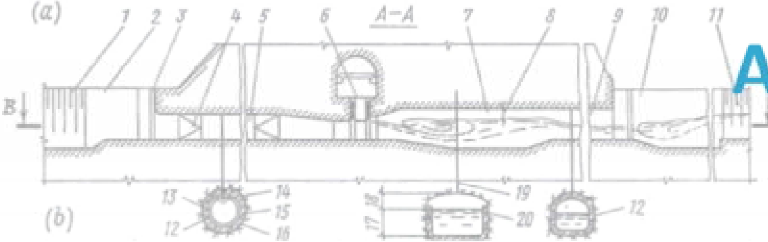

Un accenno ai metodi di regressione lineare

Il problema: Determinazione della miglior retta in grado di descrivere la relazione lineare che intercorre tra due variabili a partire dalle loro misura sperimentale … (ammesso che una relazione lineare esista …)

Consideriamo cioè: $N \ \ coppie \ \ di \ \ misure \ \ (x_i, y_i) \ \ con \ \ i = 1, ..., N$

Supponiamo che tra *x* e *y* sussista una relazione lineare

Assumiamo inoltre, per semplicità, che l'errore sperimentale sulla variabile *x* sia trascurabile (*y* variabile "risposta" e *x* variabile "esplicativa")

$$y_i = ax_i + b \ \ + \epsilon_i$$

Metodo dei minimi quadrati (1)
o metodo di Gauss

Definiamo quindi: $\epsilon_i = y_i - y_i^t$ $\quad con \quad$ $y_i^t = ax_i + b$

Per cui si ha: $\epsilon_i = y_i - ax_i - b$

Sia inoltre σ_i^2 $l'errore\ \ sperimentale\ \ sull'i-esimo\ \ valore\ \ di\ \ y$

$$\frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2}$$

Scarto quadratico in rapporto all’errore di misura

Metodo dei minimi quadrati (2)

$$z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\epsilon_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - a x_i - b)^2}{\sigma_i^2}$$

Il problema si riduce quindi a trovare i valori di *a* e *b* in grado di rendere minimo *z*.

$$z = z(a, b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i (y_i - a x_i - b)}{\sigma_i^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - a x_i - b)}{\sigma_i^2} = 0$$

Metodo dei minimi quadrati (3)

Per cui, risolvendo il sistema di 2 equazioni in 2 incognite dopo aver posto:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \qquad S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \qquad S_y = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \qquad S_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Metodo dei minimi quadrati (Soluzione)

Si ricava: $a = \frac{S_{xy} \cdot S_0 - S_x S_y}{S_{xx} \cdot S_0 - S_x^2}$ $\quad b = \frac{S_y \cdot S_{xx} - S_x S_{xy}}{S_{xx} \cdot S_0 - S_x^2}$

E con $\sigma_i^2 = \sigma^2 = costante$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$b = \frac{\overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$