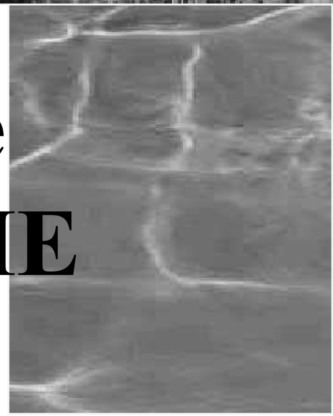
Corso di laurea specialistica in
Ingegneria delle Acque e della Difesa del Suolo


Corso di

GESTIONE delle RISORSE IDRICHE

a.a. 2003-2004

Lezione 6

Prof. Luca Lanza

Dipartimento di Ingegneria Ambientale - DIAM

IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

➢ Contenuto di Umidità e Saturazione

Nel mezzo insaturo gli spazi interstiziali sono riempiti parzialmente da acqua e parzialmente da aria.
È necessario introdurre due variabili di stato che definiscano il contenuto relativo di acqua e di aria nel dominio di moto, ovvero nel REV:

➢ *il* ***CONTENUTO DI UMIDITA'*** *(o di acqua);*

$$\boxed{\theta_w = \frac{\text{Volume d'acqua nel REV}}{\text{Volume del REV}}; \qquad 0 \le \theta_w \le n,}$$

➢ *il* ***GRADO DI SATURAZIONE****;*

$$\boxed{S_w = \frac{\text{Volume d'acqua nel REV}}{\text{Volume dei vuoti nel REV}}; \qquad 0 \le S_w \le 1.}$$

Ovviamente le due quantità sono legate tra di loro dalla relazione:

$$\boxed{\theta_w = n \cdot S_w}$$

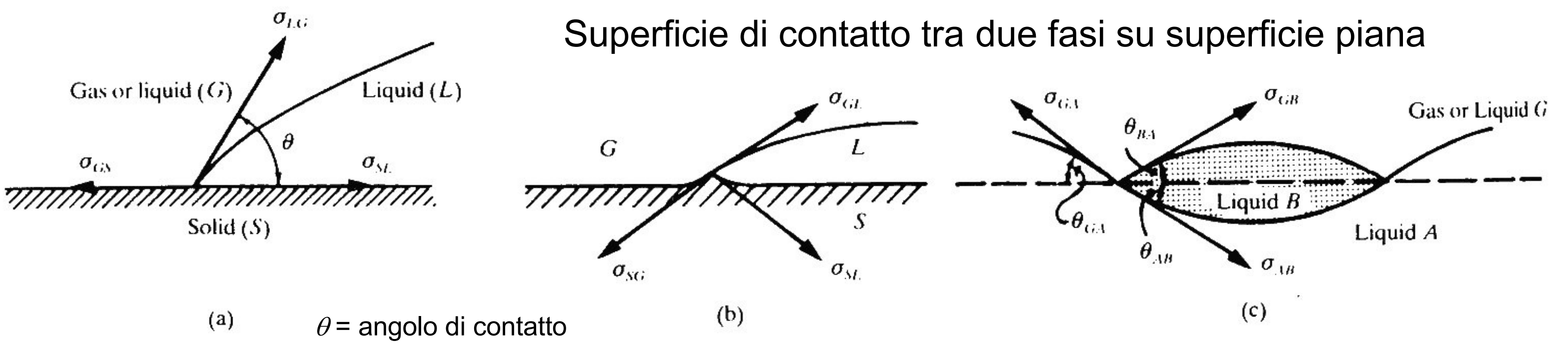
in cui n rappresenta la porosità del mezzo insaturo.

➢ Angolo di Contatto e Bagnabilità

Interfaccia di energia libera tra liquido ed aeriforme (dovuta al bilancio delle forze di attrazione tra le molecole che non sono bilanciate sulla superficie).
La superficie di interfaccia si comporta come una membrana sottile soggetta ad una tensione che tende a ridurre per quanto possibile la propria area superficiale.

La tensione all'interfaccia tra i due mezzi, σ_{ij} , è definita come il lavoro richiesto per aumentare la superficie di contatto di un'area unitaria (dipende dalla temperatura).
Se la fase aeriforme è costituita dai vapori della sostanza liquida prende il nome di tensione superficiale.

Superficie di contatto tra due fasi su superficie piana



θ = angolo di contatto

L'equazione di equilibrio tra le forze impone (eq.ne di Young):

$$\sigma_{LG}\cos\theta + \sigma_{SL} = \sigma_{GS} \qquad oppure \qquad \cos\theta = \frac{\sigma_{GS} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LG}}$$

IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

L' equazione di Young indica che non è possibile alcun equilibrio se:

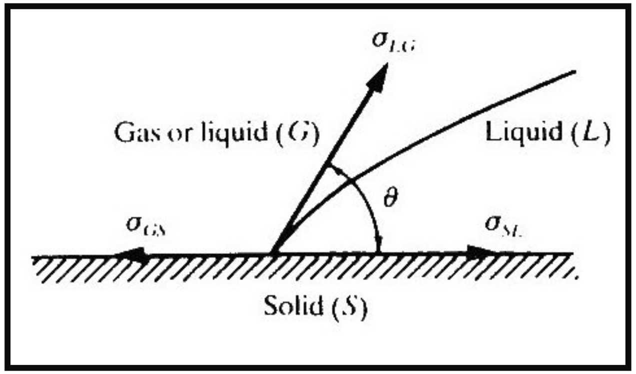
$$\boxed{\frac{\sigma_{GS} - \sigma_{SL}}{\sigma_{LG}} > 1}$$

in tal caso il liquido si sparge indefinitamente sulla superficie.

Il prodotto $\sigma_{LG} \cdot \cos\theta$ è detto tensione di adesione, e determina quale dei due fluidi (L o G) bagna la superficie solida, ovvero aderisce ad essa e tende a spandersi su di essa.

- **Se $\theta < 90°$ si dice che il fluido bagna la superficie.**
- **Se $\theta > 90°$ si dice che il fluido non bagna la superficie.**

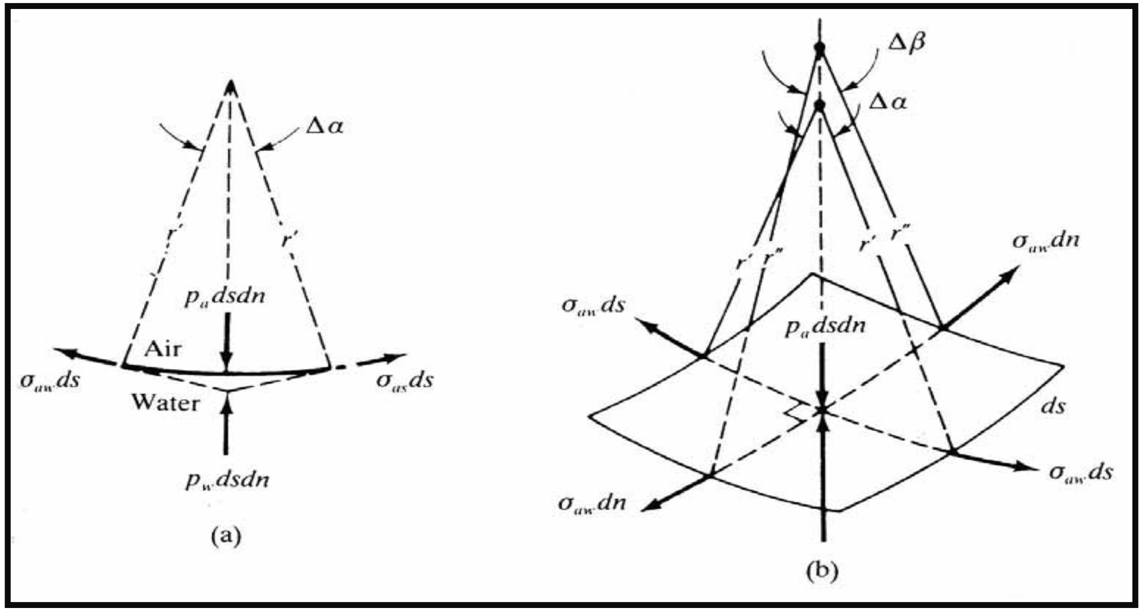
Nella zona insatura l'acqua è la fase che bagna la superficie e l'aria è la fase che non bagna la superficie.



La tensione superficiale e la bagnabilità possono essere diverse quando l'interfaccia tra acqua e aria sta avanzando o retrocedendo su di una superficie solida (fenomeno di isteresi).

➢ Pressione capillare

Tra due fluidi non miscibili in contatto tra loro si realizza una differenza di pressione attraverso l'interfaccia a causa della tensione superficiale che dipende dalla curvatura dell'interfaccia.
La differenza di pressione $p_c = p_{aria} - p_{acqua}$ è detta ***pressione capillare****.*



Il bilancio delle forze lungo la normale alla superficie di interfaccia, con tensione superficiale costante e pari a σ_{aw}, conduce alla:

$$\boxed{p_c = p_a - p_w = \sigma_{aw}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) = \frac{2\sigma_{aw}}{r^*}}$$

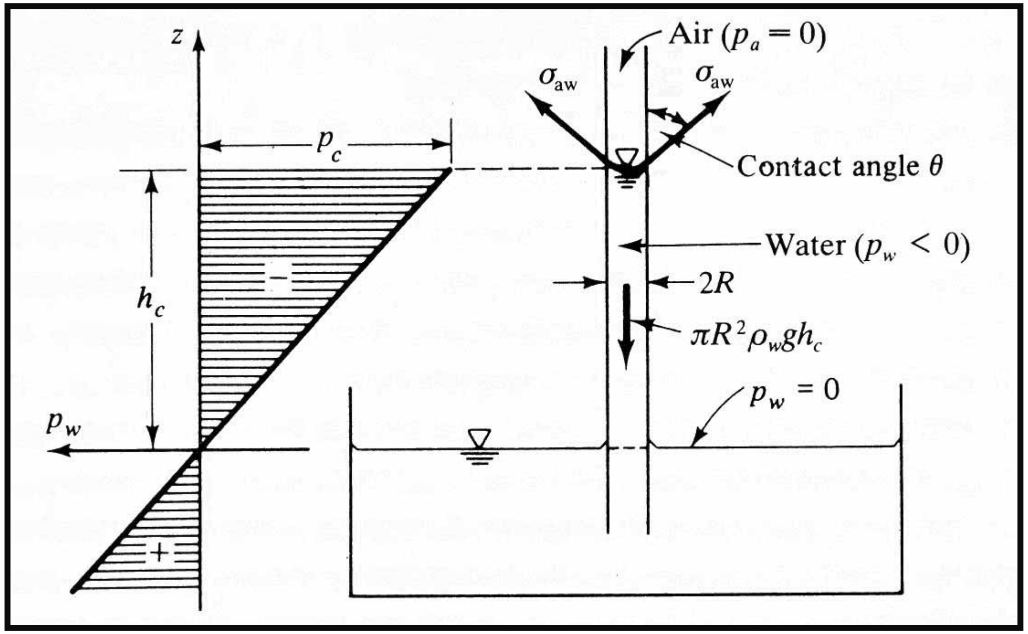
(formula di Laplace)

in cui r' ed r'' sono i raggi principali di curvatura ed r il raggio medio t.c. 2r* =(1/r' + 1/r'').*

IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

La pressione capillare è quindi una misura della tendenza del mezzo poroso parzialmente saturo a risucchiare l'acqua o a espellere l'aria.
Il valore negativo della pressione capillare è spesso chiamato ***suzione*** *o tensione.*

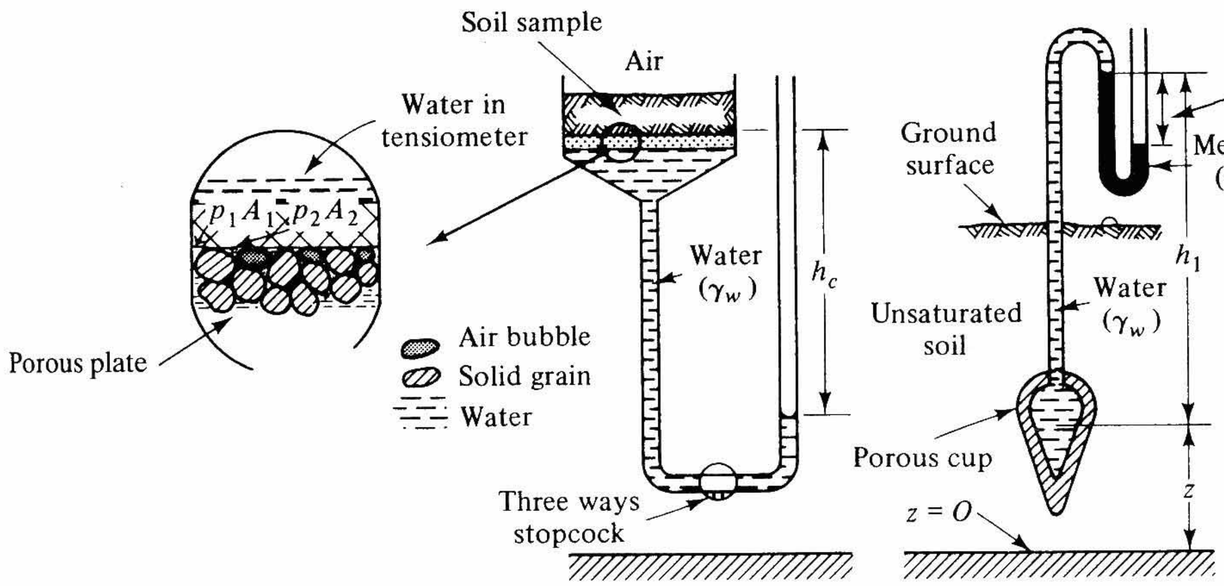
Se si assume che l'aria si trovi ovunque alla pressione atmosferica negli spazi interstiziali, l'acqua si troverà ad una pressione p_w *inferiore a quella atmosferica.*



Un semplice modello di ciò che si verifica negli spazi interstiziali è costituito da un tubo capillare, che simula gli stretti meati del mezzo poroso. Per $p_a = 0$, *la pressione* p_w *dell'acqua subito sotto al menisco sarà:* $p_w = -p_c$

➢ La misura della pressione capillare

Il campione di suolo insaturo viene posto su di una membrana porosa con aperture di dimensione tale da non consentire il passaggio dell'aria verso il manometro per le pressioni capillari in gioco (pc = 2σ_{aw}/r). L'acqua viene drenata attraverso la valvola di controllo.*



$p_c = \gamma_w h_c$ (a) In laboratorio

$p_c = \gamma_m h_2 - \gamma_w h_1$ (b) In campo

Una volta raggiunto l'equilibrio il manometro leggerà una pressione media sull'area di contatto tra l'acqua nel suolo e nel manometro stesso. Lo strumento prende il nome di ***TENSIOMETRO****.*

IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

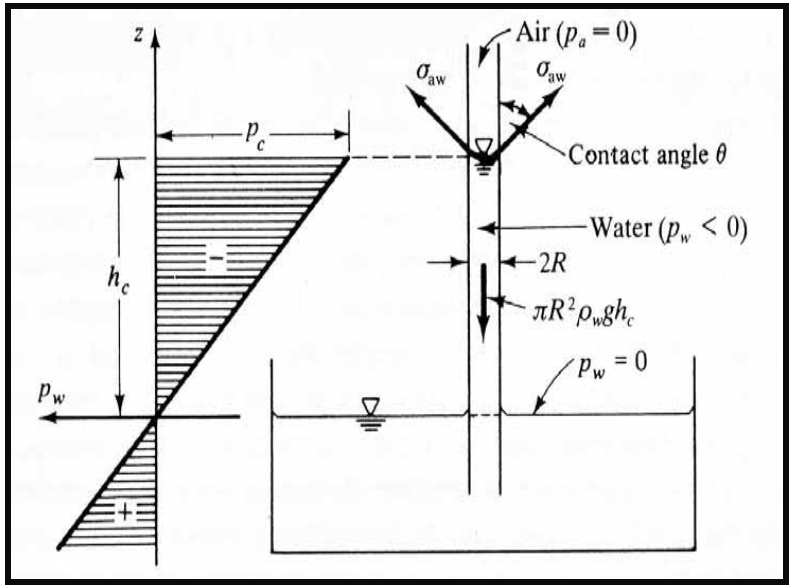
Analizzando le forze che agiscono sulla colonna d'acqua nel tubo capillare in figura, si ottiene:

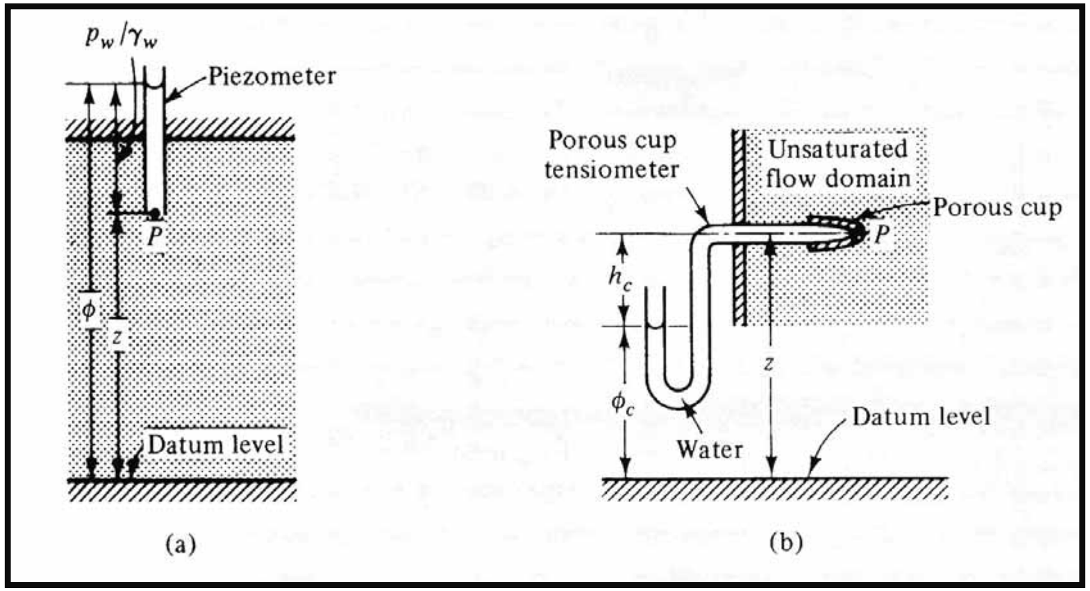
$$h_c \cdot \pi R^2 \rho_w g = 2\pi R \cdot \sigma_{aw} \cos\theta \qquad h_c = 2\sigma_{aw} \cos\theta / R\rho_w g$$

Ed utilizzando il raggio medio di curvatura r = R/cosθ:*

$$h_c = p_c / \rho_w g = -p_w / \rho_w g, \qquad p_a = 0$$

in cui h_c rappresenta il carico di pressione capillare o **carico di suzione**.





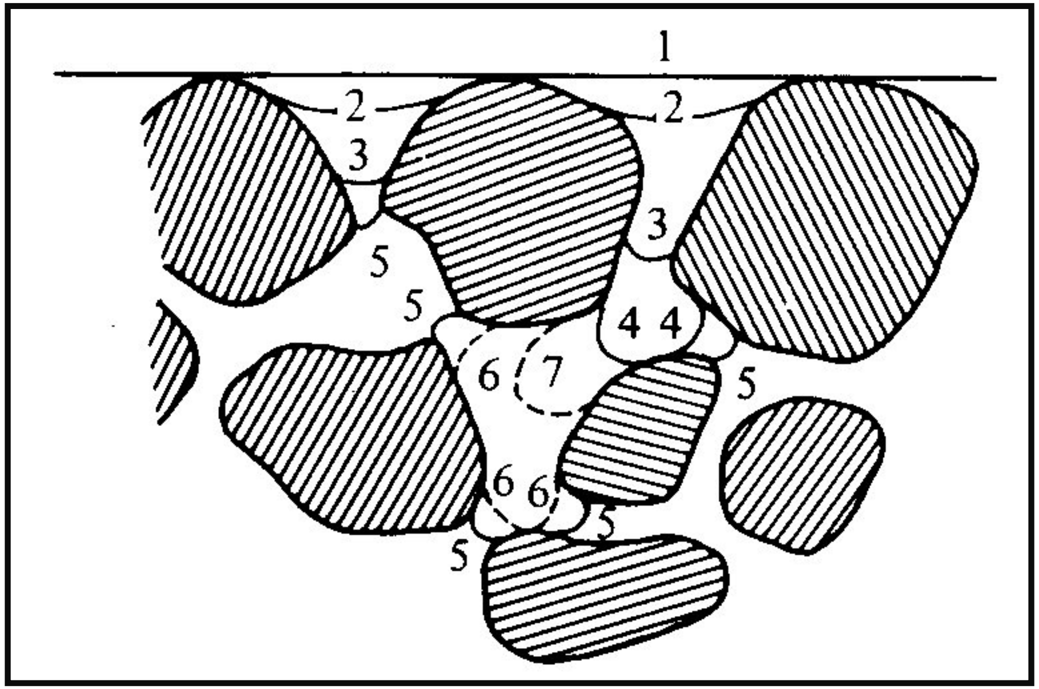
Indicando con $\phi = z + p_w/\gamma_w$ il carico piezometrico, si ha:

$$\phi_c = z + p_w / \gamma_w = z - p_c / \gamma_w = z - \psi, \qquad p_a = 0$$

e quindi, $p_w < 0$ mentre il carico di suzione $\psi = - p_w/\gamma_w > 0$.

➢ La ritenzione dell'umidità

Le superfici da 1 a 4 rappresentano le successive fasi di drenaggio dell'acqua da un mezzo poroso. Al crescere del drenaggio l'acqua si ritira negli spazi interstiziali con superfici a curvatura crescente ed aumentando il carico di suzione.



Le superfici da 5 a 7 rappresentano le successive fasi di ripristino dell'acqua nel mezzo poroso. Al progredire del processo l'acqua rientra negli spazi interstiziali con superfici a curvatura decrescente e diminuendo il carico di suzione.

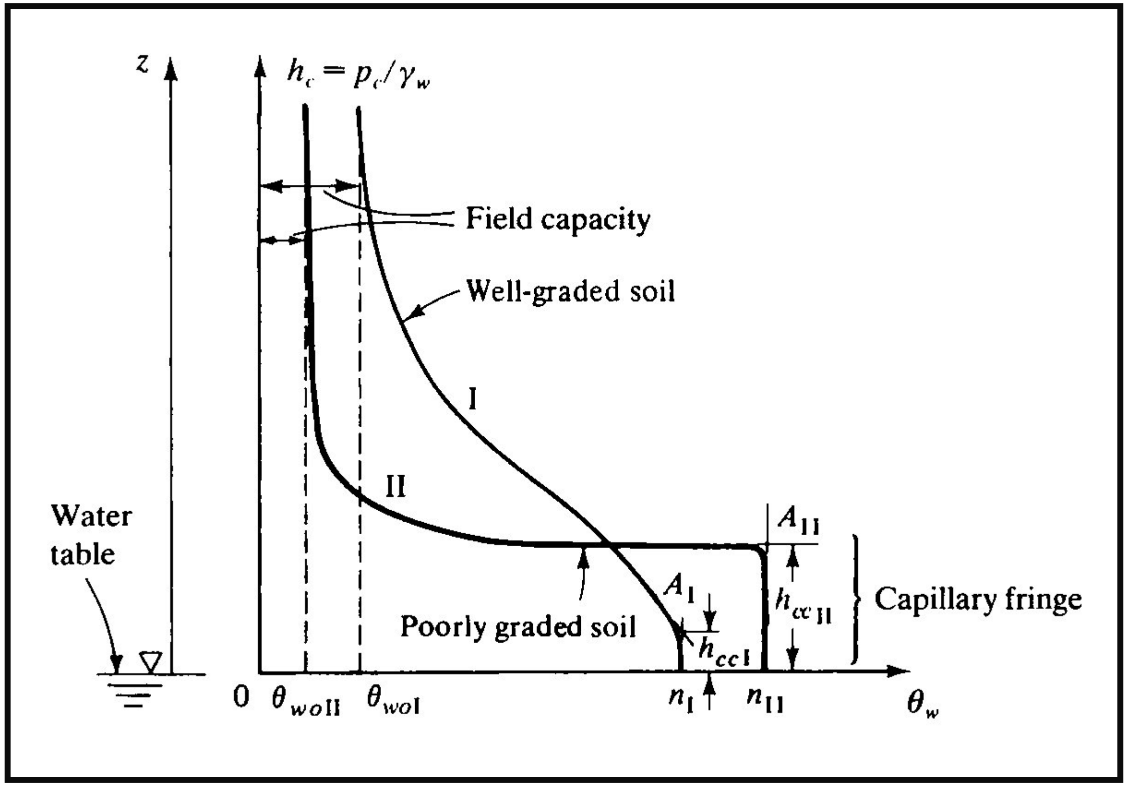
➢ La curva di ritenzione

Le curve di ritenzione rappresentano la quantità d'acqua che viene ritenuta nel terreno dalle forze di capillarità che agiscono in senso opposto alla gravità.

Il punto A rappresenta il carico capillare critico h_{cc}.

A partire da terreno saturo, se si provoca un piccolo carico capillare non si verifica alcuna intrusione di aria fino a raggiungere il valore critico.

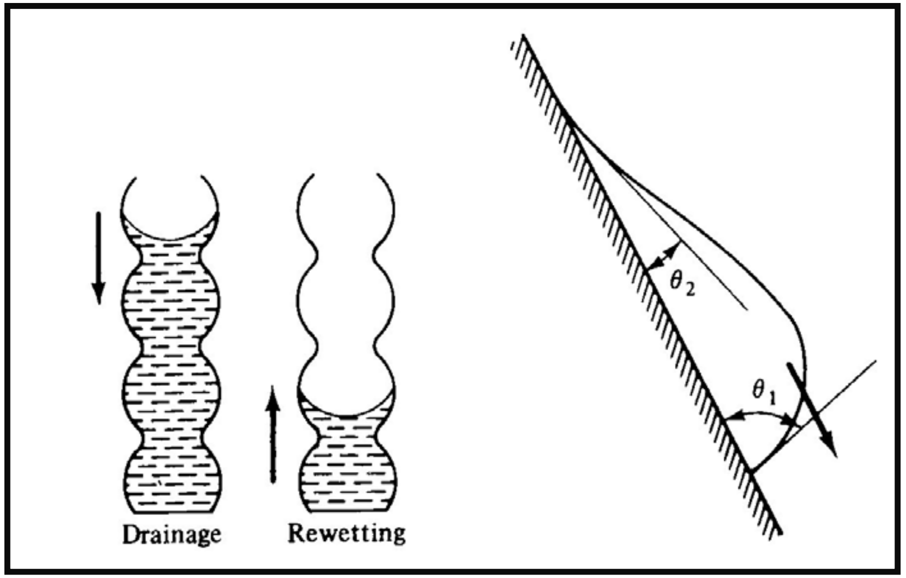
Superato il valore critico i pori di dimensioni maggiori cominciano a drenare l'acqua e la diminuzione di θ_w diviene rilevante.



La forma della curva di ritenzione, e quindi il valore della pressione critica, dipende dalla distribuzione delle dimensioni dei meati e dalla forma caratteristica dei meati del mezzo poroso.

➢ Fenomeno di Isteresi

Se al drenaggio si fa seguire un processo di imbibizione si osserva che la curva di ritenzione $h_c = h_c(\theta_w)$ risulta diversa da quella ottenuta durante la fase di drenaggio. Si verifica infatti un fenomeno di ISTERESI, dovuto a due diversi fattori:



- *Effetto INCHIOSTRO: quando l'acqua rientra in canali molto stretti richiede un incremento locale di suzione. Nel suolo si verifica un fenomeno di instabilità in cui l'interfaccia non può avanzare fino a quando non viene riempito anche un meato vicino. L'equilibrio viene raggiunto con un diverso valore di θ_w*

Effetto GOCCIA: l'angolo di contatto di una superficie che avanza è diverso da quello di una superficie che arretra.

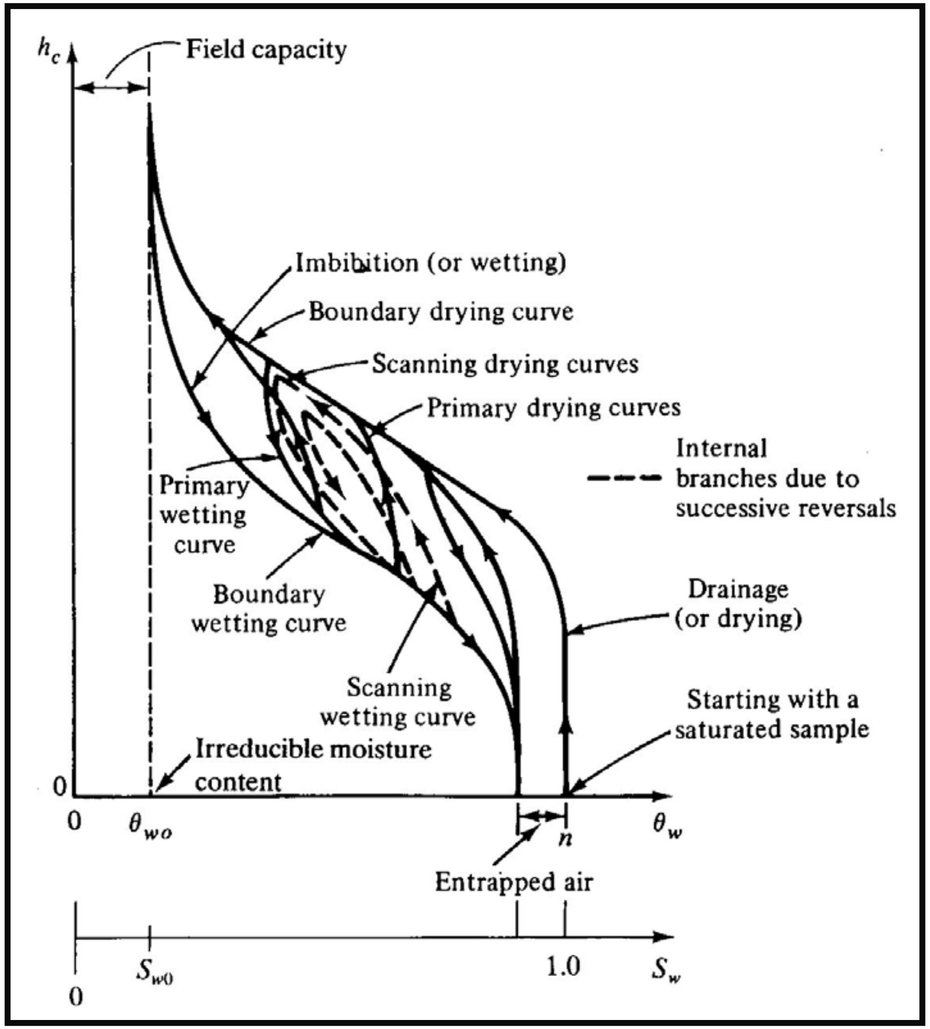
➢ Curva di Isteresi

Nella CURVA di ISTERESI, le componenti dovute al drenaggio ed all'imbibizione formano un anello chiuso.

È possibile iniziare il processo di drenaggio in qualsiasi punto della curva di imbibizione ed il processo di imbibizione da qualsiasi punto della curva di drenaggio (linee tratteggiate).

Pertanto, la relazione tra pressione capillare e saturazione espressa dalla curva di ritenzione dipende anche dalla storia di drenaggio-imbibizione del campione di terreno in esame.

Per assegnata pressione di capillarità, si ottiene una maggiore saturazione durante il drenaggio rispetto alla fase di imbibizione.



IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

➢ Equazioni del moto

Sembra naturale cercare di estendere il concetto di permeabilità utilizzato per il moto in mezzo saturo anche nel caso insaturo, modificandone il valore per tener conto della presenza del secondo fluido (aria) che occupa parte degli spazi interstiziali.

Anche in questo caso infatti le equazioni del moto possono essere derivate mediando le equazioni di bilancio della quantità di moto per ciascuna fase.

Si può ancora utilizzare dunque l'equazione di Darcy generalizzata per descrivere separatamente il moto delle due fasi, con la differenza che in questo caso la permeabilità di ciascuna fase sarà funzione del grado di saturazione:

$$\mathbf{q}_w = -\mathbf{K}_w(S_w)\cdot\nabla\phi_w$$
$$\mathbf{q}_a = -\mathbf{K}_a(S_a)\cdot\nabla\phi_a$$

in cui K_w e K_a sono le conduttività idrauliche effettive dell'acqua e dell'aria.
Ad esempio per l'acqua:

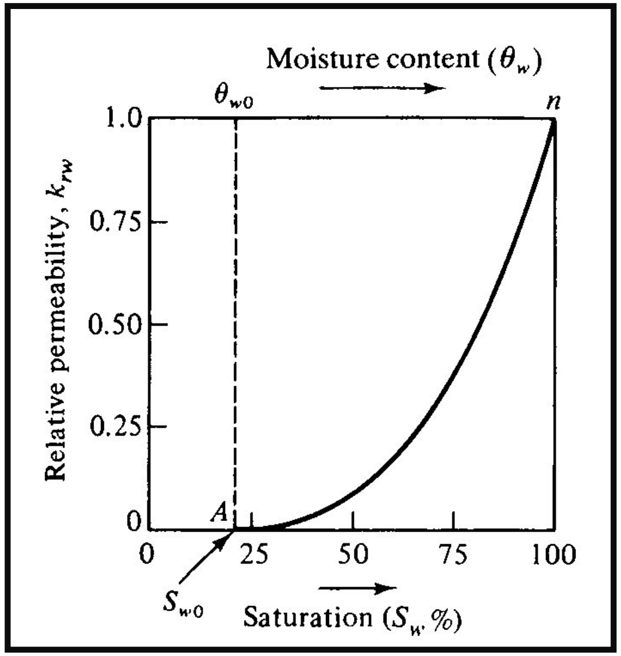
$$K_w = k_w \cdot \frac{\rho_w\, g}{\mu}$$

➢ Permeabilità Relativa

In caso di mezzo isotropo può essere utile fare riferimento alla PERMEABILITA' RELATIVA, definita come rapporto tra la permeabilità effettiva e quella a saturazione:

$$k_{wr} = \frac{k_w(S_w)}{k_w\big|_{S_w=1}} \qquad , \qquad k_{ar} = \frac{k_a(S_a)}{k_a\big|_{S_a=1}}$$

In figura è rappresentata la variazione della permeabilità relativa con il grado di saturazione S_w per un mezzo poroso isotropo in base alle esperienze di Wyckoff e Botset (1936).



Diversi autori hanno proposto relazioni analitiche tra la conduttività idraulica effettiva ed il grado di saturazione:

Childs e Collis-George (1950)

$$K_w(S_w) = B\theta_w^3 / M^2$$

con M = area superficiale specifica della fase solida e B una costante.

➢ Conduttività Idraulica Relativa

Irmay (1954) propone una relazione simile ma riferita alla conduttività idraulica relativa:

$$K_w(S_e) = K_0 S_e^3$$

in cui:

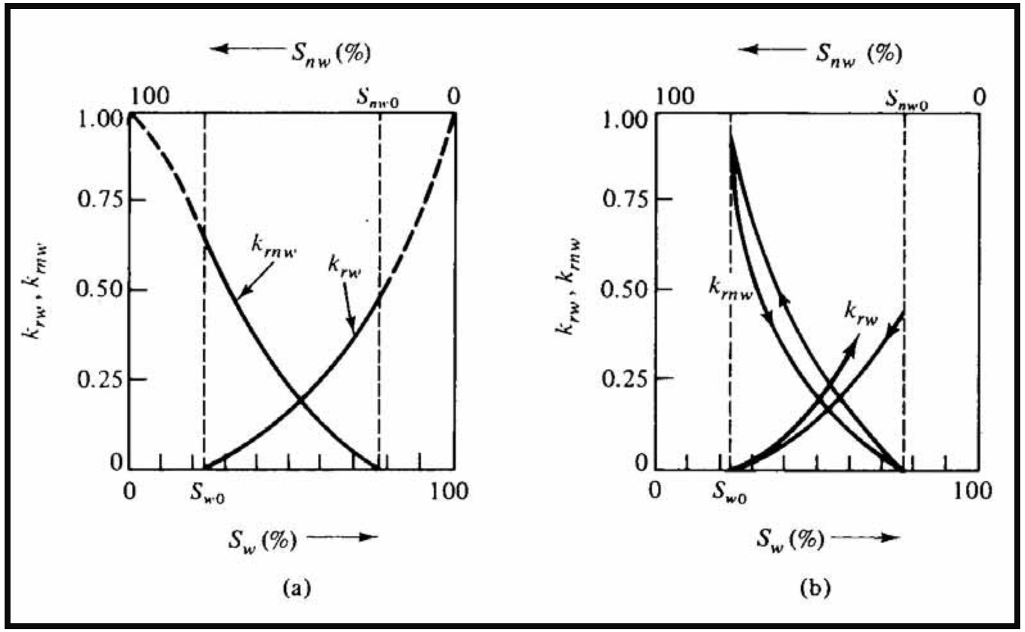
$$S_e = \frac{(S_w - S_{w0})}{(1 - S_{w0})}$$

rappresenta la SATURAZIONE EFFETTIVA e K_0 è la conduttività idraulica satura.

Brooks e Corey (1964) hanno proposto una forma generalizzata espressa in funzione della pressione di capillarità nella forma:

$$k_{wr} = (p_{cc} / p_c)^{(2+3\lambda)/\lambda} \qquad p_c \geq p_{cc}$$

in cui p_{cc} è la pressione di capillarità critica e λ un fattore di distribuzione della dimensione dei meati.



(w = wetting phase; nw = non-wetting phase)

➢ Conduttività Idraulica Relativa

Gardner (1958) propone una relazione empirica:

$$K_w(\psi) = \frac{a}{b + \psi^m}$$

in cui a, b ed m sono costanti, con m ≈ 2 per suoli compatti ed m ≈ 4 per la sabbia, oppure:

$$K_w(\psi) = K_0 \exp(-a\,\psi)$$

che non interpreta molto bene i dati sperimentali ma è conveniente nella modellazione analitica e numerica.

Burdine (1953) propone una relazione tra permeabilità relativa e curva di ritenzione, $p_c(S_w)$:

$$k_{wr}(S_e) = S_e^2 \cdot \int_0^{S_e} \frac{dS_w}{p_c^2(S_w)} \Bigg/ \int_0^1 \frac{dS_w}{p_c^2(S_w)}$$

Mualem (1976) suggerisce invece la relazione:

$$k_{wr}(S_e) = S_e^{0.5} \cdot \int_0^{S_e} \frac{dS_w}{p_c(S_w)} \Bigg/ \int_0^1 \frac{dS_w}{p_c(S_w)}$$

(entrambe richiedono di conoscere la curva di ritenzione $p_c = p_c(S_w)$).

➢ Equazione di continuità

Riprendiamo l'equazione di bilancio di massa, che in caso di mezzo insaturo si scrive (per l'acqua):

$$-\nabla \cdot (\rho_w \; \mathbf{q}_w) - \rho_w \cdot P = \frac{\partial (n \rho_w S_w)}{\partial t}$$

in cui P rappresenta un pozzo di massa dovuto ad es. al prelievo da parte delle radici.

Inserendo l'equazione del moto per $\mathbf{q}_w$:

$$\mathbf{q}_w = -\mathbf{K}_w (S_w) \cdot \nabla \phi_w$$

$$\mathbf{q}_w = \mathbf{K}_w (S_w) \cdot \nabla \psi$$

con $\mathbf{K}_w$ la conduttività idraulica effettiva dell'acqua.

(ρ_w = cost)

$$\frac{\partial (n S_w)}{\partial t} - \nabla \cdot \left\{ \mathbf{K}_w (S_w) \cdot \nabla \phi \right\} = 0$$

avendo trascurato il termine sorgente o pozzo di massa P.

IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

L'equazione completa del flusso in mezzo insaturo si può anche scrivere :

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \nabla \cdot \left\{ \mathbf{K}_w(\theta_w) \cdot \nabla \phi \right\} = 0$$

(n = cost)

Oppure, introducendo la DIFFUSIVITA' IDRAULICA D [L^2T^{-1}] :

$$D_w(\theta_w) = -K_w(\theta_w) \,\partial\phi / \partial\theta_w$$

attraverso la quale l'equazione del moto diventa:

$$\mathbf{q}_w = -D_w(\theta_w) \cdot \nabla \theta_w$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \nabla \cdot \left\{ \mathbf{D}_w(\theta_w) \cdot \nabla \theta_w \right\} = 0$$

➢ Schema uni-dimensionale

Moltissime applicazioni sono riferite a condizioni di moto verticale in cui la schematizzazione uni-dimensionale è del tutto accettabile.
In tal caso le equazioni per mezzo insaturo diventano:

$$\boxed{\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{ K_w(\theta_w) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} = 0}$$

Oppure:

$$\boxed{\frac{\partial \theta_w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{ D_w(\theta_w) \cdot \frac{\partial \theta_w}{\partial z} \right\} = 0}$$

Mayhugh (1958) ha suggerito per D_w l'espressione:

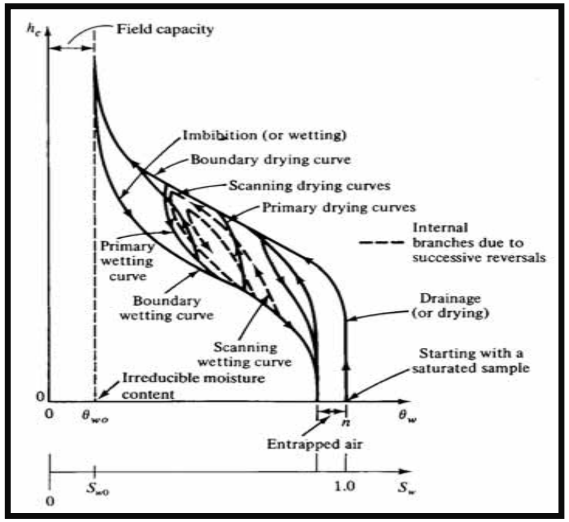
$$\boxed{D_w(\theta_w) = D_{w_0} \exp\left\{ A \cdot (\theta_w - \theta_{w_0}) \right\}}$$

in cui D_{w0} ed A sono coefficienti di derivazione empirica.

➢ Condizioni iniziali ed al contorno

Come per le equazioni del moto in mezzo saturo, anche in questo caso è necessario specificare le condizioni iniziali ed al contorno in termini della variabile di stato, normalmente p_w (o ψ), oppure S_w (o θ_w).

Inoltre, a differenza del caso di mezzo saturo, è anche necessario specificare se si tratta di una fase di bagnamento o di drenaggio, poiché $K_w(\theta_w)$e $\psi(\theta_w)$ sono soggetti al fenomeno dell'isteresi.



✓ Condizioni iniziali

La condizione iniziale è costituita dallo stato della variabile dipendente nel dominio D all'istante t = 0:

$$\boxed{\theta_w(\mathbf{x}, t=0) = \theta_{w0}(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{D}}$$

oppure:

$$\psi(\mathbf{x}, t=0) = \psi_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{D}$$

- **Condizioni al contorno**

  La condizione al contorno deve essere specificata o imposta sull'intero confine B del dominio di moto. Le condizioni al contorno sono di tre tipi:

☑ **Condizione al contorno del I Tipo (Dirichlet)**

È la condizione di contenuto di umidità θ_w (oppure carico piezometrico ϕ_w, pressione p_w, o suzione ψ_w) assegnato sul contorno.

$$\boxed{\theta_w(\mathbf{x}, t) = \theta_{w1}(\mathbf{x}, t) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B_1}}$$

La condizione di pressione p_w assegnata sul contorno si verifica in caso di presenza di acqua in superficie, che impone una certa pressione idrostatica. Al limite lo strato di acqua in superficie può essere così sottile da avere praticamente $p_w = 0$.

In tal caso è sempre possibile imporre il valore di θ_w alla saturazione, corrispondente alla pressione $p_w = 0$ (condizione da imporre quando le equazioni sono scritte in termini di θ_w).

Normalmente, se non in casi particolari, non sono noti i valori della pressione p_w né del contenuto di umidità θ_w lungo il contorno.

☑ **Condizione al contorno del II Tipo (Neumann)**

Questa condizione si verifica ad esempio quando l'acqua (dovuta alla pioggia o all'irrigazione) raggiunge la superficie con una portata nota.
Per continuità alla superficie, se N è la portata che raggiunge la superficie:

$$\boxed{\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{q}_w \cdot \boldsymbol{\nu}}$$

con ν il versore normale alla superficie e $\mathbf{q}_w$ la portata specifica dal lato del terreno.

Per un flusso verticale di portata N, si ha: $\mathbf{N}\cdot\nu = -N\ \nabla z.$
Per un flusso di evaporazione di tasso E, si ha: $\mathbf{N}\cdot\nu = E\ \nabla z$
Ed utilizzando per $\mathbf{q}_w$ le equazioni ricavate precedentemente, si ottiene:

$$\boxed{N = -\left\{ K_w(\psi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}}$$

oppure:

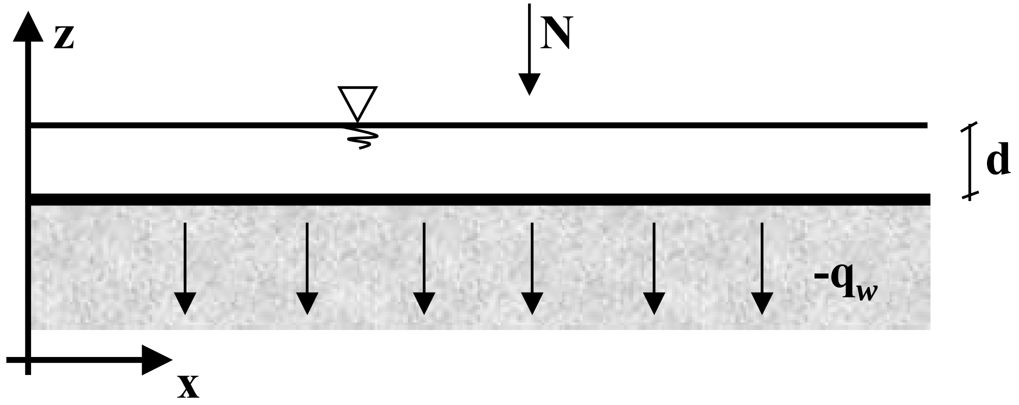
$$\boxed{N = D_w(\theta_w) \cdot \frac{\partial \theta_w}{\partial z}}$$

In caso di superficie impermeabile si pone $\mathbf{N}\cdot\nu = 0.$

- **Condizioni limite di imbibizione**

Nel caso dell'imbibizione è possibile che si raggiunga il limite della capacità del suolo di ricevere acqua a seguito della portata imposta come condizione al contorno.

Se il tasso di accrescimento N su di una superficie (supposta orizzontale) supera un certo valore, l'acqua inizia a ristagnare in superficie (PONDING).
Ciò si verifica quando $N = K_0$ (ovvero a saturazione)

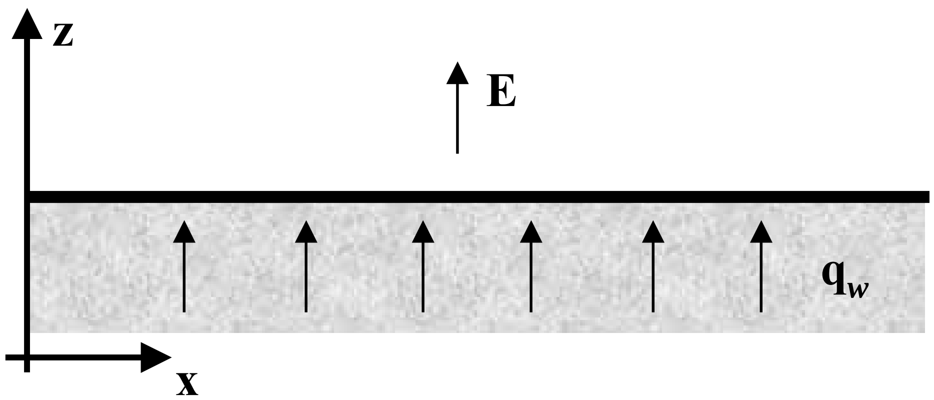


A quel punto, θ_w raggiunge il valore di saturazione alla superficie, $\psi = 0$, $\partial\psi/\partial z = 0$, ed il flusso verso il basso (portata specifica) è uguale a K_0.
Se $N > K_0$ si verifica il ristagno dell'acqua in superficie ed il conseguente ruscellamento, e la condizione al contorno diventa una condizione di primo tipo (carico o contenuto di umidità assegnato).

- **Condizioni limite di drenaggio**

Nel caso del drenaggio (per evaporazione) il flusso in grado di fuoriuscire dalla superficie del suolo è limitato dalla capacità del suolo di far risalire l'acqua verso la superficie. Il flusso effettivo (che può essere solo una frazione dell'evaporazione potenziale) è governato dalla permeabilità del suolo che a sua volta dipende dal contenuto di umidità e dal gradiente di umidità alla superficie.

Per valori bassi di E si instaura una condizione al contorno del secondo tipo, ed all'aumentare di E si raggiunge il punto in cui il contenuto di umidità è minimo, $\theta_w = \theta_{w\,0}$***, per cui*** $K(\theta_w) = 0$ ***e*** $\nabla\theta_w \rightarrow \infty$.

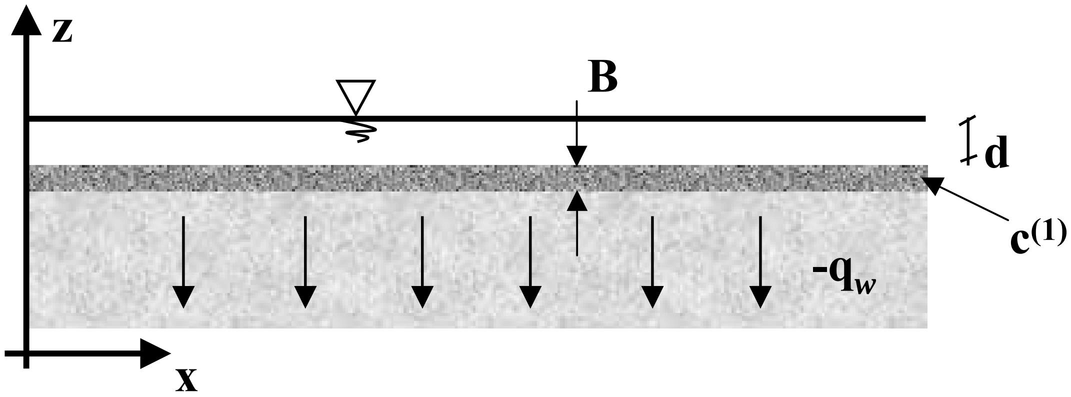


In entrambi i casi si raggiunge una condizione limite ad un certo istante di tempo incognito, che si ottiene massimizzando il valore assoluto del flusso d'acqua, con il rispettivo segno.

☑ **Condizione al contorno del III Tipo (Cauchy)**

Quando il dominio fluido è confinato da uno strato semi-permeabile di mezzo poroso di spessore B con resistenza $c^{(1)}$.
Ad esempio ciò si verifica sul fondo di un invaso per la ricarica artificiale dell'acquifero.

La condizione di continuità all'interfaccia con il mezzo insaturo impone:



$$\mathbf{q}_w \cdot \mathbf{v} = \frac{\phi - \phi_0}{c^{(1)}}$$

dove ϕ e $\phi 0$ sono i carichi piezometrici sopra e sotto allo strato semi-permeabile.

Per un contorno orizzontale e mezzo isotropo, la condizione al contorno assume la forma:

$$K_w(\psi) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\psi}{c^{(1)}} = \frac{B + d}{c^{(1)}}$$

IL MOTO NELLA ZONA INSATURA

La formulazione del problema del moto in mezzo insaturo comprende:

1. **individuazione del *dominio di moto* D, e del suo contorno B;**
2. **Definizione delle opportune variabili di stato;**
3. **definizione di un'appropriata *equazione di continuità* per la fase liquida e per la fase aeriforme;**
4. **Definizione delle opportune *equazioni del moto;***
5. **Individuazione dei dati relativi alla curva di ritenzione ed alla permeabilità effettiva, nonché dei *valori di tutti i coefficienti* coinvolti;**
6. **definizione delle *condizioni iniziali* per problemi di transitorio;**
7. **definizione delle *condizioni al contorno*, ai confini del dominio D**

La definizione di tali elementi consente di formulare completamente un *problema di flusso* o un *modello di flusso* nel caso di mezzo insaturo.

Se il dominio fluido è costituito da regioni con diverse caratteristiche (omogenee) del mezzo poroso (ad es. un mezzo stratificato), si impone che in tutti i punti dell'interfaccia sia la componente normale del flusso che le pressioni coincidano:

$$\boxed{p_{w_1} = p_{w_2} \qquad ; \qquad q_{w_{1n}} = q_{w_{2n}}}$$