DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Un'idea intuitiva di Probabilità

Teoria della Probabilità: Si occupa di descrivere fenomeni per i quali la singola realizzazione risulta incerta, mentre l'esito di una serie sufficientemente lunga di prove si rivela "prevedibile"

Si dice cioè, che per prove ripetute l'esperimento converge in probabilità

Ciò equivale a dire che effettuando osservazioni ripetute di fenomeni casuali è possibile mettere in evidenza "regolarità" e leggi ben definite.

Previsione non individuale(sulla singola prova) ma media (su un insieme di prove)

Prime definizioni…

Spazio Campionario: Si definisce Spazio Campionario (Ω), l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento

Evento: Il generico evento *A* è interpretabile come un sottoinsieme di Ω. Naturalmente anche i singoli punti dello spazio campionario sono sottoinsiemi di Ω e vengono detti *eventi elementari*.

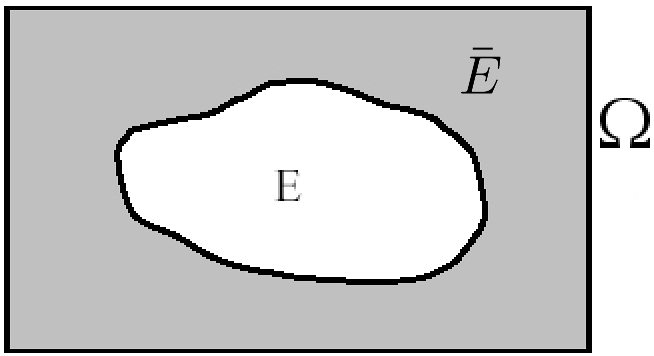
$$\Omega = \quad evento \;\; certo$$

$$\emptyset = \quad evento \;\; impossibile$$

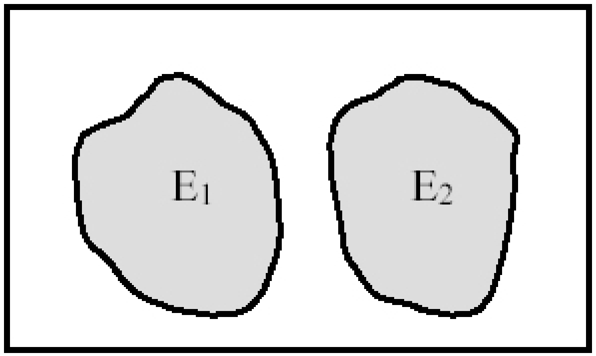
Spazio degli Eventi: Lo spazio degli eventi (A)non è altro che l'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi dello spazio campionario

Interpretazione Insiemistica di evento

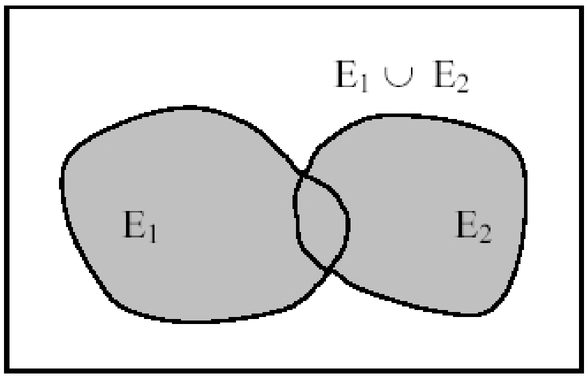
Evento Complementare:



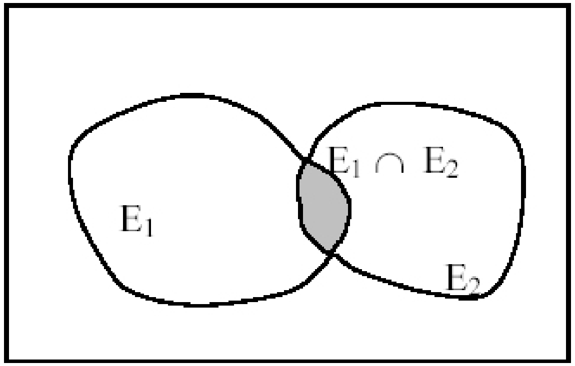
Eventi disgiunti:



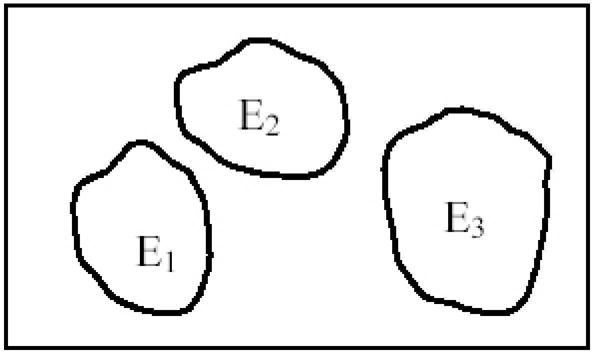
Evento Unione:



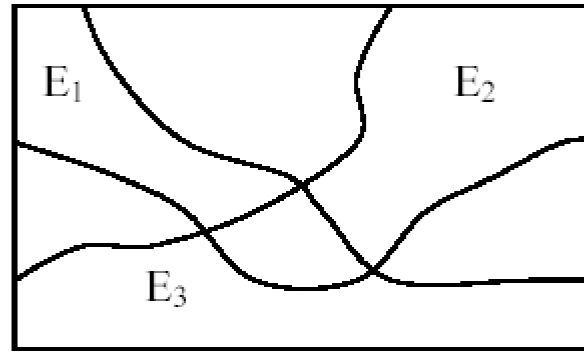
Evento Intersezione:



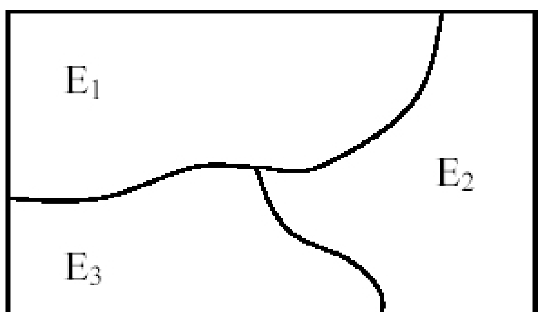
n Eventi incompatibili:



n Eventi Esaustivi:



Partizione



Probabilità Matematica (o "a priori" o Classica)

E' nata dallo studio dei giochi d'azzardo e si basa unicamente sull'estrapolazione logica di caratteristiche di probabilità a priori dalla struttura (solitamente molto semplice) del fenomeno che si sta analizzando.

Si basa fondamentalmente sul **principio di Laplace**:

La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento stesso ed il numero di casi possibili, purché tutti i casi siano ugualmente probabili. E cioè:

Numero casi favorevoli

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}$$

Spazio campionario

Numero casi possibili

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Esempi:
•Estrazione di una carta da un mazzo
•Lancio di una moneta
•Lancio di un dado

Limitazioni

•La definizione si basa su di un ragionamento di tipo “circolare”; infatti il concetto di casi ugualmente possibili deriva dalla definizione di probabilità stessa.
Non funziona in tutti quei casi in cui lo spazio campionario non è formato da eventi ugualmente possibili…
In generale non può essere applicata in tutti quei casi in cui la probabilità di un evento non è deducibile per via “logica”

Teoria Frequentista

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Teoria Frequentista (o "a Posteriori" o legge empirica del caso, o Statistica)

Si basa sulle seguenti assunzioni:

•Se in una serie (sufficientemente lunga) di prove la frequenza di un evento si mantiene approssimativamente costante, questo valore di frequenza è assunto come probabilità
Si applica in tutti quei casi in cui non siano note "a priori" le leggi probabilistiche dei fenomeni studiati…
Si basa, storicamente, sul principio di **Von Mises(1920)**: *La probabilità di un evento, in una serie di prove condotte nelle stesse condizioni (ci si riferisce qui alle condizioni controllabili della prova), è il limite a cui tende la frequenza relativa al crescere del numero delle osservazioni…*

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Probabilità Soggettivistica o "Bayesiana"

La teoria classica della probabilità e quella frequentista hanno in comune un'importante caratteristica: richiedono entrambe un esperimento concettuale nel quale gli eventi possano verificarsi in condizioni piuttosto uniformi.
In generale però, esistono situazioni che non possono essere ridotte a tale schema di "esperimento controllato" …

Ad esempio:
Qual è la probabilità che il Governo cada entro la fine dell'anno?
Quanto è probabile che il prezzo del pane aumenti del 100% nel prossimo mese?

Queste tipologie di fenomeni necessitano del giudizio di più individui o comunque di stime personali

→ Probabilità Soggettivistica

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Una stima di Probabilità non è altro che un'applicazione P(.) che ad ogni evento (definito come generico sottoinsieme di Ω ed appartenente allo spazio degli eventi A) associa un numero reale, in modo che questo numero sia tanto più elevato quanto più è facile che l'evento si realizzi.
Sarà inoltre ragionevole che P(.) goda di un certo numero di proprietà:
Se *A* e *B* sono incompatibili (disgiunti):

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ed inoltre:

$$P(A) \geq 0 \;\; \forall \;\; A \in \mathrm{A}$$

$$P(\Omega) = 1$$

Se $A_1, \ldots, A_n$ è una successione di eventi di A a due a due incompatibili e se:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ A allora: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Ancora sulla Teoria Assiomatica

Da queste ultime tre proprietà fondamentali della funzione di probabilità possiamo dedurne altre:

$$P(\emptyset) = 0$$

Se A è un evento allora: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Se A e B sono due eventi allora: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

Ed ancora: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

and so on…

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Spazio di Probabilità

Uno Spazio di Probabilità è una terna (Ω, A ,*P*) dove:

↓

Ω, è uno spazio campionario

↓

A è una collezione di eventi (ciascuno dei quali è sottoinsieme dello Spazio Campionario)

↓

P è una funzione di probabilità con dominio A

Uno spazio di probabilità è un *modello non innaturale* di un fenomeno casuale

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Probabilità Condizionata

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ e $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ da cui:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$ P(A)>0

Formula della probabilità totale

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Formula di Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Riassumendo i concetti fondamentali della Teoria della Probabilità …

Abbiamo visto come l'obbiettivo fondamentale della Teoria della Probabilità (sia essa Classica, frequentista o Bayesiana) sia quello di studiare e modellare le caratteristiche di regolarità dei processi casuali.

E' stato inoltre sottolineato come lo studio dei fenomeni aleatori sia sempre uno studio di insieme, mai incentrato sulla singola traiettoria del processo.

P è quindi un'applicazione del tipo: $P : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$

Capace di fornire una misura numerica della possibilità di realizzarsi o meno di un evento

E con le seguenti proprietà:

$$P(A) \geq 0 \ \forall \ A \in \mathcal{A}$$

$$P(\Omega) = 1$$

Se $A_1, \ldots, A_n$ è una successione di eventi di $\mathcal{A}$ a due a due incompatibili e se:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ allora: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Una breve nota sulla "Convergenza in Probabilità"

Stabilità delle frequenze (Teorema di Bernoulli)

$$\text{per } n \text{ grande } P(A) = \frac{n_A}{n}$$

n_A: Numero casi favorevoli all'evento A

n: Numero casi possibili

La frequenza relativa di un evento tende alla sua probabilità con il crescere del numero delle prove in modo differente dalla "tendenza al limite" nel senso matematico del termine.

Quando in Analisi si dice che una variabile x_n tende al limite costante *a*, all'aumentare di *n* (per $n \to \infty$) ciò significa che la differenza $|x_n - a|$ diventa inferiore ad un Numero positivo qualsiasi ε per ogni *n* superiore ad un numero sufficientemente grande …

In probabilità, aumentando il numero delle prove, la frequenza si avvicina alla probabilità, non con certezza assoluta, ma con una probabilità talmente elevata, che per un numero sufficientemente grande di prove, si considera come certezza.
>> Convergenza in Probabilità

Ref. *Teoria della probabilità, E.S. Ventsel, Edizioni MIR, 1983*

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Cenni di calcolo combinatorio

Combinazionii:

C(n,k)

Si dicono combinazioni di *n* elementi (distinti) a *k* a *k*, o della classe *k*, con $k \leq n$, i gruppi che si possono formare prendendo, in tutti i modi possibili, k degli n elementi, con la condizione di riguardare come diversi due gruppi unicamente se differiscono per almeno uno degli elementi componenti

Disposizioni:

D(n,k)

Si dicono combinazioni di *n* elementi (distinti) a *k* a *k*, o della classe *k*, con $k \leq n$, i gruppi che si possono formare prendendo, in tutti i modi possibili, k degli n elementi, con la condizione di riguardare come diversi due gruppi o perchè differiscono per almeno uno degli elementi componenti, o perché, contenendo gli stessi elementi, questi si succedono nei due gruppi con ordine diverso

Permutazioni P(n): D(n,n)=P(n)

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Combinazioni:

C(n,k)

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Disposizioni:

D(n,k)

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutazioni P(n): D(n,n)=P(n)

$$P_n = n!$$

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Alcuni Teoremi e corollari da ricordare…

Teorema di addizione delle probabilità

La probabilità della somma di due eventi incompatibili è uguale alla somma delle singole probabilità di questi eventi:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Corollario 1

Se gli eventi $A_1, \ldots, A_n$ formano un gruppo completo di eventi incompatibili, la somma delle loro probabilità è uguale all'unità:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Corollario 1

La somma delle probabilità di eventi contrari (eventi incompatibili che formano un gruppo completo) è uguale all'unità:

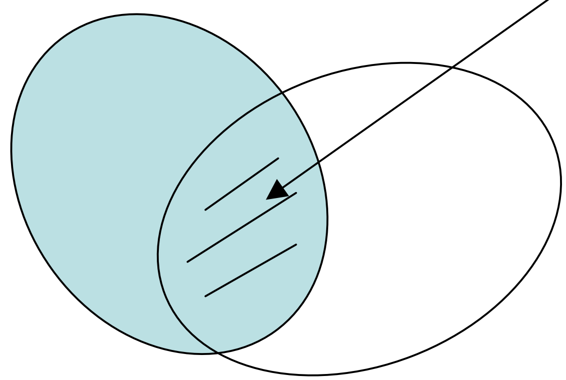
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

Probabilità della somma di eventi non incompatibili

Quando gli eventi *A* e *B* non sono incompatibili, la probabilità della loro somma è data da:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



$$P(A+B+C) = ?$$

Eventi Indipendenti

L'evento *A* è indipendente dall'evento *B* se la probabilità del verificarsi di *A* non dipende dal fatto che *B* si sia verificato o meno

Eventi dipendenti

L'evento *A* dipende dall'evento *B* se la probabilità del verificarsi di *A* è influenzata dal fatto che *B* si sia verificato o meno

Probabilità condizionata

La probabilità dell'evento *A*, calcolata sotto la condizione che l'evento *B* si sia verificato, si Dice probabilità condizionata di *A* rispetto a *B* e si denota con:

$$P(A \mid B)$$

$$P(A \mid B) = P(A)$$

INDIPENDENZA

$$P(A \mid B) \neq P(A)$$

DIPENDENZA

DIAm-Dip. Ingegneria Ambientale
Università degli Studi di Genova
Via Montallegro, 1-16145 Genova
www.diam.unige.it

La probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro, calcolata a condizione che il primo abbia luogo

$$P(AB) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Formula della probabilità totale

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Formula di Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$