

## MECCANICA DELLE MURATURE

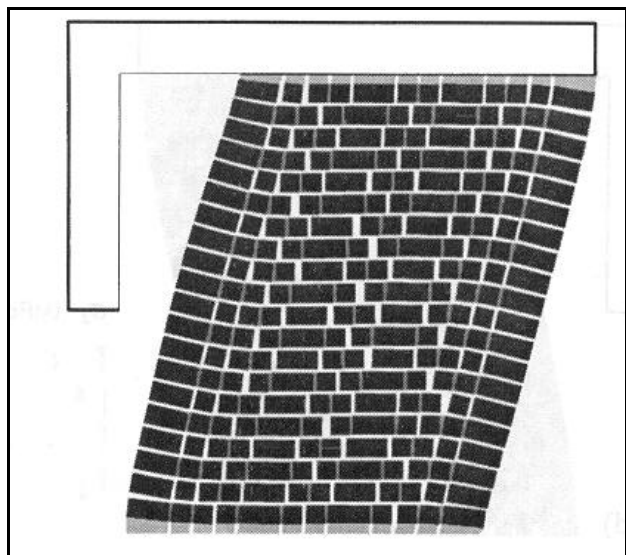
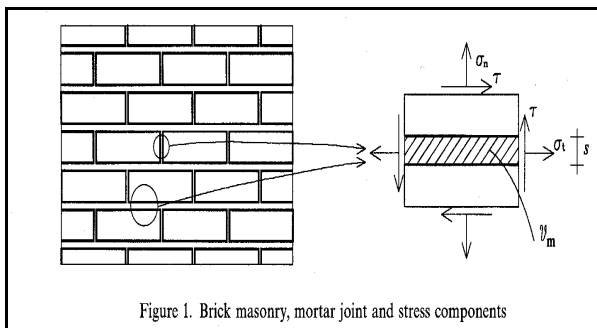
La meccanica della muratura si occupa di rappresentare il comportamento di una muratura reale.



La modellazione della meccanica di una struttura muraria può essere impostata secondo due diverse alternative.

### ● MODELLAZIONE DISCRETA

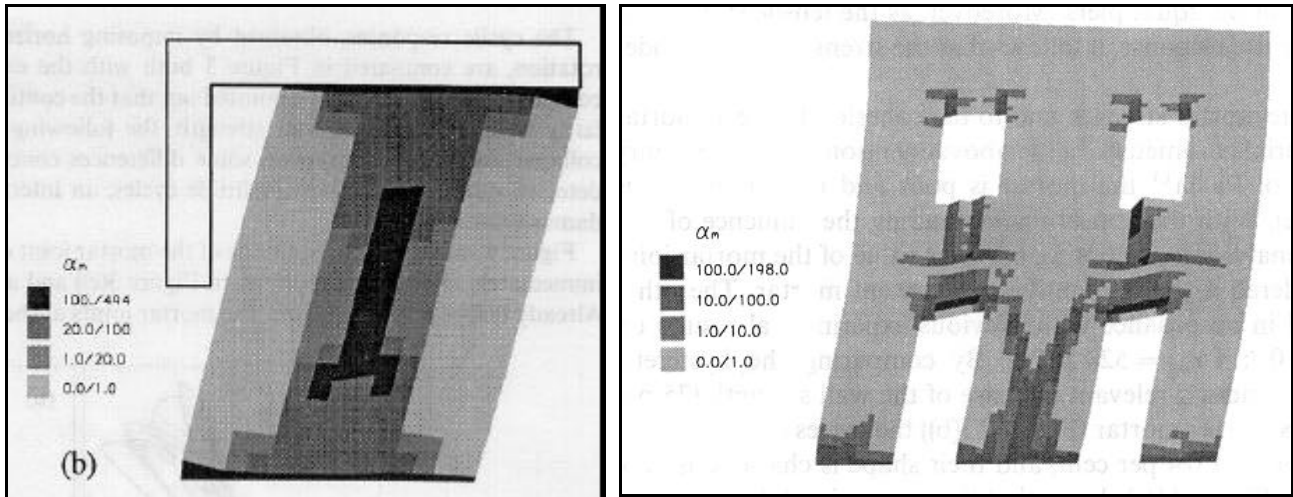
Gli elementi del modello discreto coincidono con quelli fisici della struttura (blocchi lapidei e malta). Vengono utilizzati opportuni legami costitutivi per i blocchi e per la malta. I blocchi sono talvolta considerati come corpi rigidi.



## ● MODELLAZIONE CONTINUA

Il modello simula un "materiale muratura" (lineare, non lineare, elastico, elasto-plastico, isotropo, anisotropo) comprensivo di blocchi e legante.

I parametri che caratterizzano il modello sono definiti su basi sperimentali.



Il problema della modellazione delle murature (soprattutto quelle antiche) è ancora molto aperto.

La **modellazione discreta** è in teoria, più affinata.

Ha, però, inconvenienti pratici:

- è complicata e costosa
- risente delle incertezze sul comportamento reale dei singoli elementi, che possono vanificare la maggior precisione potenziale.

Quindi è sostanzialmente limitata attualmente a :

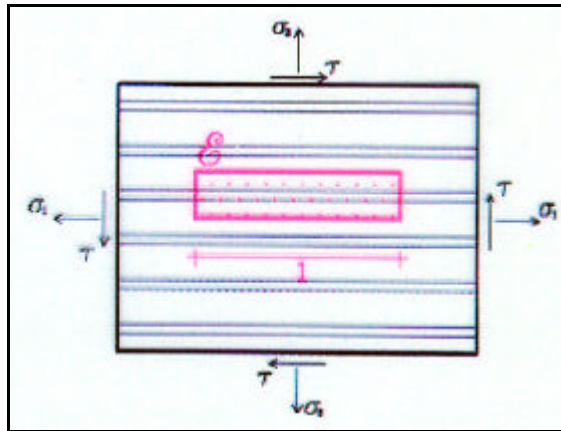
- studi e ricerche
- problemi speciali, riguardanti soprattutto antiche costruzioni o ruderi a grandi blocchi.

La schematizzazione dei singoli blocchi come corpi rigidi è frequente in questi casi

La **modellazione continua** (elastica, non elastica,...) è quella correntemente seguita.

## RIPOSTA ELASTICA-LINEARE

Modellazione della parete muraria come lastra in stato di tensione.



$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

la sua inversa è

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

dove

$$H_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$H_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$H_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$H_{44} = G_{12}.$$

La valutazione della matrice di deformabilità elastica ortotropa avviene attraverso un processo di omogenizzazione dei contributi degli elementi costituenti.

Partendo dai seguenti dati :

- Parametri elastici del mattone:  $E_b$   $\nu_b$   $G_b$
- Parametri elastici della malta:  $E_m$   $\nu_m$   $G_m$
- Frazione volumetrica dei due componenti:  $\eta_b$   $\eta_m$

si ottiene la matrice  $\mathbf{K}_M$  :

$$\mathbf{K}_M = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{M1}} & -\frac{\nu_{M12}}{E_{M1}} & 0 \\ -\frac{\nu_{M12}}{E_{M1}} & \frac{1}{E_{M2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_M} \end{bmatrix}$$

nella quale i moduli  $E_{M1}$ ,  $E_{M2}$ ,  $\nu_{M12}$  e  $G_M$  dipendono dai moduli del mattone  $E_b$   $\nu_b$  e della malta  $E_m$   $\nu_m$  e dai parametri che caratterizzano la geometria del paramento murario e possono essere ottenuti sulla base di tecniche di omogenizzazione, come proposto da numerosi autori.

In particolare, questi moduli possono essere approssimati ignorando i giunti alla testa dei mattoni come di seguito:

$$E_{M1} = \eta_m E_m + \eta_b E_b$$

$$E_{M2} = \left[ \frac{\eta_b}{E_b} + \frac{\eta_m}{E_m} - \frac{\eta_m \eta_b E_m E_b}{E_{M1}} \left( \frac{\nu_b}{E_b} - \frac{\nu_m}{E_m} \right)^2 \right]^{-1}$$

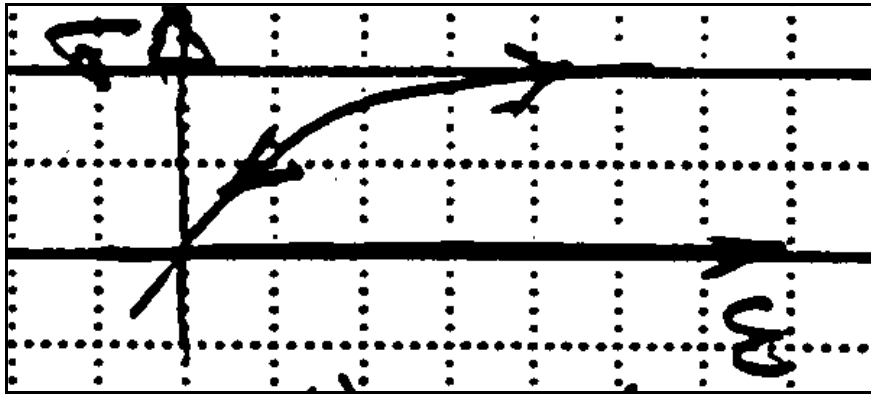
$$\nu_{M12} = \eta_m \nu_m + \eta_b \nu_b$$

$$G_M = \left( \frac{\eta_m}{G_m} + \frac{\eta_b}{G_b} \right)^{-1}$$

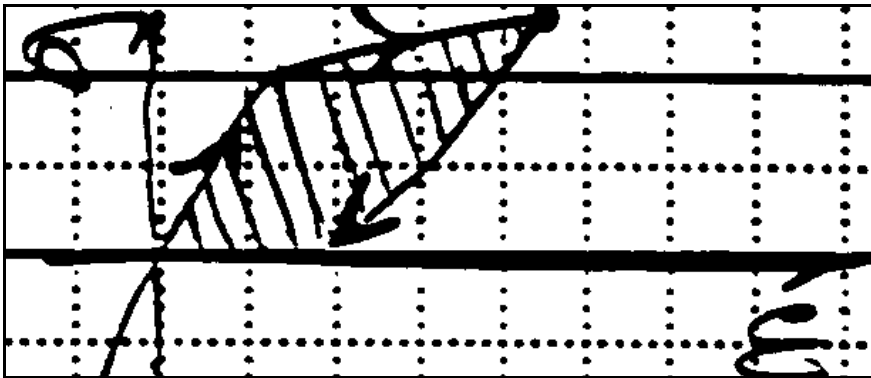
## COMPORAMENTO IN FASE FESSURATA

I modelli non lineari sono principalmente di tre tipi :

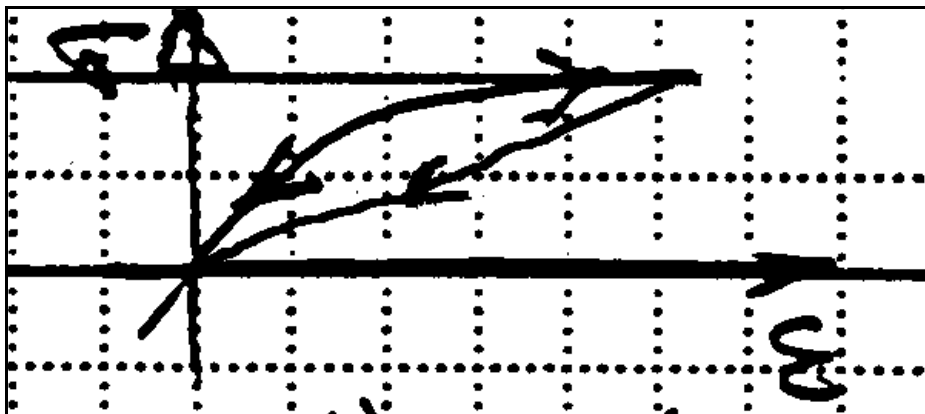
a) MODELLI ELASTICI NON LINEARI (solido non resistente a trazione)



b) MODELLI DI PLASTICITÀ



c) MODELLI DI DANNEGGIAMENTO



## CRITERI DI RESISTENZA

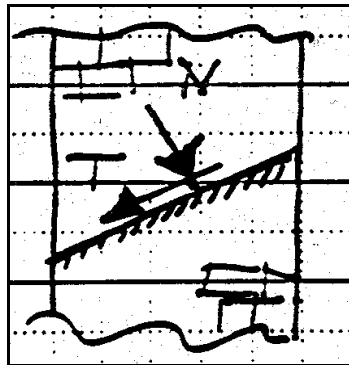
- Criterio di Mohr-Coulomb

In una colonna il collasso avviene quando in una sezione, comunque inclinata, il taglio raggiunge un valore limite:

$$T = C + nN$$

C = coesione

n = coefficiente di attrito interno



Mohr (generalizzazione)

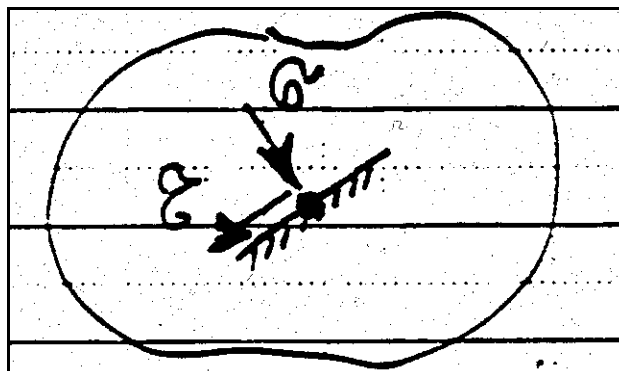
in un punto di un solido la situazione limite si ha quando su una giacitura qualunque la tensione tangenziale raggiunge, in valore assoluto un livello dato da:

$$\tau = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi$$

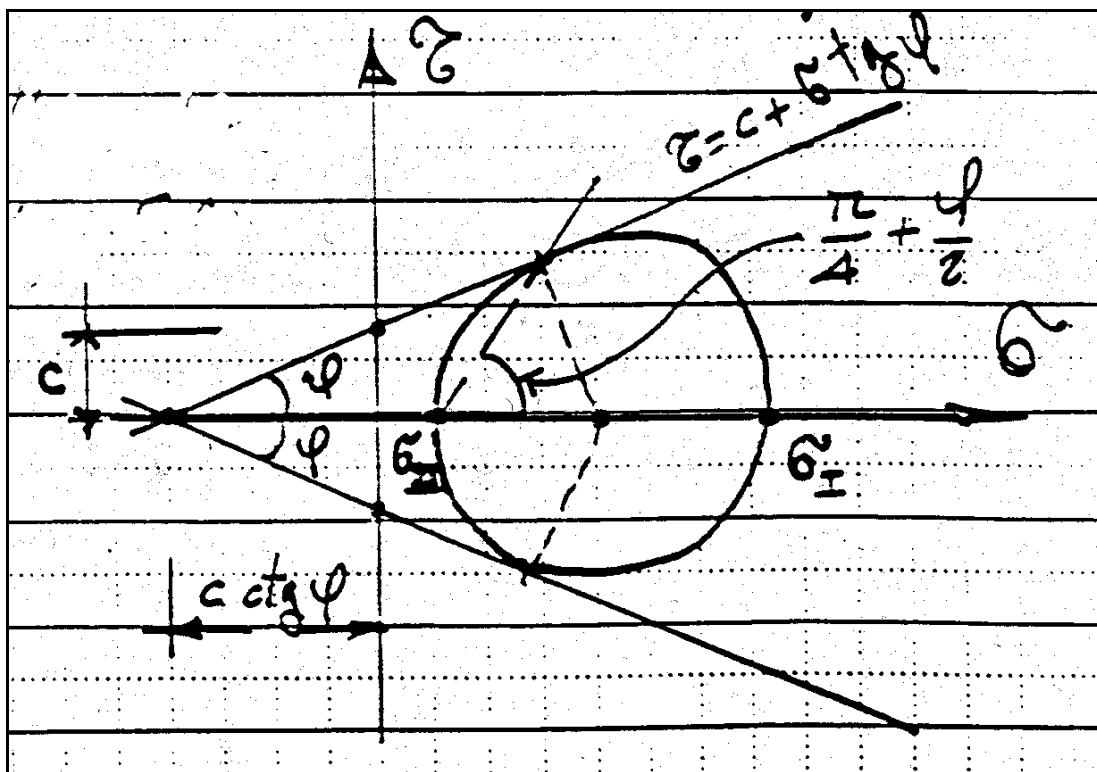
C = coesione ( $\geq 0$ )

$\varphi$  = angolo di attrito interno

$\sigma > 0$  se di compressione

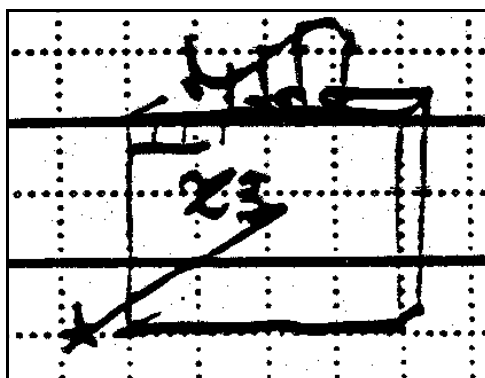


Il collasso avviene quando il cerchio di Mohr dello stato di tensione  $\sigma, \tau$  è tangente alla coppia di rette  $\tau = C \pm \sigma \operatorname{tg} \varphi$

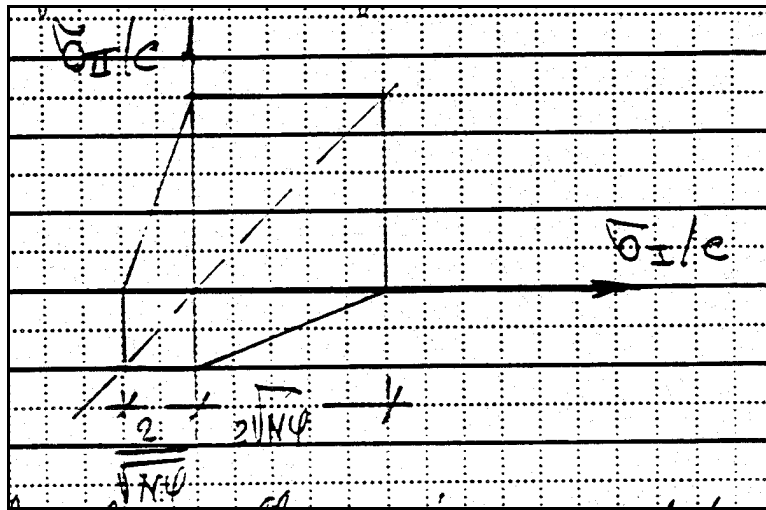


Stati piani di tensione (pannelli murari)

Sia per esempio  $\sigma_{III} = 0$



Il dominio si ottiene sezionando la piramide col piano  $\sigma_{III} = 0$   
 Si dimostra che i lati della sezione sono dati dalle condizioni:



$$\sigma_I \geq 0 \geq \sigma_{II} \quad \sigma_I = N_\varphi \sigma_{II} + 2 C \sqrt{N_\varphi}$$

$$\sigma_{II} \geq 0 \geq \sigma_I \quad \sigma_{II} = N_\varphi \sigma_I + 2 C \sqrt{N_\varphi}$$

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq 0 \quad \sigma_I = 2 C \sqrt{N_\varphi}$$

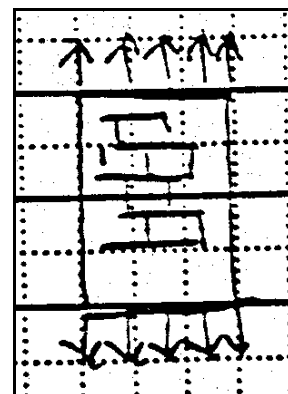
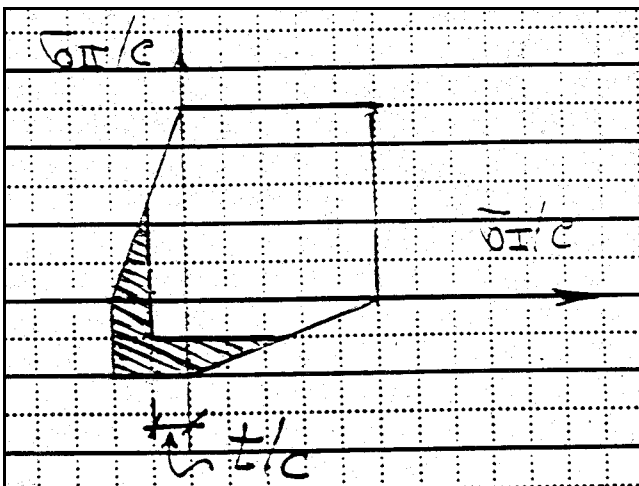
$$\sigma_{II} \geq \sigma_I \geq 0 \quad \sigma_{II} = 2 C \sqrt{N_\varphi}$$

$$0 \geq \sigma_{II} \geq \sigma_I \quad \sigma_I = -2 C \sqrt{N_\varphi}$$

$$0 \geq \sigma_I \geq \sigma_{II} \quad \sigma_{II} = -2 C \sqrt{N_\varphi}$$

Con  $N_\varphi = \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \varphi/2)$        $C, \varphi$  costanti del materiale

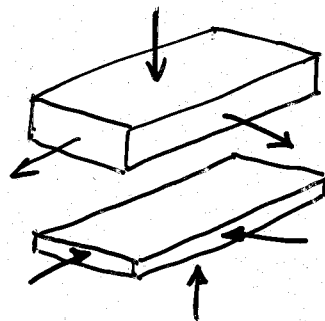
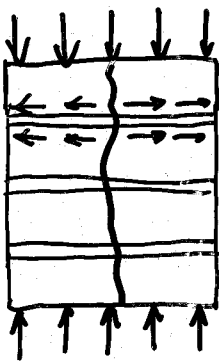
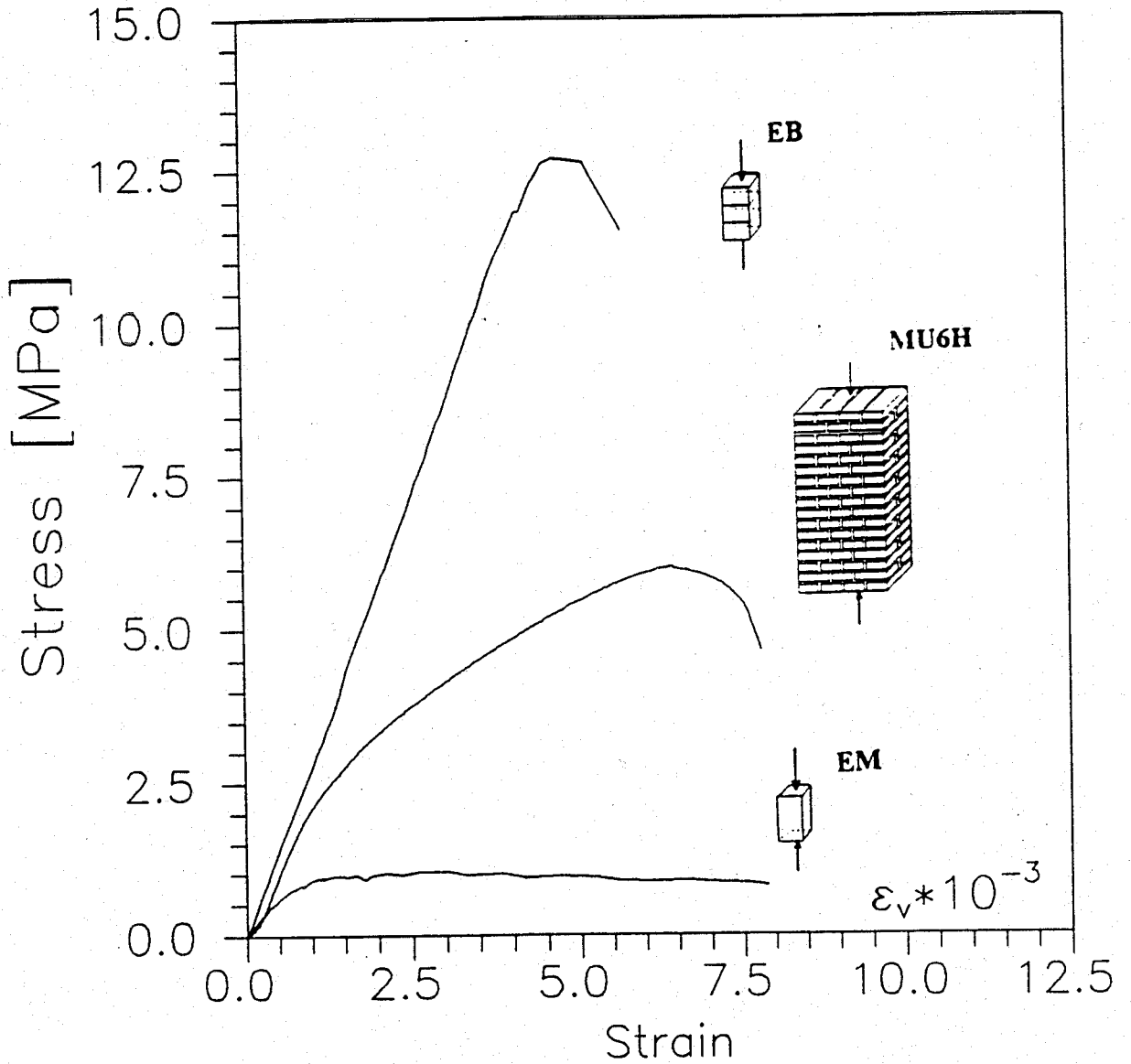
Col criterio del "tension out off" :



N.B:  $t$  è la resistenza a trazione monoassiale



# RESISTENZA A COMPRESSIONE DI UNA MURATURA DI MATTONI



# RESISTENZA A COMPRESSIONE

D.M. 20.11.87

Resistenza caratteristica  $f_k$  di murature  
in elementi artificiali pieni e semipieni  
resistenza caratteristica degli elementi

$f_k$ (MPa)	tipo di malta			
	M1	M2	M3	M4
2	1.2	1.2	1.2	1.2
3	2.2	2.2	2.2	2.0
5	3.5	3.4	3.3	3.0
7.5	5	4.5	4.1	3.5
10	6.2	5.3	4.7	4.1
15	8.2	6.7	6	5.1
20	9.7	8	7	6.1
30	12	10	8.6	7.2
40	14.3	12	10.4	—

Resistenza malta

M1  $\sigma_{rc} > 12 \text{ MPa}$

M2  $\sigma_{rc} > 8 \text{ MPa}$

M3  $\sigma_{rc} > 5 \text{ MPa}$

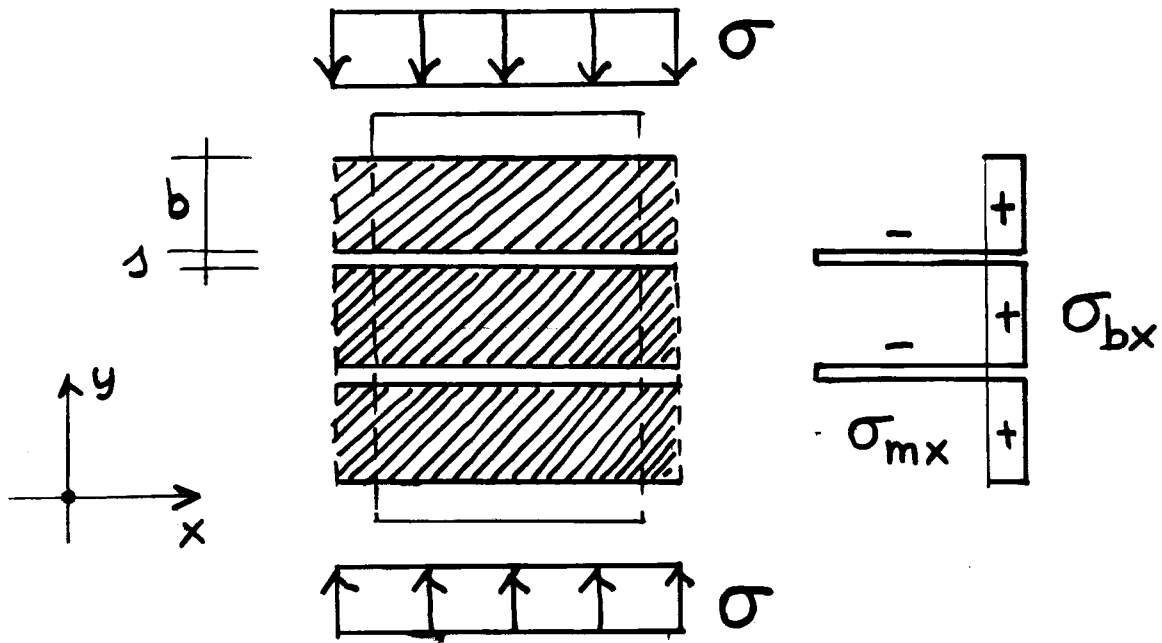
M4  $\sigma_{rc} > 2.5 \text{ MPa}$

$\sigma_{rc} > 8 \text{ MPa}$

- Tensione base ammissibile  $\bar{\sigma}_m = f_k/5$

# MODELLO DI ROTTURA A COMPRESSIONE

- La muratura è assimilato a mezzo stratificato



Comportamento elastico isotropo dei componenti

- $\sigma_{by} = \sigma_{my} = \sigma$
- $\epsilon_{bx} = \epsilon_{mx} = \epsilon_x$
- $\sigma_{bx} b + \sigma_{mx} s = 0$
- $\epsilon_{bx} = \frac{1}{E_b} (\sigma_{bx} - \nu_b \sigma_{by})$
- $\epsilon_{mx} = \frac{1}{E_m} (\sigma_{mx} - \nu_m \sigma_{my})$

Posto  $\alpha = s/b$

Malta

$$\sigma_{mx} = \frac{E_b \nu_m - E_m \nu_b}{E_b + \alpha E_m} \sigma < 0$$

Mattone

$$\sigma_{bx} = -\alpha \sigma_{mx} > 0$$

$$\underline{\varepsilon} = K \underline{\sigma} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix}$$

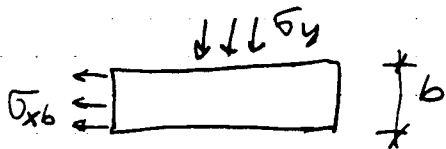
Stato piano di tensione

$$K = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix}$$

Stato piano di deformazione

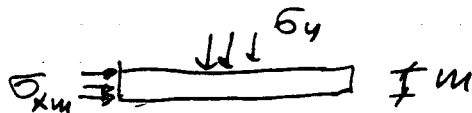
$$K = \frac{1+\nu}{E} \begin{vmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{vmatrix}$$

Mattone



Equilibrio orizzontale

Matta



$$\sigma_{xb} b + \sigma_{xm} m = 0$$

Stato piano di tensione

$$\varepsilon_{xb} = \frac{1}{E_b} (\sigma_{xb} - \nu_b \sigma_y)$$

$$\varepsilon_{xm} = \frac{1}{E_m} (\sigma_{xm} - \nu_m \sigma_y)$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_{xb} = \varepsilon_{xm}$$

$$\frac{\sigma_{xb}}{E_b} - \frac{\sigma_{xm}}{E_m} = \left( \frac{\nu_b}{E_b} - \frac{\nu_m}{E_m} \right) \sigma_y$$

$$\frac{1}{E_m} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xb} b + \sigma_{xm} m = 0 \\ \frac{\sigma_{xb}}{E_b} - \frac{\sigma_{xm}}{E_m} = \left( \frac{\nu_b}{E_b} - \frac{\nu_m}{E_m} \right) \sigma_y \end{array} \right.$$

$$\sigma_{xb} \left( \frac{b}{E_m} + \frac{m}{E_b} \right) = \left( \frac{\nu_b}{E_b} - \frac{\nu_m}{E_m} \right) m \sigma_y$$

$$\sigma_{xb} = -m \sigma_y \frac{\nu_m E_b - \nu_b E_m}{b E_b + m E_m}$$

$$\sigma_{xm} = +b \sigma_y \frac{\nu_m E_b - \nu_b E_m}{b E_b + m E_m}$$

## Stato piano di deformazione

$$\epsilon_{xb} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b} \sigma_{xb} - \frac{\nu_b(1+\nu_b)}{E_b} \sigma_y \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{xb} = \epsilon_{xm}$$

$$\epsilon_{xm} = \frac{1-\nu_m^2}{E_m} \sigma_{xm} - \frac{\nu_m(1+\nu_m)}{E_m} \sigma_y$$

$$M \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\nu_b^2}{E_b} \sigma_{xb} - \frac{1-\nu_m^2}{E_m} \sigma_{xm} = \left( \frac{\nu_b(1+\nu_b)}{E_b} - \frac{\nu_m(1+\nu_m)}{E_m} \right) \sigma_y \\ \frac{1-\nu_m^2}{E_m} \sigma_{xb} b + \sigma_{xm} M = 0 \end{array} \right.$$

$$\left( M \frac{1-\nu_b^2}{E_b} + b \frac{1-\nu_m^2}{E_m} \right) \sigma_{xb} = + M \sigma_y \left( \frac{\nu_b(1+\nu_b)}{E_b} - \frac{\nu_m(1+\nu_m)}{E_m} \right)$$

$$\boxed{\sigma_{xb} = -M \sigma_y \frac{\nu_m(1+\nu_m) E_b - \nu_b(1+\nu_b) E_m}{M(1-\nu_b^2) E_m + b(1-\nu_m^2) E_b}}$$

### S. PIANO DI TENSIONE

### S. PIANO DI DEFORMAZIONE

$$\sigma_{xb} = -\eta_m \sigma_y \frac{\nu_m \frac{E_b}{E_m} - \nu_b}{\eta_b \frac{E_b}{E_m} + \eta_m}$$

$$\sigma_{xb} = -\eta_m \sigma_y \frac{\nu_m(1+\nu_m) \frac{E_b}{E_m} - \nu_b(1+\nu_b)}{\eta_m(1-\nu_b^2) + \eta_b(1-\nu_m^2) \frac{E_b}{E_m}}$$

$$\boxed{\sigma_{xm} = -\frac{b}{M} \sigma_{xb}}$$

caso  $\nu_b = \nu_m = 0.2$

$$\eta_m = 0.2 \quad \eta_b = 0.8$$

$$\frac{E_b}{E_m} = 5 \quad \sigma_{xb} = -0.038 \sigma_y$$

$$\sigma_{xb} = -0.048 \sigma_y$$

$$\frac{E_b}{E_m} = 10 \quad \sigma_{xb} = -0.044 \sigma_y$$

$$\sigma_{xb} = -0.055 \sigma_y$$

$$\boxed{\sigma_{xm} = 0.22 \sigma_y}$$

$$\eta_m = 0.5 \quad \eta_b = 0.5$$

$$\frac{E_b}{E_m} = 5 \quad \sigma_{xb} = -0.133 \sigma_y$$

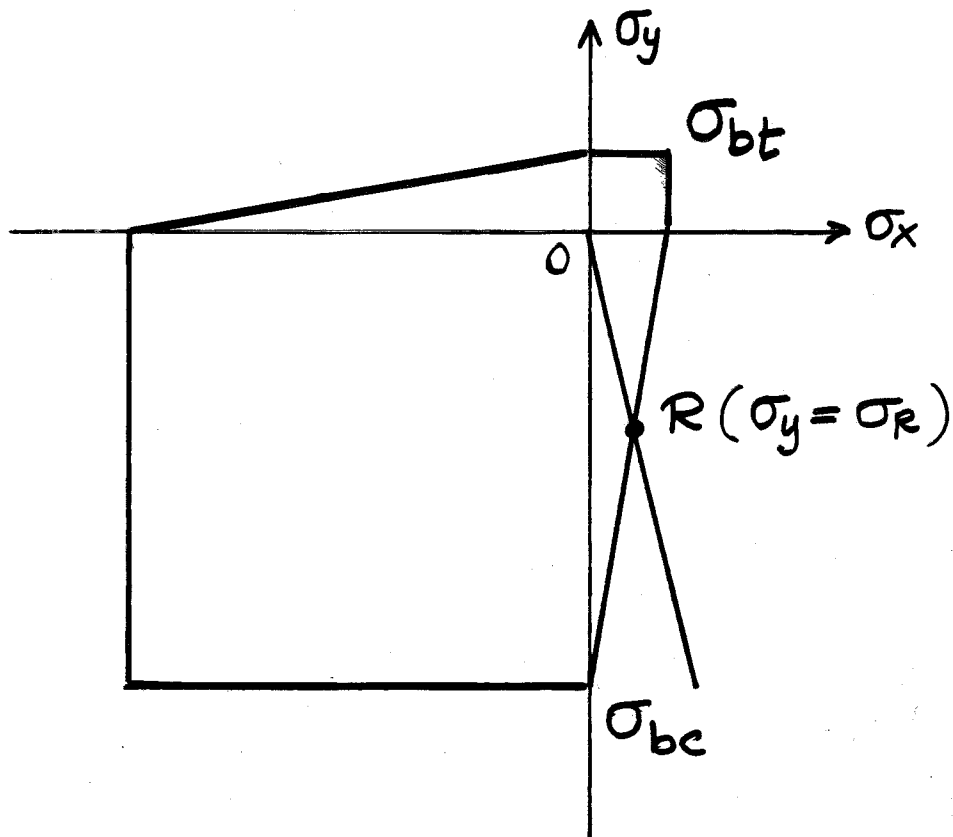
$$\sigma_{xb} = -0.167 \sigma_y$$

$$\frac{E_b}{E_m} = 10 \quad \sigma_{xb} = -0.164 \sigma_y$$

$$\sigma_{xb} = -0.205 \sigma_y$$

$$\boxed{\sigma_{xm} = 0.205 \sigma_y}$$

- Criterio di rottura di Mohr (mattoni)



$$\frac{\sigma_R}{\sigma_{bc}} = \frac{\sigma_{bt}/\sigma_{bc}}{\sigma_{bt}/\sigma_{bc} - \alpha \frac{(E_b/E_m)\nu_m - \nu_b}{(E_b/E_m) + \alpha}}$$

- La riduzione del giunto di malta aumenta  $\sigma_R$

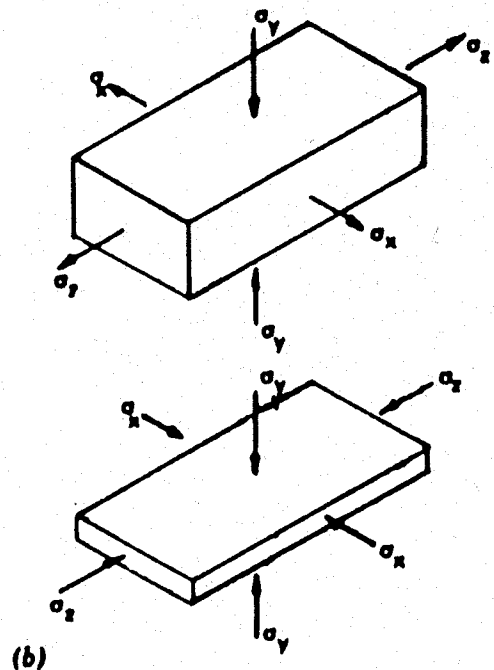
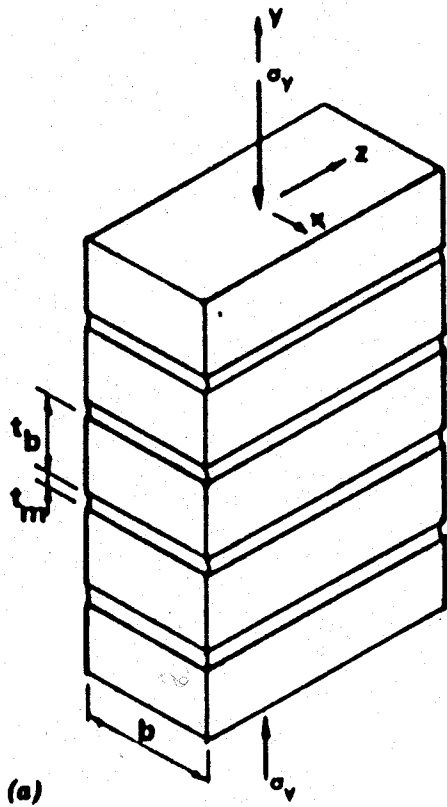
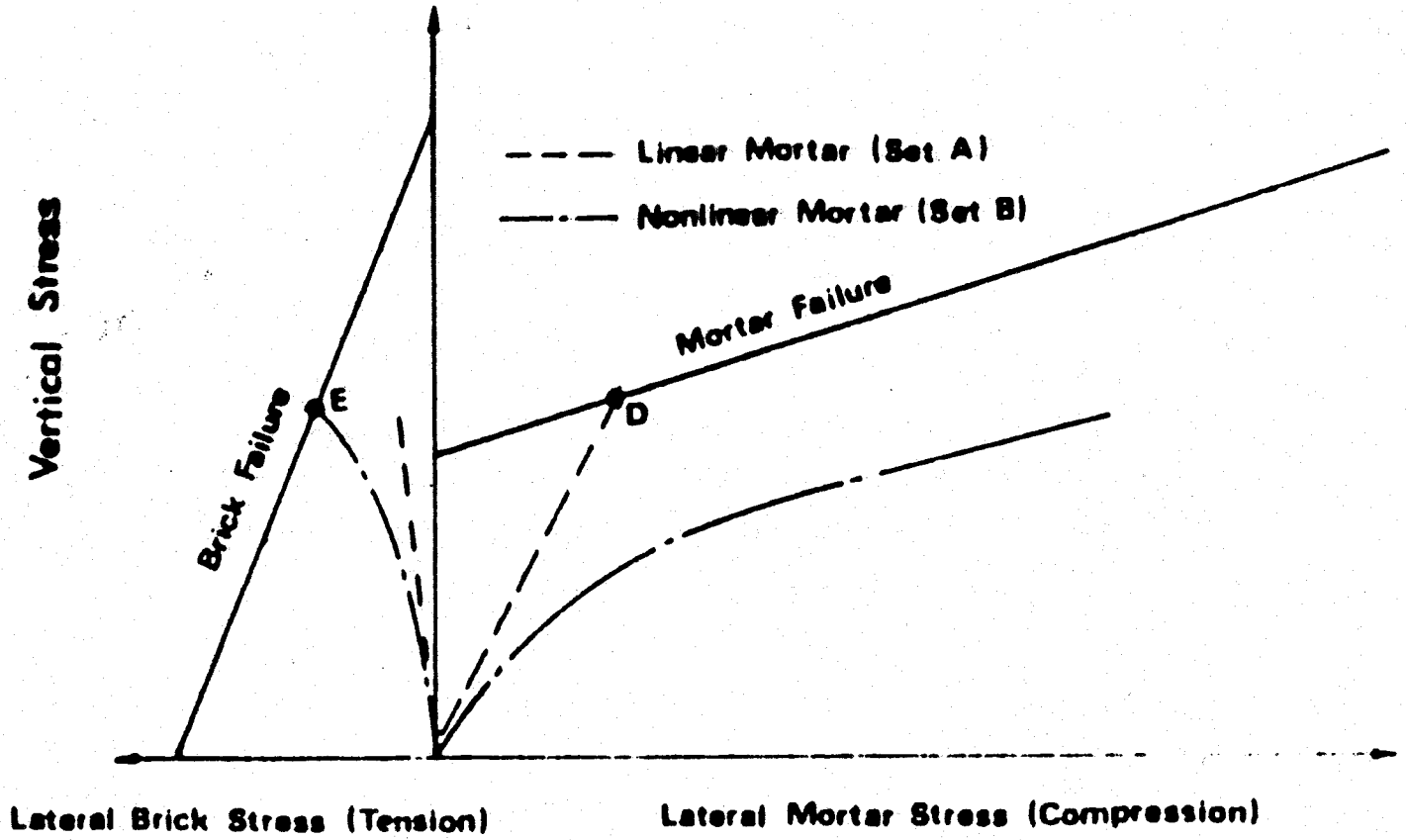
Esempio: Laterizio  $f_{bk} \geq 7.5 \text{ MPa}$ ; Malte M2  $\sigma_{mc} > 8 \text{ MPa}$

assunti:  $E_b/E_m \sim 8$ ;  $\nu_m = \nu_b = 0.25$ ;  $|\sigma_{bc}/\sigma_{bt}| \sim 8$

$$\alpha = 1/6$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma_R = 5.7 \text{ MPa}} \quad (f_k = 4.5 \text{ MPa})$$

# Resistenza a compressione della muratura di mattoni



# RESISTENZA A TAGLIO

D.M. 20.11.87 e EC6

Resistenza caratteristica a taglio delle murature

$$f_{vk} = f_{vko} + \mu \sigma_n$$

- $f_{vko}$  resistenza caratt. taglio in assenza di compressione
- $\mu = 0.4$  coefficiente di attrito
- $\sigma_n$  tensione normale media

Elementi artificiali laterizi pieni e semipieni

$f_{bk}$ (MPa)	Malta	$f_{vko}$ (MPa)
$\leq 15$	M1 ÷ M4	0,2
$> 15$	M1 ÷ M4	0,3

D.M.

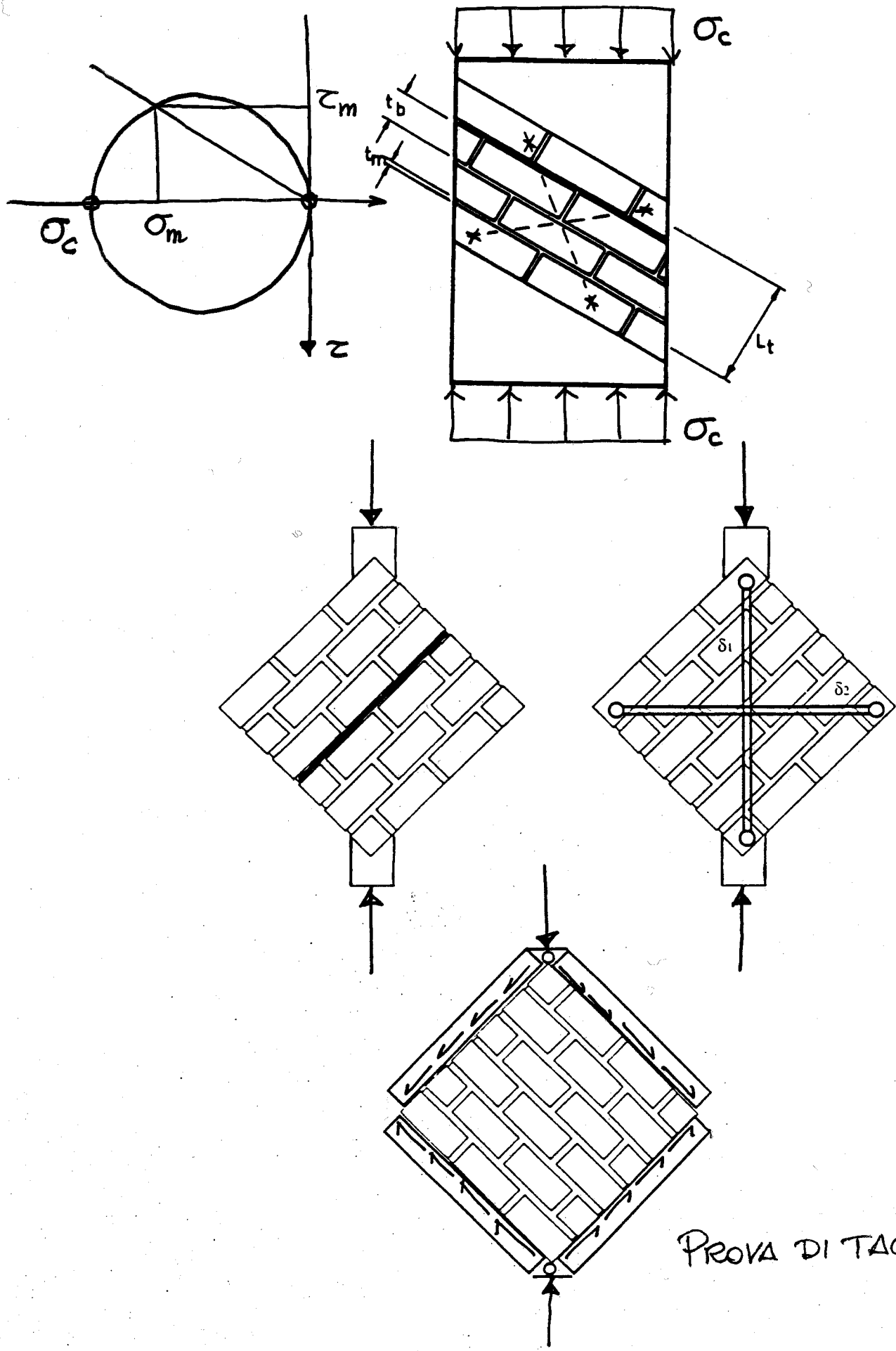
Elementi artificiali calcestruzzo pieni e semipieni

$\leq 3$	M1 ÷ M3	0,1
$\leq 3$	M4	0,1
$> 3$	M1 ÷ M3	0,2
$> 3$	M4	0,1

D.M.



# • PROVE DI COMPRESSIONE DIAGONALE



PROVA DI TAGLIO

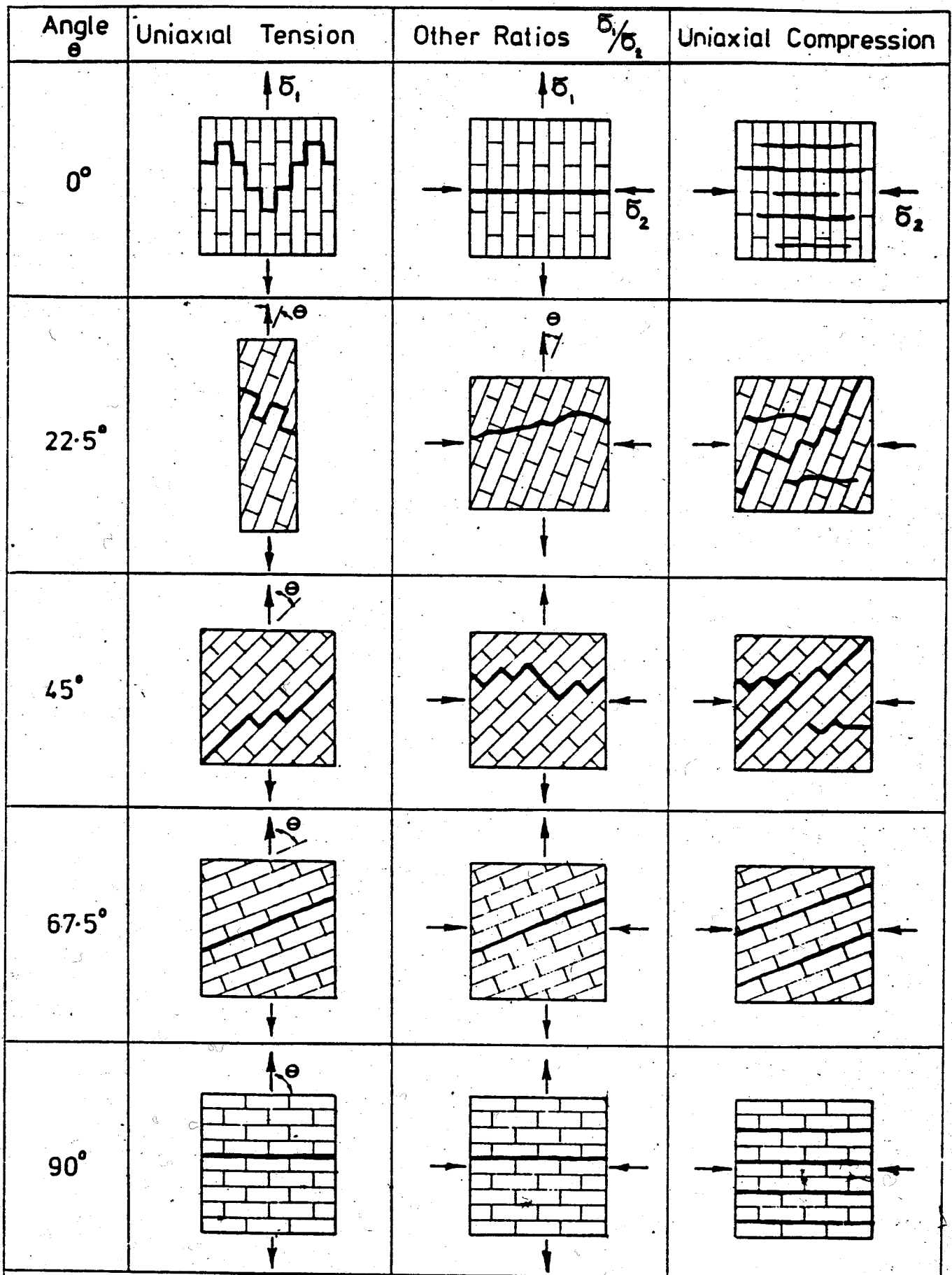
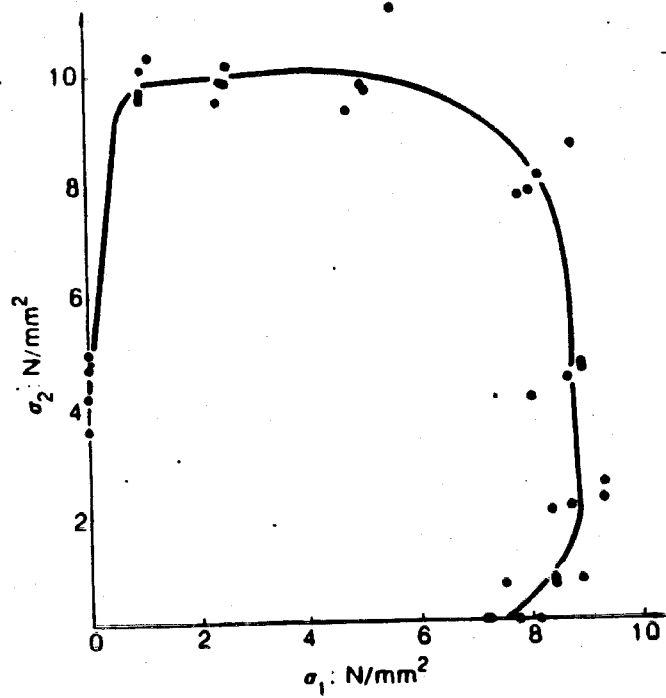
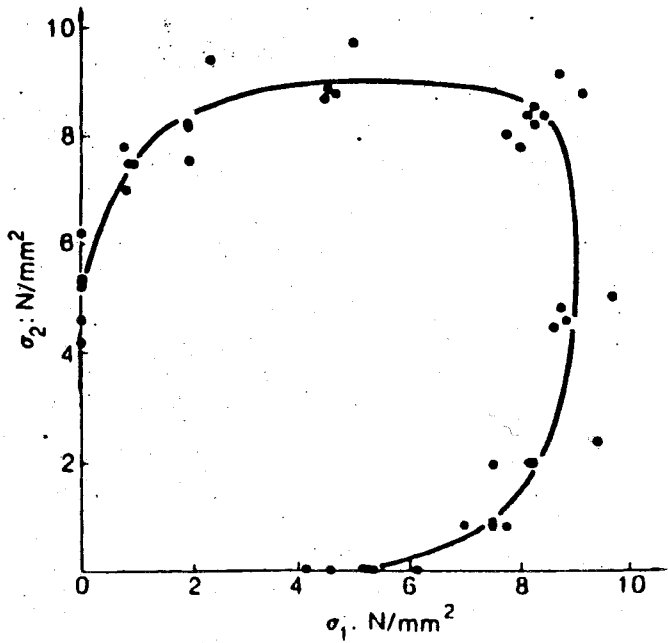
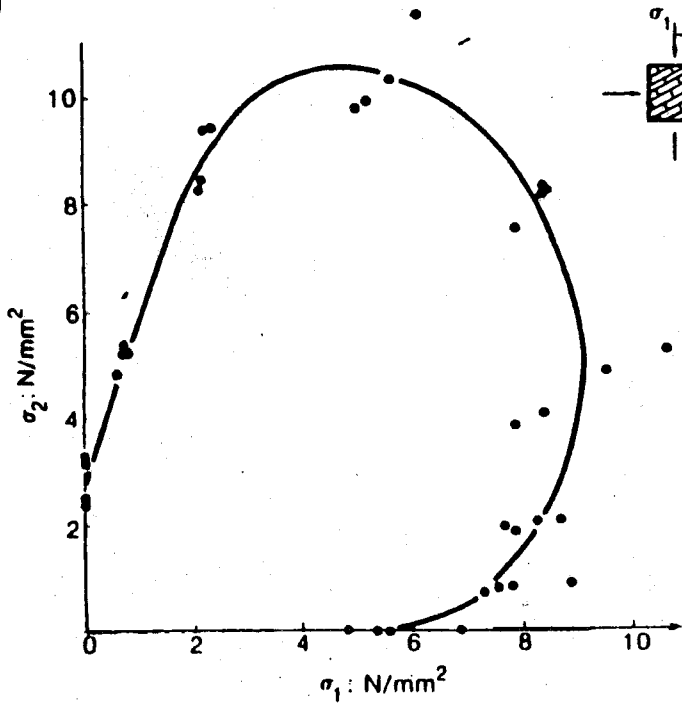
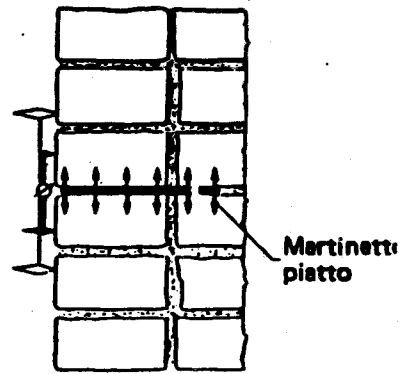
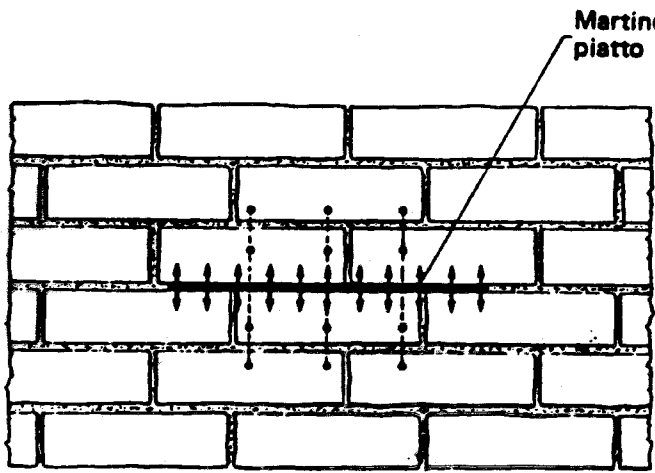


Figure 2. Summary of failure modes for biaxial tension-compression.

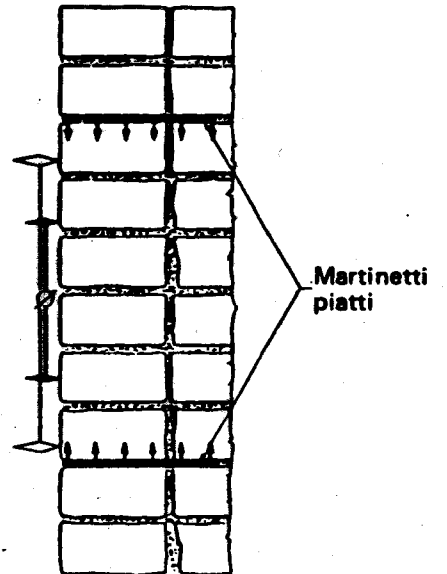
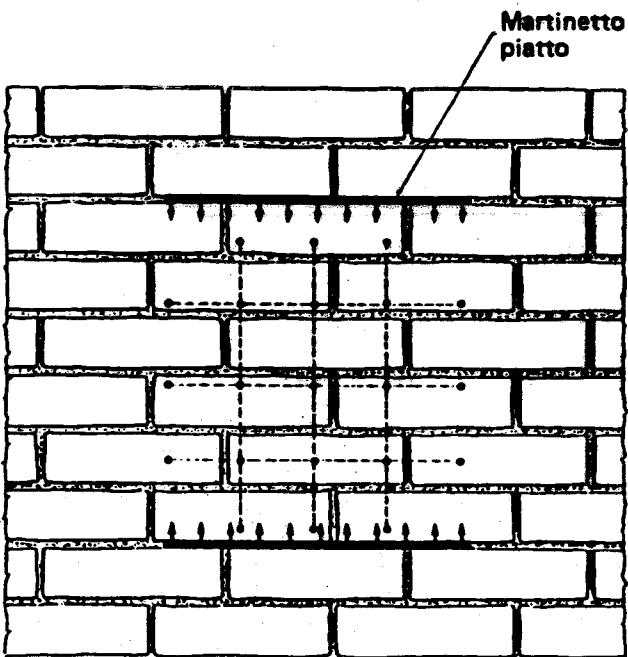


(PAGE, 1980...)





----- Base di misura



----- Base di misura

