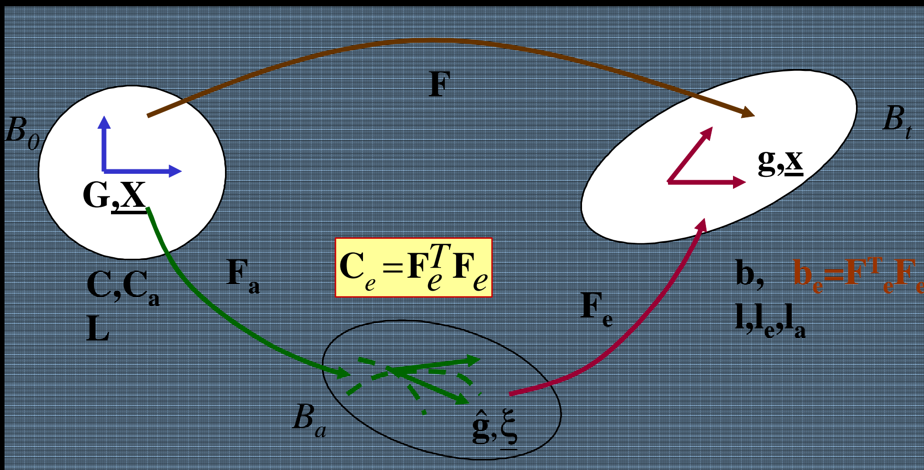
GMA08
RIUNIONE DEL GRUPPO MATERIALI DELL'ASSOCIAZIONE ITALIANA DI MECCANICA TEORICA ED APPLICATA (AIMETA)

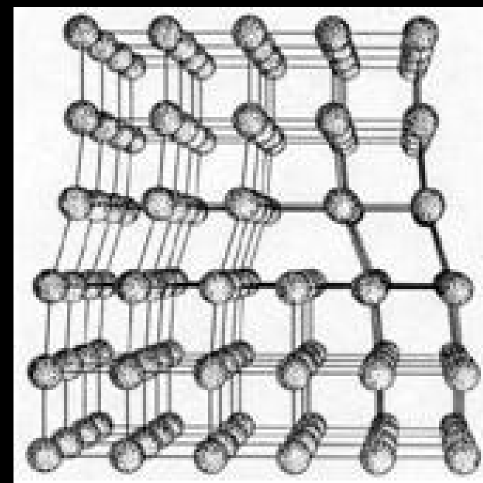
Genova, 29 febbraio - 1 marzo 2008

Modellazione di materiali anisotropi in deformazione finita con modifica di struttura

Prof. Ing. Massimo Cuomo – Università di Catania
Dott. Ing. Mario Fagone - Università di Firenze

Preliminari





$$\dot{\mathbf{M}}_i = \mathbf{0}$$

Gruppo di simmetria

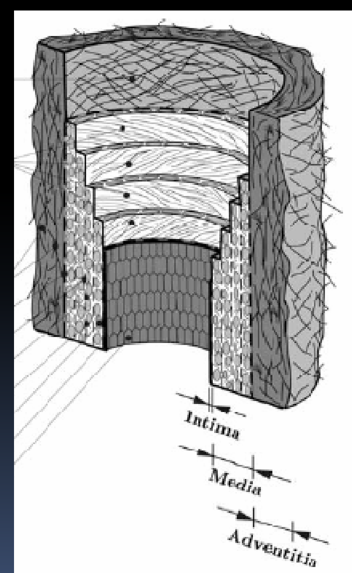
$$\mathcal{G} = \left\{ \mathbf{Q} \in O(3) \mid \phi(\langle \mathbf{Q} \rangle \{\mathbf{A}_a\}) = \phi(\{\mathbf{A}_a\}) \right\}$$

Tensori di struttura

$$\mathbf{M}_i : \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{M}_i\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}_i$$

Principio di Neumann

Teorema di isotropizzazione



Crescita nei biomateriali

$$\dot{\mathbf{M}}_i \neq \mathbf{0}$$

Rodriguez, Castellano
J. Biomechanics 2006

$$f(\{\mathbf{D}_i\}) = \hat{f}(\{\mathbf{D}_i\}, \{\mathbf{M}_j\}) = \hat{f}(\{\mathbf{Q}\mathbf{D}_i\mathbf{Q}^T\}, \{\mathbf{Q}\mathbf{M}_j\mathbf{Q}^T\}) \; \forall \mathbf{Q} \in O(3)$$

Gruppi di simmetria e dissipazione meccanica

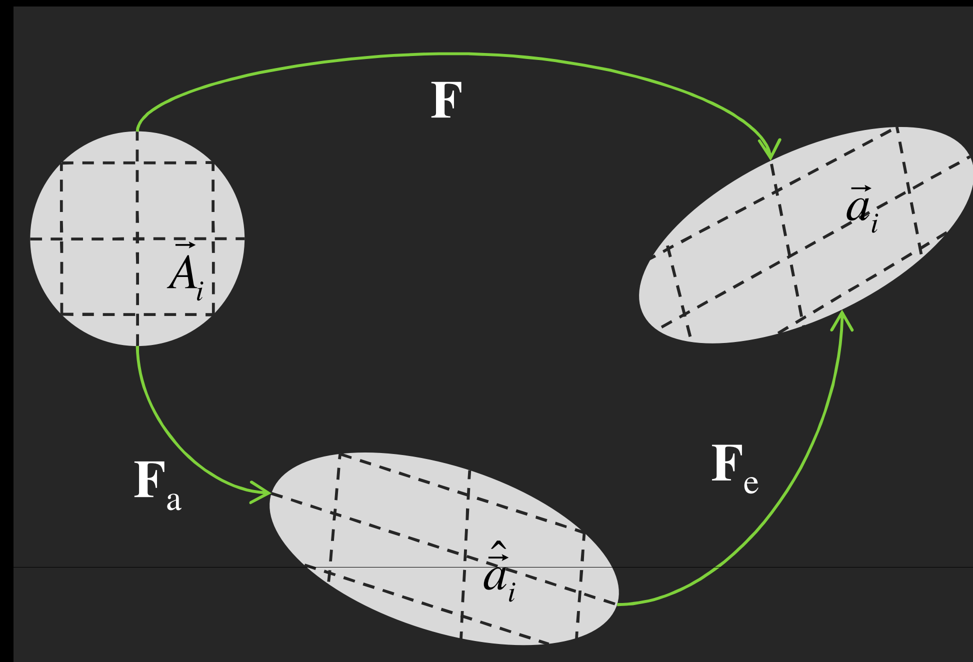
B_0 $\quad \mathbf{M}_i = \vec{A}_i \otimes \vec{A}_i$

B_a $\quad \hat{\vec{a}}_i = \phi_{*a}\left(\vec{A}_i\right)$

$\quad \hat{\mathbf{m}}_i = \hat{\vec{a}}_i \otimes \hat{\vec{a}}_i = \phi_{*a}\vec{A}_i \otimes \phi_{*a}\vec{A}_i = \phi_{*a}\mathbf{M}_i$

B_t $\quad \vec{a}_i = \phi_*\left(\vec{A}_i\right)$

$\quad \mathbf{m}_i = \vec{a}_i \otimes \vec{a}_i = \phi_{*e}\hat{\mathbf{m}}_i = \phi_*\mathbf{M}_i$



$$\psi = \psi\left(\mathbf{C}_e, \hat{\mathbf{m}}_i\right)$$

Funzione isotropa della deformazione elastica e dei tensori di struttura

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{l} - \rho_0\dot{\psi} \geq 0 \\ &= \mathbf{S}_e \cdot \hat{\hat{\mathbf{d}}}_a + \mathbf{S}_e \cdot \hat{\hat{\mathbf{d}}}_e \\ &\quad - 2\rho_0\left(\nabla_{\mathbf{C}_e}(\psi) \cdot \frac{\dot{\mathbf{C}}_e}{2} - \nabla_{\hat{\mathbf{m}}_i}(\psi) \cdot \frac{1}{2}\dot{\hat{\mathbf{m}}}_i\right) \geq 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_e = 2\rho_0\nabla_{\mathbf{C}_e}(\psi)$$

$$\mathcal{D}_{|ogg} = \mathbf{S}_e \cdot \frac{1}{2}\mathcal{L}_v^a\mathbf{C}_e + \mathbf{Z}_e^i \cdot \frac{1}{2}\dot{\hat{\mathbf{m}}}_i$$

$$\mathbf{Z}_e^i = 2\rho_0\nabla_{\hat{\mathbf{m}}_i}(\psi) \qquad \hat{\hat{\mathbf{d}}}_a = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_e\hat{\boldsymbol{l}}_a + \hat{\boldsymbol{l}}_a^T\mathbf{C}_e\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_v^a\mathbf{C}_e$$

Prof. Ing. Massimo Cuomo – Università di Catania
Dott. Ing. Mario Fagone – Università di Firenze

Relazioni costitutive

Dominio elastico del materiale

$$\hat{\mathbb{E}} = \left\{ \left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right) : \hat{\chi}\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right) \leq 0 \right\}$$

Leggi di flusso

principio della massima dissipazione
ammissibilità dello stato tensionale

$$\min_{\mathbf{S}_e^*, \mathbf{Z}_e^{i*}} \max_{\dot{\lambda}^*} \hat{\mathcal{L}}\left(\mathbf{S}_e^*, \mathbf{Z}_e^{i*}, \dot{\lambda}^* \right) = -\mathcal{D}_{|ogg}\left(\mathbf{S}_e^*, \mathbf{Z}_e^{i*} \right) + \dot{\lambda}^* \chi\left(\mathbf{S}_e^*, \mathbf{Z}_e^{i*} \right)$$

$$\sum_i \left(\frac{1}{2} L_v^a \hat{\mathbf{m}}_i - \frac{1}{2} \mathcal{L}_v^a \hat{\mathbf{m}}_i + \dot{\lambda} \nabla_{\mathbf{Z}_e^i} \chi\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right) \right) = 0 \qquad // \qquad \left(\dot{\mathbf{M}}_i \right) = 0$$

$$\hat{l}_a^T = \dot{\lambda} \nabla_{\mathbf{S}_e} \chi\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right)$$

$$\chi\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right) = 0$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \chi\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right) \leq 0 \qquad \dot{\lambda} \chi\left(\mathbf{S}_e, \mathbf{Z}_e^i \right) = 0$$

- Non garantita la coassialità fra tensioni e deformazioni → non è possibile applicare l'algoritmo esponenziale
- Full tensorial algorithm (Cuomo-Fagone 2005)
- Con opportune semplificazioni (sviluppo in serie) è possibile modellare il comportamento anisotropo di un materiale sovrapponendo ad un modello iperelastico isotropo, un modello di materiale anisotropo "tangente all'origine" al comportamento del materiale in esame (Federico, Grillo, Imatani, Giaquinta, Herzog 2007)

Prof. Ing. Massimo Cuomo – Università di Catania
Dott. Ing. Mario Fagone – Università di Firenze