Corso di laurea specialistica in
Ingegneria delle Acque e della Difesa del Suolo

Corso di

GESTIONE delle RISORSE IDRICHE

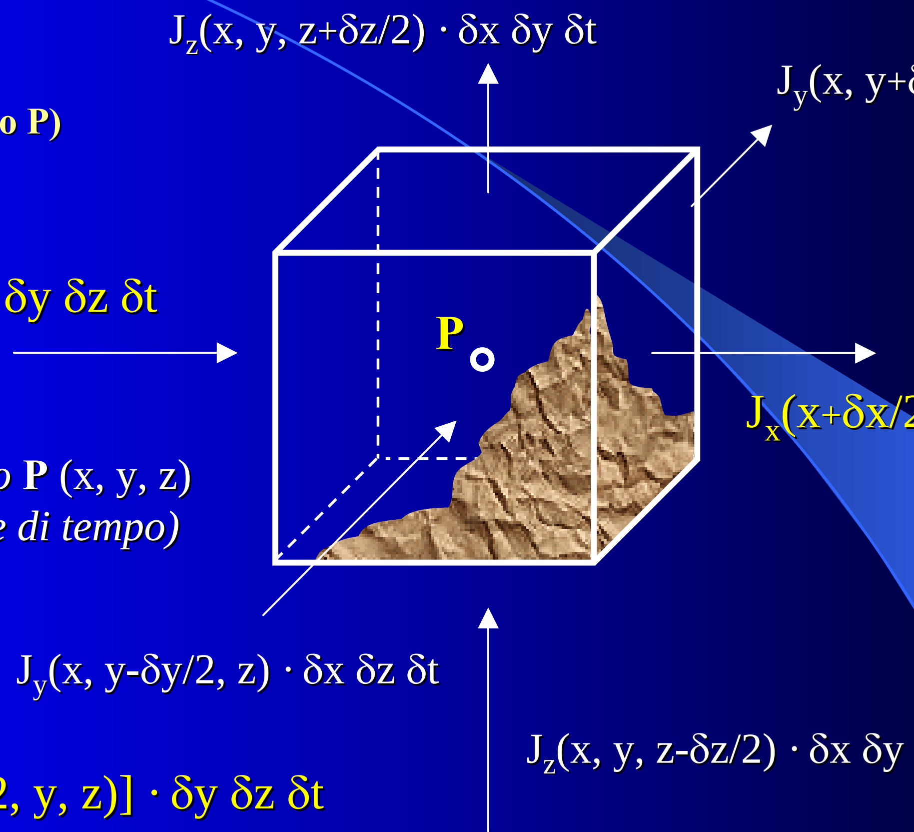
a.a. 2003-2004

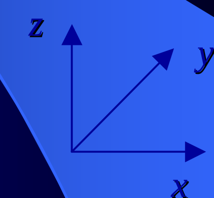
Prof. Luca Lanza

Dipartimento di Ingegneria Ambientale - DIAM

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

➢ **Approccio microscopico:**
(bilancio di massa nell'intorno del punto P)





$\mathbf{J} = \rho\,\mathbf{v}$
flusso di massa dell'acqua nel punto **P** (x, y, z)
(ovvero la massa per unità di area e di tempo)

Bilancio di massa in direzione x:

$$[J_x(x-\delta x/2, y, z) - J_x(x+\delta x/2, y, z)] \cdot \delta y\ \delta z\ \delta t$$

Il bilancio complessivo sarà:

$$\left\{\frac{J_x\left(x-\delta x/2, y, z\right) - J_x\left(x+\delta x/2, y, z\right)}{\delta x} + \frac{J_y\left(x, y-\delta y/2, z\right) - J_y\left(x, y+\delta y/2, z\right)}{\delta y} + \frac{J_z\left(x, y, z-\delta z/2\right) - J_z\left(x, y, z+\delta z/2\right)}{\delta z}\right\} \cdot \delta x\,\delta y\,\delta z \cdot \delta t$$

dividendo per $\delta U = \delta x\ \delta y\ \delta z$ e per δt
ed al limite per $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$:

$$-(\partial J_x/\partial x + \partial J_y/\partial y + \partial J_z/\partial z) \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{div}\,\mathbf{J} \equiv -\nabla\mathbf{J}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

In assenza di sorgenti o pozzi la variazione di massa del fluido nell'unità di tempo è dovuta alla compressibilità del fluido (e della matrice solida).
Per un volume di fluido microscopico:

$$\nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Mediando tale equazione sul volume del REV:

$$< \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) >_{REV} = < -\frac{\partial \rho}{\partial t} >_{REV}$$

Applicando il teorema di integrazione:

$$< \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) >_{REV} = \nabla < \rho \ \mathbf{v} >_{REV} + \frac{1}{V_0} \int_{A_{sf}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \ dA$$

*con A_{sf} la superficie di separazione solido/liquido, ed **n** il versore normale a tale superficie, sulla quale il vettore **v** si annulla.*
Se l'operazione di media si applica direttamente alla fase liquida, l'equazione di bilancio diventa:

$$< \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) >_{REV} = \nabla (n < \rho \ \mathbf{v} >_f)$$

(n = porosità)

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Il flusso medio di massa $<\rho\, \mathbf{v}>_f$ si può scrivere come: $<\rho\, \mathbf{v}>_f = <\rho>_f \cdot <\mathbf{v}>_f + \mathbf{J}_d$
in cui $\mathbf{J}_d$ è un flusso di massa dispersivo dovuto alla media del prodotto delle due variabili ρ e $\mathbf{v}$ all'interno del REV.

Se la densità del fluido è costante, o può essere considerata tale almeno nell'ambito del REV, il termine J_d si annulla. Normalmente il termine J_d si trascura.

Il secondo termine dell'equazione di continuità si può scrivere come:

$$< \frac{\partial \rho}{\partial t} >_{REV} = \frac{\partial}{\partial t} < \rho >_{REV} = \frac{\partial}{\partial t}(n < \rho >_f)$$

In base a tali considerazioni e ponendo $\mathbf{q} = n\,\mathbf{v}$ *e* $<\rho>_f = \rho$
si ottiene
l'equazione di continuità di un fluido a densità variabile in un mezzo poroso:

$$\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) = -\frac{\partial (n\rho)}{\partial t}$$

Fluido incomprimibile
ρ = costante

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\frac{\partial n}{\partial t}$$

Mezzo omogeneo
***n* = costante**

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Se la densità del fluido dipende dalla temperatura T e dalla concentrazione di soluto c, e quindi $\rho = \rho$ (T, c), la variazione di massa per unità di tempo a porosità costante (mezzo omogeneo) sarà:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = n \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t} \right)$$

Se la variazione di densità dipende solo dalla compressibilità del fluido, la variazione di massa per unità di tempo sarà:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

e poiché la variazione di pressione nel tempo, per fluido comprimibile, è :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho(p) \cdot g \frac{\partial h}{\partial t}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \rho g \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = \rho \cdot S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

con S_o = coefficiente di immagazzinamento specifico:

$$S_0 = g \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$$

S_o [L^{-1}] rappresenta la variazione di volume del fluido per unità di volume del mezzo poroso dovuta ad una variazione unitaria del carico piezometrico.

Valori tipici:
10^{-2} m^{-1} per argille molto comprimibili
10^{-7} m^{-1} per rocce con bassa porosità
10^{-5} m^{-1} per ghiaie sabbiose

Termini sorgente o pozzo di massa

Nel caso di pozzi distribuiti di potenza
$P_w = P_w (x, y, z, t)$ – volume d'acqua estratta per unità di volume di mezzo poroso nell'unità di tempo.

$$-\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) - \rho \cdot P_{\omega}(x, y, z, t) = \frac{\partial (n\rho)}{\partial t}$$

Nel caso di pozzi concentrati nei punti i = 1, 2, … di potenza
$P'_w = P'_w (x_i, y_i, z_i, t)$

$$-\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) - \sum_i \rho \cdot P'_{\omega}(x_i, y_i, z_i, t) \cdot \delta(x - x_i, y - y_i, z - z_i) = \frac{\partial (n\rho)}{\partial t}$$

(δ = Delta di Dirac)

La divergenza del flusso di massa può essere ulteriormente semplificata trascurando le differenze di densità all'interno del volume del REV (assumendo che le variazioni nello spazio sono più piccole rispetto a quelle nel tempo). In tal caso:

$$\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) = \rho\ \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + P_{\omega} = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

EQUAZIONI COMPLETE 3-D

Eq.ne del moto:
(generalizzata di Darcy)

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla h$$

Eq.ne di continuità:
(bilancio di massa)

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + P_\omega = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h) + P_\omega = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

ovvero, per esteso:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}+K_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}+K_{xz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yx}\frac{\partial h}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}+K_{yz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zx}\frac{\partial h}{\partial x}+K_{zy}\frac{\partial h}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+P=S_0\frac{\partial h}{\partial t}$$

Casi particolari:

Per fluido incomprimibile e matrice solida rigida (e P=0): $\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h) = 0$

Nel caso di mezzo poroso isotropo: $\nabla \cdot (\mathrm{K} \nabla h) = 0$

Nel caso di mezzo poroso omogeneo:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$