VARIABILI CASUALI

Fino ad ora abbiamo definito:

Lo **SPAZIO CAMPIONARIO** Ω :
Come totalità dei possibili
risultati di un esperimento

Gli **EVENTI** :
Come sottoinsiemi
dello spazio campionario

La FUNZIONE DI **PROBABILITA'**:

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

Lo **SPAZIO DEGLI EVENTI** $\mathcal{A}$:
Come l'insieme degli eventi definibili
Su Ω (tutti gli eventi possibili nel caso Ω sia numerabile)

VARIABILI CASUALI

Quindi abbiamo introdotto il concetto di
SPAZIO DI PROBABILITA' dato dalla terna:

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Presentiamo ora le nozioni di:

VARIABILE ALEATORIA:
"descrive" gli eventi ed ha come dominio di definizione lo spazio campionario

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA:
Definisce la probabilità degli eventi in termini di variabili casuali

COS'E' UNA VARIABILE CASUALE?

Dato un esperimento, una Variabile Casuale (o Variabile Aleatoria)
è una funzione che fa corrispondere un numero reale
a ogni esito dell'esperimento

In generale è una
variabile il cui valore sia:

- AFFETTO DA FORTE INCERTEZZA
- IMPREDICIBILE
- COMUNQUE "NON DETERMINISTICAMENTE" DEFINIBILE

COS'E' UNA VARIABILE CASUALE?

Dato quindi uno

SPAZIO DI PROBABILITA'

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Una Variabile Casuale (o Variabile Aleatoria) X

è una funzione avente come dominio Ω e codominio la retta reale (o un suo sottoinsieme):

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esiste cioè un valore numerico della X associato ad ogno realizzazione dell'esperimento

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA

(IN GENERALE)

Si definisce **FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA** o **FUNZIONE DI RIPARTIZIONE** di una variabile casuale *X*, e si indica con F_X quell'applicazione:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

Tale che:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = P[\omega : X(\omega) \leq x] \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA
(IN GENERALE)

Alcune proprietà della **FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATA**
o **FUNZIONE DI RIPARTIZIONE:**

1
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \ \text{e} \ \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

2
$$F_X(x) \ \text{e}' \ \text{monotona non decrescente (cioe}' \ \text{per} \ a < b, \ F_X(a) \leq F_X(b))$$

3
$$F_X(x) \ \text{e}' \ \text{continua da destra}: \ \lim_{h \to 0+} F_X(x+h) = F_X(x)$$

$$con \ \ h > 0$$

VARIABILI ALEATORIE

Le Variabili Casuali si distinguono in:

Variabili Casuali DISCRETE

Variabili Casuali CONTINUE

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Una variabile casuale si definisce discreta se i valori assunti da X sono una quantità numerabile, cioè esiste un insieme finito o numerabile di numeri reali, diciamo $x_1,\ldots,x_n$, tale che X Assuma valori in questo insieme

FUNZIONI DI MASSA DI PROBABILITA'

Se X è una variabile aleatoria discreta, che assume valori distinti x1,…,xn, (che supponiamo per semplicità ordinati in modo crescente) allora la FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITA' o FUNZIONE DI DENSITA' DISCRETA di *X*, indicata con p_x è definita come:

$$p_X = \begin{cases} P(X = x) \;\; se \;\; x = x_1, \ldots, x_n \\ 0 \;\; altrimenti \end{cases}$$

Pmf= probability mass function

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) \qquad i = 1, \ldots, n, \ldots$$

FUNZIONI DI MASSA DI PROBABILITA'

Si ha inoltre che:

$$0 \leq p_X(x) \leq 1 \;\; \forall \;\; x \in A$$

$$\sum_i p_X(x_i) = 1$$

$$p_X(x) = 0 \;\; \forall \;\; x \in \bar{A}$$

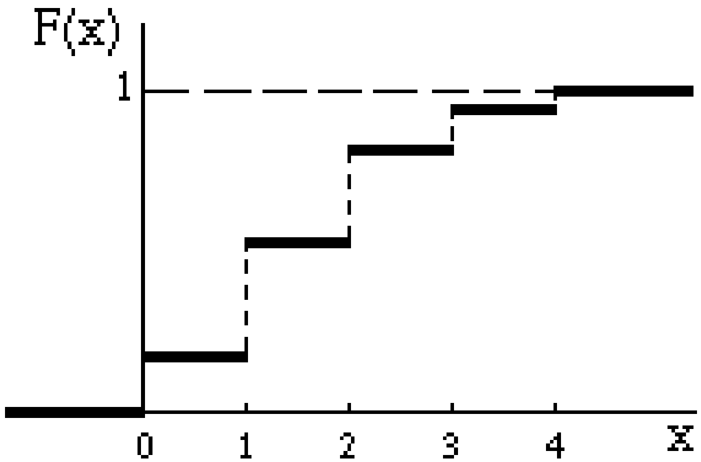
Inoltre, nota p_x si può facilmente ottenere F_x come segue:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i t.c. \; x_i \leq x} p_X(x_i)$$

Ed analogamente:

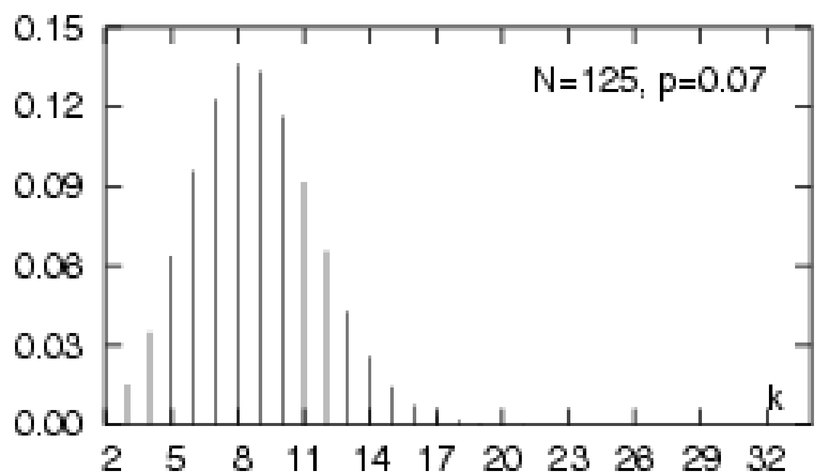
$$p_X(x_i) = F_X(x_i) - \lim_{h \to 0} F_X(x_i - h) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

FUNZIONI DI MASSA DI PROBABILITA'



$$F_X(x)$$

$$p_X(x)$$



ALCUNE FAMIGLIE DI
VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$\mathbf{P}(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

$$\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

TEMPO DI RITORNO E DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

Abbiamo visto come la legge di probabilità abbinata ad una V.A. geometrica sia data da:

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=(1-\mathrm{p})^{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}, \qquad \mathrm{k}=1,2,3,\ldots.$$

(Dove p è compreso tra 0 ed 1) ed esprima la probabilità di ottenere un successo al k-esimo Lancio (assimilabile al tempo di attesa discreto che si deve consumare prima di avere un successo)

Poniamo che la v.a. Y_i rappresenti ad esempio, il valore del massimo picco di piena registrato nell'anno i. Se gli Y_i sono indipendenti, la probabilità che l'intervallo di tempo T* tra le due eccedenze di una piena di intensità y (qui inteso come intervallo di tempo discreto=numero di anni) sia uguale a n è data da:

$$P(T^*=n)=P(Y_1<y)\cdot P(Y_2<y)\cdot\ldots\cdot P(Y_{n-1}<y)\cdot P(Y_n>y)$$

$$T^*\sim Geometrica\rightarrow E(T^*)=\frac{1}{P(Y>y)}=T$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Legge di probabilità per una variabile continua

Funzione di densità di probabilità (pdf):
Rappresenta il caso al limite di un poligono di frequenza relativa applicato ad un campione di numerosità infinita e con la larghezza delle classi tendente a 0

$$f_X(x)$$

$$f_X(x) \geq 0 \ \forall \ x \ \ reale$$

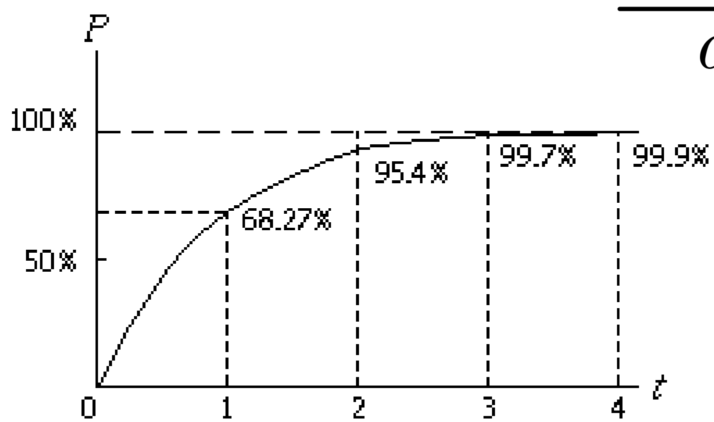
$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

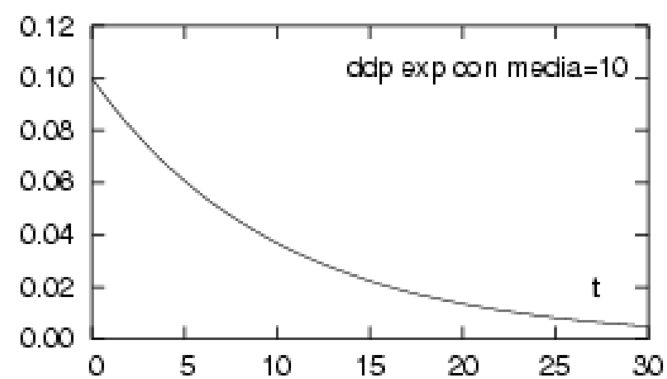
VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$





ALCUNE FAMIGLIE DI VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Distribuzione di Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

$$u = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \quad \Rightarrow \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Distribuzione Normale Standard

ALCUNE FAMIGLIE DI VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Distribuzione Lognormale

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln x - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2}$$

$$\mu_y = ln(\mu_x) - \frac{1}{2} ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}\right)$$

$$\sigma_y^2 = ln\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}\right)$$

ALCUNE FAMIGLIE DI VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Distribuzione esponenziale

$$f(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x - x_0}{k}}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x - x_0}{k}}$$

$$x_0 = \mu_x - \sigma_x$$
$$k = \sigma_x$$

$$f(x) = \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{k}}$$

ALCUNE FAMIGLIE DI VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Distribuzione doppio-esponenziale

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}}$$

$$\mu_x = \frac{\gamma}{\alpha} + u$$

$$\sigma_x = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

MEDIA E VARIANZA DI
UNA VARIABILE CASUALE DISCRETA

Se X è una V.A. discreta ed assume valori $x_1,\ldots,x_n$, allora la media di X (E(X) o $\mu(x)$) è data, come nel caso delle V.C. empiriche da:

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

Mentre la sua varianza è data da:

$$\sigma^2(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_X(x_i) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

MEDIA E VARIANZA DI UNA VARIABILE CASUALE CONTINUA

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx$$