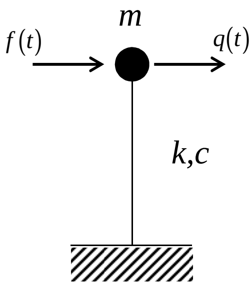
SISTEMI A UN GRADO DI LIBERTA
EQUAZIONE DEL MOTO



$$m\ddot{q}(t)+c\dot{q}(t)+kq(t)=f(t)$$

$$q(0)=q_0 \qquad \dot{q}(0)=\dot{q}_0$$

$$\ddot{q}(t)+2\xi\omega_0\dot{q}(t)+\omega_0^2 q(t)=\frac{1}{m}f(t)$$

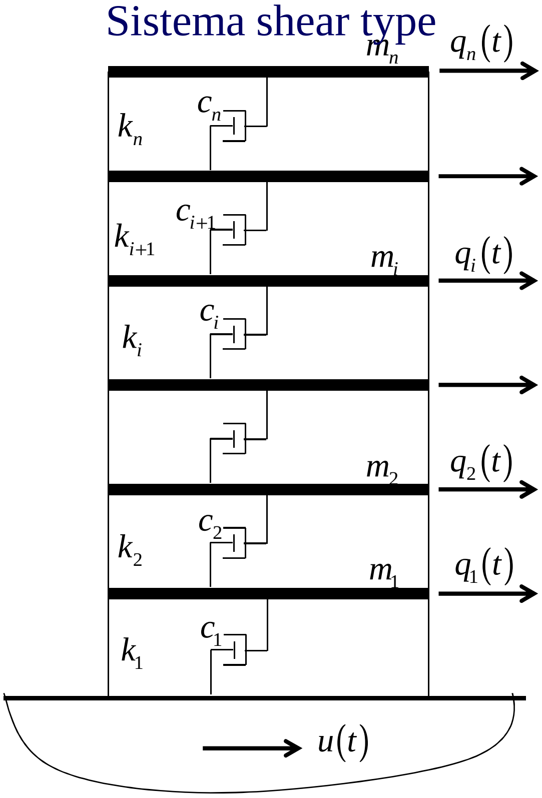
$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Pulsazione propria

$n_0=\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ Frequenza propria $\qquad \xi=\dfrac{c}{2m\omega_0}$ Fattore di smorzamento

$T_0=\dfrac{1}{n_0}$ Periodo proprio

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
EQUAZIONE DEL MOTO, TRASCINAMENTO SISMICO

Sistema shear type



$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t)=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{1}\ddot{u}(t)$$

$$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{0} \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0)=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{1}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & -k_{n-1} & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & -c_{n-1} & c_{n-1}+c_n & -c_n \\ 0 & \cdots & 0 & -c_n & c_n^2 \end{bmatrix}$$

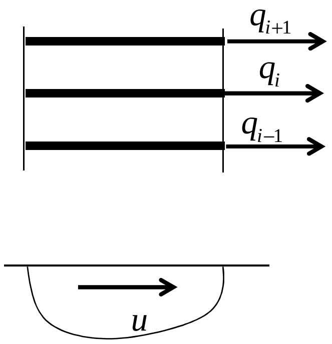
SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
EQUAZIONE DEL MOTO, TRASCINAMENTO SISMICO

Sistema generico $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t)=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}\ddot{u}(t)$

$$\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{0} \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0)=\boldsymbol{0}$$

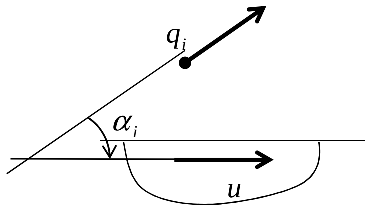
$\boldsymbol{r}$ = vettore dei coefficienti di influenza

Telaio shear type



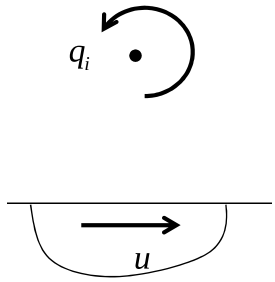
$$r_{i+1}=1$$
$$r_i=1$$
$$r_{i-1}=1$$

Gradi di libertà traslazionali



$$r_i=\cos(\alpha_i)=\cos(q_i u)$$
$$r_i=1 \quad \text{se} \quad q_i // u$$

Gradi di libertà rotazionali

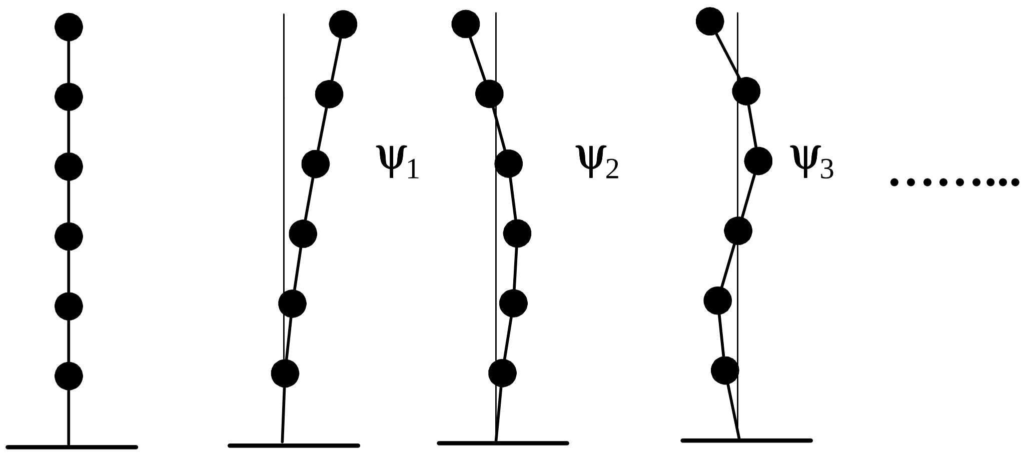


$$r_i=0$$

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
ANALISI MODALE

$\det(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=0 \quad \omega_1^2<\omega_2^2<\ldots<\omega_n^2$ Autovalori

$(\boldsymbol{K}-\lambda_k\boldsymbol{M})\boldsymbol{\psi}_k=\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\ldots,\boldsymbol{\psi}_n$ Autovettori



Autovalori	λ_1	λ_2	λ_3	……..
pulsazioni	ω_1	ω_2	ω_3	……..
frequenze proprie	n_1	n_2	n_3	……..
periodi propri	T_1	T_2	T_3	……..

$$\omega_k^2=\lambda_k; \quad n_k=\omega_k/2\pi \quad ;T_k=1/n_k$$

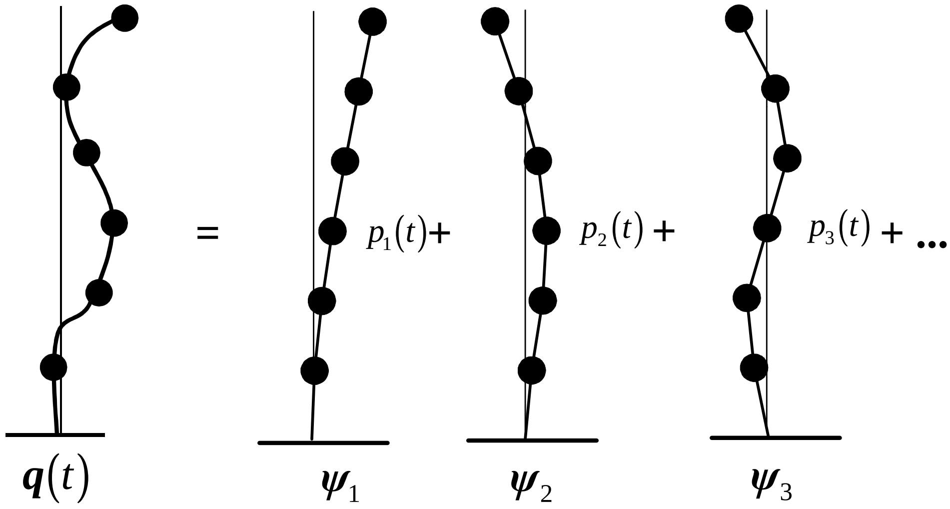
SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
ANALISI MODALE

Autovettori linearmente indipendenti

Al generico tempo t lo spostamento $\boldsymbol{q}$ del sistema
può essere espresso come una combinazione lineare degli autovettori $\boldsymbol{\psi}_k$

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{\psi}_1 p_1(t) + \boldsymbol{\psi}_2 p_2(t) + \ldots + \boldsymbol{\psi}_n p_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_k p_k(t)$$

TRASFORMAZIONE PRINCIPALE



SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}(t) \qquad \boldsymbol{f}(t) = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}\ddot{u}(t)$$

$$\boldsymbol{q}(0) = \boldsymbol{0} \qquad \dot{\boldsymbol{q}}(0) = \boldsymbol{0}$$

TRASFORMAZIONE PRINCIPALE

$$\boldsymbol{q}(t) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\psi}_k p_k(t)$$

Si dimostra che, se il sistema possiede smorzamento classico,
la trasformazione principale disaccoppia le equazioni del moto

Equazione del moto in coordinate principali

$$\ddot{p}_k(t) + 2\xi_k\omega_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = \frac{1}{m_k}\boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{f}(t)$$

$$\ddot{p}_k(t) + 2\xi_k\omega_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = -g_k \ddot{u}(t)$$

$$g_k = \frac{1}{m_k}\boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}$$

Coefficiente di partecipazione modale

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
PASSI PER LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

1) Schematizzazione del sistema strutturale e calcolo delle matrici ***M*** e ***K***

2) Analisi modale e determinazione dei modi di vibrazione

$$\det(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=0 \qquad \omega_1^2,\omega_2^2,\dots,\omega_n^2 \qquad \text{Pulsazioni proprie}$$

$$(\boldsymbol{K}-\lambda_k\boldsymbol{M})\boldsymbol{\psi}_k=\boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\dots,\boldsymbol{\psi}_n \qquad \text{Modi di vibrazione}$$

3) Scrittura delle equazioni del moto in coordinate principali

$$\ddot{p}_k(t)+2\xi_k\omega_k\dot{p}_k(t)+\omega_k^2 p_k(t)=-g_k\ddot{u}(t) \qquad g_k=\frac{1}{m_k}\boldsymbol{\psi}_k^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}$$

4) Soluzione delle equazioni e calcolo delle $p_k(t)$???

5) Ricostruzione del vettore $\boldsymbol{q}(t)$ attraverso la trasformazione principale

$$\bar{n}<n$$

$$\boldsymbol{q}(t)=\sum_{k=1}^{\cancel{n}}\boldsymbol{\psi}_k p_k(t)$$

Troncamento modale

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Soluzione delle equazioni del moto in coordinate principali

$$\ddot{p}_k(t)+2\xi_k\omega_k\dot{p}_k(t)+\omega_k^2 p_k(t)=-g_k\ddot{u}(t) \qquad g_k=\frac{1}{m_k}\boldsymbol{\psi}_k^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}$$

Possibilità alternative

1) È nota la legge temporale $\ddot{u}(t)$

⬇

Soluzione dell’equazione del moto

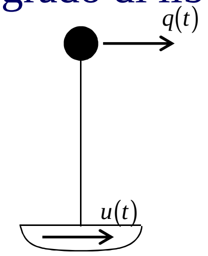
2) Il terremoto è noto attraverso lo spettro di risposta

⬇

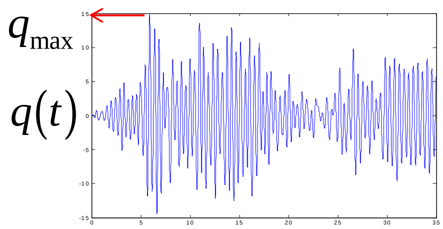
Calcolo e combinazione degli effetti massimi associati a ciascun modo di vibrazione

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
RISPOSTA SISMICA MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA

Sistema 1 grado di libertà

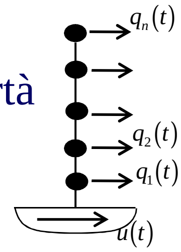


$$\ddot{q}(t)+2\xi\omega_0\dot{q}(t)+\omega_0^2 q(t)=-\ddot{u}(t)$$



$$q_{\max}=\frac{S_a(T_0,\xi_0)}{\omega_0^2}$$

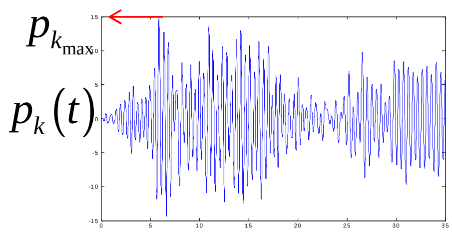
Sistema N gradi di libertà



$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}(t)=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}\ddot{u}(t)$$

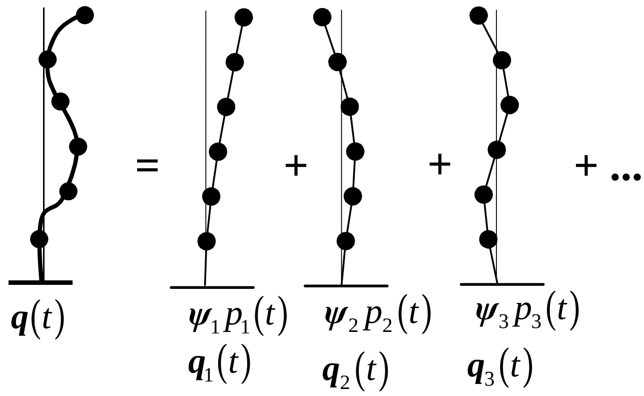
$$\boldsymbol{q}(t)=\sum_{k=1}^{\bar{n}}\boldsymbol{\psi}_k p_k(t)$$

$$\ddot{p}_k(t)+2\xi_k\omega_k\dot{p}_k(t)+\omega_k^2 p_k(t)=-g_k\ddot{u}(t)$$

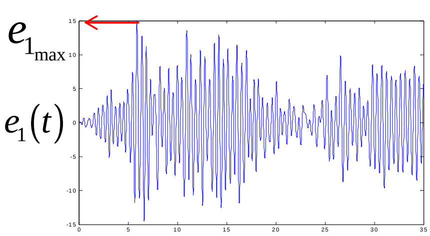


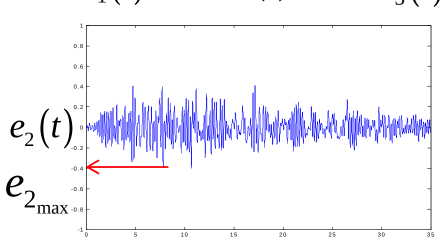
$$p_{k_{\max}}=\frac{g_k S_a(T_k,\xi_k)}{\omega_k^2}$$

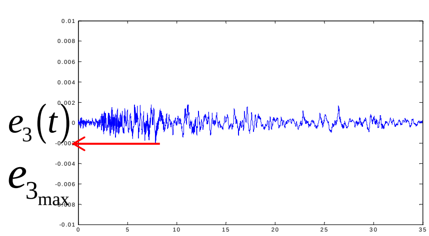
SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
RISPOSTA SISMICA MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA



$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) + \ldots$$

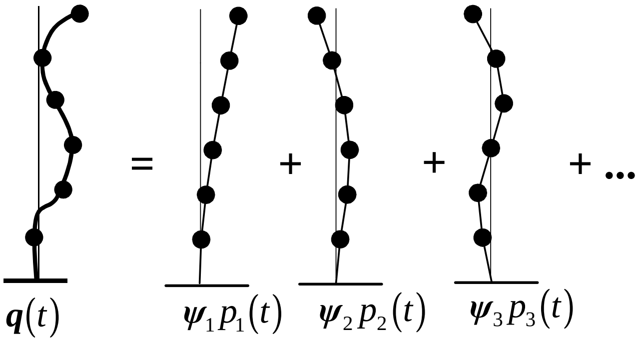






$$e_{\max} \leq e_{1_{\max}} + e_{2_{\max}} + e_{3_{\max}} + \ldots$$

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
RISPOSTA SISMICA MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA



$$e_{\max} \leq e_{1_{\max}} + e_{2_{\max}} + e_{3_{\max}} + \dots$$

Regola di combinazione modale

$$e_{\max} = f\left(e_{1_{\max}}, e_{2_{\max}}, ..e_{n_{\max}}\right)$$

REGOLA SUM $\quad e_{\max} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} e_{k_{\max}}$

REGOLA SRSS $\quad e_{\max} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\bar{n}} e_{k_{\max}}^2}$

REGOLA CQC $\quad e_{\max} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{j=1}^{\bar{n}} c_{ij} e_{i_{\max}} e_{j_{\max}}}$

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
RISPOSTA SISMICA MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA

1) Schematizzazione del sistema strutturale e calcolo delle matrici $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$

2) Analisi modale e determinazione dei modi di vibrazione

$\det(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M}) = 0 \quad \omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_n^2$ Pulsazioni proprie

$(\boldsymbol{K} - \lambda_k \boldsymbol{M})\boldsymbol{\psi}_k = \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, ..., \boldsymbol{\psi}_n$ Modi di vibrazione

3) Calcolo del valore massimo delle prime $\bar{n}$ coordinate principali

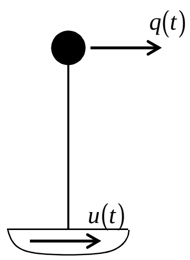
$$p_{k\max} = \frac{g_k S_a(T_k, \xi_k)}{\omega_k^2} \qquad g_k = \frac{1}{m_k} \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{M r}$$

4) Calcolo degli effetti (spostamenti, tagli, momenti,...) massimi associati ai primi $\bar{n}$ modi

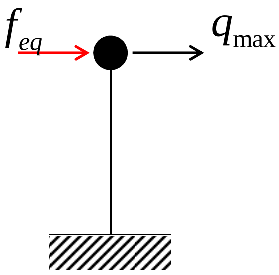
5) Scelta della regola di combinazione modale e combinazione degli effetti massimi associati ai vari modi

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
RISPOSTA SISMICA MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA
FORZE STATICHE EQUIVALENTI

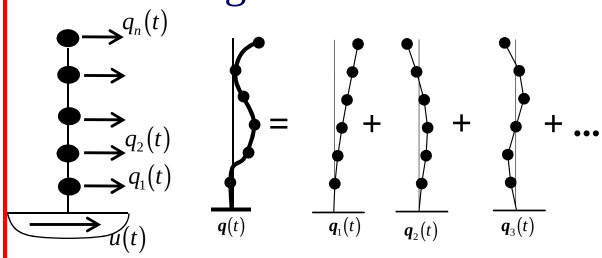
Sistema 1 grado di libertà



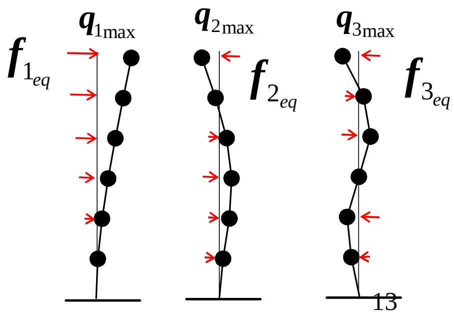
$$f_{eq} = Kq_{\max} = mS_a(T_0, \xi_0)$$



Sistema N gradi di libertà



$$\boldsymbol{f}_{k_{eq}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_{k_{\max}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}_k g_k S_a(T_k, \xi_k)$$



SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
PASSI PER LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO
MEDIANTE LE FORZE STATICHE EQUIVALENTI

1) Schematizzazione del sistema strutturale e calcolo delle matrici $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{K}$

2) Analisi modale e determinazione dei modi di vibrazione

$$\det(\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{M}) = 0 \qquad \omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2$$ Pulsazioni proprie

$$(\boldsymbol{K} - \lambda_k \boldsymbol{M})\boldsymbol{\psi}_k = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \ldots, \boldsymbol{\psi}_n$$ Modi di vibrazione

3) Calcolo dei coefficienti di partecipazione modale associati ai primi $\bar{n}$ modi

$$g_k = \frac{1}{m_k}\boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}$$

4) Calcolo delle forze statiche equivalenti associate ai primi $\bar{n}$ modi

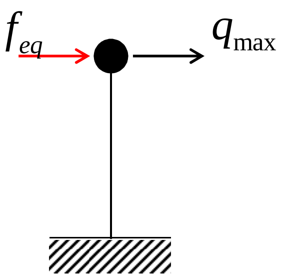
$$\boldsymbol{f}_{k_{eq}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_{k_{\max}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}_k g_k S_a(T_k, \xi_k)$$

5) Scelta della regola di combinazione modale e combinazione degli effetti massimi associati ai vari modi

SISTEMI A N GRADI DI LIBERTA
RISPOSTA SISMICA MEDIANTE LO SPETTRO DI RISPOSTA
MASSA PARTECIPANTE

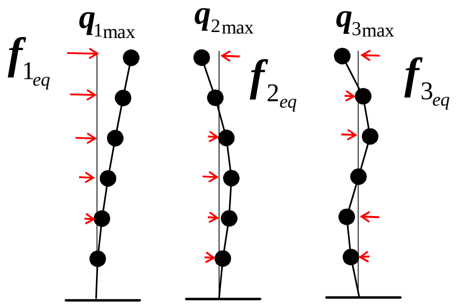
Sistema 1 grado di libertà

$$f_{eq} = Kq_{\max} = mS_a\left(T_0, \xi_0\right)$$



Sistema N gradi di libertà

$$\boldsymbol{f}_{k_{eq}} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_{k_{\max}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}_k g_k S_a\left(T_k, \xi_k\right)$$



Risultante delle forze statiche equivalenti associate al *k*-esimo modo

$$R_k = \sum_{j=1}^{n} f_{k_{eq\,j}} = m_k^* S_a\left(T_k, \xi_k\right)$$

Massa efficace (partecipante) associata al *k*-esimo modo

$$m_k^* = \frac{\left(\boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}\right)^2}{m_k} = g_k^2 m_k^{15}$$