Spazi di probabilità

SPAZIO CAPIONARIO, EVENTI, PROBABILITA'

Si definisce **ESPERIMENTO (TRIAL)** la singola osservazione o misura di un fenomeno.

ES.:

1. *La misura di portata ad una sezione data*
2. *Il numero degli studenti annualmente iscritti ad un dato corso*
3. *L'altezza di pioggia giornaliera misurata presso una data centralina meteorologica…*

Se il fenomeno è **DETERMINISTICO**, il risultato dell'esperimento (**OUTCOME**) è in generale **PREVEDIBILE.**

Se il fenomeno è di natura **ALEATORIA (CASUALE)** lo specifico risultato dell'osservazione è a priori **INCOGNITO**.

In quest'ultimo caso è tuttavia possibile giungere ad una *PREVISIONE MEDIA DELL' EVOLUZIONE DEL FENOMENO* tramite la costruzione di un apposito **SPAZIO DI PROBABILITA'**.

Gli spazi di probabilità possono pertanto essere considerati modelli matematici "non innaturali" di fenomeni non Deterministici.

Spazio campionario

Nel caso di fenomeni casuali, è sempre possibile definire un insieme Ω i cui elementi ω_i rappresentino tutti i possibili risultati dell'esperimento in esame.

L'insieme Ω è denominato SPAZIO CAMPIONARIO (SAMPLE SPACE) del fenomeno aleatorio.

Gli elementi $\omega \in \Omega$ sono detti punti campionari (SAMPLE POINTS) o EVENTI ELEMENTARI

Tipi di Spazio Campionario

Esistono 3 tipi di spazi campionari:

1. Ω contiene un numero finito di punti campionari (es. del "lancio del dado")
2. Ω contiene un numero infinito ma numerabile di punti campionari
3. Ω contiene infiniti punti campionari e non è numerabile.

Spazio degli Eventi

Si definisce **EVENTO** un insieme di possibili risultati ω di un esperimento.

Poiché lo spazio campionario Ω contiene tutti i possibili risultati ω, ne deriva che un evento non è altro che un **SOTTOINSIEME DELLE SPAZIO CAMPIONARIO** e, come tale, gode di tutte le proprietà degli insiemi.

L'insieme di tutti i possibili eventi associati ad Ω è detto **SPAZIO DEGLI EVENTI** ($\mathcal{A}$).

Eventi "notevoli"

Si definisce **EVENTO ELEMENTARE** un evento che contiene un unico punto campionario ω.

Si definisce **EVENTO COMPOSTO** un evento che contiene più punti campionari

Si definisce **EVENTO IMPOSSIBILE** (o EVENTO VUOTO) un evento che non contiene punti campionari

Si definisce **EVENTO CERTO** un evento che contiene tutti gli elementi dello spazio campionario Ω.

Probabilità

Una “valutazione di probabilità” non è altro che un’applicazione $\mathbb{P}(.)$ che ad ogni evento (cioè ad ogni sottoinsieme di Ω assunto nello spazio degli eventi $\mathcal{A}$) associa un numero reale, in modo tale che questo numero sia tanto più grande quanto più è elevata la possibilità che l’evento si realizzi.

Si ha cioè che:

$$\mathbb{P} : \quad \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

E soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}$
2. $\mathbb{P}(\Omega)=1$
3. Se $\{A_n\}_n$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti allora

(σ-additività):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

Spazio di Probabilità

Uno **SPAZIO DI PROBABILITA'** non è altro che una terna:

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

dove:

- Ω è uno **SPAZIO CAMPIONARIO**
- $\mathcal{A}$ è UNA **COLLEZIONE DI EVENTI** (ognuno dei quali è sottoinsieme di Ω; nel caso in cui Ω sia finito si può definire $\mathcal{A}$ come la collezione di tutti i sottoinsiemi di Ω)
- P è una **PROBABILITA'** (con dominio in $\mathcal{A}$)

Uno spazio di probabilità può per tanto essere considerato come un **MODELLO MATEMATICO "NON INNATURALE"** di un fenomeno **CASUALE**

Probabilità condizionata ed indipendenza

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno **SPAZIO DI PROBABILITA'**.

DEFINIZIONE: Siano A, B $\in \mathcal{A}$ con $\mathbb{P}$(A)>0 . Si definisce **PROBABILITA' CONDIZIONATA** (o CONDIZIONALE) di B rispetto ad A la quantità:

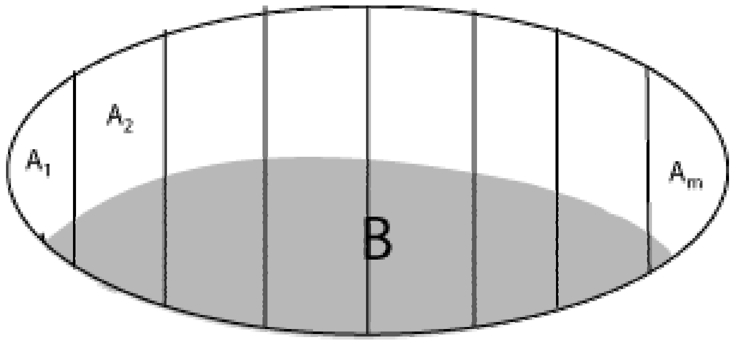
$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Intuitivamente, la probabilità condizionata $\mathbb{P}$(B | A) è la probabilità che B si verifichi sapendo che A si è verificato.

Formula della Probabilità totale

Sia Ω costituito da *m* eventi disgiunti $A_1, \ldots, A_m$

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$$



Ossia, $A_1, \ldots, A_m$ costituisca una partizione di Ω.

Allora, facendo riferimento alla figura A, si ha che:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

(**FORMULA DELLA PROBABILITA' TOTALE**)

Formula di Bayes

La formula della probabilità condizionata $\mathbb{P}(A_i | B)$ nel caso in cui A_i sia uno degli elementi di una partizione di Ω, può essere scritta come:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

(FORMULA DI BAYES)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$