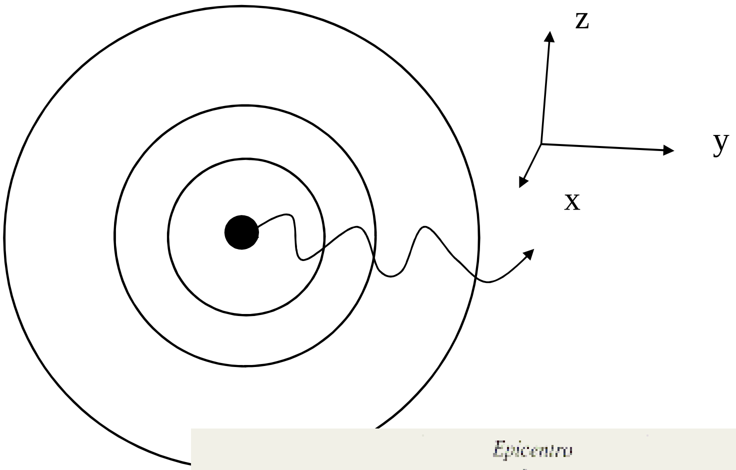
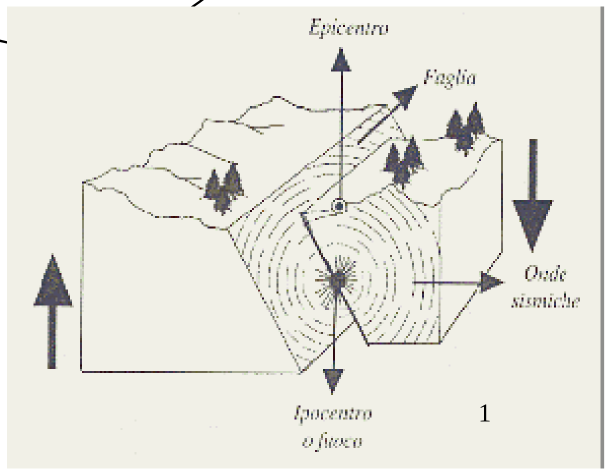
PROPAGAZIONE DELL'ONDA IN UN MEZZO:



Enunciazione matematica generale della propagazione delle onde in un mezzo è data da:

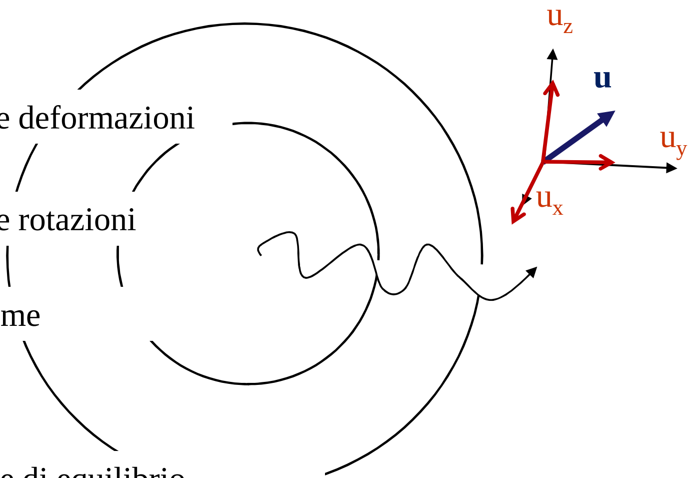
$$\nabla^2[\bullet] = \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2[\bullet]}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



Spostamenti infinitesimi in
- **SOLIDO OMOGENEO**
- **ELASTICO**
- **ISOTROPO**
- **INDEFINITO**
- **SENZA SMORZAMENTO**

PROPAGAZIONE DELL'ONDA IN UN MEZZO:



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$ tensore delle deformazioni

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right)$$ tensore delle rotazioni

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda\Delta$$ Eq.ni di legame

$$\sigma_{ij,i} + \rho g_j = 0$$ Eq.ni indefinite di equilibrio

$$\sigma_{ij,i} = \rho\ddot{u}_j$$ **II legge di Newton**

$$\Delta = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

dilatazione cubica

Spostamenti infinitesimi in
- **SOLIDO OMOGENEO**
- **ELASTICO**
- **ISOTROPO**
- **INDEFINITO**
- **SENZA SMORZAMENTO**

PROPAGAZIONE DELL’ONDA IN UN MEZZO:

$$\boxed{\mu\Delta^2 u_j + (\lambda+\mu)u_{i,ij} = \rho\ddot{u}_j}$$

corrisponde alla propagazione di due tipi di onde, onde P ed onde S, dette anche ONDE DI VOLUME

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\nabla^2 u_x + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\nabla^2 u_y + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right] =$$

$$\boxed{\nabla^2\Delta = \left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}}$$

PROPAGAZIONE DELL’ONDA IN UN MEZZO:

$$\boxed{\mu\Delta^2 u_j + (\lambda+\mu)u_{i,ij} = \rho\ddot{u}_j}$$

corrisponde alla propagazione di due tipi di onde, onde P ed onde S, dette anche ONDE DI VOLUME

$$\mu\nabla^2 u_x + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\nabla^2 u_y + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

PROPAGAZIONE DELL'ONDA IN UN MEZZO:

$$\boxed{\mu\Delta^2 u_j + (\lambda+\mu) u_{i,ij} = \rho \ddot{u}_j}$$

corrisponde alla propagazione di due tipi di onde, onde P ed onde S, dette anche ONDE DI VOLUME

$$\mu\nabla^2 u_x + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\nabla^2 u_y + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right]$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right]$$

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)}$$

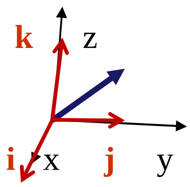
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\nabla^2 u_x + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right]$$
$$\left[\mu\nabla^2 u_y + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right]$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right]$$

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\nabla^2 u_x + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\nabla^2 u_y + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right]$$
$$\left[\mu\nabla^2 u_z + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}\right]$$

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)}$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$
$$\nabla^2\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$
$$\nabla^2\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$



I termini fra parentesi rappresentano le componenti cartesiane del rotore di spostamento:

$$\bar{i}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \mathrm{rot}\,\bar{u}$$

e rappresentano il doppio degli elementi non nulli del del tensore emisimmetrico di rotazione ω_{ij}:

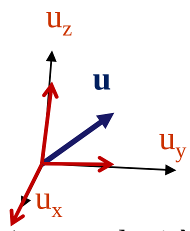
$$\bar{i}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 2\,\varpi$$

Essendo: $\varpi = \bar{i}\,\omega_x + \bar{j}\,\omega_x + \bar{k}\,\omega_x$, $\quad \omega_{ij} = 1/2\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right)$

I termini fra parentesi sono pertanto esprimibili nella forma:

$$\boxed{\nabla^2(\varpi) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\varpi}{\partial t^2}}$$

DUE TIPI DI ONDE DI VOLUME



$$\nabla^2[\bullet] = \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2[\bullet]}{\partial t^2}$$

ONDE P

$$\nabla^2\Delta = \left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}$$

Esprime la propagazione della dilatazione Δ con velocità:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

ONDE S

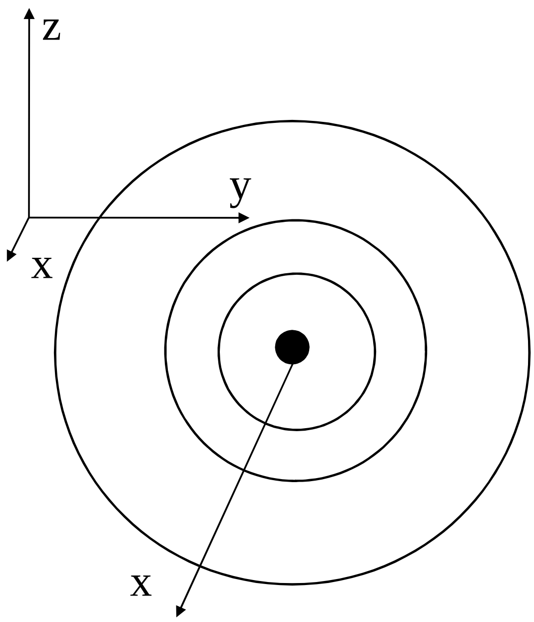
$$\nabla^2(\varpi) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\varpi}{\partial t^2}$$

Esprime la propagazione della rotazione ϖ con velocità:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Tipo di terreno	v_P [m/s]	v_S [m/s]
Argilla satura	1500	100 ÷ 250
Sabbia fine e media	300 ÷ 500	120 ÷ 200
Sabbia densa	400 ÷ 600	200 ÷ 400
Ghiaia	500 ÷ 750	300 ÷ 600
Arenaria	1500 ÷ 4500	700 ÷ 1500
Marna	1500 ÷ 4500	600 ÷ 1500

Il significato fisico delle onde P, S si può illustrare analizzando il fenomeno della propagazione monodimensionale ad esempio in direzione x.



$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2\,\varpi = \bar{i}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

Direzione x

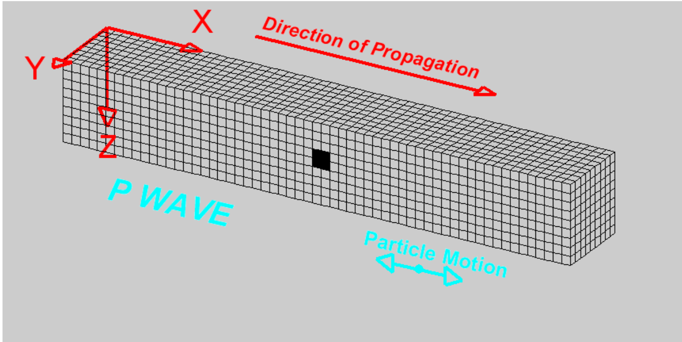
$$\nabla^2\Delta = \left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2};\quad \Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\nabla^2\varpi = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)\frac{\partial^2\varpi}{\partial t^2};\quad \varpi = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x}j + \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x}k$$

ONDE P

$$\nabla^2\Delta = \left(\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2};\ \Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

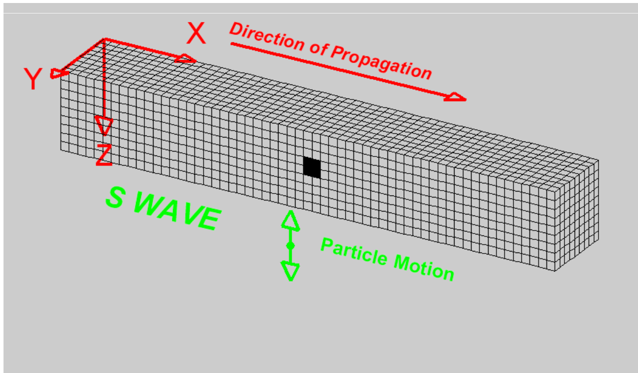


L'effetto che si propaga è longitudinale alla direzione di propagazione.
L'elemento di volume subisce compressioni e rarefazioni conservando inalterata la propria forma.
L'effetto sulla superficie è sussultorio.

ONDE S

$$\nabla^2\varpi = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)\frac{\partial^2\varpi}{\partial t^2};\ \varpi = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x}j + \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial x}k$$

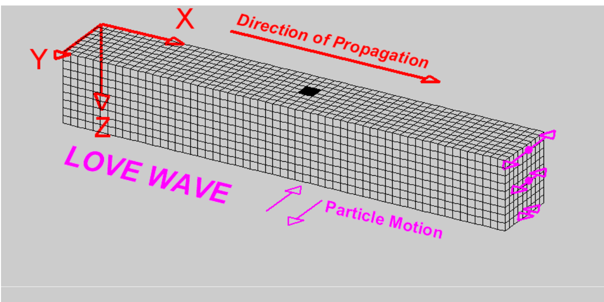
$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$$

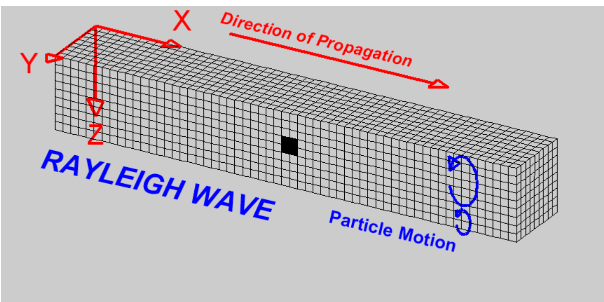


L'effetto che si propaga è trasversale alla direzione di propagazione.
Un elemento di volume subisce distorsioni (taglio) conservando inalterata il proprio volume.
L'effetto sulla superficie è oscillatorio.

ONDE DI SUPERFICIE

Nascono quando l'onda giunge in superficie
e vanno rapidamente a zero con la profondità





ONDE SISMICA IN SUPERFICIE