

Riassumendo i concetti fondamentali della Teoria della Probabilità ...

Abbiamo visto come l'obiettivo fondamentale della Teoria della Probabilità (sia essa Classica, frequentista o Bayesiana) sia quello di studiare e modellare le caratteristiche di **regolarità** dei processi casuali.

E' stato inoltre sottolineato come lo studio dei fenomeni aleatori sia sempre uno studio di **insieme**, mai incentrato sulla singola traiettoria del processo.

P è quindi un'applicazione del tipo: $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

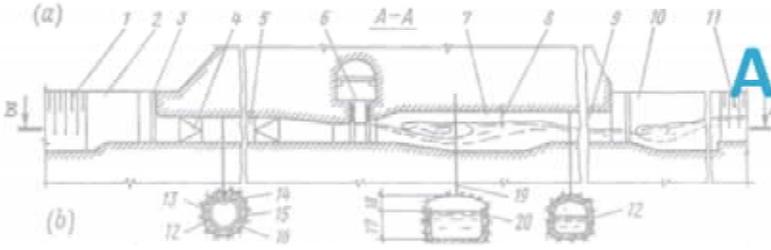
Capace di fornire una misura numerica della possibilità di realizzarsi o meno di un evento

E con le seguenti proprietà: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$$P(\Omega) = 1$$

Se A_1, \dots, A_n è una successione di eventi di \mathcal{A} a due a due incompatibili e se:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{allora:} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$



Una breve nota sulla "Convergenza in Probabilità"

Stabilità delle frequenze (Teorema di Bernoulli)

per n grande $P(A) = \frac{n_A}{n}$

↗ Numero casi favorevoli all'evento A
 ↘ Numero casi possibili

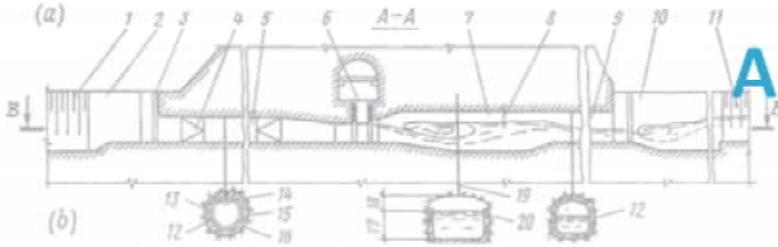
La frequenza relativa di un evento tende alla sua probabilità con il crescere del numero delle prove in modo differente dalla "tendenza al limite" nel senso matematico del termine.

Quando in Analisi si dice che una variabile x_n tende al limite costante a , all'aumentare di n (per $n \rightarrow \infty$) ciò significa che la differenza $|x_n - a|$ diventa inferiore ad un Numero positivo qualsiasi ϵ per ogni n superiore ad un numero sufficientemente grande ...

In probabilità, aumentando il numero delle prove, la frequenza si avvicina alla probabilità, non con certezza assoluta, ma con una probabilità talmente elevata, che per un numero sufficientemente grande di prove, si considera come certezza.

>> Convergenza in Probabilità

Ref. Teoria della probabilità, E.S. Venttsel, Edizioni MIR, 1983



Cenni di calcolo combinatorio

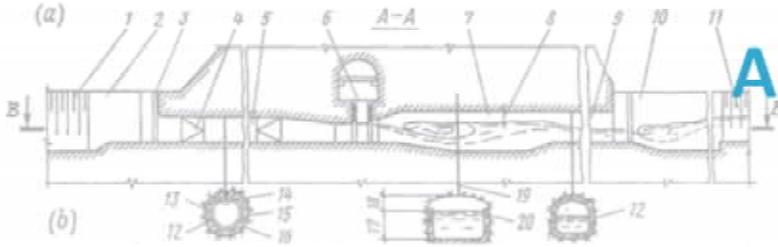
Combinazioni: Si dicono combinazioni di n elementi (distinti) a k a k , o della classe k , con $k \leq n$, i gruppi che si possono formare prendendo, in tutti i modi possibili, k degli n elementi, con la condizione di riguardare come diversi due gruppi unicamente se differiscono per almeno uno degli elementi componenti

$C(n,k)$

Disposizioni: Si dicono combinazioni di n elementi (distinti) a k a k , o della classe k , con $k \leq n$, i gruppi che si possono formare prendendo, in tutti i modi possibili, k degli n elementi, con la condizione di riguardare come diversi due gruppi o perchè differiscono per almeno uno degli elementi componenti, o perchè, contenendo gli stessi elementi, questi si succedono nei due gruppi con ordine diverso

$D(n,k)$

Permutazioni $P(n)$: $D(n,n)=P(n)$



Combinazioni:
C(n,k)

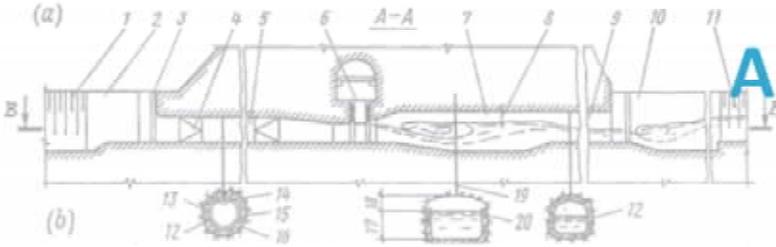
$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Disposizioni:
D(n,k)

$$D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 2) \cdot (n - k + 1)$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutazioni P(n): $D(n,n)=P(n)$ $P_n = n!$



Alcuni Teoremi e corollari da ricordare...

Teorema di addizione delle probabilità

La probabilità della somma di due eventi incompatibili è uguale alla somma delle singole probabilità di questi eventi:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Corollario 1

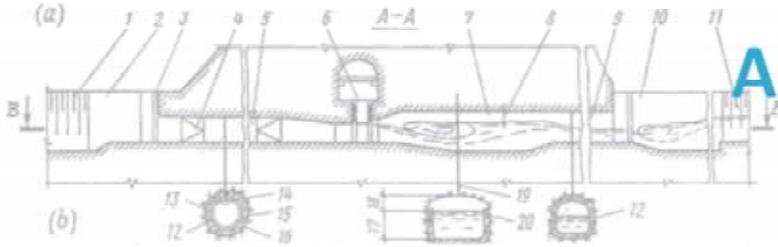
Se gli eventi A_1, \dots, A_n formano un gruppo completo di eventi incompatibili, la somma delle loro probabilità è uguale all'unità:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

Corollario 1

La somma delle probabilità di eventi contrari (eventi incompatibili che formano un gruppo completo) è uguale all'unità:

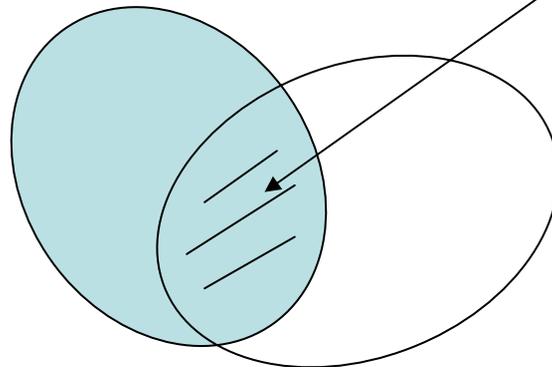
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



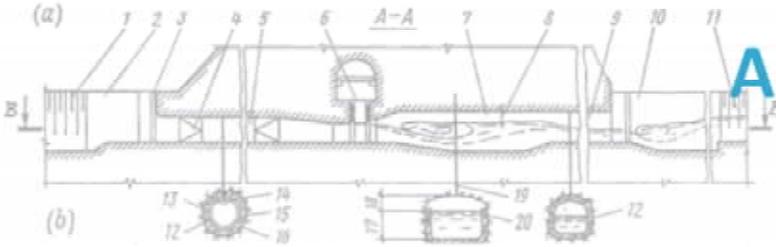
Probabilità della somma di eventi non incompatibili

Quando gli eventi A e B non sono incompatibili, la probabilità della loro somma è data da:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$P(A + B + C) = ?$$



Eventi Indipendenti

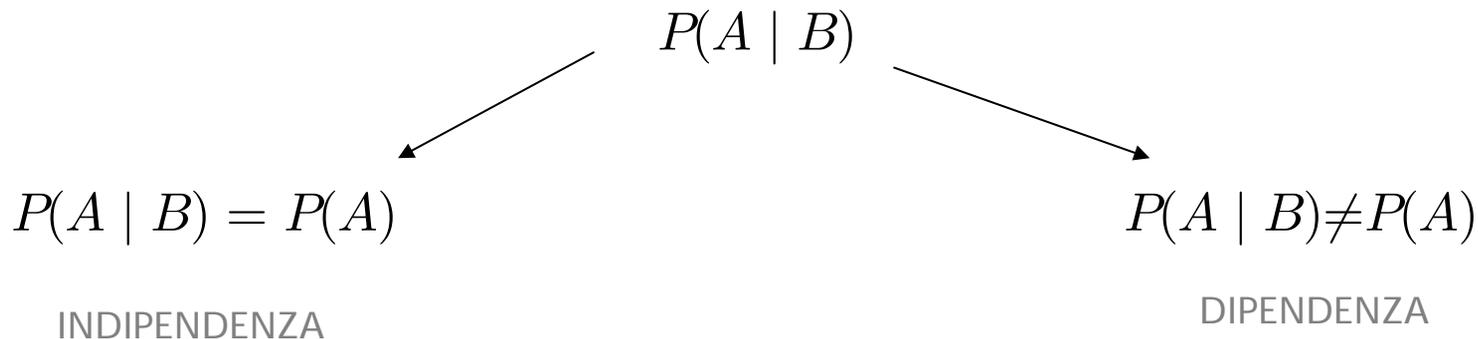
L'evento A è indipendente dall'evento B se la probabilità del verificarsi di A non dipende dal fatto che B si sia verificato o meno

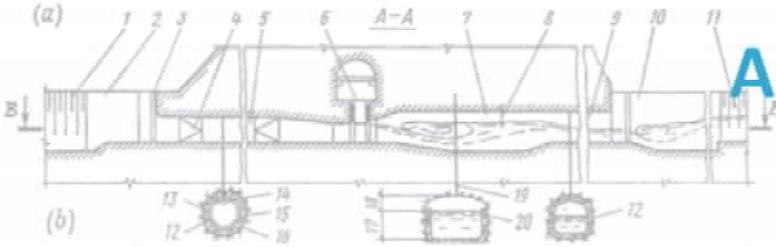
Eventi dipendenti

L'evento A dipende dall'evento B se la probabilità del verificarsi di A è influenzata dal fatto che B si sia verificato o meno

Probabilità condizionata

La probabilità dell'evento A , calcolata sotto la condizione che l'evento B si sia verificato, si dice probabilità condizionata di A rispetto a B e si denota con:





Teorema di moltiplicazione di probabilità

La probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro, calcolata a condizione che il primo abbia luogo

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

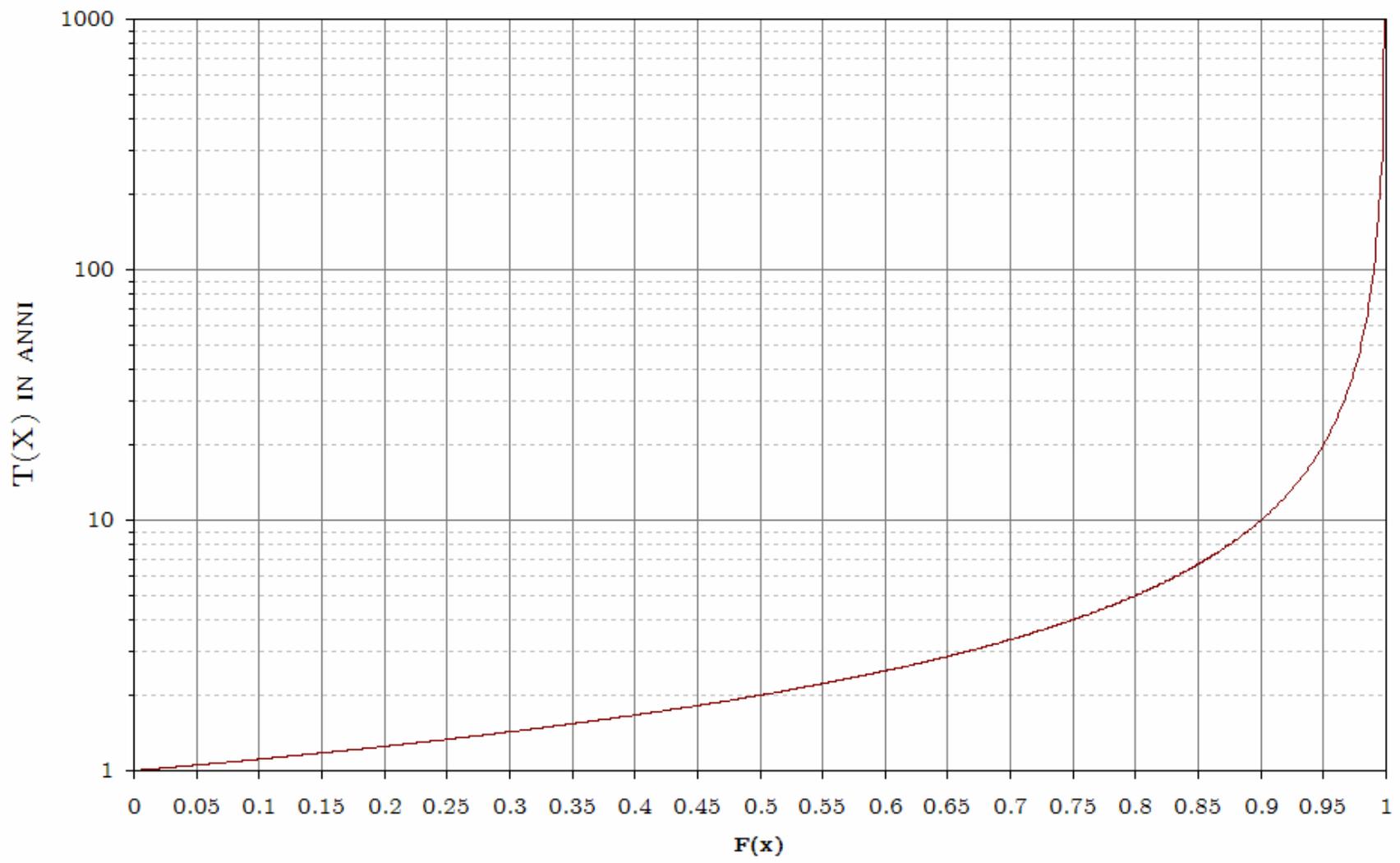
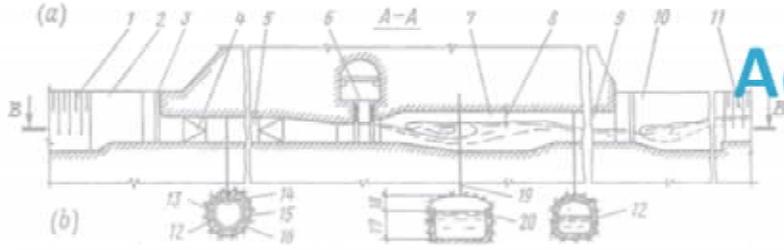
$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

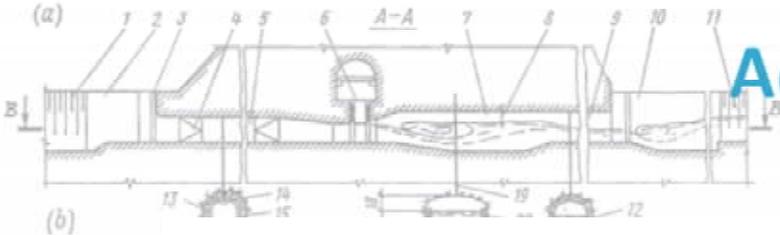
Formula della probabilità totale

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

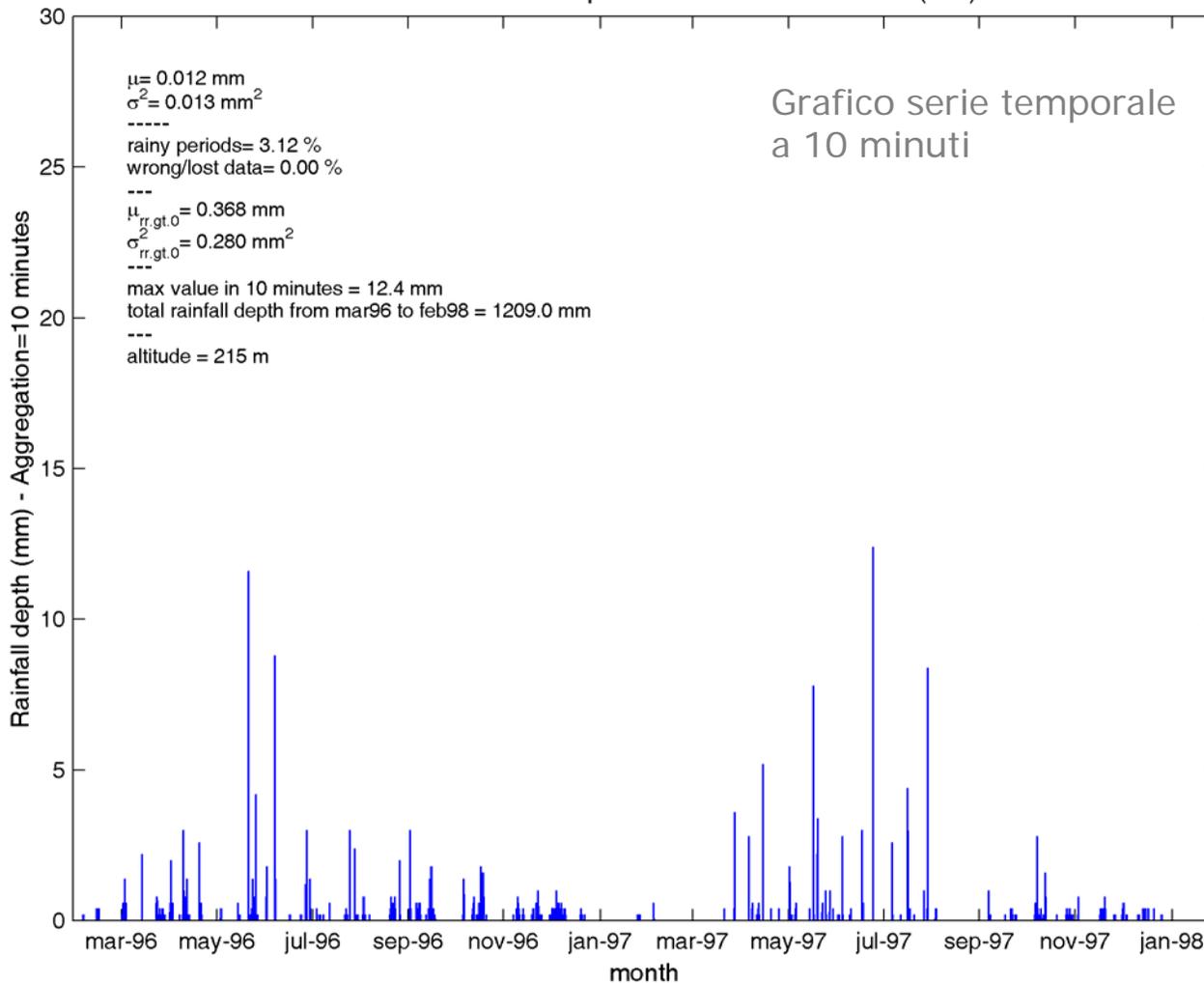
Formula di Bayes

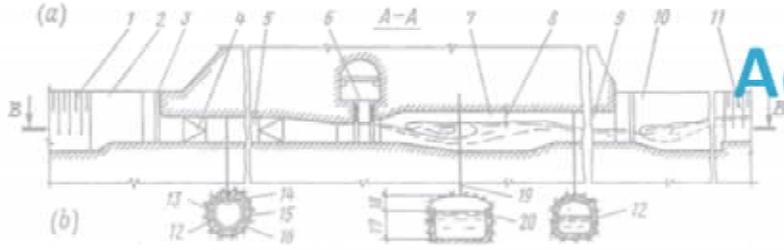
$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B | A_i)}{P(B)}$$



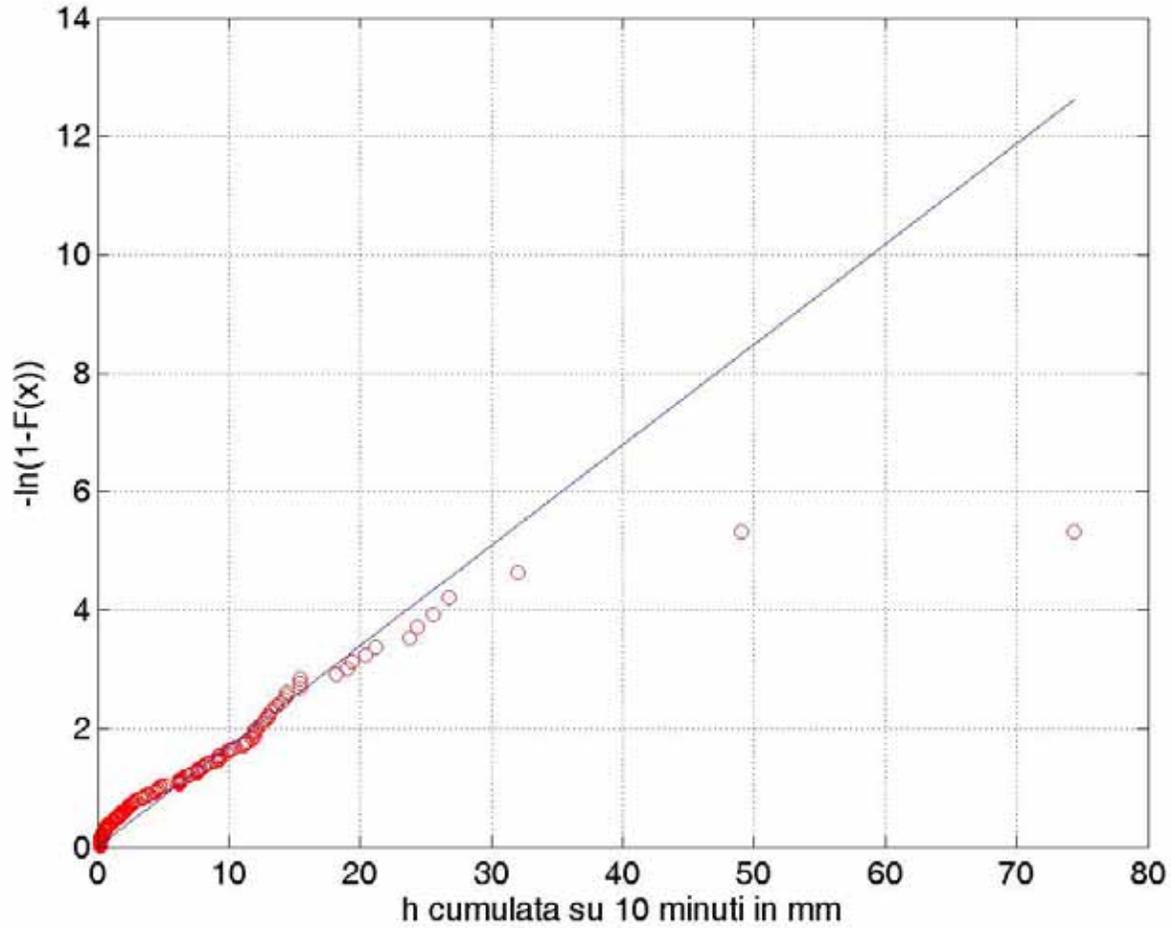


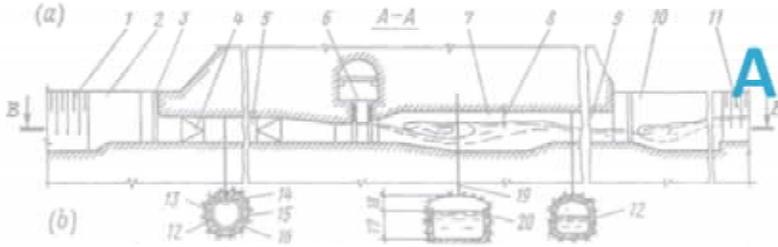
Station 101: ACQUI TERME - Rainfall depth cumulated on 10 minutes (mm): Mar96 - Feb98





Aggregazione=24h





Numero di giorni dell'intera serie temporale=730

Numero di giorni "piovosi" ($RR > 0$)=205

$P(\text{di avere una giornata piovosa})=0.28$

$\lambda=0.16$

$P(X \geq x) = 1 - F(X \leq x)$

Qual è l'h su 24 ore corrispondente ad un tempo di ritorno di 200 anni (h_{200})?