Corso di laurea specialistica in
Ingegneria delle Acque e della Difesa del Suolo

Corso di

GESTIONE delle RISORSE IDRICHE

a.a. 2003-2004

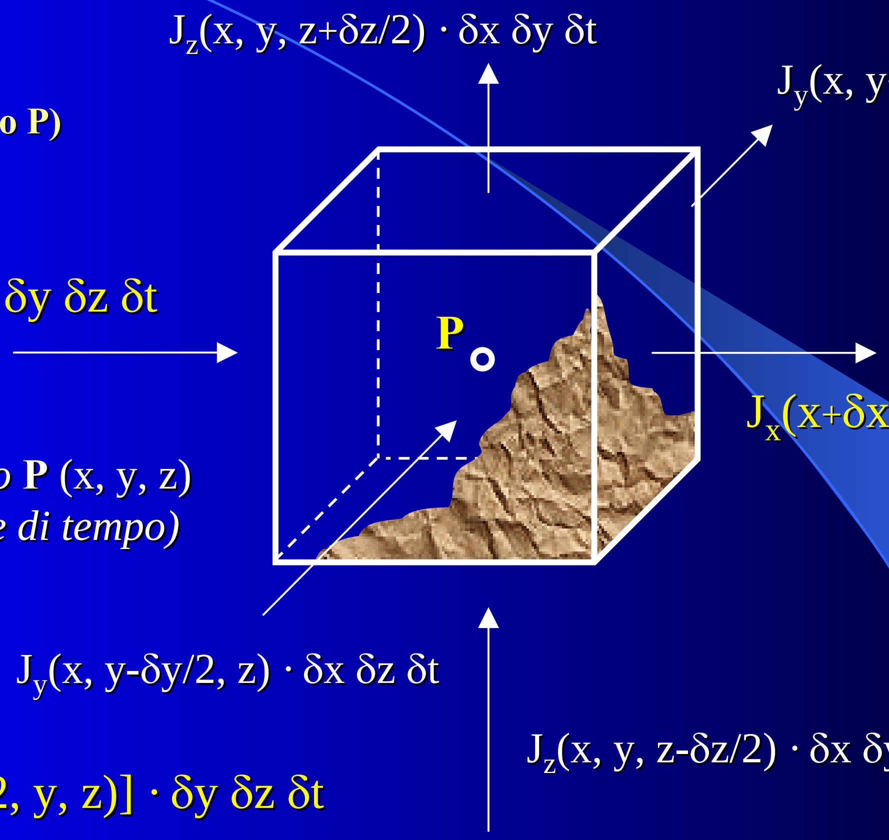
Prof. Luca Lanza

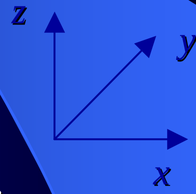
Dipartimento di Ingegneria Ambientale - DIAM

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

➢ Approccio microscopico:

(bilancio di massa nell'intorno del punto P)





$\mathbf{J} = \rho\, \mathbf{v}$

flusso di massa dell'acqua nel punto **P** (x, y, z)

(ovvero la massa per unità di area e di tempo)

Bilancio di massa in direzione x:

$$[J_x(x-\delta x/2, y, z) - J_x(x+\delta x/2, y, z)] \cdot \delta y\, \delta z\, \delta t$$

Il bilancio complessivo sarà:

$$\left\{ \frac{J_x\left(x-\delta x/2, y, z\right) - J_x\left(x+\delta x/2, y, z\right)}{\delta x} + \frac{J_y\left(x, y-\delta y/2, z\right) - J_y\left(x, y+\delta y/2, z\right)}{\delta y} + \frac{J_z\left(x, y, z-\delta z/2\right) - J_z\left(x, y, z+\delta z/2\right)}{\delta z} \right\} \cdot \delta x \delta y \delta z \cdot \delta t$$

dividendo per δU = δx δy δz e per δt

ed al limite per δx, δy, δz → 0:

$$-\left(\partial J_x/\partial x + \partial J_y/\partial y + \partial J_z/\partial z\right) \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{div}\mathbf{J} \equiv -\nabla \mathbf{J}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

In assenza di sorgenti o pozzi la variazione di massa del fluido nell'unità di tempo è dovuta alla compressibilità del fluido (e della matrice solida).
Per un volume di fluido microscopico:

$$\nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Mediando tale equazione sul volume del REV:

$$< \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) >_{REV} = < -\frac{\partial \rho}{\partial t} >_{REV}$$

Applicando il teorema di integrazione:

$$< \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) >_{REV} = \nabla < \rho \ \mathbf{v} >_{REV} + \frac{1}{V_0} \int_{A_{sf}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \ dA$$

*con A_{sf} la superficie di separazione solido/liquido, ed **n** il versore normale a tale superficie, sulla quale il vettore **v** si annulla.*
Se l'operazione di media si applica direttamente alla fase liquida, l'equazione di bilancio diventa:

$$< \nabla \cdot (\rho \ \mathbf{v}) >_{REV} = \nabla (n < \rho \ \mathbf{v} >_f)$$

(n = porosità)

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Il flusso medio di massa $<\rho\,\mathbf{v}>_f$ *si può scrivere come:* $<\rho\,\mathbf{v}>_f = <\rho>_f \cdot <\mathbf{v}>_f + \mathbf{J}_\mathrm{d}$

in cui $\mathbf{J}_\mathrm{d}$ *è un flusso di massa dispersivo dovuto alla media del prodotto delle due variabili* ρ *e* $\mathbf{v}$ *all'interno del REV.*

Se la densità del fluido è costante, o può essere considerata tale almeno nell'ambito del REV, il termine $\mathbf{J}_\mathrm{d}$ si annulla. Normalmente il termine $\mathbf{J}_\mathrm{d}$ si trascura.

Il secondo termine dell'equazione di continuità si può scrivere come:

$$< \frac{\partial \rho}{\partial t} >_{REV} = \frac{\partial}{\partial t} < \rho >_{REV} = \frac{\partial}{\partial t}(n < \rho >_f)$$

In base a tali considerazioni e ponendo $\mathbf{q} = n\,\mathbf{v}$ *e* $<\rho>_f = \rho$

si ottiene

l'equazione di continuità di un fluido a densità variabile in un mezzo poroso:

$$\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) = -\frac{\partial (n\rho)}{\partial t}$$

Fluido incomprimibile

ρ = costante

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -\frac{\partial n}{\partial t}$$

Mezzo omogeneo

***n* = costante**

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Se la densità del fluido dipende dalla temperatura T e dalla concentrazione di soluto c, e quindi $\rho = \rho$ (T, c), la variazione di massa per unità di tempo a porosità costante (mezzo omogeneo) sarà:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = n \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t} \right)$$

Se la variazione di densità dipende solo dalla compressibilità del fluido, la variazione di massa per unità di tempo sarà:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}$$

e poiché la variazione di pressione nel tempo, per fluido comprimibile, è :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho(p) \cdot g \frac{\partial h}{\partial t}$$

si ottiene:

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \rho g \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = \rho \cdot S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

con S_o = coefficiente di immagazzinamento specifico:

$$S_0 = g \left(\rho \frac{\partial n}{\partial p} + n \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$$

S_o [L^{-1}] rappresenta la variazione di volume del fluido per unità di volume del mezzo poroso dovuta ad una variazione unitaria del carico piezometrico.

Valori tipici:
10^{-2} m^{-1} per argille molto comprimibili
10^{-7} m^{-1} per rocce con bassa porosità
10^{-5} m^{-1} per ghiaie sabbiose

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Termini sorgente o pozzo di massa

Nel caso di pozzi distribuiti di potenza
$P_w = P_w (x, y, z, t)$ – volume d'acqua estratta per unità di volume di mezzo poroso nell'unità di tempo.

$$-\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) - \rho \cdot P_\omega(x,y,z,t) = \frac{\partial(n\rho)}{\partial t}$$

Nel caso di pozzi concentrati nei punti i = 1, 2, … di potenza
$P'_w = P'_w (x_i, y_i, z_i, t)$

$$-\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) - \sum_i \rho \cdot P'_\omega(x_i,y_i,z_i,t) \cdot \delta(x-x_i, y-y_i, z-z_i) = \frac{\partial(n\rho)}{\partial t}$$

(δ = Delta di Dirac)

La divergenza del flusso di massa può essere ulteriormente semplificata trascurando le differenze di densità all'interno del volume del REV (assumendo che le variazioni nello spazio sono più piccole rispetto a quelle nel tempo). In tal caso:

$$\nabla \cdot (\rho\ \mathbf{q}) = \rho\ \nabla \cdot \mathbf{q}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + P_\omega = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

EQUAZIONI COMPLETE 3-D

Eq.ne del moto:
(generalizzata di Darcy)

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla h$$

Eq.ne di continuità:
(bilancio di massa)

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + P_\omega = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h) + P_\omega = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}$$

ovvero, per esteso:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}+K_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}+K_{xz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yx}\frac{\partial h}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}+K_{yz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zx}\frac{\partial h}{\partial x}+K_{zy}\frac{\partial h}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)+P=S_0\frac{\partial h}{\partial t}$$

Casi particolari:

Per fluido incomprimibile e matrice solida rigida (e P=0): $\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla h) = 0$

Nel caso di mezzo poroso isotropo: $\nabla \cdot (\mathrm{K} \nabla h) = 0$

Nel caso di mezzo poroso omogeneo:

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Formulazione del Problema del Moto

La formulazione del problema del moto comprende:

1. **individuazione del *dominio di moto* D, e del suo contorno B;**
2. **definizione di un'appropriata *equazione di continuità* e della relativa variabile dipendente, ad es.** $h(\mathbf{x}, t)$**;**
3. **definizione dei *coefficienti*, ad es.** $K(\mathbf{x})$, $S_0(\mathbf{x})$**;**
4. **definizione delle *condizioni iniziali* per problemi di transitorio;**
5. **definizione delle *condizioni al contorno*, ai confini del dominio D**

La definizione di tali elementi consente di formulare completamente un *problema di flusso* o un *modello di flusso*.

- **Condizioni iniziali**

La condizione iniziale è costituita dallo stato della variabile dipendente nel dominio D all'istante t = 0:

$$\boxed{h(\mathbf{x}, t = 0) = h_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{D}}$$

oppure:

$$p(\mathbf{x}, t = 0) = p_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{D}$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

➢ **Condizioni al contorno**

La condizione al contorno deve essere specificata o imposta sull'intero confine B del dominio di moto.
Le condizioni al contorno sono di tre tipi:

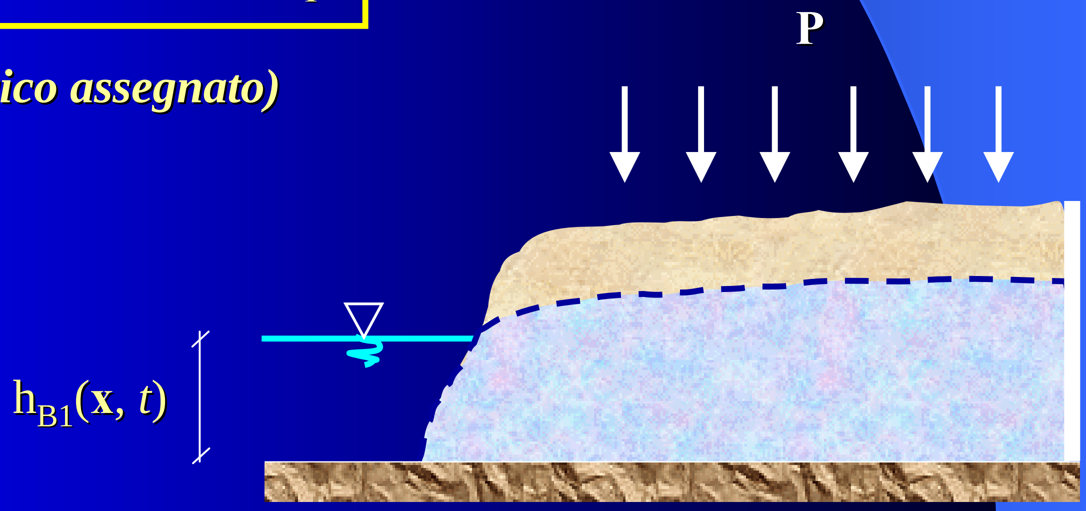
☑ **Condizione al contorno del I Tipo (Dirichlet)**

Se l'acquifero è in contatto diretto con un corpo idrico superficiale (corso d'acqua, lago, …) è possibile assegnare il carico piezometrico lungo tale confine:

$$\boxed{h(\mathbf{x}, t) = h_{B1}(\mathbf{x}, t) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B_1}}$$

(carico piezometrico assegnato)

Il parametro $h_{B1}(\mathbf{x}, t)$ ***rappresenta il livello dell'acqua nel corpo idrico superficiale, il quale può essere anche variabile nel tempo.***



CONDIZIONI AL CONTORNO

☑ **Condizione al contorno del II Tipo (Neumann)**

Se esiste un flusso assegnato o imposto su di una superficie di confine del campo di moto, è possibile assegnare il valore della portata specifica :

$$\boxed{q_n(\mathbf{x}, t) = q_{B2}(\mathbf{x}, t) \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B_2}}$$

(portata specifica assegnata)

Un caso particolare è quello della superficie impermeabile, in cui q_n=0 su B_2 con la condizione:

$$\boxed{q_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}\,(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\,\nabla h(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B_2}}$$

Tale condizione diventa, nel caso di mezzo poroso isotropo:

$$\frac{\partial h}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in B_2$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

☑ **Condizione al contorno del III Tipo (Cauchy)**

Quando il dominio fluido è confinato da uno strato semi-permeabile di mezzo poroso di spessore b_3 con permeabilità ridotta K_3 e carico piezometrico h_3:

$$q_n = K_3(\mathbf{x})\frac{h_3(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{b_3} \qquad \mathbf{x} \in B_3$$

(portata specifica assegnata in funzione del carico h_3)

ovvero:

$$(-\mathbf{K}\nabla h)\cdot \mathbf{n} = \frac{h_3(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})}{\sigma_3(\mathbf{x})} \qquad \mathbf{x} \in B_3$$

Il fattore $\sigma_3 = b_3 / K_3$ si chiama coefficiente di dispersione (leakage).

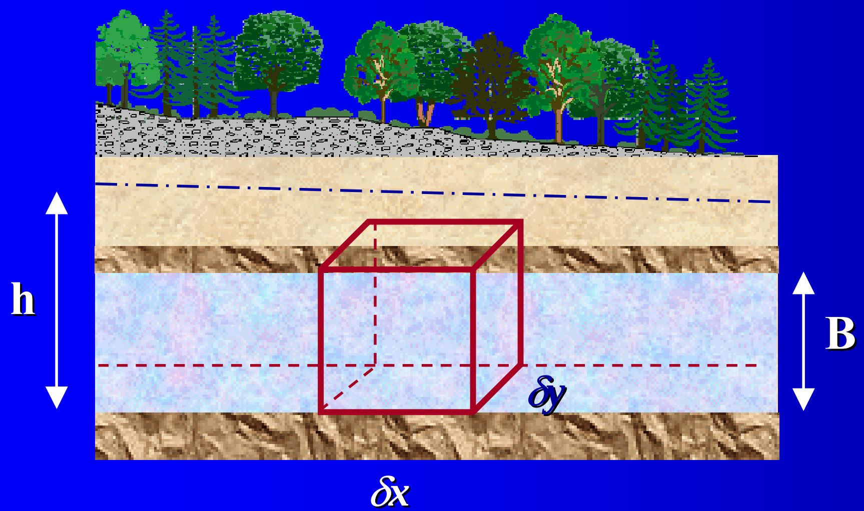
✓ **Se lo strato diviene molto permeabile, $\sigma_3 \rightarrow 0$ e la condizione al contorno si riduce ad una condizione di carico piezometrico imposto.**

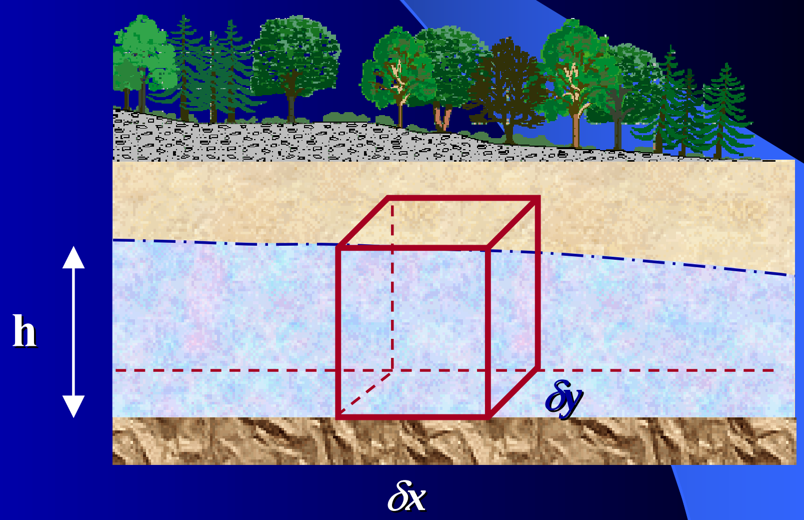
✓ **Se lo strato diviene invece impermeabile, $\sigma_3 \rightarrow \infty$ e la condizione al contorno si riduce ad una condizione di flusso imposto e pari a zero.**

SCHEMA DI MOTO 2-D

Schema di moto valido nell'ipotesi di flusso essenzialmente orizzontale, ovvero quando è valida l'ipotesi di Dupuit.

Le equazioni di continuità e del moto si possono derivare integrando le equazioni complete 3-D sullo spessore dell'acquifero (B se confinato o h se freatico).





Tuttavia un approccio più rapido è quello di analizzare direttamente un volume di controllo di area δx·δy e di altezza pari a B se confinato o h se freatico.

SCHEMA DI MOTO 2-D

➢ **Coefficiente di Immagazzinamento S [-]**

Acquifero confinato

Indica il volume di acqua ΔU_w rilasciato o incorporato per unità di area orizzontale A = δx·δy dell'acquifero e per unità di variazione di carico piezometrico Δh:

$$S = \Delta U_\omega / A \cdot \Delta h$$

Il coefficiente di immagazzinamento è legato al coefficiente di immagazzinamento specifico S_0 dovuto al comportamento elastico dell'acqua e della matrice solida:

$$S(x, y) = \int_{b_1}^{b_2} S_0(x, y, z)\ \mathrm{dz}$$

dove b_1 e b_2 sono le quote delle superfici inferiore e superiore dell'acquifero.

SCHEMA DI MOTO 2-D

➢ **Coefficiente di Immagazzinamento S [-]**

Acquifero freatico

Indica il volume di acqua ΔU_w rilasciato o incorporato per unità di area orizzontale $A = \delta x \cdot \delta y$ dell'acquifero e per unità di variazione di livello freatico Δh:

$$S = \frac{\Delta U_\omega}{A \cdot \Delta h}$$

Nonostante l'analogia delle definizioni nel caso dei due tipi di acquifero, il coefficiente di immagazzinamento è dovuto nei due casi a diverse ragioni:

- ***nel caso di acquifero confinato*** → ***è dovuto alla comprimibilità dell'acqua e della matrice solida;***
- ***nel caso di acquifero freatico*** → ***è l'acqua drenata dagli spazi interstiziali dello spazio tra la posizione iniziale e finale della superficie freatica.***

Il coefficiente di immagazzinamento di un acquifero freatico si indica infatti come
POROSITA' EFFICACE SPECIFICA S_y

SCHEMA DI MOTO 2-D

Ritenzione specifica

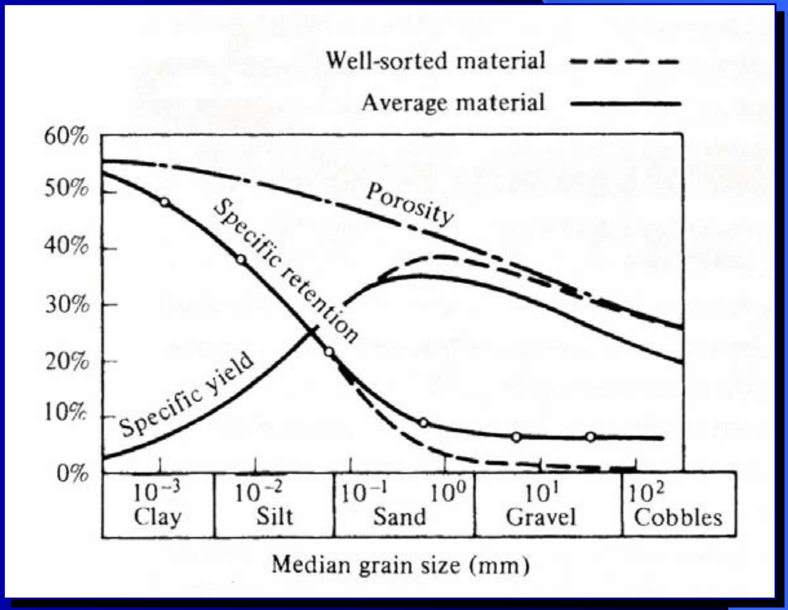
La porosità efficace specifica non rappresenta la porosità effettiva *n* del mezzo poroso.

Quando l'acqua viene drenata dagli spazi interstiziali il drenaggio non è mai completo, poiché una certa quantità d'acqua rimane trattenuta nel suolo dalle forze di capillarità.

Al termine del drenaggio il volume d'acqua che rimane trattenuto nell'acquifero per unità di area ed unità di abbassamento della superficie freatica è detta: ritenzione specifica S_r.

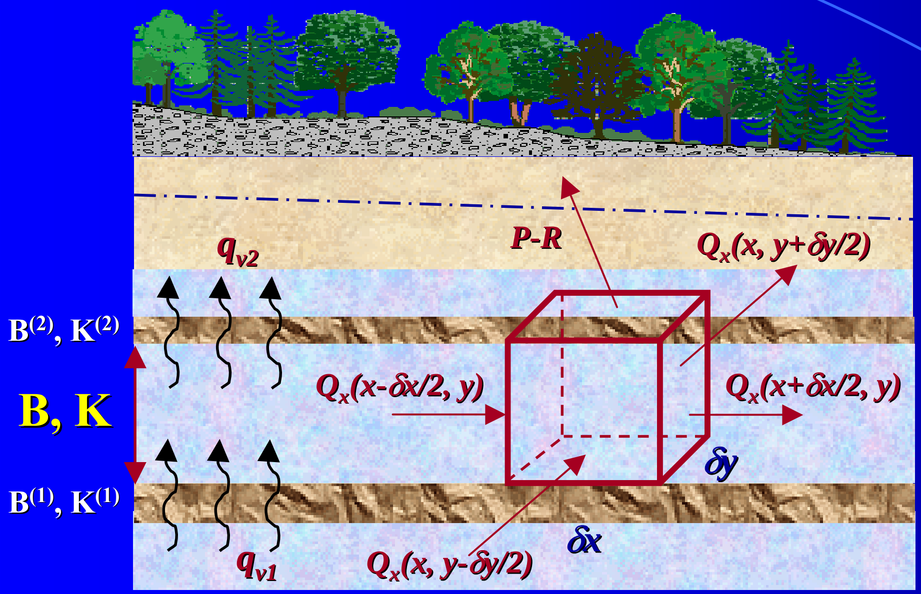
La relazione tra porosità efficace specifica, ritenzione specifica e porosità effettiva è pertanto:

$$S_y + S_r = n$$



Relazione tra porosità efficace specifica e dimensioni dei grani

SCHEMA DI MOTO 2-D



- ***Acquifero confinato semipermeabile***

Approccio del volume di controllo
Hp: flusso orizzontale nell'acquifero
flusso verticale nello strato semipermeabile

I flussi di dispersione sono:

$$q_{v2} = K^{(2)} \frac{h - h_2}{B_2} \qquad q_{v1} = K^{(1)} \frac{h_1 - h}{B_1}$$

con $\sigma^{(i)} = B^{(i)} / K^{(i)}$ i coefficienti di dispersione (leakage).

Equazione di bilancio di massa (fluido incomprimibile):

$$\left\{\left[Q_x\left(x-\frac{\delta x}{2},y\right)-Q_x\left(x+\frac{\delta x}{2},y\right)\right]\cdot\delta y+\left[Q_y\left(x,y-\frac{\delta y}{2}\right)-Q_y\left(x,y+\frac{\delta y}{2}\right)\right]\cdot\delta x+\left(q_{v1}-q_{v2}\right)\cdot\delta x\delta y+\left(R-P\right)\delta x\delta y\right\}\cdot\delta t=S\left(h_{t+\Delta t}-h_t\right)\cdot\delta x\delta y$$

Dividendo per $\delta x \delta y$, ed al limite per δx, δy, $\delta t \rightarrow 0$, si ottiene:

$$-\nabla \cdot \mathbf{Q} + q_{v1} - q_{v2} + R - P = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

SCHEMA DI MOTO 2-D

➢ ***Acquifero confinato semipermeabile***

Ponendo quindi per l'equazione di Darcy:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{T} \cdot \nabla h \qquad \mathbf{T} = \mathbf{K} \cdot B$$

con T = trasmissività, ed utilizzando le espressioni complete dei flussi di dispersione, si ottiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla h) + (h_1 - h)/\sigma_1 - (h - h_2)/\sigma_2 + R - P = S\frac{\partial h}{\partial t}$$

✓ ***Nel caso di mezzo poroso isotropo:***

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (h_1 - h)/\sigma_1 - (h - h_2)/\sigma_2 + R - P = S\frac{\partial h}{\partial t}$$

✓ ***Nel caso di mezzo poroso omogeneo:***

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{(h_1 - h)}{\lambda_1^2} - \frac{(h - h_2)}{\lambda_2^2} + \frac{R - P}{T} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

con $\lambda_i = [\, T \cdot \sigma_i \,]^{1/2}$ = fattore di dispersione (leakage factor).

SCHEMA DI MOTO 2-D

- ***Acquifero confinato impermeabile***

Nel caso di acquifero confinato con contorni impermeabili l'approccio del volume di controllo è sempre valido, ma con $q_{v1} = q_{v2} = 0$.
In tal caso:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla h) + R - P = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

- ✓ ***Nel caso di mezzo poroso omogeneo ed isotropo:***

$$T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + R - P = T \ \nabla^2 h + R - P = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

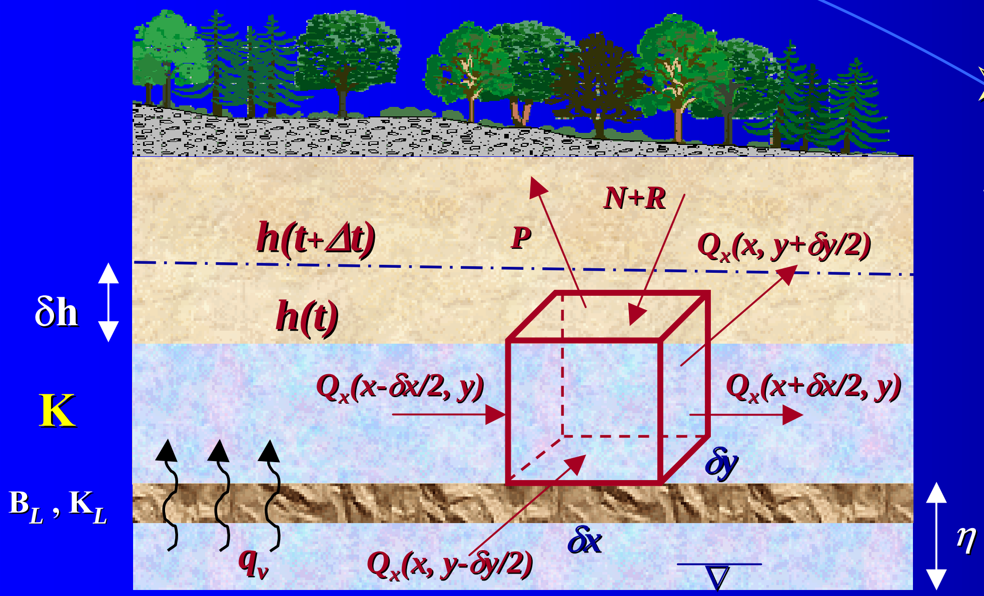
- ✓ ***Nel caso di moto permanente o se il coefficiente di immagazzinamento elastico risulta trascurabile:***

$$T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + R - P = 0$$

ed in assenza di termini pozzo o sorgente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \nabla^2 h = 0$$

SCHEMA DI MOTO 2-D



- ***Acquifero freatico semipermeabile***

Approccio del volume di controllo
Hp: flusso orizzontale nell'acquifero
flusso verticale nello strato semipermeabile

Il flusso di dispersione è:

$$q_v = K_L \frac{h - h_L}{B_L}$$

con $\sigma = K_L / B_L$ il coefficiente di dispersione (leakage).

Equazione di bilancio di massa (fluido incomprimibile):

$$\left\{\left[Q_x\left(x-\frac{\delta x}{2}, y\right)-Q_x\left(x+\frac{\delta x}{2}, y\right)\right]\cdot\delta y+\left[Q_y\left(x, y-\frac{\delta y}{2}\right)-Q_y\left(x, y+\frac{\delta y}{2}\right)\right]\cdot\delta x+q_v\cdot\delta x\delta y+(R+N-P)\delta x\delta y\right\}\cdot\delta t=S_y\left(h_{t+\Delta t}-h_t\right)\cdot\delta x\delta y$$

in cui si è trascurato il contributo dell'elasticità del mezzo poroso rispetto alla porosità efficace specifica nella determinazione del coefficiente di immagazzinamento.

Dividendo per $\delta x\delta y$, ed al limite per δx, δy, $\delta t \rightarrow 0$, si ottiene:

$$-\nabla\cdot\mathbf{Q}+q_v+R+N-P=S_y\frac{\partial h}{\partial t}$$

SCHEMA DI MOTO 2-D

- *Acquifero freatico semipermeabile*

Ponendo quindi per l'equazione di Darcy: $\mathbf{Q} = -\mathbf{K}(h-\eta)\cdot\nabla h$

con K = conduttività, ed utilizzando l'espressione del flusso di dispersione, si ottiene:

$$\nabla\cdot(\mathbf{K}(h-\eta)\cdot\nabla h) + (h_L - h)/\sigma_L + R + N - P = S_y\frac{\partial h}{\partial t}$$

- ✓ *Nel caso di mezzo poroso isotropo:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial y}\right) + (h_L - h)/\sigma_L + R + N - P = S_y\frac{\partial h}{\partial t}$$

- ✓ *Nel caso di mezzo poroso omogeneo:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{(h_L - h)}{\sigma_L K} + \frac{R+N-P}{K} = \frac{S_y}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

SCHEMA DI MOTO 2-D

- ***Acquifero freatico impermeabile***

Nel caso di acquifero confinato con contorni impermeabili l'approccio del volume di controllo è sempre valido, ma con q_v = 0.
In tal caso:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}(h-\eta) \cdot \nabla h) + R + N - P = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$

- ✓ ***Nel caso di mezzo poroso omogeneo ed isotropo:***

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x}(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial y} \right) + R + N - P = S_y \frac{\partial h}{\partial t}$$

- ✓ ***Nel caso di moto permanente o se il coefficiente di immagazzinamento elastico risulta trascurabile:***

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x}(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(h-\eta)\frac{\partial h}{\partial y} \right) + R + N - P = 0$$

ed in assenza di termini pozzo o sorgente (con η = 0 – stesso riferimento per h):

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} = \nabla^2 h^2 = 0$$