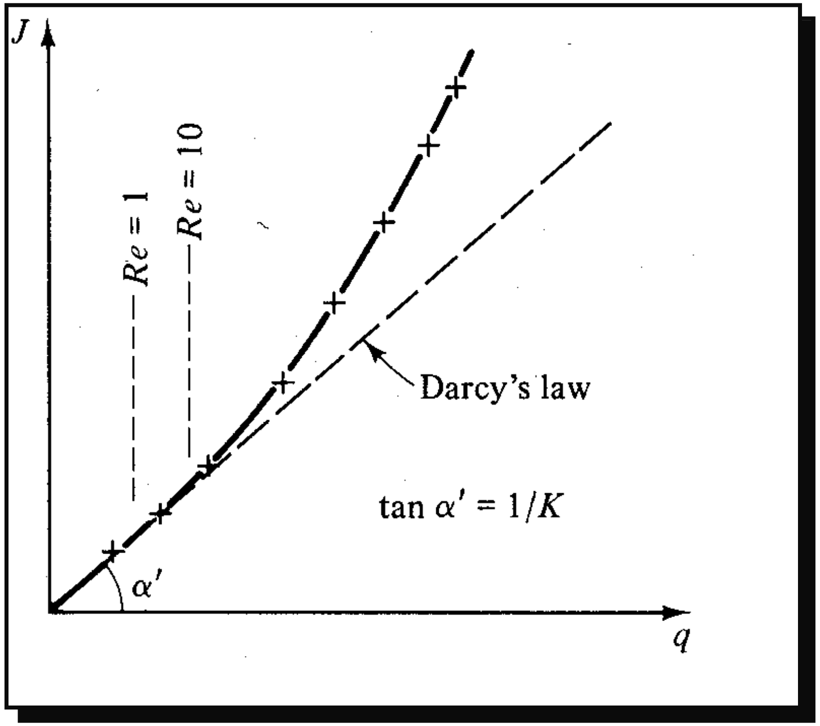
La Legge di DARCY

Campo di validità: al crescere della velocità del fluido, la relazione fra portata defluente e perdita di carico diviene non più lineare.

Numero di Reynolds dei granuli: $$\mathrm{Re}_f = \frac{q \cdot d}{\nu}$$ **dove d è il diametro medio del mezzo poroso**



La linearità viene meno per *Re* = 1÷10 (cala l'effetto delle forze viscose rispetto a quelle inerziali).

Ciò si verifica in vicinanza di grandi pozzi di emungimento/ricarica, sorgenti, ecc.

In genere ci si trova nel campo di validità della Legge di Darcy

Conduttività Idraulica K

La Conduttività Idraulica K [L/T] è definibile in un mezzo isotropo come la

PORTATA SPECIFICA PER UNITA' DI GRADIENTE IDRAULICO

ed è uno scalare che esprime la facilità con cui il fluido viene trasportato negli spazi interstiziali.

È possibile separare l'influenza delle proprietà del fluido da quelle della matrice solida esprimendo K come:

$$K = k \cdot \frac{\rho\, g}{\mu} = k \cdot g/\nu$$

in cui g è l'accelerazione di gravità, e k [L^2] – detta PERMEABILITA' del mezzo poroso – dipende solo dalle proprietà della matrice solida e può essere determinato

- **empiricamente:** ***Fair ed Hatch (1933)***

$$k = \frac{1}{\beta}\left[\frac{(1-n)^2}{n^3}\left(\frac{\alpha}{100}\sum_m \frac{P_m}{d_m}\right)^2\right]^{-1}$$

β = coeff. di compattazione (β = 5)
α = fattore di forma dei grani (α = 6 sferico, α = 7.7 spigoloso)
P_m = percentuale in peso della sabbia tra maglie contigue del setaccio di diametro medio d_m

- **teoricamente:** ***Kozeny-Carman (1937)***

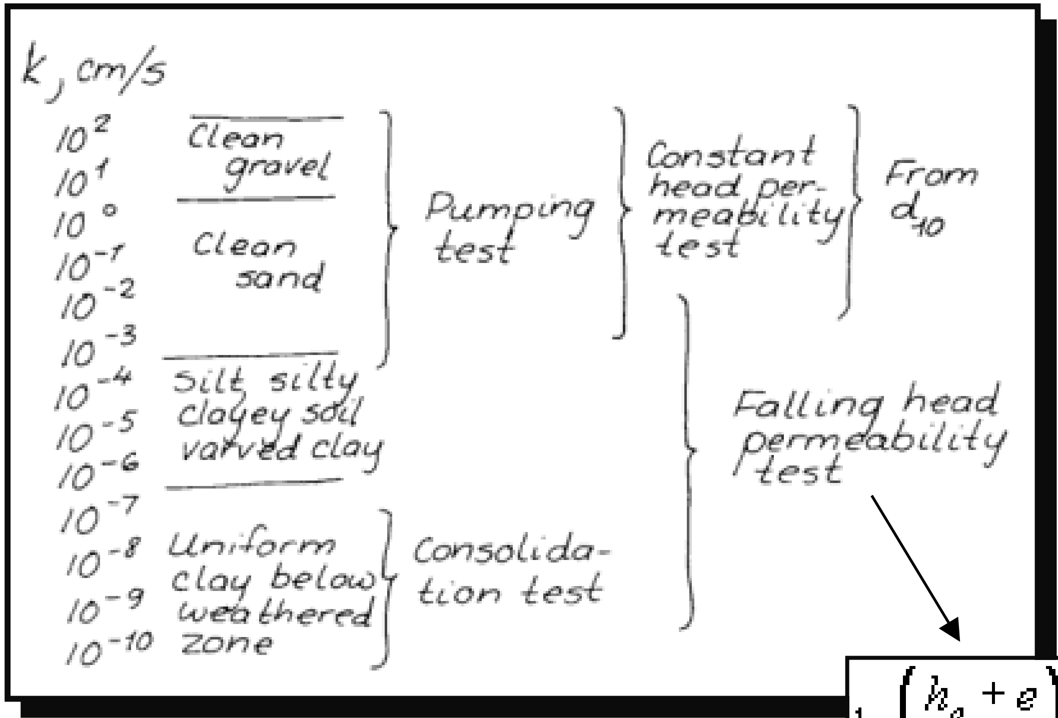
$$k = C_0 \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2 M_s^2}$$

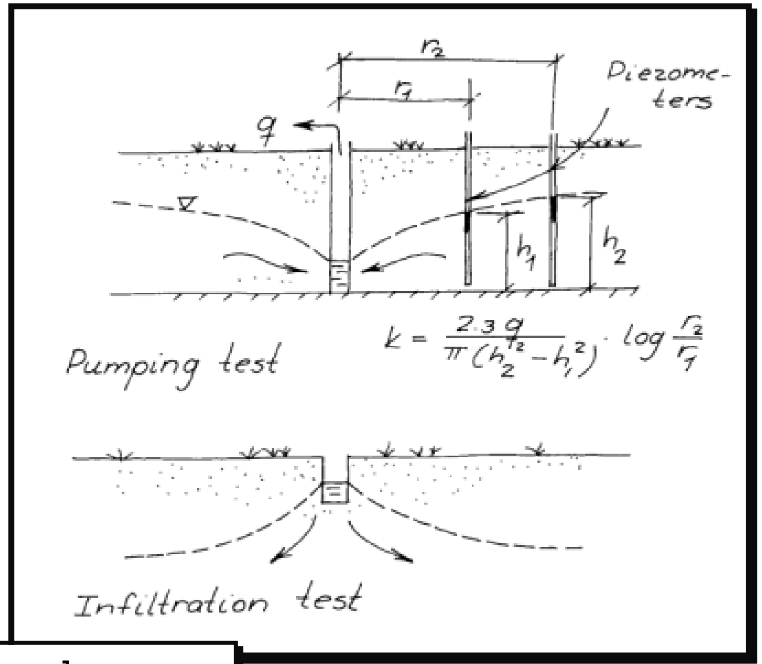
M_s = area della superficie della matrice solida per unità di volume
C_0 = coefficiente (C_0 = 0.2)

Conduttività Idraulica K

Valori tipici della Conduttività Idraulica K (cm/s)

Ghiaia pulita	**$1 - 10^{2}$**	**(molto permeabile)**
Sabbia pulita o mista con ghiaia	**$10^{-3} - 1$**	**(permeabile)**
Sabbia fine o argillosa	**$10^{-7} - 10^{-3}$**	**(poco permeabile)**
Argilla	**$10^{-9} - 10^{-7}$**	**(praticamente impermeabile)**



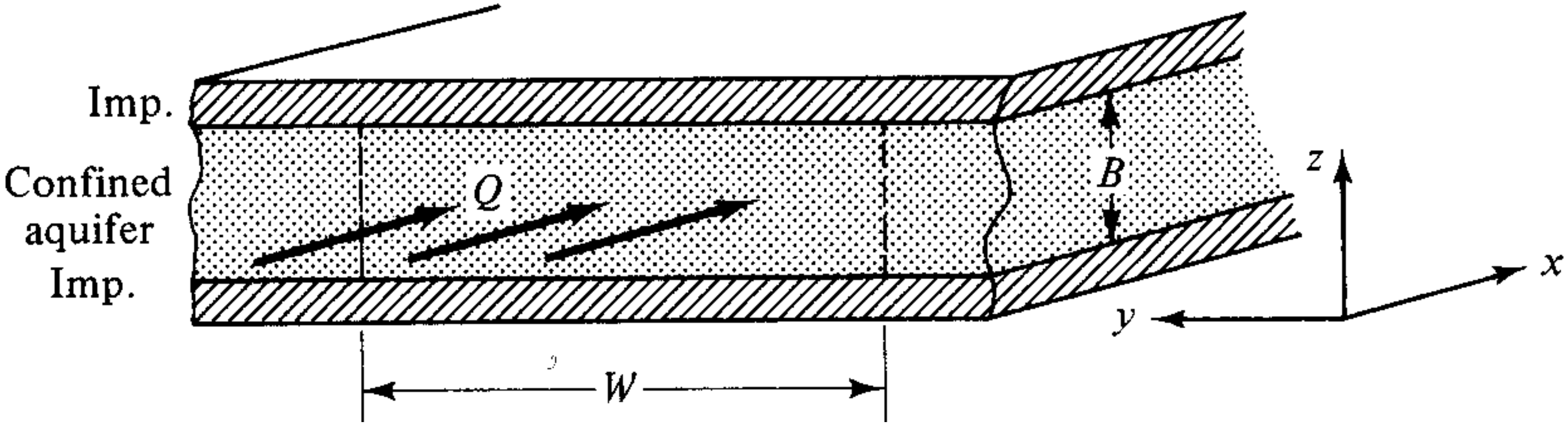


$$\ln\left(\frac{h_o + e}{h + e}\right) = \frac{k}{e}(t - t_o)$$

Trasmissività T

Si consideri il flusso attraverso un acquifero confinato di spessore B, omogeneo ed isotropo e caratterizzato da conduttività idraulica K

$$\boxed{T = K \cdot B}$$



Nello schema bi-dimensionale:
La trasmissività T rappresenta il flusso idrico per unità di larghezza dell’acquifero, attraverso l’intera altezza dell’acquifero, quando viene sottoposto ad un carico idraulico unitario

Equazioni tri-dimensionali del moto

L'equazione del moto ottenuta sperimentalmente nella forma della legge di Darcy è valida per un flusso mono-dimensionale di un fluido incomprimibile in mezzo omogeneo.
Nel caso di campo di moto tri-dimensionale, l'equazione di Darcy può essere generalizzata nella forma:

$$\mathbf{q} = K\mathbf{J} = -K \cdot \mathrm{grad}\ h = -K \cdot \nabla h \qquad \mathbf{V} = \mathbf{q} / n$$

ovvero, nelle tre direzioni:

$$q_x = -K \cdot \partial h / \partial x = nV_x$$

$$q_y = -K \cdot \partial h / \partial y = nV_y$$

$$q_z = -K \cdot \partial h / \partial z = nV_z$$

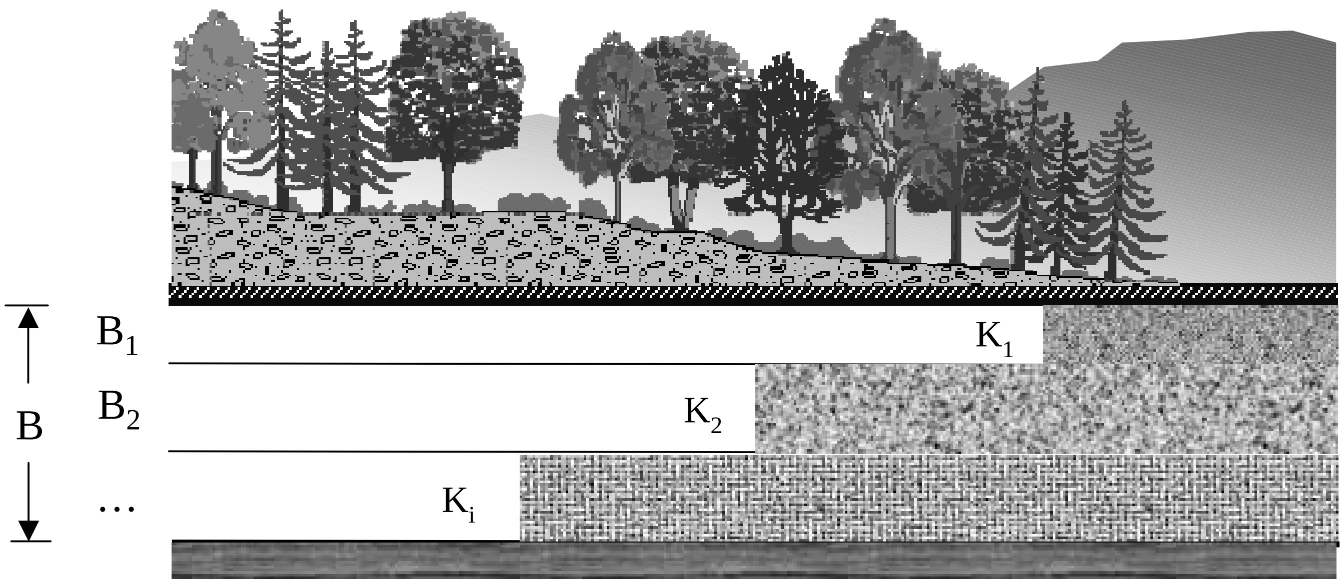
Le equazioni sono valide anche nel caso di mezzo non omogeneo ma isotropo, in cui cioè: K = K(x, y, z)

OMOGENEITA' ED ISOTROPIA DEL MEZZO

Se la permeabilità k è la stessa in tutti i punti del mezzo poroso, il mezzo è detto OMOGENEO

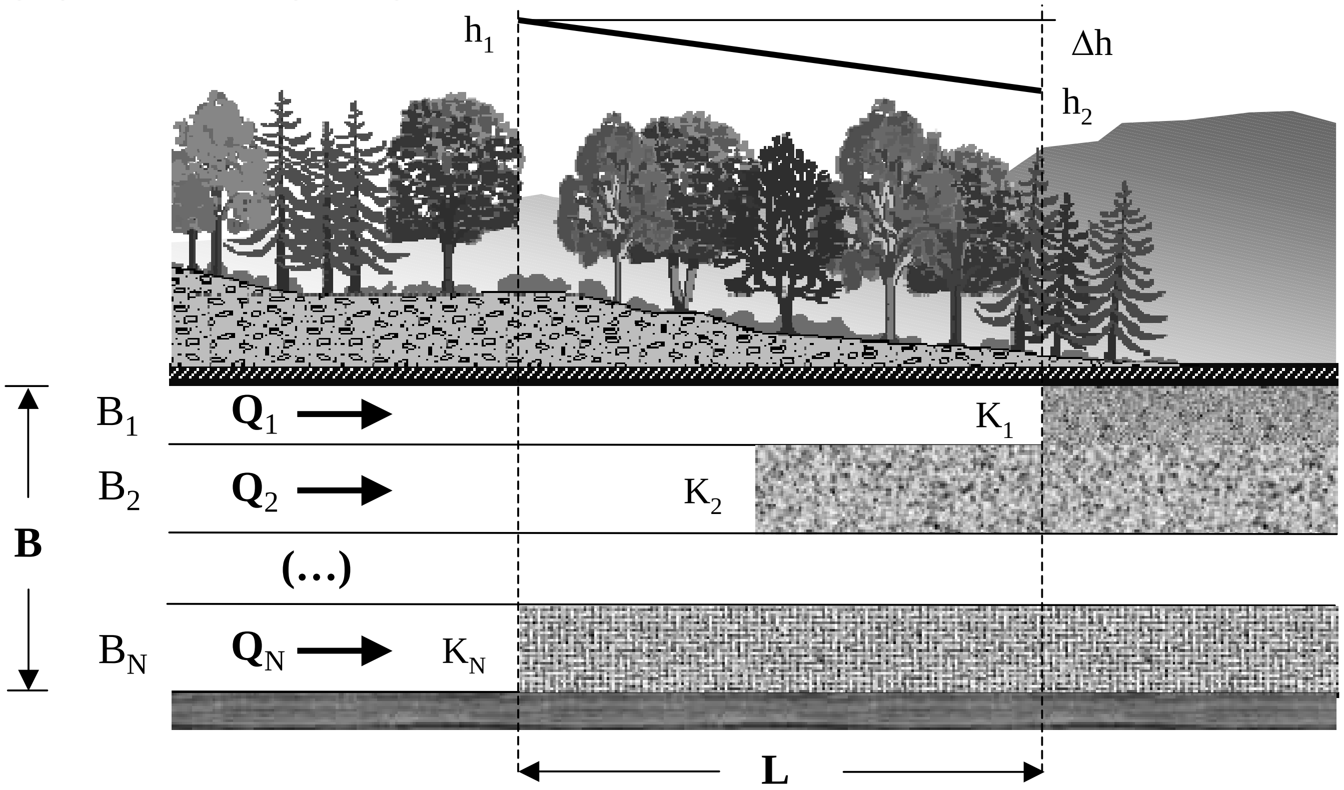
Se la permeabilità in ciascun punto è indipendente dalla direzione, il mezzo è detto ISOTROPO

In molti casi gli acquiferi naturali sono NON OMOGENEI ed ANISOTROPI.
La non omogeneità è spesso dovuta alle stratificazioni delle formazioni geologiche che costituiscono il mezzo poroso.



Equazioni tri-dimensionali del moto

FLUSSO ORIZZONTALE
in MEZZO STRATIFICATO



$\left\{ \mathbf{Q = \Sigma_N Q_i} \right.$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i \qquad B = \sum_{i=1}^{N} B_i \qquad Q_i = K_i B_i \frac{\Delta h}{L}$$

$$Q = \frac{\Delta h}{L} \sum_{i=1}^{N} K_i B_i = \frac{\Delta h}{L} \cdot K_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{P}} B$$

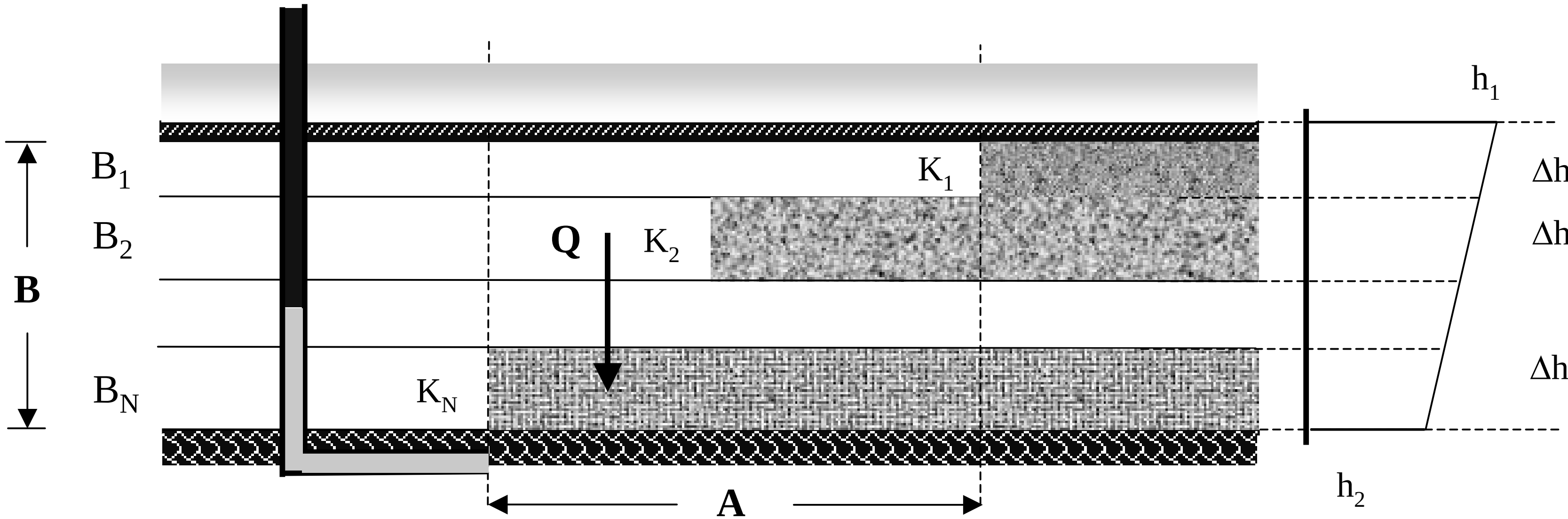
in cui:

$$K_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{P}} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{N} K_i B_i$$

è la Conduttività Idraulica Equivalente del flusso parallelo

Equazioni tri-dimensionali del moto

FLUSSO VERTICALE
in MEZZO STRATIFICATO



$$Q = K_1 \cdot \frac{\Delta h_1}{B_1} \cdot A = K_2 \cdot \frac{\Delta h_2}{B_2} \cdot A = ... = K_N \cdot \frac{\Delta h_N}{B_N} \cdot A = K_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{N}} \cdot \frac{\Delta h}{B} \cdot A$$

$$\Delta h = \frac{Q}{A} \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{K_i} = \frac{Q}{A} \cdot \frac{\mathrm{B}}{K_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{N}}}$$

in cui:

$$\frac{B}{K_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{N}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{K_i}$$

è la Conduttività Idraulica Equivalente del flusso normale alle stratificazioni

N.B.: *(se esiste almeno un* $K_i = 0 \rightarrow Q = 0$*)*

Equazioni tri-dimensionali del moto

Le equazioni generalizzate di Darcy per mezzo anisotropo diventano:

$$q_x = -K_{xx} \cdot \partial h / \partial x - K_{xy} \cdot \partial h / \partial y - K_{xz} \cdot \partial h / \partial z$$

$$q_y = -K_{yx} \cdot \partial h / \partial x - K_{yy} \cdot \partial h / \partial y - K_{yz} \cdot \partial h / \partial z$$

$$q_z = -K_{zx} \cdot \partial h / \partial x - K_{zy} \cdot \partial h / \partial y - K_{zz} \cdot \partial h / \partial z =$$

I nove coefficienti costituiscono il tensore della conduttività idraulica K:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

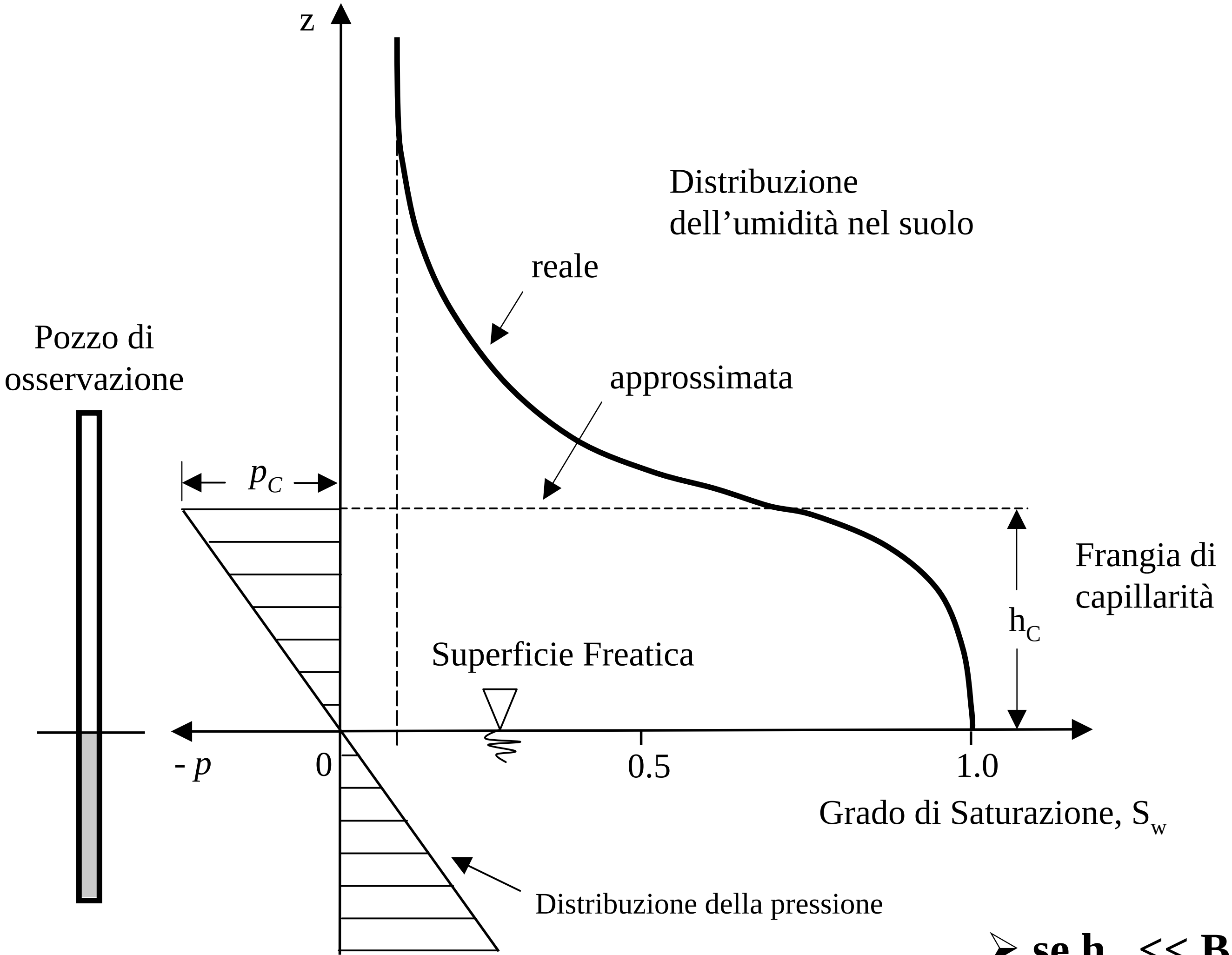
In forma compatta si può scrivere:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla h \qquad q_i = -K_{ij}\, \partial h / \partial x_j$$

(convenzione di Einstein)

Acquifero Freatico – Ipotesi di Dupuit

Approssimazione della superficie freatica e della frangia di capillarità



Mavis & Tsui, 1939

$$h_C = \frac{2.2}{d_H}\left(\frac{1-n}{n}\right)^{3/2}$$

d_H = diam. medio grani (in)
n = porosità; h_c in pollici

Polubarinova-Kochina, 1952

$$h_C = \frac{0.45}{d_{10}} \cdot \frac{1-n}{n}$$

d_{10} = diam. grani al 10% (cm)
n = porosità; h_{10} in cm

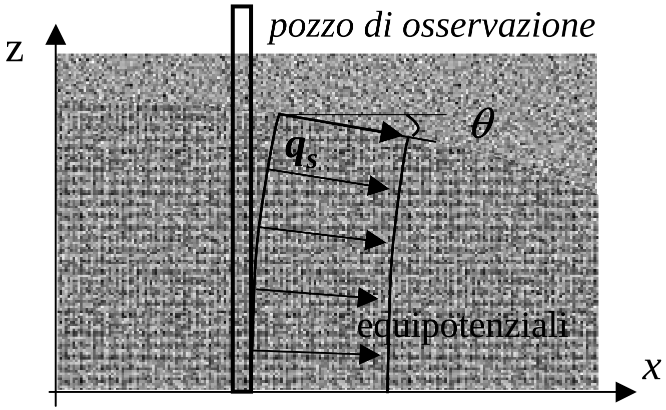
Valori tipici di h_C

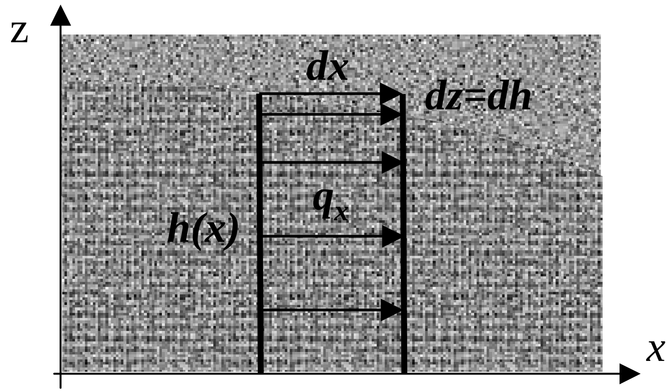
2-5 cm	**sabbia gross.**
12-35 cm	**sabbia**
35-70 cm	**sabbia fine**
70-150 cm	**limo**
2-4 m	**argilla**

- **se h_C << B, viene trascurata**

Approssimazione di Dupuit

Nella maggior parte delle falde acquifere naturali, la pendenza della superficie freatica è molto piccola (1/100 – 1/1000).





In ogni punto della superficie freatica, che rappresenta una linea di corrente, la portata specifica ha direzione tangente alla linea di corrente e modulo (poiché p = 0 ed h = z):

$$\boxed{q_s = -K\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}s = -K\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}s = -K\ sen\ \vartheta}$$

Dupuit suggerisce se θ è piccolo, di sostituire sen θ con tan θ = d*h*/d*x* *(il che equivale ad assumere che le superfici equipotenziali siano verticali, cioè h è funzione della sola x, ovvero che la distribuzione della pressione sia idrostatica con dp/dz=-ρg). Pertanto:*

$$\boxed{q_x = -K\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}x \quad h = h(x)}$$

La portata risulta dunque: $\boxed{Q_x = -K \cdot Wh \cdot dh/dx}$
(se W è la larghezza)