro orientazione relativa alla gravità.

La situazione è fortemente più semplice nel caso di particelle dotate di simmetria (sfere, cubi, poliedri regolari, etc.) che rivelano l'importante proprietà di sedimentare con velocità indipendente dall'orientazione iniziale della particella, non mostrando alcuna tendenza a ruotare o ad assumere particolari posizioni relativamente alla direzione della velocità (Pettijohn e Christiansen, 1948).

Nel caso di particelle *isometriche*, caratterizzate cioè da spigoli di ugual lunghezza, gli autori precedenti hanno mostrato che W_s può essere espressa nella forma

$$W_s = k_s W_s^{st}$$

con W_s^{st} velocità di sedimentazione nel regime di Stokes di una sfera caratterizzata da diametro pari al diametro nominale della particella e k_s coefficiente dipendente dalla sfericità della particella che si scrive:

$$k_s = 0.843 \lg_{10} \frac{\psi}{0.065} \quad (1.4.4)$$

Effetto della presenza di pareti

I risultati precedenti si applicano al caso di particelle che sedimentano *molto lontano* da pareti.

La presenza di pareti verticali conduce ad una tendenza della particella ad allontanarsi dalla parete (Cox e Hsu, 1977) e a raggiungere l'eventuale piano di simmetria (Vasseur e Cox, 1977).

In generale, comunque, l'effetto delle pareti è *ritardante* sulla dinamica della particella, come evidenziato da Mc-Nown e al. (1948), che hanno ottenuto la seguente relazione:

$$W_{s\infty} = W_s \left[1 + \frac{9d}{4D} + \frac{9}{4} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] \quad (1.4.5)$$

valida per il caso di una sfera isolata di diametro d che sedimenta lungo l'asse di un cilindro di diametro D . Nella (1.4.5), si noti, $W_s \rightarrow W_{s\infty}$ per $d/D \rightarrow 0$.

1.4.2 Sedimentazione a moderati-alti R

Nel regime dei moderati-alti R gli effetti inerziali rendono insolubile il problema analitico che descrive il campo di moto sicché, come visto al punto 1.3, occorre in generale fare riferimento a risultati sperimentali.

Il caso della sfera

La fig. 1.9 fornisce l'andamento sperimentalmente rilevato della velocità di sedimentazione di sfere di quarzo in aria o acqua a varie temperature.

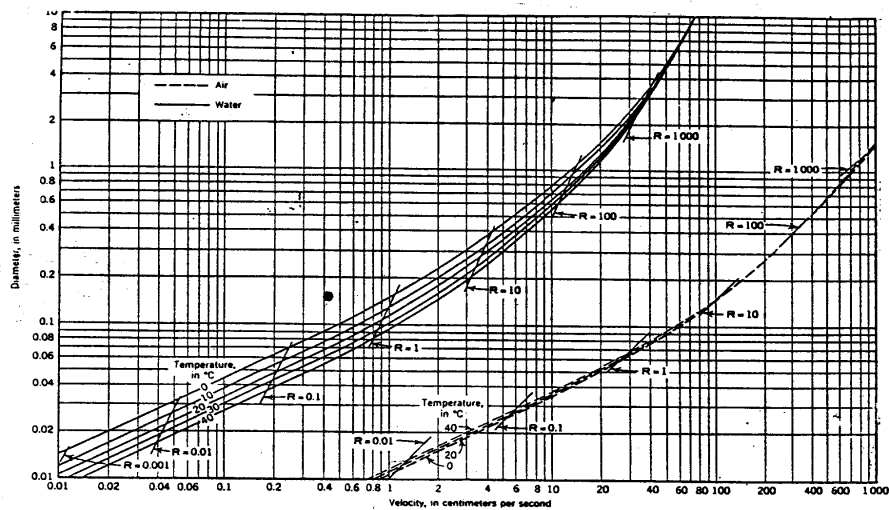


Figura 1.9: Velocità di sedimentazione di sfere di quarzo in aria o acqua a varie temperature in funzione del diametro (da Rouse, 1937).

Particelle non sferiche

La fig. 1.10 fornisce la velocità di sedimentazione di particelle di forma irregolare, caratterizzate da valori diversi del coefficiente di forma, in funzione del diametro del setaccio e al variare della temperatura.

Relazioni empiriche per W_s per particelle naturali sono state proposte in letteratura (si veda la letteratura citata da Dietrich, 1982).

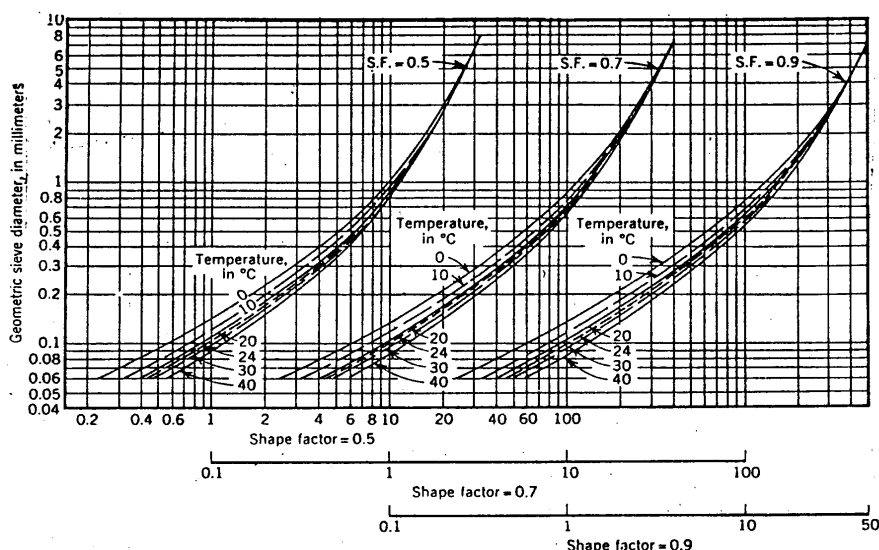


Figura 1.10: Velocità di sedimentazione di particelle irregolari caratterizzate da valori diversi del coefficiente di forma (Interagency Committee, 1957).

1.5 I diversi meccanismi di trasporto

Al fine di identificare i diversi meccanismi attraverso cui i sedimenti naturali vengono trasportati da una corrente liquida è opportuno far riferimento al più semplice degli esperimenti realizzabili a tal fine in laboratorio. Si consideri una corrente uniforme a superficie libera che sollecita un fondo granulare piano. Posto che il diametro delle particelle sia sufficientemente grande (d maggiore di qualche millimetro) e la larghezza del canale non troppo grande, si osserva sperimentalmente che il fondo inizialmente piano permane piano.

In tal caso, al crescere della tensione media che sollecita il fondo, è possibile osservare una sequenza di fenomeni riassumibili come segue.

$\tau_o < \tau_c$: il fondo granulare permane immobile

Posto che la tensione media τ_o non ecceda un valore critico τ_c , dipendente dalle caratteristiche della particella (diametro, densità relativa, forma) e del fluido (viscosità cinematica) oltreché dall'assetto geometrico delle particelle nel letto granulare, il fondo permane immobile (fig. 1.11).

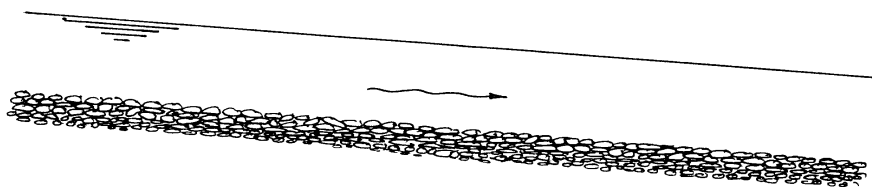


Figura 1.11: Corrente uniforme che sollecita un fondo granulare stabile.

$\tau_c < \tau_o < \tau_s$: **trasporto di fondo (bedload transport)**

Quando la tensione media τ_o eccede il valore critico τ_c ma si mantiene inferiore ad un secondo valore di soglia τ_s , si osserva che particelle del fondo singole o aggregati di particelle vengono mobilitate dal fluido, che le trasporta in prossimità del fondo per rotolamento, slittamento e saltellamento. Le particelle non sfuggono da uno strato adiacente il fondo, di spessore dell'ordine di $(2 \div 3)d$ donde la denominazione di *trasporto di fondo* (fig. 1.12).

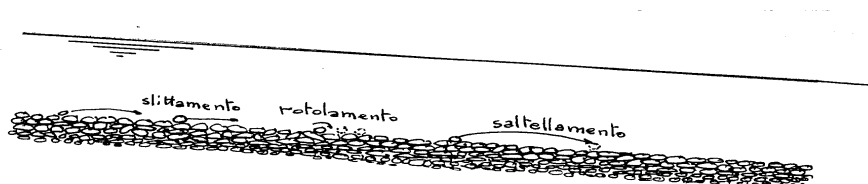


Figura 1.12: Schema che descrive il trasporto solido di fondo.

$\tau_o > \tau_s$: **trasporto in sospensione (transport in suspension)**

Per valori della tensione media superiori ad un secondo valore di soglia τ_s , dipendente ancora dalle caratteristiche dei sedimenti, particelle o aggregati di particelle giacenti sul fondo vengono catturate dalle strutture coerenti di parete che le proiettano nella regione esterna del moto. Esse vengono successivamente trasportate come scalari quasi-passivi, salvo per la tendenza a sedimentare per effetto del loro eccesso di peso (fig. 1.13).

Si parla di *trasporto in sospensione* quando τ_o non è troppo elevato, sicché la concentrazione di particelle mobilitate risulta piccola. In tal caso è trascurabile il ruolo che le interazioni idrodinamiche fra le particelle esercitano sulla dinamica del miscuglio.

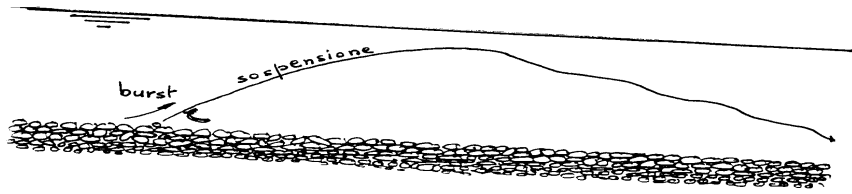


Figura 1.13: Schema che descrive il trasporto solido in sospensione.

Trasporto intenso (sheet flow)

Per valori molto grandi della tensione media al fondo o quando i sedimenti sono molto fini, condizioni che si verificano rispettivamente nelle correnti montane e nei tratti vallivi dei corsi d'acqua, lo strato di sedimenti mobilitati non si limita allo strato superficiale (fig. 1.14).

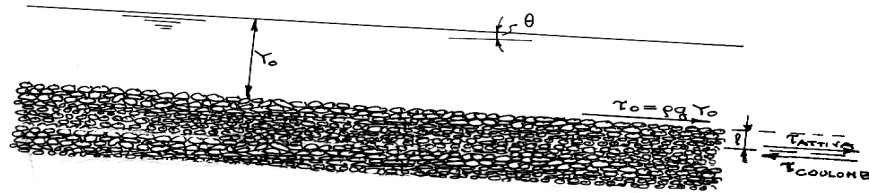


Figura 1.14: Schema che illustra la destabilizzazione dello strato superficiale nel caso di trasporto intenso (sheet flow).

La cosa si dimostra facilmente osservando che la tensione tangenziale media agente sul generico piano parallelo al fondo e interno all'ammasso è pari a $[\tau_0 + (\rho_s - \rho)c_M g l \sin \theta]$ essendo l lo spessore dello strato di ammasso sovrastante il piano considerato, θ l'angolo che il piano forma con un piano orizzontale e c_M la concentrazione volumetrica dell'ammasso ($\equiv (1 - p)$).

In condizioni di equilibrio limite sullo stesso piano agisce una azione resistente di Coulomb pari a $[(\rho_s - \rho)c_M g l \cos \theta] \tan \phi$ essendo ϕ l'angolo d'attrito del materiale.

L'equilibrio limite si realizza dunque quando si ha:

$$\frac{l}{d} = \frac{\tau_*}{c_M \cos \theta (\tan \phi - \tan \theta)} \quad (1.5.1)$$

con τ_* tensione adimensionale di Shields. Tale quantità, come apparirà nei paragrafi seguenti, svolge un ruolo cruciale nel trasporto solido e si definisce come segue:

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho)gd} \quad (1.5.2)$$

Se il fondo è pressoché orizzontale la (1.5.1) suggerisce che ℓ/d può risultare grande solo se τ_* è grande: è il caso degli alvei in granulometria molto fine. Negli alvei in granulometria grossolana la (1.5.1), riscritta nella forma

$$\frac{\ell}{Y_o} \rightarrow c_M(s-1) \left[\frac{\tan \phi}{\tan \theta} - 1 \right]^{-1} \quad (1.5.3)$$

con s densità relativa dei sedimenti, mostra che ℓ può assumere valori dell'ordine di Y_o se θ risulta *grande*: è il caso degli alvei montani.

Si noti che la destabilizzazione dello strato di spessore ℓ conduce alla generazione di un moto bifase caratterizzato da concentrazione media \bar{c} pari a

$$\bar{c} = \frac{c_M}{1 + (\ell/Y_o)} \frac{\ell}{Y_o} \quad (1.5.4)$$

La (1.5.4) presenta due limiti caratteristici:

i) per $\ell/Y_o \sim 0(d/Y_o) \ll 1$ segue:

$$\bar{c} \rightarrow 0 \left(c_M \frac{d}{Y_o} \right) \quad (1.5.5)$$

È questo il caso del trasporto solido in sospensione in cui si realizzano concentrazioni relativamente piccole (tipicamente $10^{-2} \div 10^{-4}$).

ii) per $\ell/Y_o \sim O(1)$ \bar{c} raggiunge valori dell'ordine di c_M : è il caso del trasporto solido intenso, detto anche *sheet flow*.

In quest'ultimo caso la dinamica del miscuglio bifase risulta assai complessa, essendo dominata dal ruolo delle interazioni idrodinamiche e delle collisioni intergranulari oltreché dall'effetto qui rilevante che la presenza della fase solida esercita sulla struttura della turbolenza nella fase liquida.

1.6 Incipiente trasporto di fondo

1.6.1 Definizione empirica delle condizioni critiche per sedimenti omogenei e fondo piano

Malgrado i primi contributi al problema della definizione di condizioni critiche per il trasporto di fondo in correnti turbolente risalga a Brahm (1753), il primo approccio sistematico al problema è dovuto a Shields (1936).

Shields (1936) era consapevole del carattere non stazionario e spazialmente non uniforme del processo di inizio del moto: definì quindi le condizioni critiche per l'incipiente trasporto di fondo in termini del valor medio della tensione che una corrente turbolenta uniforme esercita su un fondo granulare artificialmente spianato. Il valore critico di tale tensione fu definito come valore al di sotto del quale la portata solida di fondo, cioè il volume di sedimenti che attraversa la sezione della corrente nell'unità di tempo, si annulla. Tale valore fu ottenuto estrapolando la curva portata solida - tensione media rilevata sperimentalmente.

Posto dunque che si possa definire una tale *tensione (media) critica* τ_c , è fisicamente ragionevole assumere che sussista una relazione funzionale del tipo:

$$\tau_c = \tau_c((\varrho_s - \varrho), g, d, \nu, \psi, e) \quad (1.6.1)$$

con ψ coefficiente di forma della particella ed e parametro che caratterizza l'assetto geometrico della particella nel letto granulare (ad esempio e può essere il *grado di esposizione* della particella rispetto al letto granulare).

Si noti che la (1.6.1) assume implicitamente che l'ammasso sia omogeneo poiché non sono presenti, fra gli argomenti della funzione, parametri che caratterizzino la distribuzione granulometrica dell'ammasso. L'estensione al caso di sedimenti eterogenei è discussa al punto 1.6.4.

Applicando il teorema π alla (1.6.1) si trova facilmente:

$$\tau_{*c} = \tau_{*c}(R_p; \psi, e) \quad (1.6.2)$$

essendo τ_* la *tensione adimensionale di Shields* definita nella forma:

$$\tau_* = \frac{\tau}{(\varrho_s - \varrho)gd} \quad (1.6.3)$$

ed R_p un numero di Reynolds della particella definito come segue:

$$R_p = \frac{\sqrt{(s-1)gd^3}}{\nu} \quad (1.6.4)$$

L'uso del parametro R_p in questo contesto fu proposto per la prima volta da Yalin, 1972. La formulazione originaria di Shields (1936) istituiva una relazione fra τ_{*c} ed un numero di Reynolds R_τ della particella definito come $(u_\tau d/\nu)$ essendo u_τ la velocità di attrito. Tale formulazione risulta meno efficace della (1.6.2) in quanto la relazione $\tau_*(R_\tau)$ risulta implicita in u_τ . Inoltre Shields (1936) aveva individuato, sulla base di osservazioni sperimentali, sue e di altri autori, una fascia di valori di τ_{*c} per ogni valore di R_τ . Fuu Rouse

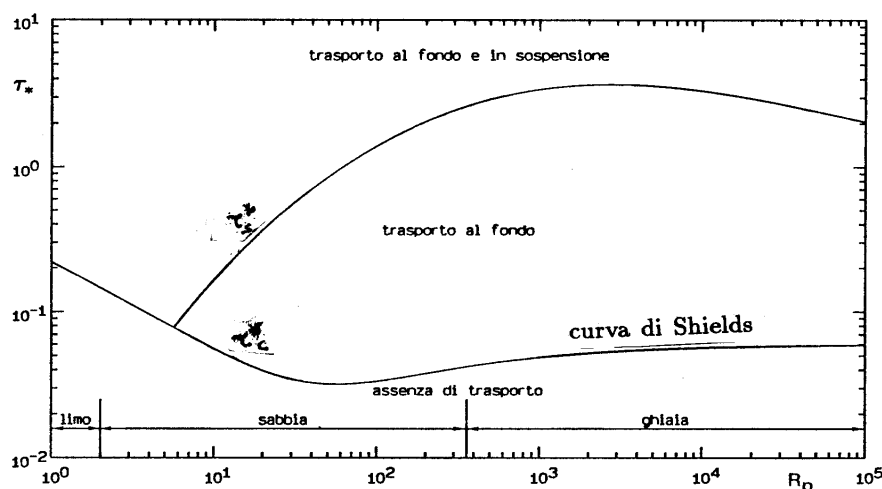


Figura 1.15: La curva di Shields (1936) che definisce le condizioni critiche per l'inizio del trasporto di fondo e la curva di Bagnold (1966) che definisce le condizioni di incipiente trasporto in sospensione.

(1939) a ridurre la fascia di Shields ad un'unica curva che, ricostruita nel piano (τ_{*c}, R_p) , è riportata in fig. 1.15.

Si noti che Shields non disponeva di dati relativi a valori molto bassi di R_p , sicché in tale intervallo la curva fu estrapolata.

La curva di Shields (1936) è stata rappresentata in forma analitica da Brownlie (1981) nella forma:

$$\tau_{*c} = 0.22R_p^{-0.6} + 0.06 \exp(-17.77R_p^{-0.6}) \quad (1.6.5)$$

Lavori successivi (si veda Vanoni, 1977) e, in particolare, il lavoro di Taylor (1971) hanno mostrato che è possibile costruire una famiglia di curve di Shields, ciascuna caratterizzata da un diverso valore della portata volumetrica unitaria adimensionale q_s^* definita nella forma $(q_s/u_\tau d)$. La curva di Shields corrisponde al valore $q_s^* = 10^{-2}$. Scendendo a valori di q_s^* pari a 10^{-6} il valore critico τ_{*c} per alti R_p scende da 0.06 a 0.03.

La dipendenza di τ_{*c} dal grado di esposizione e , definito come rapporto fra distanza della sommità della particella dal piano del letto granulare indisturbato e diametro della particella, è stato investigato da Fenton e al. (1977) che hanno dimostrato come τ_{*c} possa scendere a valori intorno a 0.01 quando e raggiunge il valore massimo 0.82 nel caso di granuli sferici.

1.6.2 Incipiente trasporto di fondo: il ruolo delle strutture coerenti di parete

Un gran numero di dettagliate osservazioni sperimentali del meccanismo di mobilitazione delle particelle sono apparse in letteratura, a partire dai lavori di Deacon (1894) e Gilbert (1914) seguiti dai contributi di Bagnold (1956, 1973), Francis (1973), Fernandez Luque e Van Beek (1976) ed Abbott e Francis (1977). In tali lavori è stato osservato il moto di singole particelle e si è tentato di correlare le proprietà *medie* del moto delle particelle con le proprietà *medie* del moto del fluido.

Accanto a tale classico approccio si è sviluppata in tempi recenti una linea di ricerca volta a correlare l'inizio del movimento e la meccanica del trasporto di fondo alle caratteristiche istantanee del moto nella regione di parete e, in particolare, alla dinamica delle cosiddette strutture coerenti. Il primo contributo in tale direzione risale a Sutherland (1967) che osservò come l'inizio del movimento fosse da associare all'impatto sul fondo granulare di una struttura vorticoso in grado di produrre una spinta sulla particella sufficientemente grande da dar luogo alla sua rotazione.

Tali osservazioni sono state successivamente chiarite attraverso il contributo di alcuni gruppi di ricerca che si sono avvalsi di tecniche sperimentali più sofisticate delle semplici tecniche di visualizzazione impiegate da Sutherland (1967). In particolare il gruppo del 'Proudman Oceanographic Laboratory' (Heathershaw e Thorne, 1985; Thorne, Williams e Heathershaw, 1989), ha utilizzato un'ingegnosa combinazione di tecniche per misurare campo di moto e trasporto di fondo simultaneamente: misuratore di velocità elettromagnetico per il campo di moto, rilevatore acustico del suono prodotto dalle collisioni intergranulari nel trasporto di fondo, telecamera sommersa per l'osservazione del moto delle particelle. Le misure sono state effettuate in un estuario. Simultaneamente il 'gruppo di Berkeley' (Drake e al., 1988) pubblicava analoghe osservazioni di campo eseguite con l'utilizzo di cinematografia ultrarapida su un corso d'acqua. Infine più recentemente le osservazioni di campo sono state confermate da accurate misure di laboratorio effettuate con l'ausilio di tecniche di anemometria laser affiancate alla cinematografia ultrarapida (Nelson e al., 1995).

Rimandiamo al punto 1.7.1 la descrizione dei risultati relativi alla meccanica del trasporto di fondo.

Per quanto concerne le condizioni di incipiente movimento le osservazioni sperimentali hanno concordemente mostrato che le strutture vorticoso responsabili primariamente della mobilitazione delle particelle sono le *strutture coerenti*, dette *sweeps* che furono osservate per la prima volta da Corino e Brodkey (1969). Si tratta di *intensi eventi* costituiti da moti del tipo getti

che, provenendo dalla regione esterna alla parete, impattano su quest'ultima obliquamente (fig. 1.16) dando luogo ad una sorta di getto di parete che migra verso valle con velocità 1.5-1.8 volte maggiori della velocità media nella sezione. La presenza di tali sweeps è testimoniata quantitativamente dalla misura di fluttuazioni di velocità u' (nella direzione longitudinale) positive e w' (nella direzione verticale) negative. Si tratta quindi di eventi che forniscono un contributo positivo alle tensioni di Reynolds.



Figura 1.16: Schema illustrativo dell'azione delle strutture turbolente di parete responsabili dell'incipiente trasporto di fondo.

Accanto a quello dei sweeps un contributo apprezzabile, alla mobilitazione dei granuli proviene dalle cosiddette *outward interactions*, eventi più rari caratterizzati da $u' > 0$ e $w' > 0$ che forniscono, dunque, un contributo negativo alle tensioni di Reynolds.

Le osservazioni precedenti (ma si veda anche il paragrafo 1.7.1) hanno suggerito a Thorne e al. (1989) di correlare l'incipiente trasporto di fondo con l'intensità della velocità istantanea u rilevata in prossimità della parete in occasione degli eventi di parete responsabili della mobilitazione.

La fig. 1.17 mostra un esempio di correlazione fra quadrato della velocità istantanea e portata (massica) solida al fondo unitaria (cioè per unità di larghezza) in occasione di tre distinte maree. L'intercetta della retta interpolante i dati sperimentali con l'asse delle ascisse definisce un valore di soglia per la velocità U_T che Thorne e al. (1989) hanno ricondotto ad una tensione assumendo una distribuzione logaritmica della velocità in prossimità del fondo.

La fig. 1.18 mostra i dati sperimentali così ottenuti, espressi nella forma di tensione di Shields. Malgrado l'ipotesi che la velocità istantanea presenti una distribuzione di tipo logaritmico sia sostanzialmente ingiustificato, l'andamento dei risultati appare confrontabile con l'andamento classico di Shields, che si riferisce però alle tensioni medie anziché a quelle istantanee. Non meraviglia tuttavia il fatto che le stime di Thorne e al. (1989) eccedano di un fattore 3 circa i valori osservati da altri autori per materiali grossolani ($\tau_{*c} \simeq 0.03$).

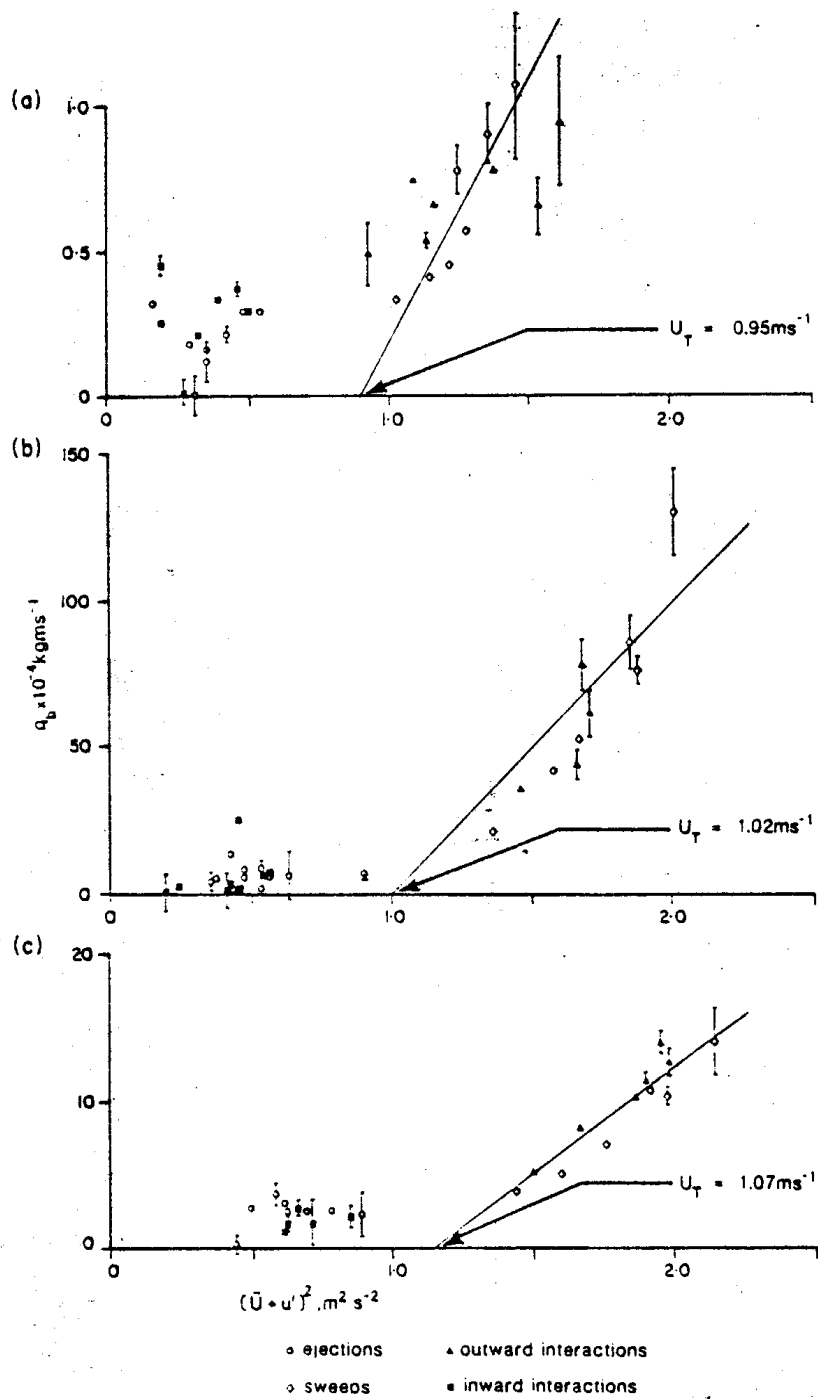


Figura 1.17: Correlazione fra portata solida massica unitaria e velocità istantanea associata agli eventi di parete. Eiezioni: $u' < 0$ $w' > 0$; sweeps: $u' > 0$ $w' < 0$; interazioni esterne: $u' > 0$ $w' > 0$; interazioni interne: $u' < 0$ $w' < 0$. (da Thorne e al., 1989).

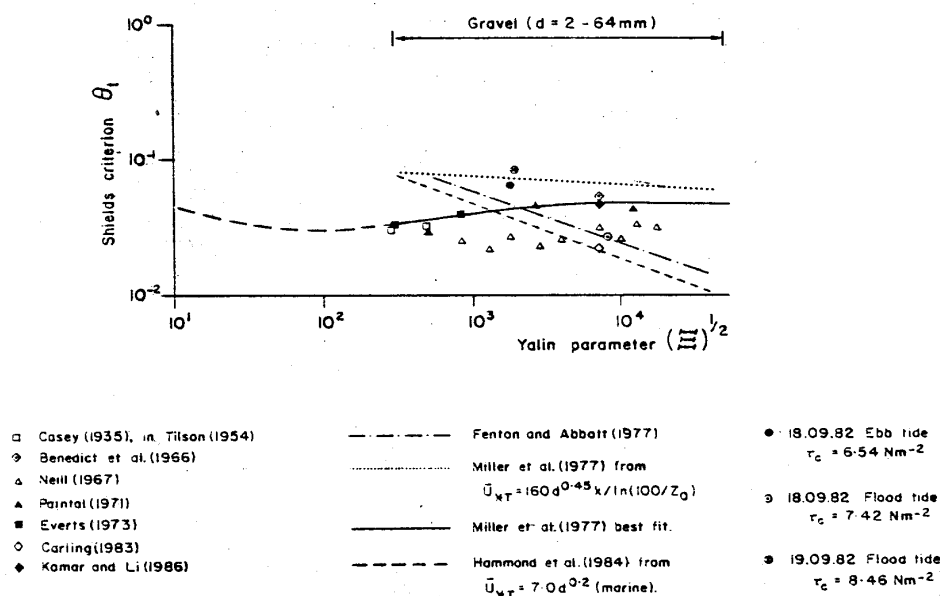


Figura 1.18: I dati di Thorne e al. (1989) espressi in funzione della tensione di Shields istantanea sono riportati nel diagramma di Yalin (1972).

1.6.3 Incipiente trasporto di fondo: una semplice interpretazione analitica

Un'interpretazione del processo di incipiente trasporto aderente alla fisica evidenziata dalle osservazioni sperimentali di cui al punto 1.6.2 non è ancora stata formulata.

Una semplice interpretazione del meccanismo di mobilitazione delle particelle è tuttavia possibile facendo riferimento alle azioni idrodinamiche medie che una particella isolata, appoggiata sul fondo, subisce se esposta ad una corrente turbolenta uniforme.

Prima di discutere tale formulazione ricordiamo tuttavia la nozione di *angolo di riposo* di un ammasso.

L'angolo di riposo di un ammasso

Consideriamo un ammasso granulare sommerso. Si osserva sperimentalmente che esiste un angolo critico ϕ che la superficie dell'ammasso può formare con l'orizzontale, al di sopra del quale si verifica spontaneamente il collasso dell'ammasso: tale angolo è detto *angolo di riposo* o, alternativamente, *angolo di attrito* del materiale di cui l'ammasso è costituito.

Di tale osservazione è possibile dare una semplice interpretazione. Si consideri una particella che giace sulla superficie dell'ammasso. Essa è soggetta al suo peso sommerso ($\mathbf{G} - \mathbf{A}$) ed al risultante delle azioni di contatto cui la particella è soggetta da parte delle particelle circostanti \mathbf{C} . In particolare, in condizioni di equilibrio limite, la componente \mathbf{C} nella direzione tangenziale alla superficie dell'ammasso può porsi nella forma di Coulomb:

$$C_t = \mu C_n \quad (1.6.6)$$

essendo μ un *coefficiente d'attrito statico* e C_n il modulo della componente normale dell'azione di contatto.



Figura 1.19: Schema di un ammasso sommerso in condizioni di riposo.

Le condizioni di equilibrio impongono allora:

$$C_n = G_n \quad (1.6.7)$$

e, nella direzione tangenziale:

$$G_t = C_t \quad (1.6.8)$$

Essendo

$$(G_t, G_n) = (\varrho_s - \varrho)gV(\sin \phi, \cos \phi) \quad (1.6.9)$$

segue infine

$$\mu = \tan \phi \quad (1.6.10)$$

L'angolo di riposo ϕ è quantità empiricamente definita. Per ammassi omogenei si trova che ϕ si aggira intorno a 30° per la sabbia e a 40° per la ghiaia. Ammassi eterogenei presentano valori di ϕ un po' superiori perché le particelle più fini e irregolari si incastrano negli spazi compresi fra i granuli di maggiori dimensioni accrescendo la resistenza del materiale al collasso.

Un modello per la definizione delle condizioni di incipiente trasporto

Tale modello, sostanzialmente fondato sull'approccio di Coleman (1967) si basa sulle seguenti ipotesi:

- i) si considera una particella *particolarmente esposta* alle azioni idrodinamiche;
- ii) si assume che il moto medio sia uniforme e turbolento;
- iii) si ignorano le fluttuazioni turbolente cui le azioni idrodinamiche sulle particelle sono soggette;
- iv) si assume che le azioni idrodinamiche agiscano attraverso il baricentro della particella;
- v) si trascura l'effetto della pendenza media del fondo;
- vi) si assume che la scabrezza assoluta della parete sia pari a $2.5 d$.

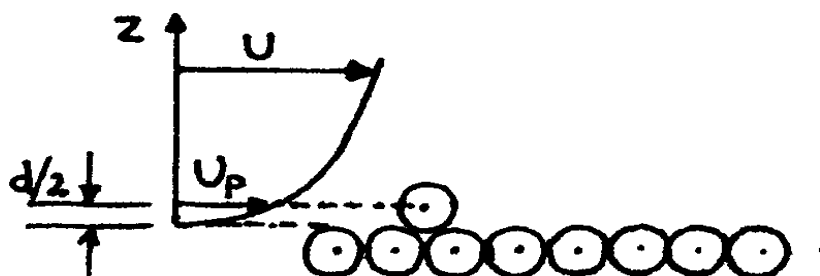


Figura 1.20: Schema dell'esposizione di una particella nel modello di Coleman (1967).

Sotto tali condizioni, detta U_p la velocità media della corrente all'altezza del baricentro della particella, supposta sferica e di diametro d , si può scrivere:

$$\frac{U_p}{u_\tau} = F\left(u_\tau \frac{d}{\nu}\right) \quad (1.6.11)$$

La funzione F è facilmente calcolabile nelle due condizioni limiti seguenti:

a) Regime *fluodinamicamente liscio*

In questo caso la scabrezza assoluta risulta molto più piccola dello spessore caratteristico del cosiddetto substrato laminare. Tale condizione può porsi nella forma:

$$\frac{u_\tau d}{\nu} < 5 \quad (1.6.12)$$

e si ha:

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{u_\tau z}{\nu} \quad (1.6.13)$$

essendo $U(z)$ la velocità media alla distanza z dalla parete. Segue:

$$F = \frac{u_* d}{2\nu} \quad (1.6.14)$$

b) Regime *fluodinamicamente scabro*

In questo caso si può utilizzare la legge logaritmica nella forma

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln \left(30 \frac{z}{k_s} \right) \quad (1.6.15)$$

donde, posto $k_s = 2.5d$, si trova:

$$\frac{U_p}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln(6) = 4.48 \quad (1.6.16)$$

Dunque, al crescere di $(u_\tau d/\nu)$ la funzione F cresce da 0 al valore 4.48, inizialmente in modo lineare e quindi più debolmente fino a mantenersi costante per alti valori di $u_\tau d/\nu$. L'andamento della funzione F è riportato in fig. 1.21, insieme all'andamento del coefficiente di resistenza c_D relativo ad una sfera isolata.

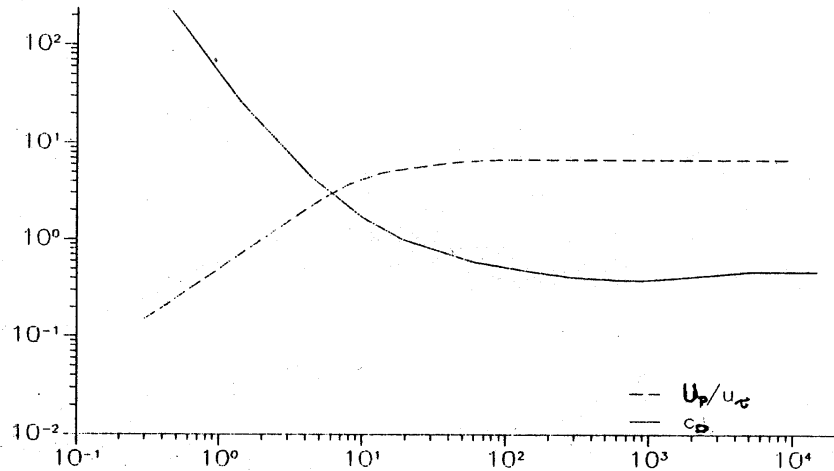


Figura 1.21: La funzione $F = U_p/u_\tau$.

La condizione di incipiente rotazione (in media) della particella può essere allora posta nella forma:

$$F_d l_1 = (G - A - L) l_3 \quad (1.6.17)$$

essendo F_d ed L rispettivamente spinta e portanza che il fluido esercita mediamente sulla particella ed (ℓ_1, ℓ_3) bracci della spinta e della forza verticale cui la particella è soggetta.

Considerazioni geometriche (vedi fig. 1.22) suggeriscono che risulta

$$\ell_1 = \frac{d}{\sqrt{6}} \quad \ell_3 = \frac{d}{2\sqrt{3}} \quad (1.6.18)$$

Si noti che la (1.6.17) assume che la spinta del fluido agisca nella direzione più sfavorevole per la stabilità della particella.

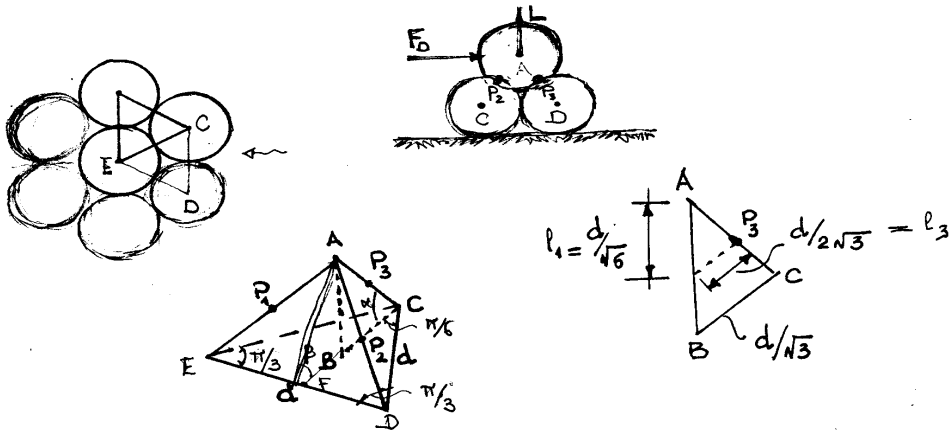


Figura 1.22: Assetto geometrico del letto granulare. I punti di contatto fra le sfere adiacenti sono P_1, P_2 e P_3 .

Al fine di rendere esplicita la condizione di incipiente movimento che discende dalla (1.6.17) è necessario fornire una struttura alla spinta F_d ed alla portanza L .

Poniamo dunque:

$$F_d = c_D \left(\frac{1}{2} \rho u_p^2 \right) \frac{\pi d^2}{4} \quad (1.6.19)$$

Inltre, ricordando la (1.3.28) e osservando che

$$|\omega| \simeq \frac{u_p}{d/2} \quad (1.6.20)$$

è ragionevole porre:

$$L = \rho \frac{\pi d^3}{6} c_L \left(\frac{u_p}{d/2} u_p \right) \quad (1.6.21)$$

Sostituendo le (1.6.19) e (1.6.21) nella (1.6.17) e ricordando la (1.5.11) si ottiene:

$$\tau_{*c} = \frac{2}{3} \frac{1}{c_D F^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \frac{c_L}{c_D}\right)} \quad (1.6.22)$$

Coleman (1967) ha misurato F_d e mostrato che il coefficiente di resistenza c_D si comporta in modo assai simile al coefficiente di resistenza relativo ad una sfera isolata. Inoltre la portanza è stata espressa da Coleman (1967) nella forma

$$L = k \left(\frac{\pi}{6} d^3\right) (\rho_s - \rho) g \quad (1.6.23)$$

donde espressione alternativa alla (1.6.22) è la seguente

$$\tau_{*c} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \frac{1-k}{c_D F^2} \quad (1.6.24)$$

La fig. 1.23 mostra gli andamenti di c_D e k rilevati da Coleman (1967). La fig. 1.24 mostra che l'andamento di τ_{*c} ottenuto dalla (1.6.22) (o dalla (1.6.24)) utilizzando i risultati sperimentali di Coleman è assai prossimo all'andamento osservato sperimentalmente.

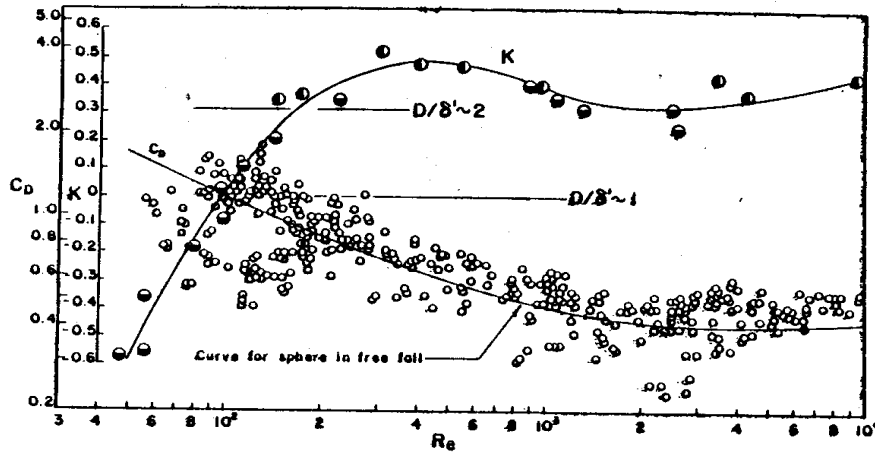


Figura 1.23: Andamento del coefficiente di portanza k e del coefficiente di resistenza c_D rilevati da Coleman (1967).

1.6.4 Incipiente trasporto di fondo su pareti inclinate

Un problema di notevole rilevanza applicativa nell'ambito della progettazione dei canali di irrigazione e delle difese di sponda è quello della determinazione delle condizioni di incipiente movimento di particelle localizzate su pareti inclinate nella direzione trasversale.

Consideriamo, dunque, una particella, per semplicità ancora sferica, localizzata su un piano inclinato di un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale ortogonale alla direzione del moto. Siano \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 i versori degli assi longitudinale, tangente al piano e normale al piano rispettivamente e tali da formare una terna trirettangolo (fig. 1.24).

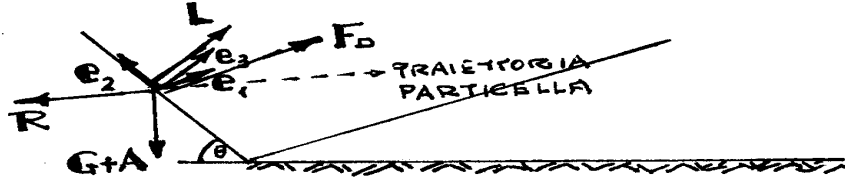


Figura 1.24: Schema delle azioni esercitate su una particella localizzata su un piano inclinato.

Le azioni esercitate sulla particella consistono nel peso sommerso $\mathbf{G} + \mathbf{A}$ la portanza \mathbf{L} , la spinta idrodinamica \mathbf{F}_D e la resistenza di Coulomb \mathbf{R} che tiene conto delle azioni di contatto esercitate dalle particelle circostanti. Segue:

$$\mathbf{G} + \mathbf{A} = (\rho_s - \rho) \left(\frac{\pi d^3}{6} \right) g(0, -\sin \theta, -\cos \theta) \quad (1.6.25)$$

$$\mathbf{L} = c_L \frac{1}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} u_p^2(0, 0, 1) \quad (1.6.26)$$

$$\mathbf{F}_D = c_D \frac{1}{2} \rho \frac{\pi d^2}{4} u_p^2(1, 0, 0) \quad (1.6.27)$$

$$\mathbf{R} = -\mu |G_3 + A_3 + L| \left(\frac{F_D}{\sqrt{(G_2 + A_2)^2 + F_D^2}}, \frac{G_2 + A_2}{\sqrt{(G_2 + A_2)^2 + F_D^2}}, 0 \right) \quad (1.6.28)$$

Le (1.6.25-27) non abbisognano di particolari commenti. La (1.6.28) afferma che nelle condizioni di incipiente movimento, il modulo dell'azione resistente è pari a μ per il modulo della reazione normale, mentre la sua direzione è tangente al piano inclinato, parallela al risultante delle azioni esercitate sulla particella tangenzialmente al piano, e ha verso opposto rispetto a quest'ultima. Si noti che l'asse \mathbf{e}_1 stato qui assunto di poco inclinato rispetto all'orizzontale.

L'equilibrio della particella nelle condizioni di incipiente movimento impone dunque

$$\mu^2 |G_3 + A_3 + L|^2 = F_D^2 + (G_2 - A_2)^2 \quad (1.6.29)$$

o, utilizzando le (1.6.25-28), dopo qualche elaborazione:

$$\mu \left\{ \left(\frac{4}{3c_D F^2} \right) \cos \theta - \frac{c_L}{c_D} \tau_{*c} \right\} = \left\{ \tau_{*c}^2 + \left(\frac{4}{3c_D F^2} \sin \theta \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (1.6.30)$$

La (1.6.30) individua una dipendenza di τ_{*c} da θ che è facile esplicitare.

Anzitutto per $\theta = 0$ la (1.6.30) si riduce alla relazione

$$\tau_{*co} = \frac{4}{3} \frac{\mu}{c_D F^2} \frac{1}{1 + \mu \frac{c_L}{c_D}} \quad (1.6.31)$$

La (1.6.31) differisce dalla (1.6.24) semplicemente si è qui ipotizzato che il movimento avvenga perché viene meno l'equilibrio alla traslazione anziché quello alla rotazione. Tuttavia salvo per il fattore moltiplicativo le (1.6.31) e (1.6.24) conducono ad una identica dipendenza di τ_{*co} da $(c_D F^2)^{-1}$.

Nel caso generale la (1.6.30) ci riduce alla relazione:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \mu \frac{c_L}{c_D} \right) \left(\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*co}} \right)^2 + 2\mu \frac{c_L}{c_D} \cos \theta \left(\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*co}} \right) + \\ & + \left(1 + \mu \frac{c_L}{c_D} \right) \left(\frac{\sin^2 \theta}{\mu^2} - \cos^2 \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

che si risolve agevolmente in (τ_{*c}/τ_{*co}) . Tale soluzione è rappresentata in fig. 1.25 per il caso $\phi = 40^\circ$ ($\mu = 0.84$) avendo posto $c_L/c_D = 0.85$.

La determinazione del valore di τ_{*c} in funzione di θ trova applicazione nella progettazione delle opere di difesa spondale e dei canali in materiale erodibile non rivestiti (vedi fascicolo 'Sistemazione dei corsi d'acqua').

1.6.5 Estensione al caso di ammassi eterogenei

La mobilità di un granulo in una mistura differisce da quella che lo stesso granulo avrebbe se i sedimenti fossero caratterizzati da granulometria uniforme. Ciò dipende dal fatto che i granuli maggiori della mistura, pur essendo tendenzialmente meno mobili per effetto del loro maggior peso, contrappesano ciò con la loro maggiore esposizione alle azioni idrodinamiche. Viceversa granuli di minori dimensioni, tendenzialmente più mobili sono soggetti ad un'azione di protezione da parte dei granuli più grossi (hiding) che li rende meno esposti alle azioni idrodinamiche. Di ciò si tiene conto esprimendo la tensione critica dei granuli di diametro d in un miscuglio caratterizzato da diametro medio d_g nella forma

$$\tau_{*c}(d) = \tau_{*cg} G \left(\frac{d}{d_g} \right) \quad (1.6.33)$$

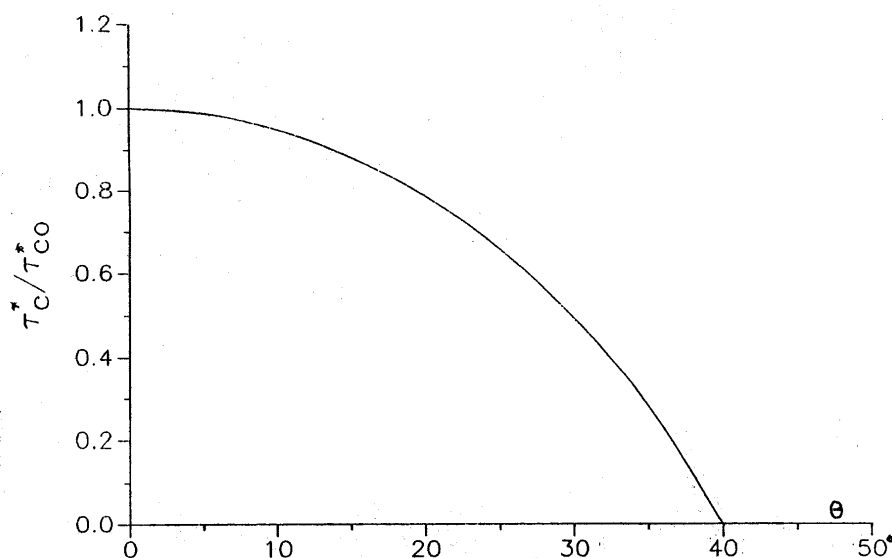


Figura 1.25: Dipendenza della tensione critica di Shields τ_{*c} dall'angolo di inclinazione trasversale del fondo (τ_{*co} = tensione critica su fondo orizzontale).

con τ_{*cg} tensione di Shields critica normalizzata rispetto al diametro medio. La (1.6.33) introduce cioè (Egiazaroff, 1965) una 'funzione di nascondimento' (hiding function), ovviamente decrescente nel diametro d . La struttura di G empiricamente proposta da Egiazaroff (1965), con le correzioni di Ashida e Michiue (1972) si scrive

$$G = \left[1 + 0.782 \lg_{10} \left(\frac{d}{d_g} \right) \right]^{-2} \quad \left(\frac{d}{d_g} \geq 0.4 \right) \quad (1.6.34)$$

$$G = 0.843 \frac{d_g}{d} \quad \left(\frac{d}{d_g} < 0.4 \right) \quad (1.6.35)$$

Parker (1990) ha proposto, sempre su basi empiriche, la seguente legge delle potenze

$$G = \left(\frac{d_g}{d} \right)^\beta \quad (\beta = 0.9) \quad (1.6.36)$$

È opportuno esaminare in che misura la correzione legata alla presenza della funzione di nascondimento alteri il quadro classico di Shields.

Consideriamo, ad esempio, un miscuglio caratterizzato da un valore di d_{50} pari a 80 mm e poniamoci il problema della mobilità di due grani di

diametro 40 mm e 120 mm rispettivamente. La tensione dimensionale critica, utilizzando un criterio omogeneo con $\tau_{*c} = 0.03$ fornisce:

$$\tau_o|_{d=40mm} = (1.65 \times 10^3 \times 9.81) \times 0.04 \times 0.03 = 19.4 N/m^2 \quad (1.6.37)$$

$$\tau_o|_{d=120mm} = \frac{120}{40} \times 19.4 = 58.3 N/m^2 \quad (1.6.38)$$

Introducendo la funzione di nascondimento di Egiazaroff (1965), si trova

$$\tau_o|_{d=40mm} = (19.4 \times 1.71) N/m^2 = 33.2 N/m^2 \quad (1.6.39)$$

$$\tau_o|_{d=120mm} = (58.3 \times 0.77) N/m^2 = 45.0 N/m^2 \quad (1.6.40)$$

Si noti che il valore della tensione critica per il diametro d_g è pari a $38.8 N/m^2$. Appare evidente come la mobilità differenziale dei due diversi diametri risulta assai meno significativa di quanto si ottenga facendo riferimento allo schema di sedimenti omogenei.

Utilizzando la relazione di Parker si ottiene:

$$\tau_o|_{d=40mm} = 36.2 N/m^2, \tau_o|_{d=120mm} = 40.5 N/m^2 \quad (1.6.41a, b)$$

La relazione di Parker predice mobilità differenziali marcatamente più ridotte rispetto alla relazione di Egiazaroff-Ashida-Michiue.

1.7 Trasporto di fondo

1.7.1 Meccanismo di trasporto: il ruolo delle strutture coerenti

Abbiamo esaminato al punto 1.6.2 il ruolo dei 'sweeps' e delle 'outward interactions' nella mobilitazione della particella. Il lavoro sperimentale di Drake e al. (1988) chiarisce anche la meccanica del processo attraverso cui i granuli vengono trasportati dalla corrente.

Occorre osservare, anzitutto, che per i valori bassi di tensione caratteristici delle esperienze di Drake e al. (1988) le particelle superficiali si dividevano in una popolazione attiva ed una inattiva, con modesto scambio fra le stesse. Le prime risultavano attive in quanto particolarmente esposte alle azioni idrodinamiche.

Una seconda osservazione generale riguarda il fatto che il trasporto coinvolgeva sia singole particelle sia, più frequentemente clusters di particelle che si muovevano verso valle collettivamente.

Moto di singole particelle

Il moto di *singole particelle* può distinguersi in 4 fasi distinte:

1. mobilitazione;
2. trasporto;
3. arresto;
4. riposo.

Della *mobilitazione* si è già detto al punto 1.6.2.

Il *trasporto* può avvenire per saltellamento, rotolamento o slittamento in dipendenza dalle dimensioni della particella.

Nelle esperienze citate particelle di dimensioni inferiori a 3 mm si muovevano per *saltellamento*, con traiettoria debolmente curva, salti fra contatti successivi dell'ordine della (o delle) decina (e) di diametri, altezza di saltellamento al più dell'ordine della distanza dal fondo delle maggiori protuberanze. Di norma le particelle non rimbalzavano in conseguenza dell'impatto sul fondo. Inoltre la componente rotazionale del moto risultava trascurabile rispetto alla componente di traslazione durante il processo di saltellamento.

Particelle di dimensioni maggiori di 3 mm venivano trasportate per *rotolamento*, cioè con contatti col letto granulare che avvenivano mediamente due volte su una distanza dell'ordine del diametro della particella. La velocità tangenziale delle particelle risultava mediamente pari a $0.5 \bar{V}_p$ essendo \bar{V}_p la loro velocità media di traslazione. Modesti rimbalzi venivano talora osservati quando particelle rotolanti impattavano su particelle immobili. Le traiettorie delle particelle in rotolamento risultavano rettilinee con modeste deviazioni necessarie per aggirare particelle molto esposte.

Il trasporto per *slittamento* era osservato molto raramente e consisteva usualmente di brevissime fasi che interrompevano periodi di prolungato trasporto per rotolamento.

La fase di *arresto* dai granuli avveniva in modo subitaneo per particelle saltellanti che impattavano su particelle immobili. Al contrario particelle rotolanti deceleravano gradualmente su distanze dell'ordine di 1-2 diametri prima di arrestarsi.

Nella fase di *riposo*, di durata assai maggiore della durata della fase di trasporto per le particelle attive, queste ultime non si mantenevano sempre

in condizioni di quiete. Piccoli granuli localizzati nella regione immediatamente a valle di particelle di dimensioni maggiori, presentavano improvvisi moti verticali di sollevamento e successivo deposito che non inducevano traslazione netta verso valle. Spesso le particelle presentavano significativi moti di vibrazione nella fase di incipiente mobilitazione.

La dinamica dei clusters di particelle

Circa il 70% del trasporto totale osservato da Drake e al. (1988) era associato alla mobilitazione collettiva di clusters di particelle determinata dall'azione delle strutture coerenti dette *sweeps*.

Mediamente l'azione del sweep mobilitava gran parte (dal 20% al 90%) delle particelle esposte nell'area da esso interessata che nelle esperienze di Drake e al. (1988) aveva diametro dell'ordine di 3-5 cm. La propagazione del sweep risultava assai più veloce del moto medio del fluido in prossimità del fondo, tipicamente la velocità dei sweeps si aggirava intorno a 1.5-1.8 volte la velocità media della corrente. Inoltre la velocità delle particelle mobilitate risultava minore della velocità associata al sweep, sicché la nuvola di particelle mobilitate andava allungandosi, lasciando sulla sua coda le particelle insufficientemente sollecitate che progressivamente si arrestavano (fig. 1.26).

Nelle citate esperienze ogni punto del fondo veniva interessato da un evento di sweep per almeno il 9% del tempo. La distribuzione areale degli eventi risultava del tutto casuale.

Il moto dei granuli appartenenti ai clusters risultava più veloce e più prolungato rispetto al moto isolato delle altre particelle.

Mediamente lo spostamento di ogni singola particella si aggirava intorno ai 15 diametri. Inoltre la dinamica delle nuvole di particelle mostrava un processo di dispersione sia longitudinale che trasversale con diffusività rispettivamente pari a $4.6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ e $0.26 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Tali valori si confrontano assai bene con valori quadratici medi degli spostamenti longitudinali e trasversali dei granuli misurati.

Si noti che, malgrado le differenze fra i modi di trasporto delle singole particelle, la loro velocità non differiva significativamente.

Infine la concentrazione areale di granuli *mobilitati* risultava pari all'1% della concentrazione areale dei granuli *mobilitabili*, cioè di quelli esposti alle azioni idrodinamiche (fig. 1.27). Nella fig. 1.27 sono riportati anche i valori del peso di sedimenti catturati od arrestati nell'unità di tempo sull'unità di area del letto granulare. Si noti il bilancio fra tali flussi che suggerisce l'assenza di erosione o deposito nel letto granulare.

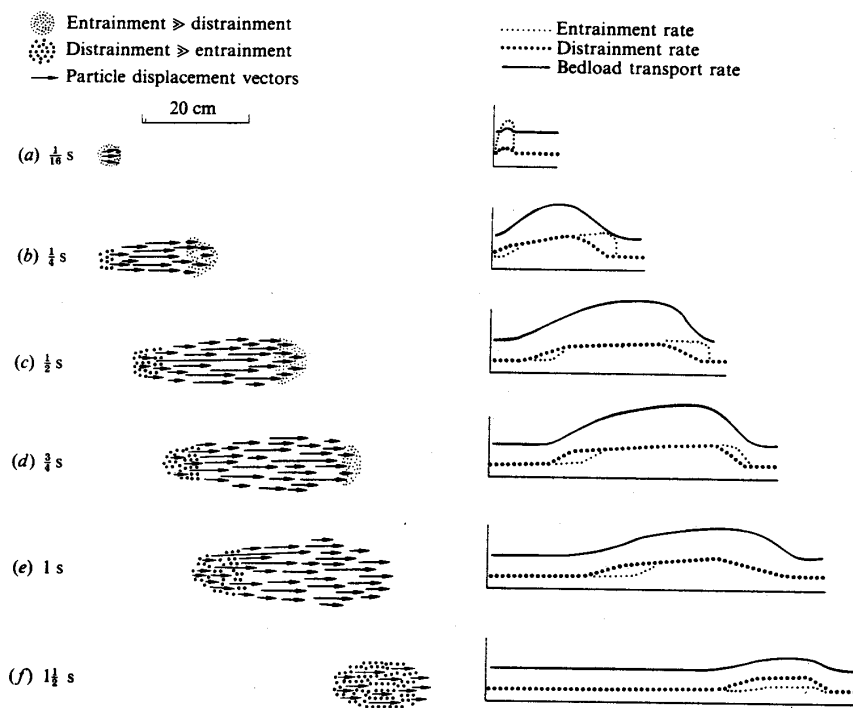


Figura 1.26: Schema che descrive le osservazioni di campo relative alla mobilitazione al fondo di clusters di particelle per azione dei cosiddetti 'sweeps' (da Drake e al., 1988).

1.7.2 Modelli di trasporto di fondo

Introduzione

Non sono noti tentativi di formulare modelli di trasporto di fondo basati sulle recenti osservazioni sperimentali che evidenziano il ruolo dei sweeps nella mobilitazione dei granuli ed il carattere prevalentemente collettivo, cioè per clusters, del trasporto.

I modelli di trasporto di fondo esistenti, di tipo deterministico, sono numerosi ma hanno tutti evidenziato i loro limiti di fronte alle recenti osservazioni sperimentali.

Si tratta di modelli che si fondano sulla simulazione della dinamica media di singole particelle. Tale dinamica è interpretata da alcuni (Wiberg e Smith, 1987, Sekine e Kikkawa, 1988) come processo di saltellamento sostenuto dalle collisioni con il letto granulare, da altri (Ashida e Michiue, 1972; Englund e Fredsøe, 1976) come processo di traslazione uniforme controllato da un

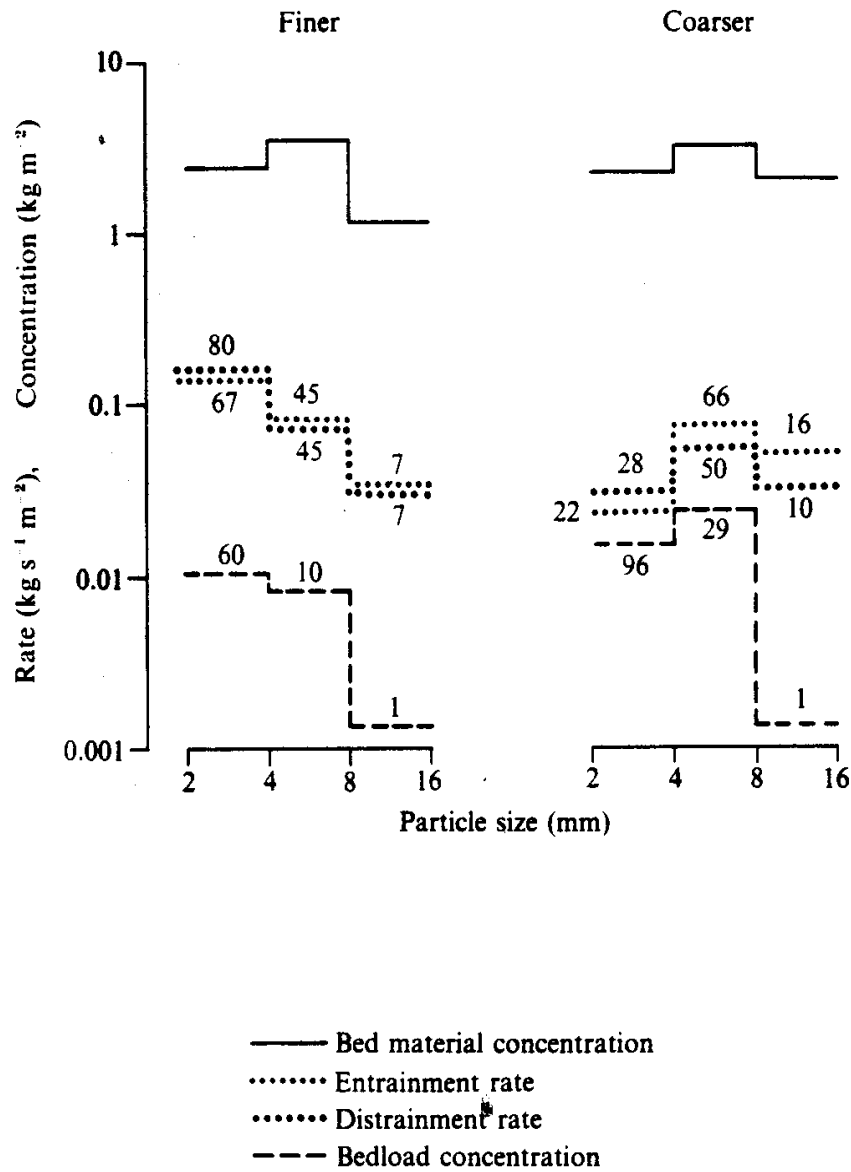


Figura 1.27: Concentrazioni di materiale trasportato negli esperimenti di Drake e al. (1988).

bilancio fra azione idrodinamica media sui granuli e azioni resistenti associate al contatto dei granuli col fondo.

Le esperienze di Drake e al. (1988) hanno evidenziato che il saltellamento dei granuli è sostenuto dai sweeps anziché dalle collisioni, sicché i modelli citati perdono significatività.

Il modello di Ashida e Michiue (1972), successivamente riderivato da Engelund e Fredsøe (1976) presenta anch'esso elementi contraddetti dai risultati sperimentali, ma è di qualche utilità esaminarlo brevemente, sia per il suo valore storico sia perché ci consente di chiarire alcuni aspetti del processo di trasporto.

Cenno al modello di Ashida e Michiue (1972)

La struttura del modello di trasporto è fondata su una semplice relazione che definisce il valor medio della portata volumetrica solida al fondo per unità di larghezza q nella forma:

$$q = \bar{c}\bar{V}_p \quad (1.7.1)$$

con \bar{c} concentrazione areale media delle particelle che partecipano al trasporto di fondo e \bar{V}_p loro velocità media. Si noti che si ha:

$$[q] = L^2T^{-1}, \quad [\bar{c}] = \frac{L^3}{L^2} = L \quad (1.7.2)$$

Il problema della determinazione di q diventa dunque quello della valutazione di \bar{c} e \bar{V}_p .

Per quanto concerne \bar{V}_p Ashida e Michiue (1972) sostanzialmente ipotizzano che, in media, la dinamica della particella sia retta da un bilancio fra spinta idrodinamica associata alla velocità relativa del fluido rispetto alla particella e resistenza associata al contatto intermittente della particella col fondo.

Assumendo, inoltre, con qualche arbitrarietà, che la media della spinta idrodinamica coincida con la spinta associata ai valori medi delle velocità e inoltre che la resistenza media sia esprimibile come prodotto di un coefficiente di attrito dinamico μ_D per il peso sommerso della particella, segue:

$$c_D \frac{1}{2} \rho (U|_{z_p} - \bar{V}_p)^2 \frac{\pi d^2}{4} = \mu_D \rho (s-1) g \frac{\pi d^3}{6} \quad (1.7.3)$$

essendo z_p la quota media a cui la particella si muove. Posto $z_p = \xi d$ e assunto il regime di parete scabra e la scabrezza assoluta pari a $2.5 D$:

$$U|_{z_p} = \frac{u_\tau}{k} \ln(12\xi) = \hat{\xi} u_\tau \quad (1.7.4)$$

donde:

$$\bar{V}_p = \hat{\xi} u_\tau - \left(\frac{4}{3} \mu_d \frac{(s-1)gd}{c_d} \right)^{1/2} \quad (1.7.5)$$

Posto $\bar{V}_p = 0$ u_τ assume il valore critico ‘dinamico’ $u_{\tau_{c1}}$. Si noti che tale valore rappresenta le condizioni per la cessazione del movimento di una particella e differisce dal valore u_{τ_c} che individua le condizioni per la mobilitazione delle particelle. Tale differenza è evidente nel confronto fra le (1.7.5) e la (1.6.31). Fernandez Luque & Van Beek (1976) sperimentalmente stimano τ_{*c1} pari a $0.25 \tau_{*c}$. La (1.7.5) diventa dunque:

$$\frac{\bar{V}_p}{\sqrt{(s-1)gd}} = \hat{\xi}(\tau_*^{1/2} - \tau_{*c1}^{1/2}) \quad (1.7.6)$$

Relazione simile alla (1.7.6) è stata ottenuta da Fernandez Luque e Van Beek (1976) sperimentalmente con $\hat{\xi} = 11.6$. Il valore ottenuto per $\hat{\xi}$ da Ashida e Michiue (1976) risultava pari a 8.5 avendo tali autori assunto $\xi = 2.5d$.

La stima della concentrazione areale media \bar{c} è più complessa. Le osservazioni di campo suggeriscono che la valutazione di \bar{c} richiederebbe di conoscere la dipendenza della frequenza spazio-temporale con cui i sweeps vengono generati dal parametro di Shields. Tale informazione non è ad oggi disponibile.

Un tentativo di pervenire ad una stima di \bar{c} è stato effettuato da Ashida e Michiue (1972) sulla base di un’ipotesi avanzata da Bagnold (1957). Sostanzialmente l’idea consiste nell’assumere che la tensione τ_o esercitata dal fluido in prossimità del fondo sia mediamente utilizzata dallo strato di particelle in moto per vincere la resistenza media associata al contatto delle particelle con il letto granulare.

Più precisamente consideriamo il sottile strato di miscuglio adiacente il fondo in cui avviene il moto delle particelle. In assenza di particelle in moto la dinamica di tale strato è assai semplice. Il fluido esercita sulla faccia superiore di tale strato una tensione motrice $\tau_o - (d\tau/dz)h_b$, con τ_o tensione media al fondo ed h_b spessore dello strato. Il fondo esercita sullo strato una tensione resistente di modulo τ_o . La differenza fra tali tensioni bilancia l’azione motrice associata alla gravità (fig. 1.28a).

In presenza di particelle Bagnold (1957) assume che la tensione resistente sulla parte fluida si riduca al valore critico τ_c mentre la parte restante della tensione motrice sia assorbita dalla tensione resistente associata al contatto fra granuli in moto e letto granulare τ_g (fig. 1.28b).

Dunque

$$\tau_o = \tau_c + \tau_g \quad (1.7.7)$$

Ma τ_g può mediamente esprimersi nella forma:

$$\tau_g = \frac{R}{A} = \frac{1}{A} \mu_d [A \bar{c} \rho g (s-1)] = \mu_d \bar{c} \rho g (s-1) \quad (1.7.8)$$

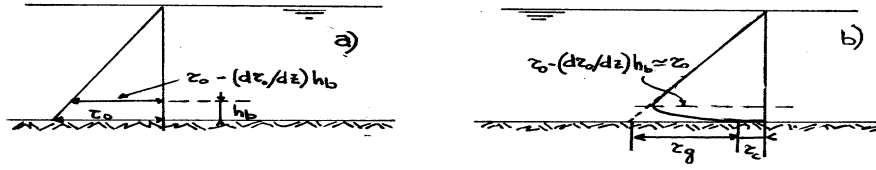


Figura 1.28: Schema illustrativo dell'ipotesi di Bagnold.

Dunque

$$\frac{\bar{c}}{d} = \frac{\tau_* - \tau_{*c}}{\mu_d} \quad (1.7.9)$$

Le (1.7.1), (1.7.6) e (1.7.9) porgono infine:

$$q = \sqrt{(s-1)gd^3} \frac{\hat{\xi}}{\mu_d} (\tau_* - \tau_{*c}) (\sqrt{\tau_*} - \sqrt{\tau_{*c1}}) \quad (1.7.10)$$

La stima di Ashida e Michiue (1972) per la quantità $\hat{\xi}/\mu_d$ è pari a 17. Adimensionalizzando q nella forma inizialmente proposta da Einstein (1950):

$$\phi = \frac{q}{\sqrt{(s-1)gd^3}} \quad (1.7.11)$$

si ottiene infine:

$$\phi = 17(\tau_* - \tau_{*c})(\sqrt{\tau_*} - \sqrt{\tau_{*c1}}) \quad (1.7.12)$$

Il valore di τ_{*c} suggerito da Ashida e Michiue (1972) è pari a 0.05. Si noti che la (1.7.12) è stata verificata su materiale uniforme con d compresi fra 0.3 mm e 7 mm.

Si noti tuttavia che esperienze molto dettagliate di Fernandez Luque & Van Beek (1976) hanno negato la validità dell'ipotesi di Bagnold. Vedremo nel seguito che tale validità è negata anche dalle contraddizioni cui si perviene quando ci si propone di estendere l'approccio di Ashida & Michiue (1973) al caso di correnti sul fondo non piano (Seminara & al., 1999).

E' tuttavia possibile formulare il problema della valutazione della concentrazione areale media \bar{c} in modo del tutto generale e tale da rimuovere le contraddizioni insite nell'approccio di Ashida & Michiue (1973), seguendo la recente analisi di Seminara & Solari (1999).

Consideriamo l'equazione di bilancio della massa della fase solida nello strato di fondo. Essa può' porsi nella forma

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = E - D \quad (1.7.13)$$

dove E (che sta per “entrainment”) è il volume di sedimenti mobilitato dalla corrente per unità di area del fondo e per unità di tempo, mentre D è il volume di sedimenti trasportati al fondo che deposita per unità di area e unità di tempo. In condizioni di equilibrio ($\partial/\partial t = 0$) si ha:

$$E = D \quad (1.7.14)$$

È ragionevole utilizzare quali scale sia per E che per D la quantità \sqrt{gd} . Infatti la componente verticale della velocità iniziale delle particelle deve essere tale da consentire alla particella di raggiungere una quota dell'ordine di $(2 \div 3)d$ all'apice della traiettoria; analogamente, nella fase di deposito, la particella inizia la sua traiettoria discendente essendo caratterizzata da componente verticale della velocità nulla e percorre l'intervallo $(2 \div 3)d$ essendo soggetta ad accelerazione fluttuante intorno al valore g . E' inoltre ragionevole assumere che D risulti proporzionale alla concentrazione volumetrica (\bar{c}/h_b) e che E sia funzione dell'eccesso di tensione rispetto al valore critico esercitata sul fondo. Poniamo dunque:

$$D = \alpha \sqrt{gd} \frac{\bar{c}}{h_b} \quad (1.7.15)$$

$$E = \sqrt{gd} F_e(\tau_b^* - \tau_c^*) \quad (1.7.16)$$

con τ_b^* tensione di Shields residua agente sul fondo ed α costante da determinare.

Utilizzando le (1.7.15, 16) la (1.7.14) implica:

$$\bar{c} = \frac{h_b}{\alpha} F_e(\tau_b^* - \tau_c^*) \quad (1.7.17)$$

Il lettore noterà che l'ipotesi (1.7.16) è radialmente diversa dall'ipotesi di Bagnold. Si ipotizza, qui, che l'equilibrio che si realizza in corrispondenza del fondo non sia di tipo *statico* bensì di tipo *dinamico*: dunque la tensione τ_b residua agente in corrispondenza dell'interfaccia non è vincolata a ridursi al valore critico (che implicherebbe l'equilibrio statico dell'interfaccia) bensì si ipotizza debba eccedere il valore critico affinché particelle del fondo possano continuare ad essere mobilitate, l'equilibrio dell'interfaccia essendo mantenuto attraverso l'imposto bilancio fra flusso di sedimenti mobilitati e flusso di sedimenti che depositano.

Ricordando le (1.7.1) e la (1.7.5) segue:

$$\phi = \frac{q}{\sqrt{(s-1)gd^3}} = \hat{\xi} \frac{\gamma}{\mu_d} (\sqrt{\tau_*} - \sqrt{\tau_{*c}}) F_e(\tau_b^* - \tau_c^*) \quad (1.7.18)$$

con

$$\gamma = \frac{h_b}{\alpha d} \quad (1.7.19)$$

La (1.7.18) costituisce una relazione di trasporto del tutto generale, che richiede di precisare la funzione di 'entrainment' f_e . A tale scopo occorre anzitutto istituire una relazione fra l'eccesso di tensione residua ($\tau_b^* - \tau_c^*$) e l'eccesso di tensione ($\tau_* - \tau_{*c}$) imposta dalla corrente sulla sommità dello strato di fondo. La (1.7.7) diventa infatti:

$$\tau_o = \tau_g + \tau_b \quad (1.7.20)$$

e, utilizzando la (1.7.8), segue:

$$(\tau_* - \tau_{*c}) = (\tau_{*b} - \tau_{*c}) + \mu_d \gamma F_e (\tau_{*b} - \tau_{*c}) \quad (1.7.21)$$

La (1.7.21) istituisce una relazione implicita per ($\tau_{*b} - \tau_{*c}$) in funzione di ($\tau_* - \tau_{*c}$).

Una stima della funzione di entrainment puo' ottenersi o attraverso diretti rilievi sperimentali o per confronto delle (1.7.18)-(1.7.21) con consolidate relazioni empiriche proposte per la funzione ϕ .

Si noti a tale proposito che, per grandi valori di τ_* , la quasi totalità delle relazioni empiriche proposte sono del tipo:

$$\phi \sim \tau_*^{3/2} \quad (1.7.22)$$

Ciò suggerisce che si ponga

$$F_e = A(\tau_{*b} - \tau_{*c}) \quad (1.7.23)$$

con A costante da determinarsi. Le (1.7.23) e (1.7.21) forniscono in tal caso:

$$(\tau_{*b} - \tau_{*c}) = (1 + \mu_d \gamma A)^{-1} (\tau_* - \tau_{*c}) \quad (1.7.24)$$

Si noti che la (1.7.24) assicura che l'eccesso di tensione residua ($\tau_{*b} - \tau_{*c}$) costituisce sempre una frazione non nulla dell'eccesso di tensione imposta ($\tau_* - \tau_{*c}$), un risultato confortante per la coerenza concettuale dell'approccio. Si noti inoltre che l'ipotesi di Bagnold implicherebbe $A \rightarrow \infty$. Sostituendo le (1.7.24) e (1.7.23) nella (1.7.18) si perviene alla relazione di trasporto:

$$\phi = \Gamma(\tau_* - \tau_{*c})(\sqrt{\tau_*} - \sqrt{\tau_{*c1}}) \quad (1.7.25)$$

Per confronto con i risultati di Fernandez Luque & Van Beek (1976) si trova, quindi:

$$\Gamma = 7.82 \quad \tau_{*c1} = 0.25\tau_{*c} \quad (1.7.26a, b)$$

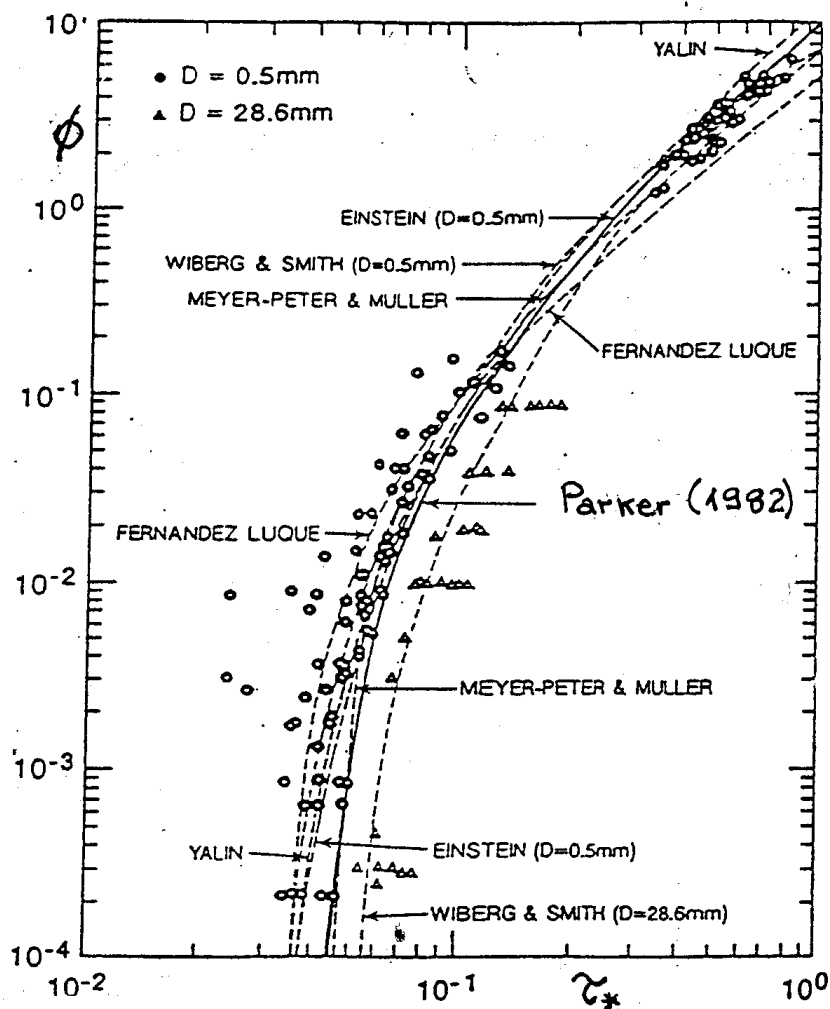


Figura 1.29: Confronto fra alcune relazioni per la valutazione della portata solida al fondo per sedimenti uniformi.

1.8 Trasporto in sospensione

1.8.1 Il ruolo delle strutture coerenti nel meccanismo della sospensione

Fin dalle prime osservazioni di Sutherland (1967) è noto che la cattura delle particelle che vengono messe in sospensione è dovuta all'effetto degli eventi turbolenti di parete detti *bursts*, osservati per la prima volta da Kline e al. (1967).

Sono numerosi i lavori che hanno seguito queste indicazioni iniziali. Il più

recente fra questi è dovuto a Niño e Garcia (1996). Il quadro che emerge è il seguente.

In modo intermittente nello spazio e nel tempo vengono emesse dal fondo parcelle di fluido caratterizzate da bassa quantità di moto longitudinale ($u' < 0$). L'eiezione dà luogo ad una struttura coerente che essenzialmente consiste in uno strato vorticoso, inclinato di un angolo di circa 14° rispetto al fondo, e caratterizzato da vorticità trasversale. A valle dello strato (distanza di circa 100-200 unità di parete da esso) viene simultaneamente generata un'intensa eiezione del secondo quadrante ($u' < 0, w' > 0$) che cattura particelle dotate di moto relativo diretto verso lo strato. Le particelle vengono quindi intrappolate nel cuore dello strato vorticoso e sospinte verso la regione esterna (fig. 1.30b).

Non tutte le particelle riescono a raggiungere la regione esterna: alcune perdono correlazione con la struttura coerente assai presto e ridepositano sul fondo (*effetto di attraversamento delle traiettorie*). Tale fenomeno è stato rilevato per la prima volta da Wells e Stock (1983). La fig. 1.30d mostra che, al crescere della tensione di Shields τ_* il numero di eiezioni che raggiungono la regione di moto esterna tende a coincidere con il numero totale delle eiezioni.

Le nuvole di particelle solide che riescono ad attraversare la *barriera logaritmica*, cioè la regione di parete, seguono poi traiettorie determinate dagli effetti di convezione e di sedimentazione. Talvolta le particelle nel corso della traiettoria discendente, sono risollecitate da nuove eiezioni provenienti dalle pareti e riprendono una traiettoria ascendente. Ciò è evidenziato dall'andamento tipico delle traiettorie riportato in fig. 1.31 (Sumer e Deigaard, 1981).

Un fenomeno di selezione granulometrica è stato osservato da Garcia e Niño (1996) nel caso di regime turbolento di parete liscia. In tale regime si formano nel substrato laminare in modo spazialmente e temporalmente intermittente sequenze regolari di vortici assiali controrotanti con valori tipici della lunghezza d'onda trasversale pari a $(100 \nu/u_\tau)$ e spessore dell'ordine di (ν/u_*) . Tali vortici determinano un'alternanza di strisce di fluido più veloci e più lente. In corrispondenza di queste ultime si osserva un accumulo di particelle di sedimenti.

Tale fenomeno scompare quando il regime turbolento diventa scabro.

1.8.2 Incipiente trasporto in sospensione

Diverse argomentazioni suggeriscono che un parametro idoneo a definire una condizione di soglia per l'incipiente trasporto in sospensione è il rapporto W_s/u_τ fra velocità di sedimentazione delle particelle e velocità di attrito.

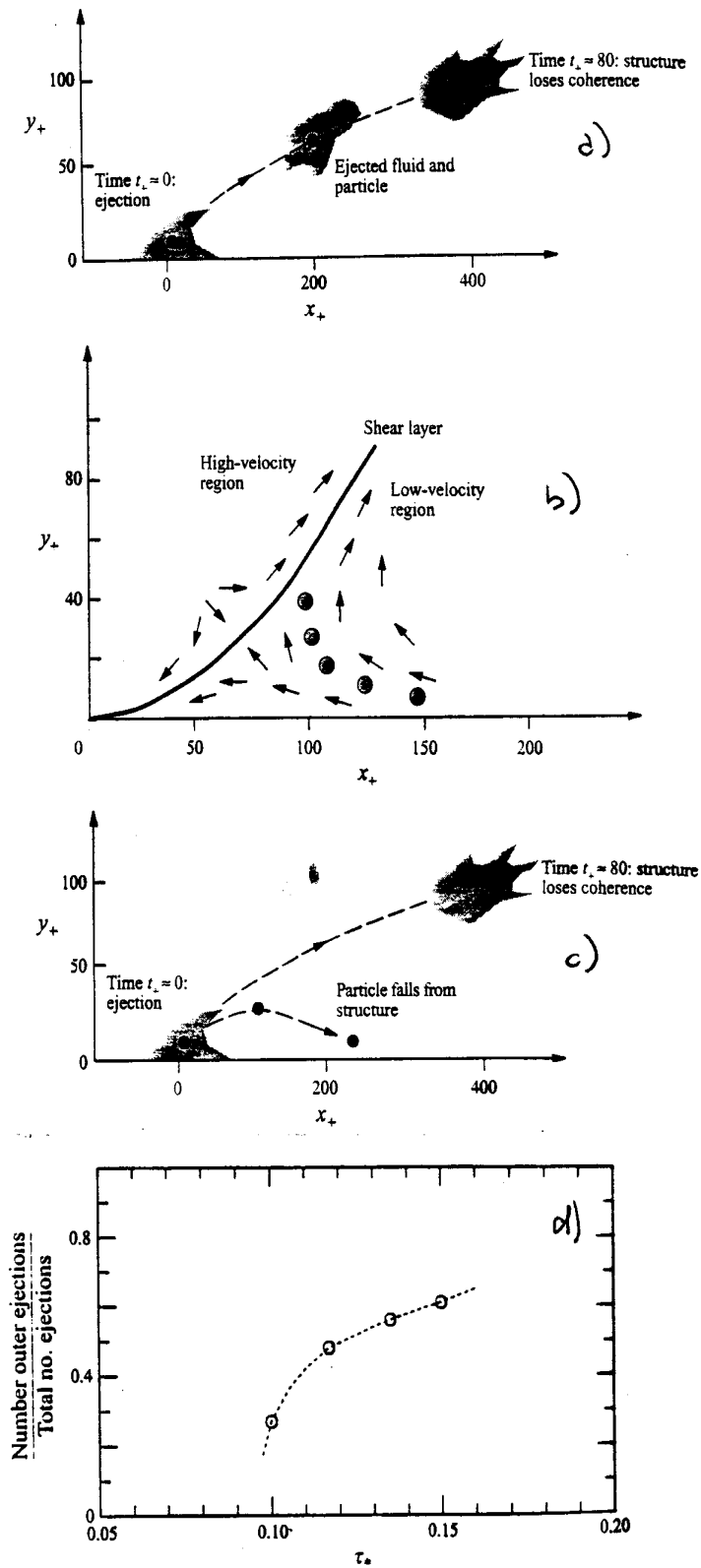


Figura 1.30: Schema della cattura delle particelle da parte dei bursts (da Garcia e Ninõ, 1996).

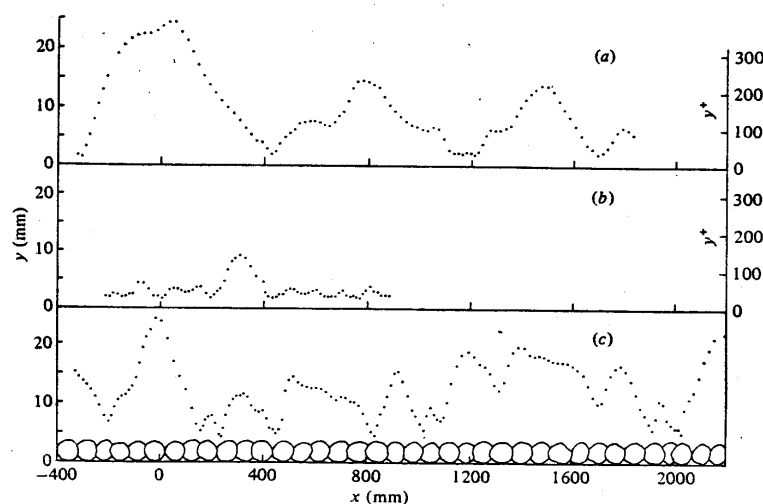


Figura 1.31: Tipico andamento di traiettorie, rilevato da Sumer e Deigaard (1981).

Tale parametro può essere interpretato come rapporto fra scala temporale idrodinamica degli eventi di parete e scala temporale associata al processo di sedimentazione. L'ordine di grandezza della velocità caratteristica degli eventi di parete è misurata infatti dalla velocità d'attrito u_τ , sicché il tempo caratteristico di eventi caratterizzati da scala spaziale L è L/u_τ . Il tempo necessario ad una particella a sedimentare sulla stessa scala spaziale è L/W_s . Se quest'ultimo è grande rispetto ad L/u_τ , cioè se il cosiddetto *numero di Stokes* $St \equiv W_s/u_\tau$ è piccolo, le particelle solide non hanno tempo sufficiente per sviluppare una dinamica significativamente diversa da quella delle strutture coerenti che le sollecitano, sicché la sospensione si comporta rispetto a queste ultime come un *tracciante passivo*. Nel caso opposto ($St \gg 1$) le strutture coerenti sono ininfluenti sulla dinamica delle particelle. Infine, nel caso intermedio ($St \simeq 1$) le particelle tendono ad essere centrifugate dalle strutture coerenti, un meccanismo del tipo *attraversamento delle traiettorie*, evidenziato da Wells e Stokes (1983).

Tali considerazioni qualitative sono state recentemente confermate da un'intensa ricerca sperimentale e numerica sulla dispersione di particelle solide da parte delle strutture coerenti della turbolenza (Crowe e al., 1988).

L'importanza del parametro W_s/u_τ era stata già evidenziata da Bagnold (1966) che afferma: “una particella resta in sospensione se l'intensità w' delle fluttuazioni verticali di velocità associate alla turbolenza in prossimità della parete risulta superiore alla velocità di sedimentazione delle particelle...”.

Dunque il criterio di Bagnold (1966) può porsi nella forma:

$$\frac{W_s}{\sqrt{w'^2}} < 1 \quad (1.8.1)$$

Poiché osservazioni sperimentali suggeriscono che $\sqrt{w'^2} \simeq u_\tau$ il criterio di Bagnold è usualmente espresso attraverso la relazione:

$$\frac{W_s}{u_\tau} = 1 \quad (1.8.2)$$

È immediato mostrare che la (1.8.2) può essere scritta in termini di variabili adimensionali come segue:

$$\tau_{*s} = \left(\frac{W_s}{\sqrt{(s-1)gd}} \right)^2 \quad (1.8.3)$$

In particolare, per bassi valori del numero di Reynolds R_p , ricordando l'espressione (1.4.2) di W_s , segue:

$$\tau_{*s} = R_p^2 \quad (1.8.4)$$

Il criterio di Bagnold è riportato in fig. 1.14.

Criterio simile a quello di Bagnold (1966) fu proposto da Engelund (1963) sulla base di una poco convincente analisi di stabilità della distribuzione di concentrazione associata al moto uniforme.

Van Rijn (1982) ha ricavato un criterio di incipiente trasporto in sospensione sulla base di osservazioni sperimentali. Il criterio utilizzato identificava il meccanismo di trasporto come *sospensione* quando la lunghezza delle traiettorie delle particelle superava 100 diametri della particella. I risultati di Van Rijn possono porsi nella forma:

$$\frac{u_\tau}{W_s} = 4R_p^{-2/3} \quad (1 \leq R_p^{2/3} \leq 10) \quad (1.8.5a)$$

$$\frac{u_\tau}{W_s} = 0.4 \quad (R_p^{2/3} > 10) \quad (1.8.5b)$$

1.8.3 Il modello continuo per lo studio del trasporto in sospensione

Il modello tradizionalmente utilizzato nelle applicazioni ingegneristiche è detto *diffusivo* per motivi che emergeranno nel seguito. Esso si fonda sulla

seguinte ipotesi.

i) Si assume che la sospensione sia sufficientemente *diluata* sicché possano essere ignorate le interazioni fra particelle ed il moto della fase fluida possa considerarsi sostanzialmente ininfluenzato dalla presenza della fase solida. Quest'ultima però è ancora trattata come un continuo: deve dunque esistere una scala spaziale sufficientemente piccola rispetto alla più piccola delle scale caratteristiche del moto turbolento della fase fluida e tuttavia grande a sufficienza da contenere un numero sufficiente di particelle sicché sia possibile definire valori medi spaziali delle grandezze che caratterizzano la fase solida.

Lumley (1976) chiarisce tale punto evidenziando che tale requisito richiede che il diametro delle particelle risulti più piccolo della scala dei microvortici di Kolmogorov η_k . Si ha

$$\eta_k \sim O(\ell Re^{-3/4}) \quad (1.8.6)$$

con ℓ scala dei macrovortici ed Re numero di Reynolds costruito con una velocità u caratteristica delle fluttuazioni di velocità e con la scala ℓ . In un alveo naturale si ha tipicamente $u \sim O(10^{-1}m)$ ed $\ell \sim O(1m)$. Dunque $Re \sim O(10^5)$ sicché η_k assume tipicamente valori dell'ordine di qualche decimo di millimetro. Sedimenti del tipo sabbia o limo sono dunque tali da rispettare il vincolo $d < \eta_k$.

Tuttavia si noti che il vincolo relativo alla possibilità di definire un valor medio della concentrazione della fase solida trattata come un continuo richiede da una parte che il volume considerato sia sufficientemente grande affinché le fluttuazioni di concentrazione siano piccole, dall'altra che sia sufficientemente piccolo rispetto alla scala delle variazioni macroscopiche della concentrazione. Lumley (1976) analizza in dettaglio le conseguenze di tale vincolo e conclude che, per una precisione del 10% nella definizione delle grandezze medie, sarebbero necessarie 10^3 particelle nel volume su cui si effettua la media. Detta c la concentrazione volumetrica della fase solida e λ la dimensione lineare caratteristica del volume su cui si effettua la media, segue:

$$\frac{c\lambda^3}{\pi d^3/6} \sim O(3000) \quad (1.8.7)$$

L'esigenza che le interazioni idrodinamiche dovute alla presenza delle particelle siano deboli richiede poi che c sia piccolo. Pur ammettendo un valore di 10^{-2} , con un diametro di 0.1 mm, seguirebbe

$$\lambda \sim 10^{-3}m \quad (1.8.8)$$

Dunque scale inferiori al mm non possono essere trattate come continue.

ii) Il secondo requisito generale consiste nell'assumere che la dinamica della singola particella differisca da quella del fluido solo per l'effetto della velocità di sedimentazione delle particelle. Posto che il numero di Reynolds del moto relativo particella fluido sia sufficientemente piccolo, la (1.3.24) suggerisce che gli effetti inerziali, di massa aggiunta e di storia risultano trascurabili rispetto alla resistenza di Stokes quando il diametro d della particella è più piccolo della più piccola scala spaziale L su cui varia il campo di moto (qui η_k).

Dunque possiamo assumere che, soddisfatto il vincolo $d < \eta_k$ risulti:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v} - W_s \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (1.8.9)$$

con \mathbf{v}_p velocità istantanea della particella e \mathbf{v} velocità istantanea della fase fluida in un intorno della particella e $\hat{\mathbf{x}}_3$ versore della coordinata verticale.

Le osservazioni precedenti suggeriscono che lo schema continuo insieme alla (1.8.9) costituiscono premessa valida per la modellazione del trasporto in sospensione per materiali a rigori molto fini e rinunciando all'obiettivo di descrivere in modo soddisfacente scale spaziali inferiori al millimetro. Nella pratica ingegneristica tali limitazioni vengono spesso ignorate estendendo la presunta validità del modello a situazioni in cui d è dell'ordine del millimetro e le concentrazioni raggiungono valori dell'ordine di 10^{-1} .

1.8.4 Equazioni di bilancio per la fase solida

Si è visto al punto 1.8.3 che la dinamica delle particelle è ben descritta dalla relazione (1.8.9), nelle ipotesi discusse.

Alla (1.8.9) occorre associare un'equazione di bilancio della massa della fase solida, cioè un'equazione di continuità.

Sia $\mathbf{q}(x_1, x_2, x_3, t)$ il vettore flusso volumetrico di sedimenti, tale cioè che $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})dS$ rappresenta la portata volumetrica di sedimenti che attraversa l'area dS . Sia inoltre $c(x_1, x_2, x_3, t)$ la concentrazione volumetrica di sedimenti definita nella forma

$$c = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta \mathcal{V}_s}{\delta V} \quad (1.8.10)$$

con $\delta \mathcal{V}_s$ volume di sedimenti contenuto nel volume $\delta \mathcal{V}$ del miscuglio, il limite essendo inteso nel senso discusso al punto precedente.

L'equazione di bilancio in forma integrale impone dunque che risulti

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} c dV + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1.8.11)$$

con \mathcal{V} porzione arbitraria del volume del miscuglio ed \mathcal{S} sua frontiera.

Utilizzando la trasformazione di Ostrogradski-Gauss la (1.8.11) diventa:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} \right) dV = 0 \quad (1.8.12)$$

Data l'arbitrarietà di \mathcal{V} la (1.8.12) porge:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (1.8.13)$$

La (1.8.13) rappresenta la formulazione differenziale dell'equazione di continuità della fase solida.

Al fine di proseguire la trattazione occorre osservare che, ricordando la (1.8.9), il flusso volumetrico della fase solida si scrive:

$$\mathbf{q} = c\mathbf{v}_p = c(\mathbf{v} - W_s \hat{\mathbf{x}}_3) \quad (1.8.14)$$

Sostituendo la (1.8.14) nella (1.8.13) si ottiene:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) - W_s \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0 \quad (1.8.15)$$

o, ricordando l'equazione di continuità per la fase fluida (che si ipotizza non modificata dalla presenza della fase solida):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - W_s \frac{\partial c}{\partial x_3} = 0 \quad (1.8.16)$$

Il carattere turbolento del moto rende l'equazione (1.8.15) praticamente insolubile nella sua formulazione istantanea. È opportuno quindi effettuare la decomposizione di Reynolds. Indichiamo con C e \mathbf{V} i valori medi probalistici di \mathbf{v} e c e con \mathbf{v}' e c' le relative fluttuazioni. Segue:

$$\langle c\mathbf{v} \rangle = C\mathbf{V} + \langle c'\mathbf{v}' \rangle \quad (1.8.17)$$

e, ricordando che in un moto turbolento risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.8.18)$$

si ottiene infine:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C - W_s \frac{\partial C}{\partial x_3} = -\nabla \cdot \langle \mathbf{v}'c' \rangle \quad (1.8.19)$$

La (1.8.19) rappresenta l'equazione che governa il trasporto in sospensione in regime turbolento.

Essa pone un *problema di chiusura* del tutto analogo a quello posto dalle equazioni di Reynolds: istituire un legame fra il flusso $\langle \mathbf{v}'c' \rangle$ associato alle fluttuazioni di velocità e di concentrazione e le caratteristiche medie del moto e della distribuzione di concentrazione.

Esaminiamo anzitutto il caso più semplice, quello del *trasporto in sospensione in condizioni di equilibrio*.

1.8.5 Trasporto in sospensione in condizioni di equilibrio

Consideriamo una corrente turbolenta piana uniforme a superficie libera che trasporta in sospensione un carico di materiale solido in condizioni di esatto equilibrio, sicché il flusso di particelle mobilitato in media dalla corrente bilancia il flusso che in media deposita sul fondo.

In tali condizioni e, con riferimento alla terna cartesiana in fig. 1.32, si può porre:

$$\mathbf{V} = (U(z), 0, 0), C = C(z) \quad (1.8.20)$$

L'equazione di bilancio (1.8.19) assume qui la forma:

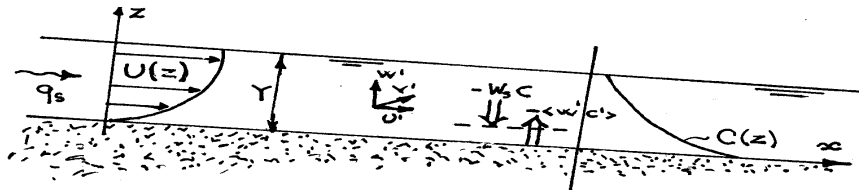


Figura 1.32: Distribuzione di concentrazione nel trasporto in sospensione in condizioni di equilibrio.

$$-W_s \frac{dC}{dz} = -\frac{d}{dz} \langle w'c' \rangle \quad (1.8.21)$$

dunque:

$$\frac{d}{dz} (W_s C + \langle -w'c' \rangle) = 0 \quad (1.8.22)$$

La (1.8.22) fisicamente individua un bilancio fra flusso verticale di sedimenti indotto dal processo di sedimentazione e flusso verticale associato alle fluttuazioni turbolente della componente verticale di velocità.

Il classico approccio al problema di chiusura utilizzato nella letteratura ingegneristica è di tipo *diffusivo*. Si assume cioè che il flusso turbolento sia rappresentabile alla Fick, introducendo una *diffusività turbolenta* \mathcal{D}_T nella forma:

$$\langle -w'c' \rangle = \mathcal{D}_T \frac{dC}{dz} \quad (1.8.23)$$

La struttura della diffusività turbolenta può assumersi coincida con la struttura della viscosità turbolenta che interpreta il trasporto turbolento di quantità di moto. L'ipotesi sottesa da tale schema è che le particelle solide costituiscano sostanzialmente un tracciante passivo che segue la dinamica del vettore fluido.

Poniamo dunque:

$$\mathcal{D}_T = \nu_T = ku_\tau z \left(1 - \frac{z}{Y}\right) \quad (1.8.24)$$

Le (1.8.22, 23) implicano:

$$\mathcal{D}_T \frac{dC}{dz} + W_s C = costante = 0 \quad (1.8.25)$$

avendo utilizzando la condizione di flusso solido verticale nullo sulla superficie libera. Facendo uso della (1.8.24) segue:

$$\frac{dC}{C} = -\frac{W_s}{ku_\tau} \frac{dz}{z(1 - z/Y)} \quad (1.8.26)$$

donde

$$\ln C = -Z \left[\ln \frac{z}{Y} - \ln \left(1 - \frac{z}{Y}\right) + costante \right] \quad (1.8.27)$$

essendo Z un parametro adimensionale, detto *numero di Rouse* dal nome dell'autore che per primo ha proposto l'analisi qui esposta. La definizione di Z è la seguente:

$$Z = \frac{W_s}{ku_\tau} \quad (1.8.28)$$

Segue

$$C = costante \left(\frac{1 - z/Y}{z/Y} \right)^Z \quad (1.8.29)$$

La (1.8.29) definisce la distribuzione della concentrazione media a meno di una costante. Un confronto fra tale distribuzione e numerosi risultati sperimentali è riportato nella fig. 1.33 (Vanoni, 1946).

La definizione del valore della costante richiede la formulazione di una opportuna condizione al contorno in corrispondenza del fondo.

A tale questione sono stati dedicati intensi sforzi di ricerca nel corso degli ultimi decenni.

Il quadro offerto da tale ricerca appare ancora sostanzialmente empiricamente fondato. L'idea sottesa in tutte le formulazioni della condizione al contorno proposte in letteratura per il caso di trasporto in condizioni di equilibrio consiste nell'ipotizzare che, come conseguenza del bilancio fra flusso medio di sedimenti che deposita sul fondo e flusso mediamente mobilitato dalla turbolenza di parete, si instauri in prossimità del fondo una *concentrazione di equilibrio* C_e il cui valore è funzione crescente del parametro di Shields.

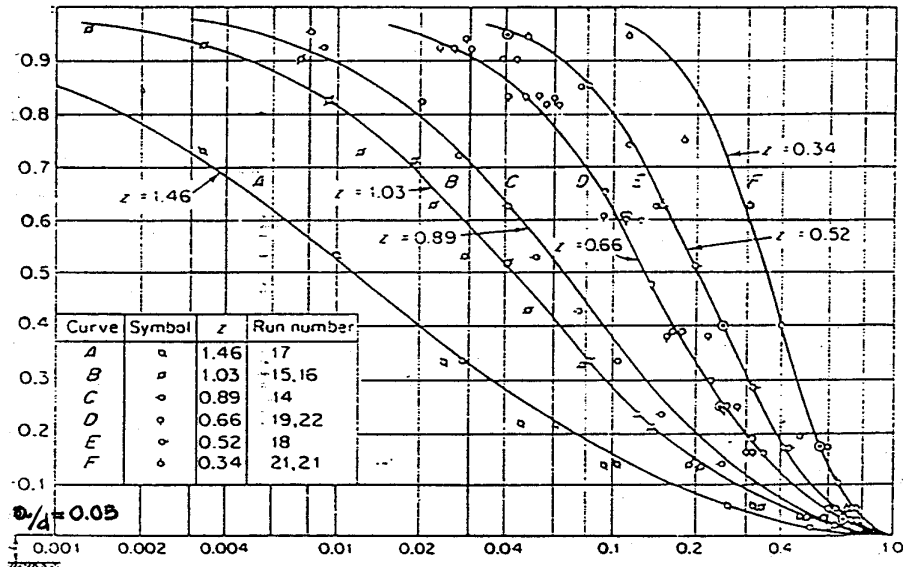


Figura 1.33: Confronto fra distribuzione teorica della concentrazione media e osservazioni sperimentali (Vanoni, 1946).

Diverse relazioni sono state proposte in letteratura per C_e e per la *distanza convenzionale del fondo* a alla quale la condizione va imposta.

Elenchiamo le più significative.

- Smith e Mc Lean (1977)

$$C_e = 0.65 \frac{\gamma_o T}{1 + \gamma_o T} \quad (1.8.30)$$

$$a = 26.3(\tau_*' - \tau_{*c})d + \epsilon \quad (1.8.31)$$

essendo

$$\gamma_o = 0.0024, \quad T = \frac{\tau_*' - \tau_{*c}}{\tau_{*c}} \quad (1.8.32)$$

ed avendo indicato con l'apice la *componente d'attrito* della tensione di Shields. Tale nozione verrà precisata nel seguito, quando verrà discusso il caso in cui sul fondo del corso d'acqua sono presenti *forme di fondo* (vedi Cap. 2). Nel caso di trasporto in condizioni di equilibrio qui esaminato la componente d'attrito τ_*' di τ_* coincide con τ_* stesso essendo il fondo piano.

Inoltre nella (1.8.31) ϵ rappresenta la scabrezza assoluta del fondo, stimabile come $2.5 d$, mentre τ_{*c} va calcolata in funzione di R_p per esempio utilizzando la formula di Brownlie (1.6.5).

- Van Rijn (1984)

$$C_e = 0.015 \frac{d}{a} \left(\frac{\tau'_*}{\tau_{*c}} - 1 \right)^{1.5} R_p^{-0.2} \quad (1.8.33)$$

$$a = \epsilon_e (\epsilon_e > 0.01Y) \quad (1.8.34a)$$

$$a = 0.01Y (\epsilon_e < 0.01Y) \quad (1.8.34b)$$

con $\epsilon_e = d_{90}$ nel caso qui esaminato di fondo piano. Il caso di fondo a dune verrà esaminato nel punto 2.

- Garcia e Parker (1991)

$$C_e = \frac{AZ_u^5}{1 + \frac{A}{0.3}Z_u^5}, \quad Z_u = \frac{u'_\tau}{W_s} R_p^{0.6}, \quad A = 1.3 \times 10^{-7} \quad (1.8.35)$$

$$a = 0.05Y \quad (1.8.36)$$

Anche in questo caso per la valutazione della componente d'attrito u'_τ della velocità d'attrito u_τ nel caso di fondo a dune si rimanda al cap. 2.

Nota la concentrazione di equilibrio, la (1.8.29) diventa:

$$C = C_e \left[\frac{(1 - \zeta)/\zeta}{(1 - \zeta_a)/\zeta_a} \right]^Z \quad (1.8.37)$$

avendo definito

$$\zeta = \frac{z}{Y} \quad \zeta_a = \frac{a}{Y} \quad (1.8.38a, b)$$

Utilizzando la (1.8.37) è immediato il calcolo della concentrazione mediata lungo la verticale. Si trova

$$\tilde{C} = C_e \int_{\zeta_a}^1 \left[\frac{(1 - \zeta)/(1 - \zeta_a)}{\zeta/\zeta_a} \right]^Z d\zeta \quad (1.8.39)$$

Einstein (1950) ha espresso la (1.8.39) nella forma

$$\tilde{C} = \frac{C_e \zeta_a}{0.216} I_1 \quad (1.8.40)$$

con I_1 integrale tabulato in fig. 1.34.

Analogamente può effettuarsi il calcolo della portata volumetrica unitaria di sedimenti trasportati in sospensione.

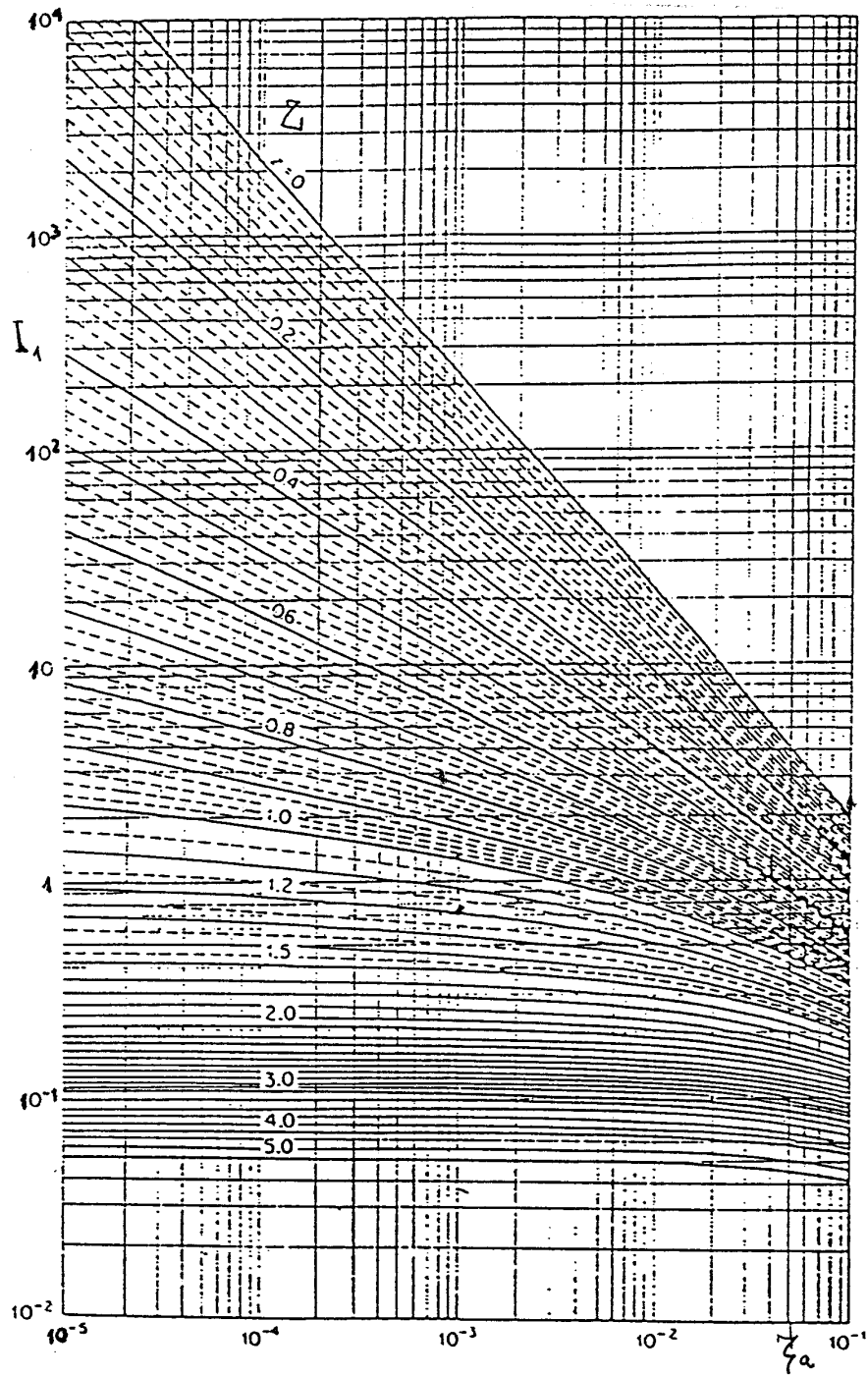


Figura 1.34:

Si ha:

$$q_s = \int_a^Y U(z)C(z)dz \quad (1.8.41)$$

Utilizzando la (1.6.15) segue:

$$q_s = \frac{u_\tau C_e Y}{k} \int_{\zeta_n}^1 \left[\ln \left(\frac{30Y}{k_s} \right) + \ln \zeta \right] \left[\frac{(1-\zeta)/\zeta}{(1-\zeta_a)/\zeta_a} \right]^Z d\zeta \quad (1.8.42)$$

donde:

$$q_s = \frac{u_\tau C_e a}{k \times 0.216} \left[\ln \left(\frac{30Y}{k_s} \right) I_1 - I_2 \right] \quad (1.8.43)$$

essendo

$$\frac{\zeta_a I_2}{0.216} = \int_{\zeta_a}^1 \ln \zeta \left[\frac{(1-\zeta)/\zeta}{(1-\zeta_a)/\zeta_a} \right]^Z d\zeta \quad (1.8.44)$$

La funzione I_2 è tabulata in fig. 1.35.

1.9 Trasporto solido in presenza di forme di fondo di piccola scala

Il fondo mobile delle correnti fluviali non risulta quasi mai piano. Esso si presenta invariabilmente caratterizzato dalla presenza di perturbazioni, stazionarie o migranti, di scala spaziale variabile in un intervallo molto grande. Definiremo di piccola scala le forme caratterizzate da lunghezze tipicamente dell'ordine al più della profondità locale media della corrente. La loro presenza influenza significativamente le resistenze al moto ed il trasporto solido della corrente trattata come mediamente uniforme. Definiremo di grande scala le forme caratterizzate da lunghezze tipicamente dell'ordine della larghezza del corso d'acqua o superiore. La loro presenza influenza considerevolmente i processi di erosione e deposito nel corso d'acqua. Lo studio delle forme di fondo sarà oggetto di approfondita analisi nei capitoli seguenti che riguarderanno la morfodinamica fluviale. Ci limitiamo qui ad analizzare alcuni aspetti delle forme di fondo di piccola scala, di rilievo per lo studio del trasporto solido nelle correnti in moto trattato come mediamente uniforme.

1.9.1 Le forme di fondo di piccola scala

Al crescere della velocità della corrente si osserva la formazione di una sequenza di forme di fondo di piccola scala.

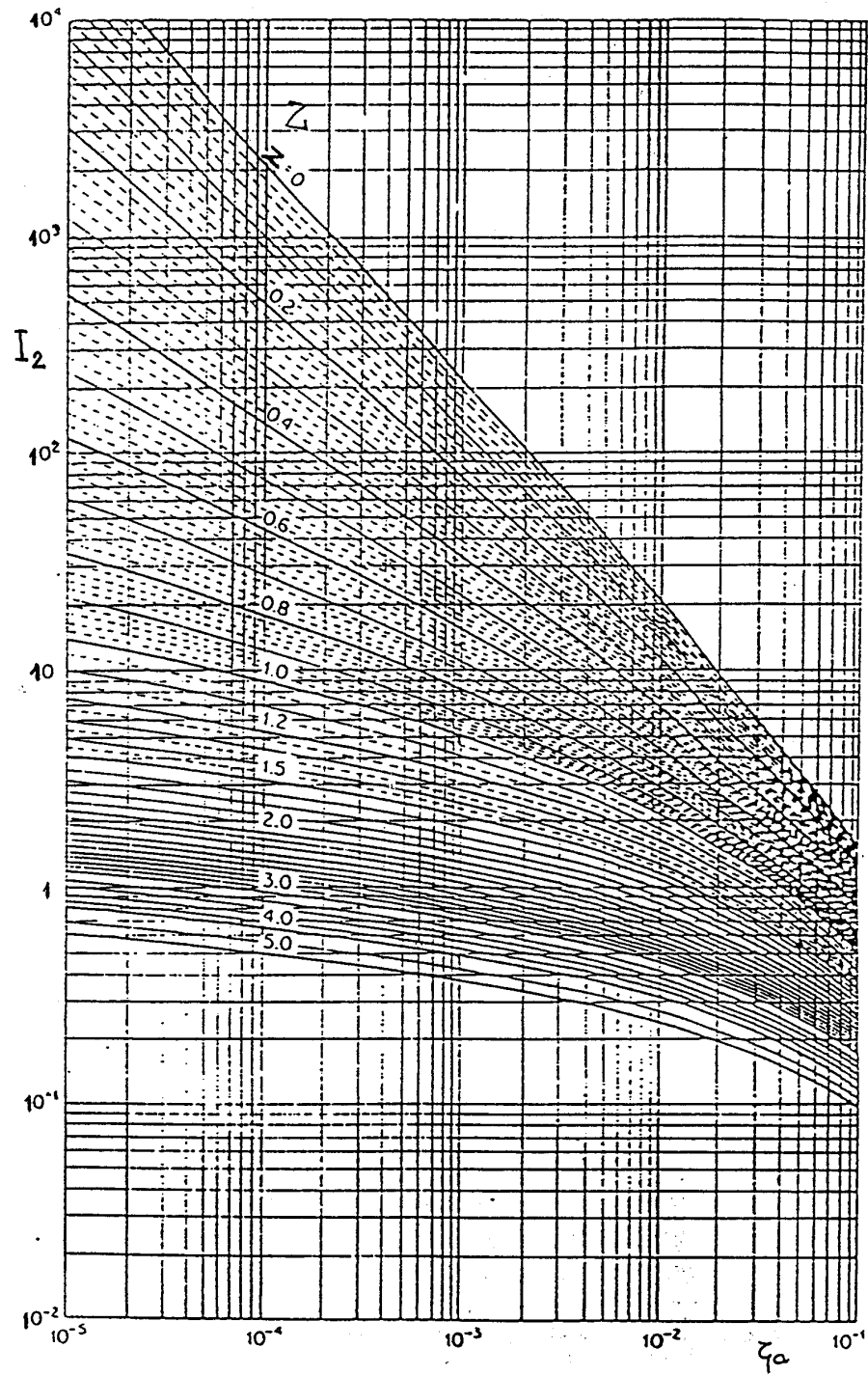


Figura 1.35:

Per valori bassi della velocità, prossimi al valore corrispondente all'incipiente trasporto di sedimenti, e posto che il regime idrodinamico sia turbolento di parete liscia, si ha la formazione dei cosiddetti *ripples*. Si tratta di onde di sedimenti che migrano invariabilmente verso valle, hanno profilo pressochè triangolare, con fronti pronunciati e spesso arcuati. La loro ampiezza è molto minore della profondità e la loro lunghezza dell'ordine di alcune decine di centimetri.

Al crescere della velocità i ripples cedono il posto a forme simili, ma di dimensioni maggiori, dette *dune*. Anch'esse migrano invariabilmente verso valle, hanno ampiezze dell'ordine di una frazione della profondità (tipicamente $1/6$) e lunghezze dell'ordine di un multiplo della profondità, tipicamente $(5-10 Y)$.

Le creste delle dune sono spesso (anche se non sempre) pressochè rettilinee o poco arcuate.

La propagazione dei ripples come delle dune è determinata da un continuo processo di erosione della faccia di monte e di deposito a valle della cresta.

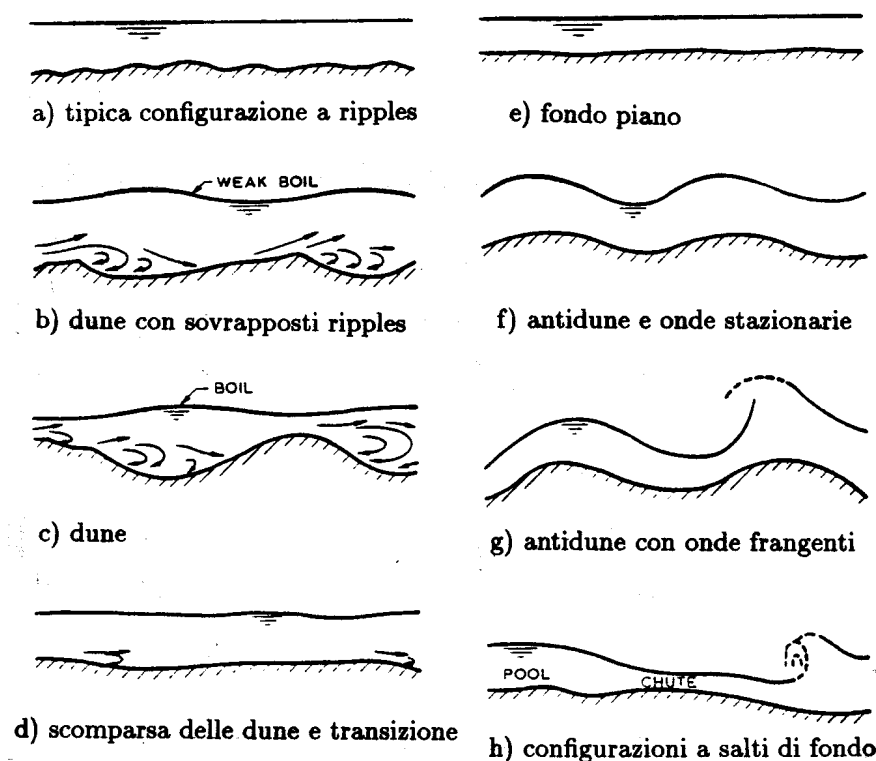


Figura 1.36: Descrizione della sequenza di forme di fondo che si osservano nelle correnti a fondo mobile al crescere del numero di Froude.

Un ulteriore aumento della velocità della corrente conduce ad una progressiva riduzione dell'ampiezza delle dune e, infine, alla loro scomparsa. Il fondo riassume quindi un assetto piano. L'effetto di un incremento della velocità della corrente è quello di indurre la formazione di forme dette *antidune*, di caratteristiche marcatamente diverse da quelle delle dune:

- l'assetto della superficie libera è ondulato ma in fase con le forme di fondo, al contrario delle dune caratterizzate da assetto della superficie libera in opposizione di fase rispetto al fondo;
- le antidune si propagano tipicamente verso monte, anche se si osservano talvolta antidune che migrano verso valle;
- la forma delle antidune che si propagano verso monte è molto prossima ad una sinusoidale, non presenta cioè un fronte ripido;
- il campo di moto, in presenza di antidune, non è caratterizzato da separazione dello strato limite.

Il meccanismo di formazione delle forme di fondo sarà analizzato nel seguito. In questo capitolo ci limiteremo a discutere gli effetti delle forme di fondo di piccola scala sul trasporto solido e sulle resistenze di correnti a fondo mobile (mediamente) uniformi.

1.9.2 I criteri di formazione delle forme di fondo di piccola scala

L'individuazione di criteri di formazione delle forme di fondo di piccola scala è stata oggetto di analisi teoriche e osservazioni sperimentali ad opera di numerosi autori.

In particolare la teoria lineare di Sumer e Bakioglu (1984) fornisce quale *criterio di formazione dei ripples* la condizione:

$$\frac{u_\tau d}{\nu} < 23 \quad (1.9.1)$$

in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali ($u_\tau d/\nu < 25$).

Nel caso delle *dune* il regime di formazione è quello subcritico (regime I), insieme alla condizione $\tau_* > \tau_{*c}$. Si noti infatti che τ_* può porsi nella forma:

$$\tau_* = \frac{F_o^2}{C^2(s-1)d/Y_o} \quad (1.9.2)$$

Dunque, per un valore fissato del numero di Froude minore di 1 e assegnato Y_o (cioè per assegnate condizioni idrodinamiche) si ha che τ_* decresce in misura

inversamente proporzionale a d , donde, per valori sufficientemente piccoli di F_o^2 e sufficientemente grandi per d , τ_* può risultare inferiore a τ_{*c} . È questo il motivo per cui le dune diventano progressivamente meno presenti al crescere di d fino a scomparire in alvei caratterizzati da valori di d intorno a qualche millimetro.

Nel caso delle *antidune* il regime di formazione è quello supercritico e di ciò si ha una conferma sperimentale più che soddisfacente (Engelund, 1970) (vedi fig. 1.37).

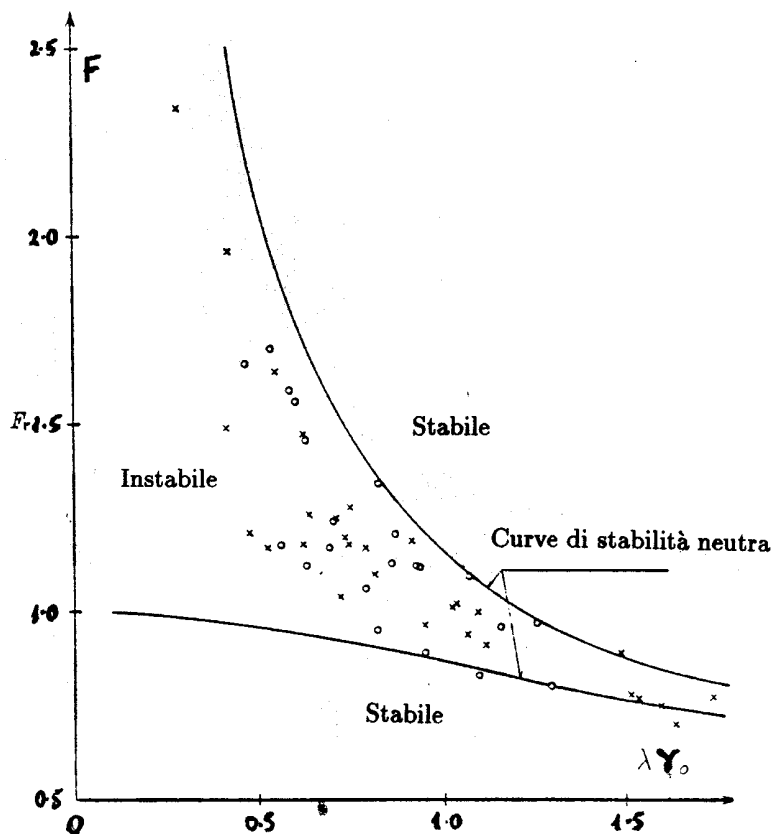


Figura 1.37: Il buon accordo fra la teoria della formazione delle antidune (Engelund, 1970) e i risultati sperimentali di diversi autori (o $d = 0.19 - 0.47$ mm, Guy e al. (1966); $d = 0.232 - 0.55$ mm, Kennedy (1961)).

Dal punto di vista pratico i regimi di esistenza delle diverse forme di fondo sono stati empiricamente definiti attraverso numerosi abachi. Il più utilizzato fra questi è dovuto a Simons e Richardson (1961) ed è riportato in fig. 1.38. Si noti che i valori di soglia di $u_\tau d/\nu$ per la scomparsa dei ripples sono in questo grafico un po' più elevati rispetto ai valori osservati sperimentalmente.

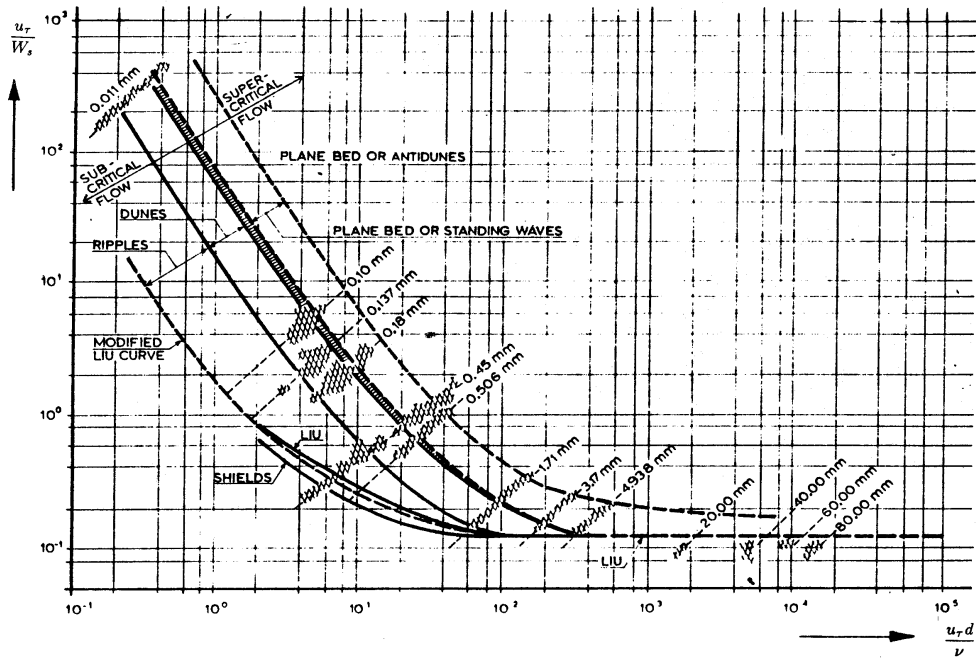


Figura 1.38: Il grafico di Simons & Richardson (1961) che individua i regimi di formazione di ripples, dune, onde stazionarie e antidune.

Un semplice criterio proposto da Van Rijn (1984) identifica il regime a ripples-dune in funzione del parametro T definito nella forma

$$T = \frac{\tau_*' - \tau_{*c}}{\tau_{*c}} \quad (1.9.3)$$

Van Rijn (1984) suggerisce:

$$0 < T \leq 25 \quad (\text{Fondo a dune}) \quad (1.9.4)$$

$$T > 25 \quad (\text{Fondo piano}) \quad (1.9.5)$$

1.9.3 Le resistenze nelle correnti con fondo a dune

Consideriamo un fondo ricoperto da dune bidimensionali con riferimento alle notazioni in fig. 1.39, l'azione resistente complessiva esercitata dalla parete sul fluido può porsi nella forma:

$$D = b_f \int_0^L [(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{x}}] dl \quad (1.9.6)$$

avendo indicato con b_f la larghezza del fondo con ($b_f dl$) l'area dell'elemento superficiale appartenente al fondo, con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale al fondo e con $\hat{\mathbf{x}}$ il versore dell'asse x . Una tensione tangenziale resistente efficace $\bar{\tau}_o$ può quindi definirsi come segue:

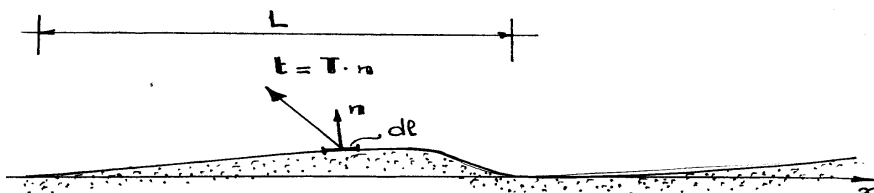


Figura 1.39: Schema di un fondo a dune e notazioni.

$$\bar{\tau}_o = \frac{D}{b_f L} \quad (1.9.7)$$

Ciò equivale a definire un 'moto uniforme efficace', che interpreta la presenza delle dune come un effetto di macroscabrezza, ponendo

$$\bar{\tau}_o = \rho g \cdot Y_o i_f \quad (1.9.8)$$

avendo indicato con Y_o una 'profondità del moto uniforme efficace'.

È opportuno distinguere fra una *componente di attrito* τ'_o ed una *componente di forma* τ''_o , rispettivamente definite dalle 1.9.6, 7, 8) con \mathbf{T} sostituito dalla sua componente deviatorica o isotropa rispettivamente. Dunque:

$$\tau_o = \tau'_o + \tau''_o \quad (1.9.9)$$

Tale partizione delle tensioni è importante poichè risulta diverso il ruolo che le due componenti della tensione esercitano sulla dinamica delle fasi fluida e solida. È a cagione di ciò che sono stati sviluppati in letteratura numerosi procedimenti per la definizione quantitativa di tale partizione.

Il procedimento di Einstein

Il procedimento proposto da Einstein (1950) assume che siano note velocità media, pendenza e scabrezza assoluta del fondo. Fornisce quindi un metodo per la valutazione delle tensioni e della profondità. Poniamo

$$\tau_o = \frac{1}{C^2} \rho U^2 \quad ; \quad \tau'_o = \frac{1}{C'^2} \rho U^2 \quad ; \quad \tau''_o = \frac{1}{C''^2} \rho U^2 \quad (1.9.10a - c)$$

donde

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{C'^2} + \frac{1}{C''^2} \quad (1.9.11)$$

Einstein (1950) pone, inoltre:

$$\tau_o = \rho g Y_o i_f = \rho g i_f (Y'_o + Y''_o) \quad (1.9.12)$$

identificando cioè una componente di attrito Y'_o ed una componente di forma Y''_o della profondità media.

Infine le componenti di attrito C' ed Y'_o si assumono legate dalla relazione valida nel moto uniforme in assenza di forme di fonde, dunque:

$$C' = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{11Y'_o}{k_s} \right) \quad (1.9.13)$$

con k_s scabrezza assoluta del fondo. Ma, per le (1.9.10b) e (1.9.12), si ha:

$$C' = \frac{\mathcal{U}^2}{g i_f Y'_o} \quad (1.9.14)$$

Ne consegue la relazione implicita per Y'_o :

$$\frac{\mathcal{U}^2}{g i_f} = \frac{Y'_o}{k} \ln \left(\frac{11Y'_o}{k_s} \right) \quad (1.9.15)$$

che consente la valutazione di Y'_o , noti $\mathcal{U}_{,i_f}$ e k_s . Se risulta nota anche la profondità media Y_o la partizione viene completata come segue:

$$Y''_o = Y_o - Y'_o \quad (1.9.16)$$

$$C = \frac{\mathcal{U}^2}{g Y_o i_f} \quad (1.9.17)$$

$$\frac{1}{C''^2} = \frac{1}{C^2} - \frac{1}{C'^2} \quad (1.9.18)$$

$$\tau''_o = \rho g i_f (Y_o - Y'_o) \quad (1.9.19)$$

La partizione di Engelund & Hansen (1967)

Il procedimento proposto da Einstein (1950) sostanzialmente assume nota la tensione totale τ_o e fornisce un metodo per decomporla nelle sue componenti di attrito e di forma.

Se, viceversa, fosse nota la struttura di tale decomposizione sarebbe possibile affrontare il *problema di progetto*, cioè quello di determinare la profondità

della corrente, una volta che risultino assegnate la portata e la pendenza, oltre naturalmente alla forma della sezione e alla scabrezza assoluta.

Engelund & Hansen (1967) hanno fornito la struttura della relazione fra τ_o e τ'_o nella seguente forma adimensionale, ottenuta su basi empiriche:

$$\tau'_* = 0.06 + 0.4\tau_*^2 \quad (1.9.20)$$

essendo τ'_* e τ_* le tensioni di Shields costruite rispettivamente con la sola componente di attrito τ'_o della tensione media al fondo e con la tensione totale τ_o . La relazione (1.9.20) è stata successivamente lievemente modificata da Engelund & Fredsøe (1982) nella forma:

$$\tau'_* = 0.06 + 0.3\tau_*^{3/2} \quad (1.9.21)$$

La (1.9.21) è riportata in fig. 1.40. Con l'utilizzo della (1.9.21) il problema di progetto viene affrontato come segue.

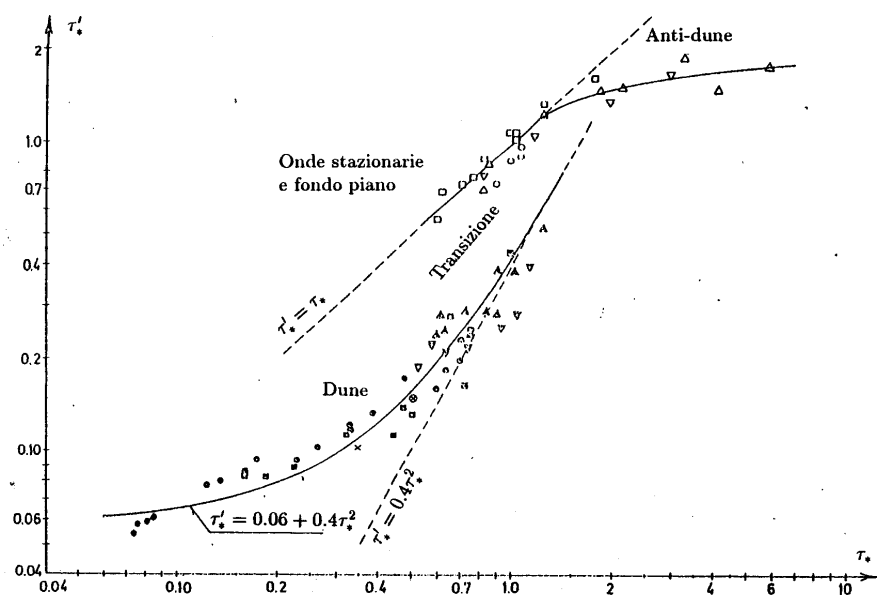


Figura 1.40: La relazione fra tensione di Shields τ_* e sua componente d'attrito τ'_* nel caso di fondo a dune secondo Engelund e Fredsøe (1982).

Si assegna Y'_o , si valuta quindi C' attraverso la (1.9.13) ed \bar{U} attraverso la (1.9.10b). Noto Y'_o si ottiene immediatamente τ'_o e quindi τ'_* . La (1.9.21) fornisce quindi τ_* , da cui τ_o , e infine Y_o . Segue

$$Q = bY_o\bar{U} \quad (1.9.22)$$

Ciò consente di costruire una scala di deflusso e quindi risolvere per tentativi il problema di progetto.

Si noti che la formazione e la scomparsa delle forme di fondo nei corsi d'acqua sabbiosi dà luogo a un comportamento non monotono della scala di deflusso. L'andamento tipico della tensione media al fondo al crescere delle velocità è quello indicato in fig. 1.41. Alla rapida caduta di τ_o corrisponde

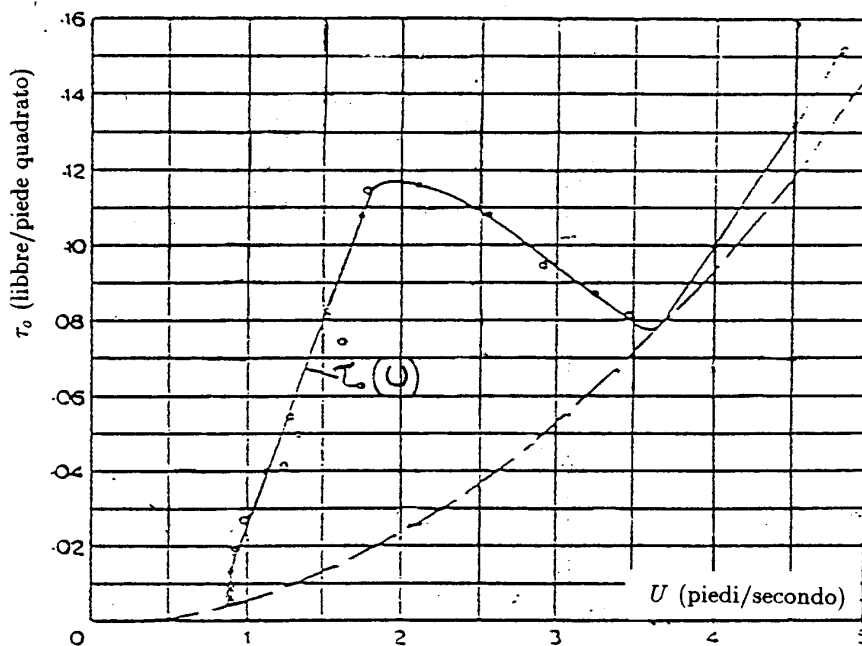


Figura 1.41: Tipico andamento della tensione al fondo in funzione della velocità in una corrente con fondo a dune (da Raudkivi).

una riduzione di profondità: si ha cioè il curioso fenomeno di una riduzione di profondità al crescere della portata (vedi anche fig. 1.42). Tale fenomeno può peraltro dar luogo ad un effetto di isteresi poichè la ricomparsa delle dune al diminuire della portata non avviene per lo stesso valore di portata per cui le dune erano scomparse nella fase di crescita.

Poichè la scomparsa delle dune avviene in genere per un valore di portata di poco inferiore a quello che rende totalmente interessato l'alveo inciso (bankfull stage) la questione può essere rilevante, in particolare per i suoi riflessi sulla navigazione.

Esistono molti altri procedimenti empirici per la valutazione della scala di deflusso di correnti a fondo mobile in presenza di dune. Si rimanda a questo proposito alla rassegna di Seminara e Tubino (1996, pag. 380).

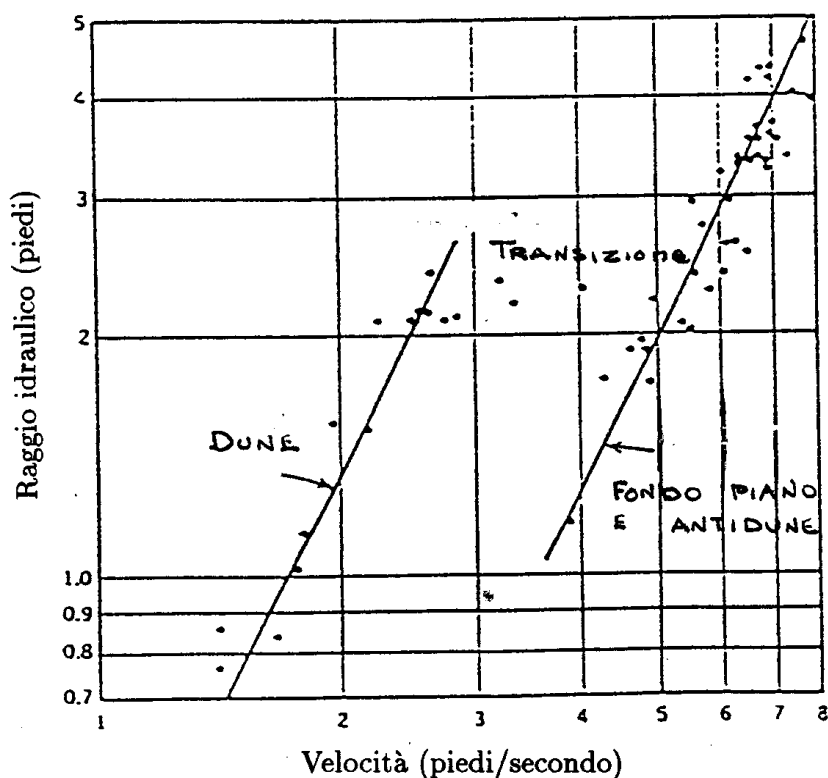


Figura 1.42: Scala di deflusso per il Rio Grande presso Bernalillo (Nordin, 1969).

Riportiamo qui ancora soltanto il procedimento proposto da Van Rijn (1984). Tale autore definisce la scabrezza assoluta del fondo in funzione dell'ampiezza A e della lunghezza L delle dune, empiricamente definite dalle relazioni:

$$A = 0.11Y_o \left(\frac{d_{50}}{Y_o} \right)^{0.3} [1 - \exp(-0.5T)](25 - T) \quad (1.9.23)$$

$$L = 7.3Y_o \quad (1.9.24)$$

con Y_o profondità della corrente e T parametro definito dalla (1.9.3). La scabrezza assoluta k_s da introdurre nella relazione che definisce il coefficiente adimensionale di Chézy

$$C = 2.5 \ln \left(\frac{12R}{k_s} \right) \quad (1.9.25)$$

ha la forma

$$k_s = 3d_{90} + 1.1A[1 - \exp(-25A/L)] \quad (1.9.26)$$

Naturalmente tale procedimento va utilizzato insieme al criterio di esistenza del regime a dune proposto dallo stesso autore ($0 < T < 25$).

Noti R, i_f e la distribuzione granulometrica, si assume un valore di \mathcal{U} , e si calcola la $u'_\tau = \mathcal{U}C'$, utilizzando per C' il valore calcolato attraverso la (1.9.25) con k_s pari alla sola 'scabrezza d'attrito' $3 D_{90}$. Noto u'_τ si calcolano τ'_*, T , quindi A e L ed infine la scabrezza totale k_s , donde C e la velocità \mathcal{U} attraverso la relazione di Chézy. Si itera quindi fino alla convergenza del valore di \mathcal{U} finale al valore di tentativo.