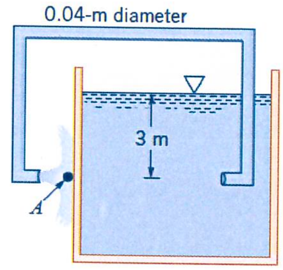
COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 9 aprile 2018 – fila A

Esercizio 1. In un test effettuato su un liquido si è trovato che alzando la pressione assoluta da 15 a 3000 psi a temperatura costante si otteneva una riduzione del volume da 10240 a 10138 in^3. Si stimi, usando i Pascal come unità di misura, il coefficiente di comprimibilità κ. E' noto che 1 in. = 2.54 cm e 1 psi = 6.895 kPa.

Esercizio 2. Dell'acqua fuoriesce da un serbatoio mediante un sifone. Il moto è stazionario, incomprimibile e con attriti trascurabili. Si determini la portata volumetrica dell'acqua nel condotto (di diametro pari a 4 cm) e la pressione assoluta nel punto di ristagno A. Se ci fossero attriti nel condotto la pressione di ristagno sarebbe più alta o più bassa?



Esercizio 3. I due vortici elementari visti a lezioni (con u_θ direttamente o inversamente proporzionale alla distanza r dal centro del vortice) possono servire a modellare un vortice realistico in cui la zona centrale (*"core"* del vortice) si comporta in modo simile alla rotazione di corpo rigido e la parte esterna è praticamente irrotazionale. Un modello di tale vortice realistico è il cosiddetto vortice Gaussiano, per il quale il vettore velocità ha solo componente azimutale e si può scrivere:

$$\boldsymbol{u} = u_\theta \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\beta}{2\,\pi\, r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)\boldsymbol{e}_\theta,$$

dove β è una costante legata alla circolazione, e σ è una distanza radiale (misurata dal centro del vortice) che separa essenzialmente il vortice in due parti, una parte centrale descritta da un comportamento di rotazione di corpo solido ($u_\theta \approx A\,r$) ed una parte lontana dal centro con vorticità nulla ($u_\theta \approx B/r$). Tale moto è stazionario oppure no? Comprimibile oppure no? Quanto vale il tensore velocità di deformazione **E** nella regione interna (per r molto piccolo, i.e. $r \ll \sigma$)? Trovare i comportamenti asintotici della velocità per r molto piccolo e molto grande, cioè trovare le due costanti A e B. Trovare le tre componenti della vorticità per il vortice Gaussiano, sapendo che

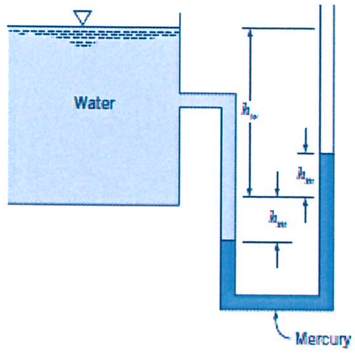
$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z .$$

Verificare il teorema di Stokes e mostrare che la circolazione vale $\Gamma = \beta\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)$, cioè $\Gamma \to 0$ vicino all'origine e $\Gamma \to \beta$ quando r è molto grande. Si scriva infine l'equazione delle linee di corrente.

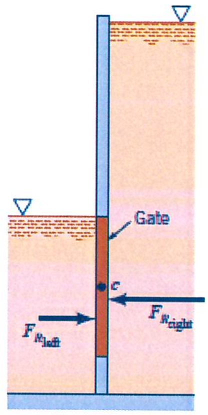
NB. La divergenza della velocità in coordinate cilindriche è: $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

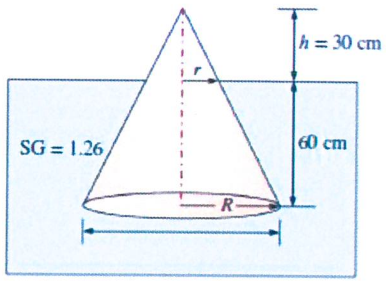
Esercizio 4. Un serbatoio rettangolare lungo 5 m ed alto 2 m, aperto all'atmosfera, è trainato da un camion su una strada in pianura. Il serbatoio è pieno d'acqua per una profondità di 1.6 m. Si determini la massima accelerazione (o decelerazione) permessa affinché l'acqua non fuoriesca dal serbatoio.

Esercizio 5. Un manometro a mercurio è collegato ad un grosso serbatoio d'acqua. Si determini il rapporto h_w/h_m tra le distanze h_w e h_m indicate in figura.



Esercizio 6. Uno sportello circolare (momento d'inerzia baricentrico $I_{xx,C} = \pi R^4/4$, R = 3 m è il raggio dello sportello) separa due regioni con fluidi di diversa densità (ρ_{left} = 2000 kg/m^3 a sinistra, ρ_{right} a destra). Lo sportello può ruotare attorno ad un asse (perpendicolare al foglio) che passa per il suo centro c. Se il sistema è in equilibrio quando la distanza tra i due peli liberi è pari a 5 m, si determini ρ_{right}.

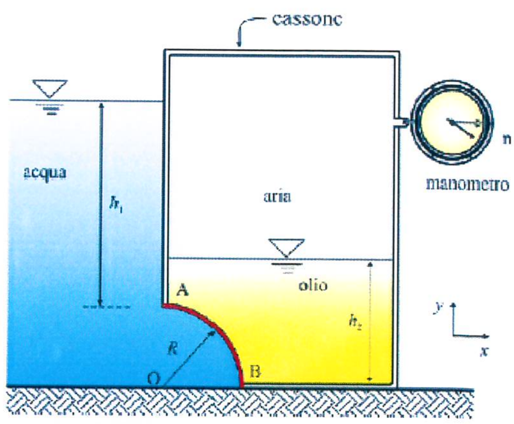




Esercizio 7. Un cono galleggia in un bagno di glicerina (SG = 1.26) come mostrato in figura. Si trovi la densità specifica (SG) del materiale di cui è costituito il cono.

Esercizio 8. Nel sistema in figura il cassone a tenuta ha una profondità unitaria e contiene aria in pressione. Determinare, con la migliore approssimazione possibile, la minima pressione relativa dell'aria sufficiente per mantenere in equilibrio la paratia AB, incernierata in A.

Dati: γ_{olio} = 8000 N/m^3, γ_{H2O} = 9800 N/m^3, h_1 = 3 m, h_2 = 2 m, R = 1.50 m



9 Aprile 2018

A1

$P_i = 15 \times 6.895 \text{ kPa} = 1.034 \times 10^5 \text{ Pa}$

$P_f = 3000 \times 6.895 \text{ kPa} = 206.85 \times 10^5 \text{ Pa}$

$V_i = 10240 \times (2.54)^3 \text{ cm}^3 = 0.1678 \text{ m}^3$

$V_f = 10138 \times (2.54)^3 \text{ cm}^3 = 0.1661 \text{ m}^3$

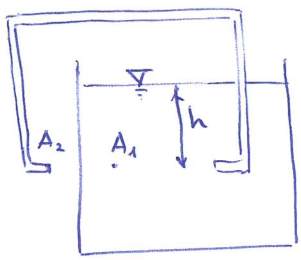
$\bar{V} = 0.1670 \text{ m}^3$

T costante

$$K = \rho \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_T = -V \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T$$

$$K \sim -\bar{V} \frac{P_f - P_i}{V_f - V_i} = 2.056 \times 10^9 \text{ Pa}$$

A2



Bernoulli tra A_1 (a riposo) e A_2 all'uscita del condotto:

$$P_{A_1} = P_{A_2} + \frac{1}{2}\rho V_{A_2}^2 \quad \text{con} \quad P_{A_1} = P_{atm} + \rho g h$$
$$P_{A_2} = P_{atm}$$

$$\rightarrow V_{A_2} = \sqrt{2gh} = 7.672 \frac{m}{s}$$

Se ci fossero perdite nel condotto l'eq. dell'energia tra A_1 e A_2 mostrerebbe che V_{A_2} è minore: $V_{A_2} = \sqrt{2g(h - h_L)}$

La portata volumetrica nel condotto è: $\dot{V} = V_{A_2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 9.64 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$

Bernoulli tra A_2 e A (punto di ristagno sulla parete del recipiente):

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V_{A_2}^2 = P_{stagn} = 101300 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 7.672^2 = 130730 \text{ Pa}$$

Se V_{A_2} fosse inferiore, anche P_{stagn} scenderebbe.

A3

Vortice Gaussiano: $\quad u_\theta = \frac{\beta}{2\pi r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)$

Il moto è permanente

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow$ il moto è incomprimibile

Nella regione interna $u_\theta \approx Ar$ la particella ruota ma non si deforma $\rightarrow$

$\longrightarrow$ $\vec{E}$ e' identicamente nulla (mentre $\vec{\Omega}$ no!)

$\lim_{r\to 0} e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} = 1$ Sviluppo di Taylor:

$$e^{-\frac{r^2}{\sigma}} = 1 + r\left[-\frac{2r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right]_{r=0} + \frac{r^2}{2}\left[-\frac{2}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} - \frac{4r^2}{\sigma^4}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right]_{r=0} + \dots$$

$$= 1 - \frac{r^2}{\sigma^2} + \mathcal{O}(r^4)$$

Quindi per r molto piccolo: $u_\theta \approx \frac{\beta}{2\pi r}\left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\beta}{2\pi\sigma^2} r = A r$

Per r grande: $\lim_{r\to\infty} e^{-\frac{r^2}{\sigma}} = 0 \rightarrow u_\theta \approx \frac{\beta}{2\pi r} = \frac{B}{r}$

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\times\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\,\vec{e}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\beta}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)\right)\vec{e}_z = \frac{\beta}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\zeta} = \left(0,\ 0,\ \frac{\beta}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)$$

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{u}\cdot d\vec{l} = \int_A \vec{\zeta}\cdot\vec{n}\, dA \qquad \vec{n} = \vec{e}_z$$

La curva $\mathcal{C}$ e' un cerchio di raggio r arbitrario, $dl = r\,d\theta$, $dA = r\,dr\,d\theta$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} u_\theta\, r\, d\theta = \beta\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)$$

$$\Gamma = \int_0^r\int_0^{2\pi} \zeta_z\, \bar{r}\, d\bar{r}\, d\theta = \beta\int_0^{r} e^{-s}\, ds = -\beta\left[e^{-s}\right]_0^{\frac{r^2}{\sigma^2}} = \beta\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right)$$

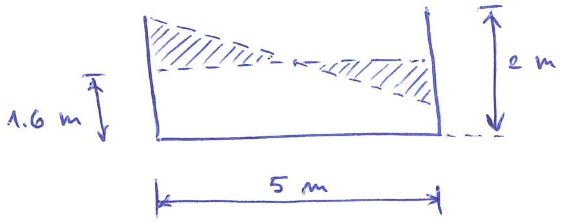
con $s = \frac{\bar{r}^2}{\sigma^2}$, $\frac{2\bar{r}}{\sigma^2}d\bar{r} = ds$

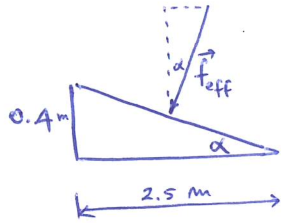
Il teorema di Stokes e' quindi verificato.

$$\lim_{r\to 0}\Gamma = \lim_{r\to 0}\beta\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right) = 0 \qquad \lim_{r\to\infty}\Gamma = \lim_{r\to\infty}\beta\left(1 - e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right) = \beta$$

Siccome c'e' solo una velocita' azimuthale, le linee di corrente sono cerchi concentrici (centro nell'origine), i.e. $r = \text{cost}$.

A4





Alla max accelerazione ammessa il pelo libero si inclina come in figura.

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{0.4}{2.5} = \tan^{-1}\frac{a}{g}$$

$$a = \frac{0.4}{2.5}\, g = 1.57 \ \frac{m}{s^2}$$

(acc. o dec. max consentita)

A5

$$\rho_{H_2O}\, g (h_w + h_m) = \rho_{Hg}\, g\, (2 h_m)$$

$$\frac{h_w + h_m}{h_m} = 2\,\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} \qquad \frac{h_w}{h_m} = 2 \times 13.6 - 1 = 26.2$$

A6

$$R_{left} = \rho_{left}\, g\, R \cdot A = \rho_{left}\, g\, R^3 \pi = 1.664 \times 10^6 \ N$$

$$R_{right} = \rho_{right}\, g\, (h+R) \cdot A = \rho_{right} \times 2.219 \times 10^3 \ N$$

con $h = 5$ m e lavorando con P_{gage}

La distanza dei centri di spinta dal centro e sono:

$$d_{left} = \frac{I_{xx,c}}{y_{c_{left}} A} = \frac{\pi R^4/4}{\pi R^3} = 0.75 \ m \qquad d_{right} = \frac{I_{xx,c}}{y_{c_{right}} A} = \frac{\pi R^4/4}{(h+R)\pi R^2} = 0.28125 \ m$$

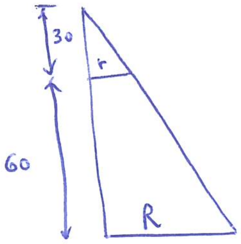
Se il sistema e' in equilibrio i momenti si bilanciano:

$$M_{left} = R_{left} \cdot d_{left} = 1.248 \times 10^6 \ [N\,m]$$

$$M_{right} = R_{right} \cdot d_{right} = 0.624 \times 10^3\, \rho_{right} \ [N\,m]$$

$$\rightarrow \rho_{right} = 2000 \ \frac{kg}{m^3}$$

A7



$$V_{\text{cono grande}} = \frac{\pi R^2 \times 90}{3} = 30\,\pi R^2$$

$$V_{\text{cono piccolo}} = \frac{\pi r^2 \times 30}{3} = 10\,\pi r^2$$

$$V_{\text{tronco di cono}} = 10\,\pi\left(3R^2 - r^2\right)$$ (volume parte immersa)

Similitudine tra triangoli : $\frac{90}{R} = \frac{30}{r} \rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{3}$

Bilancio forze verticali : $m_{\text{cono}} \cdot \cancel{g} = \underbrace{V_{\text{tronco cono}}\, \rho_{\text{glicerina}}\, \cancel{g}}_{\text{forza Archimede}}$

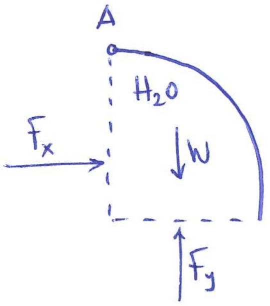
$$\rho_{\text{cono}}\, 30\, \cancel{\pi}\, \cancel{R^2} = \rho_{\text{glicerina}}\, 10\, \cancel{\pi}\left(3\cancel{R^2} - \frac{\cancel{R^2}}{9}\right)$$

$$3\,\rho_{\text{cono}} = 1.0\,\rho_{\text{glicerina}} \cdot \frac{26}{9} \qquad \rho_{\text{cono}} = \frac{26}{27}\,\rho_{\text{glicerina}}$$

$$SG_{\text{cono}} = 0.963 \times 1.26 = 1.213$$

A8

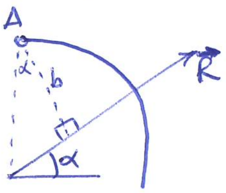
Left



$$F_x = \rho_{H_2O}\, g\left(h_1 + \frac{R}{2}\right) R = 55125\ \text{N}$$

$$F_y = \rho_{H_2O}\, g\,(h_1 + R)\, R = 66150\ \text{N}$$

$$W = \rho_{H_2O}\, g\, \frac{\pi R^2}{4} = 17318\ \text{N}$$



$R_x = F_x = 55$[illegible]5 N

$$R_y = F_y - W = 48832\ \text{N}$$

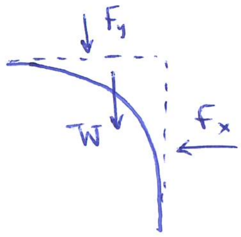
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 73643\ \text{N}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = 41.54^\circ$$

$$b = 1.50 \times \cos\alpha = 1.123\ \text{m}$$

$$M_A = R\, b = 82687\ \text{Nm}$$

Right



$$F_x = \left[P_{\text{gage air}} + \rho_{\text{oil}}\, g\left(h_2 - \frac{R}{2}\right)\right] R \cdot 1$$

$$= \left[P_{\text{gage air}} + 10000\right] 1.50$$

$$F_y = \left[P_{\text{gage air}} + \rho_{\text{oil}}\, g\,(h_2 - R)\right] R \cdot 1$$

$$= \left[P_{\text{gage air}} + 4000\right] 1.5$$

$$W = \rho_{\text{oil}}\, g\left[R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right] = 37894.4\ \text{N}$$

$$R_y = F_y + W = P_{\text{gage air}} \cdot 1.5 + 43894.4\ \text{N}$$

$$R_x = F_x = P_{\text{gage air}} \cdot 1.5 + 15000\ \text{N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = f(P_{\text{gage air}}) \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = g(P_{\text{gage air}})$$

$$b = 1.50 \times \cos\beta$$

L'uguaglianza dei momenti (rispetto al polo A) è una eq. non-lineare funzione di $P_{\text{gage air}}$.

Dopo qualche tentativo si trova $P_{\text{gage air}} = 26750$ Pa

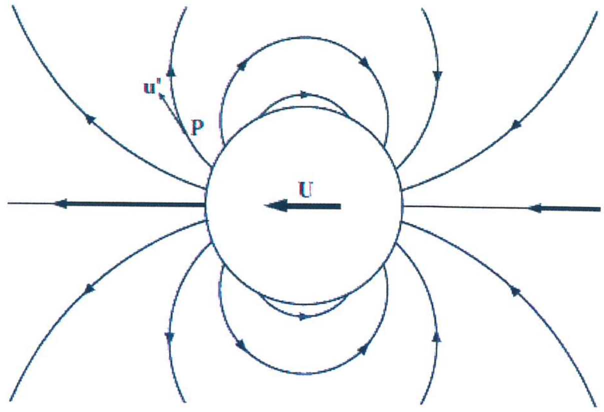
COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 9 aprile 2018 – fila B

Esercizio 1. Dell'aria è racchiusa in un cilindro rigido, dotato di un pistone che può scorrere. Un manometro indica una pressione iniziale dell'aria pari a 172 kPa. Si determini la lettura del manometro quando il pistone viene spostato comprimendo l'aria e riducendo il volume ad un terzo del volume iniziale, assumendo un processo isotermo. Si ripeta l'esercizio assumendo un processo isentropico. Si stimi nei due casi (sia per la trasformazione isoterma che per l'isentropica) il coefficiente di comprimibilità κ.

Esercizio 2. Il cilindro di figura (supposto infinitamente lungo nella direzione dell'asse, di modo che il moto possa essere considerato bidimensionale) si muove a velocità costante $\mathbf{U}$ in un fluido inizialmente a riposo e, così facendo, mette in moto il fluido. Il moto del fluido quindi non è permanente. Le linee di corrente del fluido in un dato istante temporale sono disegnate in figura e le componenti del campo di velocità in quell'istante possono scriversi:

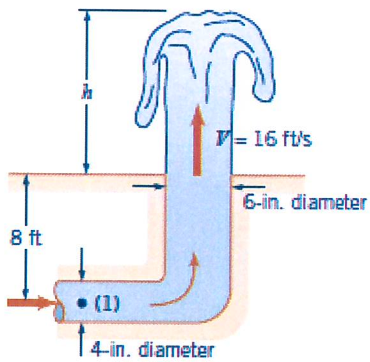
$$u = A\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad v = A\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

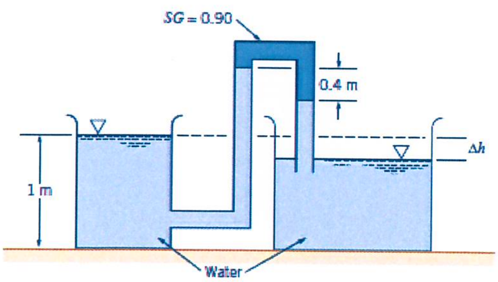
con A una costante positiva. Si determini l'equazione delle linee di corrente.



Esercizio 3. Dell'acqua fuoriesce da un condotto come un getto libero e arriva ad un'altezza h come mostrato in figura. Il moto è stazionario, incomprimibile e con attriti trascurabili. Si determini l'altezza h, la velocità media e la pressione relativa nella sezione (1), usando unità SI.

NB. 1 ft = 30.48 cm; 1 in. = 2.54 cm.



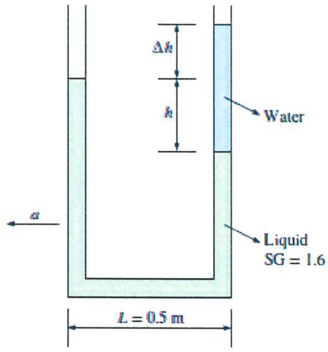


Esercizio 4. Determinare Δh per il sistema di figura.

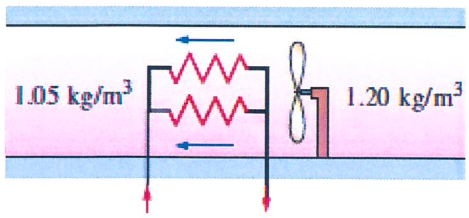
Esercizio 5. Si vuole generare potenza elettrica installando un sistema turbina-alternatore in un sito 110 m sotto la superficie libera di un grande bacino d'acqua che può fornire una portata di 900 kg/s in modo permanente. Se la potenza meccanica in uscita dalla turbina è di 800 kW e la potenza elettrica generata è di

750 kW si determini l'efficienza della turbina e l'efficienza combinata del sistema turbina-alternatore. Si trascurino le perdite di carico nei condotti.

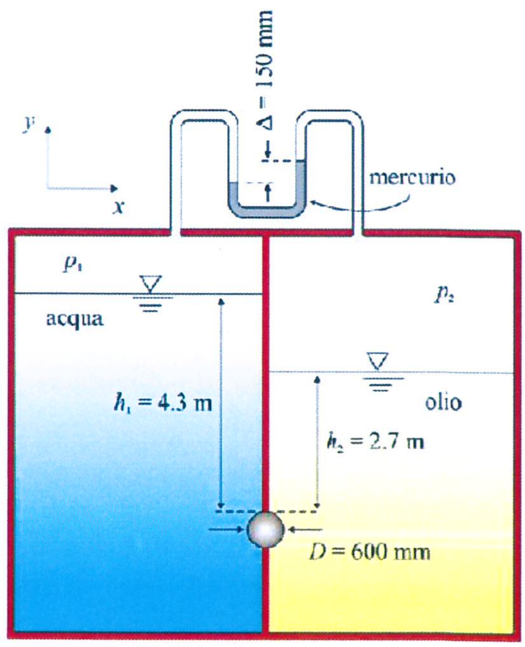
Esercizio 6. Il tubo ad U di figura viene accelerato verso sinistra. Se la differenza tra le altezze delle superfici libere è uguale a Δh = 30 cm e h = 0.4 m, quanto vale l'accelerazione a?



Esercizio 7. Un asciugacapelli è essenzialmente un condotto con delle resistenze elettriche che scaldano l'aria spinta da un ventilatore. Se la densità dell'aria è 1.20 kg/m^3 in ingresso e 1.05 kg/m^3 in uscita, si valuti l'aumento percentuale della velocità dell'aria che attraversa l'asciugacapelli. Si calcoli poi il coefficiente di pressione, definito come $C_P = \frac{P_i - P_u}{\frac{1}{2}\rho_i v_i^2}$, con i pedici "i" ed "u" che significano, rispettivamente, "ingresso" ed "uscita".



Esercizio 8. Una sfera di legno separa i due contenitori in figura. I due contenitori sono pressurizzati e la differenza di pressione è di 150 mm di mercurio (peso specifico relativo del mercurio pari a 13.6). Nel contenitore a sinistra c'è acqua e nel contenitore a destra c'è olio con peso specifico relativo all'acqua pari a 0.8. Calcolare la forza risultante che agisce sulla sfera di legno (modulo, direzione e verso).



B1.

$$p_i = 1.72 \times 10^5 \ \text{Pa}$$

$$V_f = \frac{1}{3} V_i \qquad T = \text{cost.} \rightarrow pV = \text{cost} \rightarrow p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right) = 5.16 \times 10^5 \ \text{Pa}$$

oppure

$$S = \text{cost.} \rightarrow pV^\gamma = \text{cost}$$

assumendo l'aria un gas perfetto

$$\rightarrow p_f = p_i \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^\gamma = 8.01 \times 10^5 \ \text{Pa}$$

$$K_T = \rho \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = -V \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_T = +p$$

$$K_S = \rho \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S = -V \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_S = +\gamma p$$

$$K_T \approx -\bar{V} \left.\frac{p_f - p_i}{V_f - V_i}\right|_T = \frac{V_i + V_f}{2} \frac{p_f - p_i}{V_i - V_f} = \frac{3V_f + V_f}{2(3V_f - V_f)} (p_f - p_i) = 3.44 \times 10^5 \ \text{Pa}$$

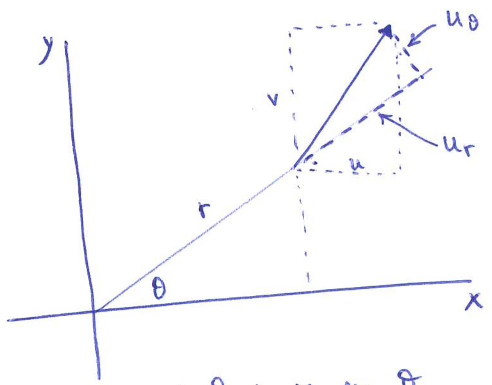
$$\left(= \frac{p_f + p_i}{2} = \bar{p}\right)$$

$$K_S \approx -\bar{V} \left.\frac{p_f - p_i}{V_f - V_i}\right|_T = p_f - p_i = 6.29 \times 10^5 \ \text{Pa}$$

$$\left(\approx \gamma \frac{p_f + p_i}{2} = \gamma \bar{p} = 6.81 \times 10^5 \ \text{Pa}\right)$$

B2.

$$u = A \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad v = A \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$



$$u_r = u \cos\theta + v \sin\theta$$

$$u_\theta = v \cos\theta - u \sin\theta$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \sin\theta$$

Si lavora in coordinate cilindriche:

$$u_r = A \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r^2} \cos\theta + A \frac{-2r^2 \sin\theta \cos\theta}{r^4} \sin\theta$$

$$= \frac{A}{r^2}\left(-\sin^2\theta \cos\theta - \cos^3\theta\right) = -\frac{A \cos\theta}{r^2}$$

$$u_\theta = A \frac{-2r^2 \sin\theta \cos^2\theta}{r^4} - A \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r^2} \sin\theta =$$

$$= \frac{A}{r^2}\left(-\sin\theta \cos^2\theta - \sin^3\theta\right) = -\frac{A \sin\theta}{r^2}$$

Linee di corrente: $\frac{r\,d\theta}{u_\theta} = \frac{dr}{u_r} \rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{dr}{r}$ $\qquad \sin\theta = z$, $\cos\theta \, d\theta = dz$

$$\rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln z = \ln r + \text{cost}$$

$$\rightarrow \boxed{\sin\theta = K r}$$ con K costante

B3. Bernoulli tra (1) e il punto più alto del getto:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \cancel{p_2}^{\,p_{atm}} + \rho g (z+h)$$

$$v_1 = v_{getto} \frac{\pi D^2}{4} \frac{4}{\pi d^2} = 16 \cdot \frac{6^2}{4^2} \cdot 0.3048 = 10.97 \ \frac{m}{s}$$ (dalla conservazione della massa)

$$p_{gage\,1} = \rho g (z+h) - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = 9810(8+h) \times 0.3048 - \frac{1}{2} 1000 \times 10.97^2 =$$
$$2990.09\,h - 36280.5$$ (h in piedi)

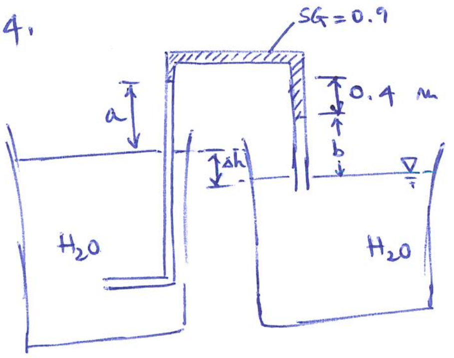
Inoltre, usando Bernoulli tra (1) e lo sbocco del getto in atmosfera:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho V_{sbocco}^2 + \rho g z$$

$$p_{1\,gage} = \frac{1}{2}\rho\left(16^2 \times 0.3048^2 - 10.97^2\right) + 9810 \times 8 \times 0.3048 = -24388.9 \ Pa$$

Quindi: $$h = \frac{36280.5 - 24388.9}{2990.09} = 4 \ ft = 1.21 \ m$$

B4.



$$\cancel{p_{atm}} - \rho_{H_2O}\, g\, a + 0.9\, \rho_{H_2O}\, g\,(0.4) + \rho_{H_2O}\, g\, b = \cancel{p_{atm}}$$

con $a + \Delta h = b + (0.4) \rightarrow \Delta h = (b-a) + 0.4$

Dall' eq. della statica: $a = 0.36 + b$

$\rightarrow (b-a) = -0.36 \Rightarrow \boxed{\Delta h = 0.04 \ m}$

B5.

$\Delta h = 110 \ m$

$\dot{m} = 900 \ kg/s$ $\qquad \dot{W}_{shaft} = 800 \ kW = \eta \,\Delta \dot{E}_{mech}$ $\qquad \dot{W}_{elet} = 750 \ kW$

$$\Delta \dot{E}_{mech} = \frac{800 \ KW}{\eta_{turb}} = \dot{m}\, g\, \Delta h \qquad \eta_{alternatore} = \frac{\dot{W}_{elet}}{\dot{W}_{shaft}} = \frac{7.5}{8} = 0.9375$$

$$= 900 \cdot g \cdot 110 = 971 \ kW$$

$$\rightarrow \eta_{turb} = \frac{800}{971} = 0.8239 \qquad \eta_{sistema} = 0.7724$$

B6. Rimpiazzo la massa d' acqua con una massa di liquido (SG = 1.6) di stesso peso $\rho_{H_2O}(\Delta h + h) = 1.6\, \rho_{H_2O}(t+h) \rightarrow t = 0.0375 \ m$ (altezza equivalente di liquido denso. $\rightarrow \frac{a}{g} = \frac{t}{L} \rightarrow a = \frac{t}{L} g = 0.74 \ \frac{m}{s^2}$

B7

$\rho_i = 1.20 \ \frac{kg}{m^3}$

$\rho_u = 1.05 \ \frac{kg}{m^3}$

Conservazione della massa:

$\rho_u v_u \cancel{A} = \rho_i v_i \cancel{A} \rightarrow v_u = v_i \frac{\rho_i}{\rho_u}$

Aumento percentuale di velocità: $\frac{v_u - v_i}{v_i} = \frac{\rho_i}{\rho_u} - 1 = 14.29 \ \%$

Bernoulli in prima approx: $p_i - p_u = \frac{1}{2}\rho_u v_u^2 - \frac{1}{2}\rho_i v_i^2 = \frac{1}{2}\rho_u v_u (v_u - v_i)$

$$C_p = \frac{p_i - p_u}{\frac{1}{2}\rho_i v_i^2} = \frac{\frac{1}{2}\rho_u v_u (v_u - v_i)}{\frac{1}{2}\rho_i v_i^2} = \frac{\rho_u v_u (v_u - v_i)}{\rho_u v_u v_i} = \frac{v_u - v_i}{v_i} = 0.143$$

... in realtà si dovrebbe tener conto del carico del ventilatore e delle perdite ...

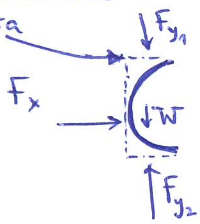
B8

$p_1 = p_2 + \rho_{Hg}\, g\, \Delta$ con $\Delta = 150 \text{ mm} = 0.15 \text{ m}$

Left

$$F_x = \left(p_1 + \rho_{H_2O}\, g \left(h_1 + \frac{D}{2}\right)\right)\frac{\pi D^2}{4} \quad \text{(spinta verso ~~sinistra~~ destra)}$$

cilindro che racchiude la semisfera



$$F_{y_1} = \left(p_1 + \rho_{H_2O}\, g\, h_1\right)\frac{\pi D^2}{8}$$

$$F_{y_2} = \left(p_1 + \rho_{H_2O}\, g\, (h_1 + D)\right)\frac{\pi D^2}{8}$$

$$W = \rho_{H_2O}\, g \left(\frac{\pi D^2}{4}\frac{D}{2} - \frac{4}{6}\pi\frac{D^3}{8}\right) = \rho_{H_2O}\, g\, \frac{1}{24}\pi D^3$$

$F_y = F_{y_2} - F_{y_1} - W$ (verso l'alto) $= \frac{1}{12}\rho_{H_2O}\, g\, (\pi D^3)$

che è proprio la forza di Archimede sulla semisfera!

Right:

$$F_x = \left[p_2 + \rho_{olio}\, g \left(h_2 + \frac{D}{2}\right)\right]\frac{\pi D^2}{4} = \left[p_1 - 13.6\,\rho_{H_2O}\, g\Delta + 0.8\,\rho_{H_2O}\, g\left(h_2 + \frac{D}{2}\right)\right]\frac{\pi D^2}{4}$$

(spinta verso sinistra)

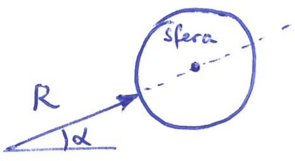
$$F_y = \frac{1}{12}\rho_{olio}\, g\, \pi D^3$$

Forza netta sulla sfera

$$F_x = \left[\rho_{H_2O}\, g\left(h_1 + \frac{D}{2}\right) + 13.6\,\rho_{H_2O}\, g\,\Delta - 0.8\,\rho_{H_2O}\, g\left(h_2 + \frac{D}{2}\right)\right]\frac{\pi D^2}{4} \quad \text{(verso destra)}$$

$$= \rho_{H_2O}\, g\, \frac{\pi D^2}{4}\left(h_1 + \frac{D}{2} + 13.6\,\Delta - 0.8\left(h_2 + \frac{D}{2}\right)\right) = 11761 \text{ N}$$

$$F_y = \frac{\pi D^3}{12} g \left(\rho_{olio} + \rho_{H_2O}\right) = \frac{1.8 \times 9810}{12}\pi (0.6)^3 = 998 \text{ N}$$



$R = 11803$ N

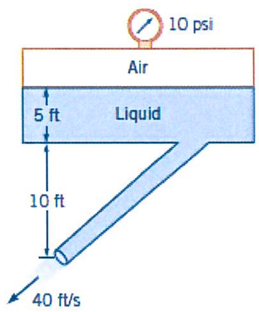
$\alpha = \tan^{-1}\frac{998}{11761} = 4.85°$

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 9 aprile 2018 – fila C

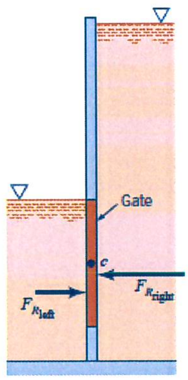
Esercizio 1. Un volume di 30 l di alcool viene compresso in maniera isoterma da 1 a 500 atm e il suo volume si riduce a 28.8 l. Si stimi il coefficiente di comprimibilità isoterma $\alpha = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$ dell'alcool, espresso in Pa^{-1}.

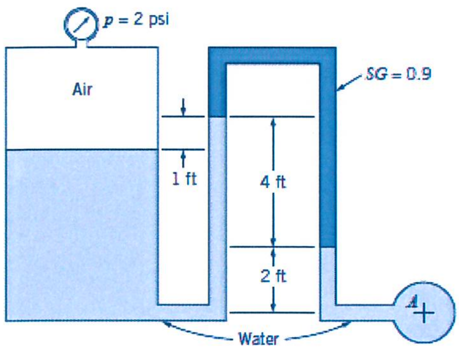
Esercizio 2. Un liquido non-viscoso ed incomprimibile scorre in modo stazionario dal serbatoio in pressione di figura (con P_{gage} = 10 psi), e fuoriesce con una velocità di 40 ft/s. Si determini la densità specifica (SG) del liquido nel serbatoio.

NB. 1 ft = 30.48 cm; 1 in. = 2.54 cm;
1 psi = 6.895 kPa.



Esercizio 3. Uno sportello di forma quadrata (lato dello sportello L = 3 m) separa due regioni con fluidi di diversa densità (ρ_{left} = 2000 kg/m^3 a sinistra, ρ_{right} a destra). Lo sportello può ruotare attorno ad un asse (perpendicolare al foglio) che passa per il suo centro c. Si determini ρ_{right}.





Esercizio 4. Si determini la pressione assoluta dell'acqua nel condotto A (in pascal) quando la pressione relativa dell'aria nel serbatoio in pressione è pari a 2 psi.

Esercizio 5. In un impianto idroelettrico, l'acqua fluisce da una altezza di 122 m verso una turbina che genera elettricità tramite l'accoppiamento con un alternatore. L'efficienza combinata del sistema turbina-alternatore è 85%. Si determini la portata massica minima necessaria a generare 100 kW elettrici.

Esercizio 6. I due vortici elementari visti a lezioni possono servire a modellare un vortice realistico in cui la zona centrale (*"core"* del vortice) si comporta in modo simile alla rotazione di corpo rigido e la parte esterna è praticamente irrotazionale. Un modello di tale vortice realistico è il cosiddetto vortice di Rankine, per il quale il vettore velocità ha solo componente azimutale, $\boldsymbol{u} = u_\theta \boldsymbol{e}_\theta$, e si può scrivere:

$$u_\theta = \begin{cases} \left[\dfrac{\beta}{2\pi\sigma^2}\right] r & per\, r \leq \sigma \\ \dfrac{\beta}{2\pi r} & per\, r > \sigma \end{cases}$$

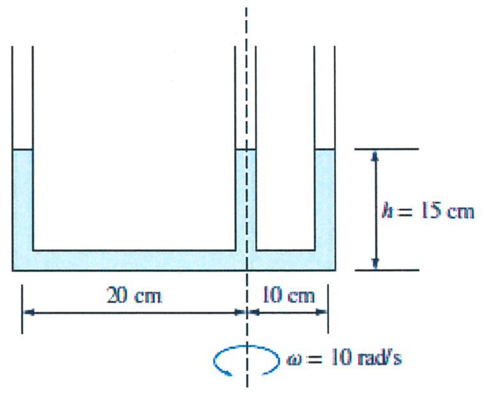
dove β è una costante legata alla circolazione, e σ è una distanza radiale (misurata dal centro del vortice) che separa il vortice in due parti, una parte centrale descritta da un comportamento di rotazione di corpo solido ($u_\theta = A\, r$) ed una parte lontana dal centro con vorticità nulla ($u_\theta = B/r$). Tale moto è stazionario oppure no? Comprimibile oppure no? T Quanto vale il tensore velocità di deformazione **E** nella regione interna (per $r < \sigma$)? Trovare le tre componenti della vorticità per il vortice di Rankine, sapendo che

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z.$$

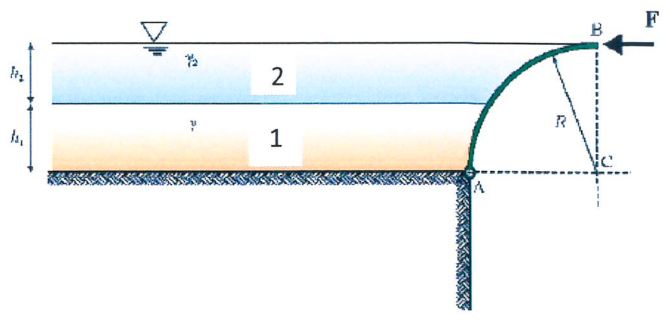
Verificare il teorema di Stokes e trovare la circolazione Γ. Fare un grafico della vorticità e della circolazione in funzione della coordinata radiale r. Si scriva infine l'equazione delle linee di corrente.

NB. La divergenza della velocità in coordinate cilindriche si scrive: $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$.

Esercizio 7. Nel sistema a tre tubi di figura, l'altezza di fluido in ciascuno dei tre tubi quando il sistema è a riposo è pari a 15 cm. Si determini l'altezza della colonna di fluido nei tre tubi quando il sistema ruota attorno all'asse tratteggiato con velocità angolare ω = 10 rad/s. Per quale velocità di rotazione il tubo centrale sarà completamente vuoto?



Esercizio 8. Nel sistema in figura la paratoia cilindrica, di profondità L = 2 m e di raggio R = 4 m, avente asse di simmetria cilindrica di centro C, è incernierata in A. I due liquidi a sinistra (indicati con 1 e 2) hanno peso specifico γ_1 = 11 000 N/m^3 e γ_2 = 10 000 N/m^3 e i tiranti sono pari a h_1 = 1 m e h_2 = 3 m. Calcolare la spinta complessiva esercitata dai liquidi (modulo, direzione e verso) e il modulo della forza orizzontale **F** che è necessario applicare in B per mantenere la paratoia in posizione. Trascurare il peso della paratoia.



C1 $V_0 = 30\ l \longrightarrow V_f = 28.8\ l$ $\quad T = \text{cost.}$

$P_0 = 1\ \text{atm} \longrightarrow P_f = 500\ \text{atm}$ $\quad 1\ \text{atm} = 101300\ \text{Pa}$

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\bigg|_T \approx -\frac{1}{\bar{V}}\frac{V_f - V_0}{P_f - P_0} = \frac{2}{V_f + V_0}\frac{V_0 - V_f}{P_f - P_0} =$$

$$= \frac{2 \times 1.2}{58.8} \cdot \frac{1}{499 \times 101300} = 8.075 \times 10^{-10}\ [\text{Pa}^{-1}]$$

C2 Bernoulli tra pelo libero (a velocità nulla) e sbocco del liquido:

$$P_{air\ gage} + \rho g z = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\rho = \frac{P_{air\ gage}}{\frac{v^2}{2} - g z} = \frac{6.895 \times 10^4\ \text{Pa}}{\frac{(40 \times 30.48)^2}{2} \times 10^{-4} - 9.81 \times 15 \times 0.3048} = 2.34 \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

C3 $R_{left} = \rho_{left}\, g\, \frac{L}{2} L^2 = 264870\ \text{N}$

$b_{left} = \frac{2}{3}L - \frac{L}{2} = \frac{1}{6}L = 0.5\ \text{m}$

(braccio rispetto al centro dello sportello)

$R_{right} = \rho_{right}\, g \left(h + \frac{L}{2}\right) L^2$ $\Big\{$ con $h = 5$ m e lavorando con P_{gage}

$\Big\{ R_{right_1} = R_{\square} = \rho_{right}\, g\, h\, L^2$ con braccio nullo rispetto a c

$R_{right_2} = R_{\triangle} = \rho_{right}\, g\, \frac{L}{2} L^2$

$b_{right_2} = \frac{1}{6}L = 0.5\ \text{m}$

Quindi $\rho_{right} = \rho_{left} = 2000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ per l'equilibrio.

Anche se questo sembra strano, la cosa può essere confermata cercando il momento di R_{right} "totale". Infatti il braccio destro rispetto al centro dello sportello è:

$$d_{right} = \frac{I_{xx,c}}{y_{c_{right}} A} = \frac{L^4/12}{\left(h + \frac{L}{2}\right) L^2} = \frac{L^2}{12\left(h + \frac{L}{2}\right)}$$

$M_{left} = R_{left}\, d_{left} = 132435\ \text{Nm}$

$$M_{right} = \underbrace{\rho_{right}\, g \cancel{\left(h + \frac{L}{2}\right)} L^2 \cdot \frac{L^2}{12\cancel{\left(h + \frac{L}{2}\right)}} = \rho_{right}\, g\, \frac{L^4}{12}}_{\text{indip. da } h!}$$

$\longrightarrow$ all'equilibrio $\rho_{right} = 2000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

C4.

$$P_A = P_{air} - \gamma \times 1 \times 0.3048 + 0.9\gamma \times 4 \times 0.3048 + \gamma \times 2 \times 0.3048$$

con $\gamma = 9810 \frac{N}{m^3}$ e $P_{air} = P_{atm} + 2 \times 6.895 \times 10^3$ Pa

$= 1.151 \times 10^5$ Pa

$$P_A = 1.151 \times 10^5 + 9810 \times 0.3048 + 9810 \times 3.6 \times 0.3048 = 1.289 \times 10^5 \text{ Pa}$$

C5.

$\Delta h = 122$ m $\qquad \Delta \dot{E}_{mech} = \dot{m}\, g\, \Delta h$

$$\eta_{turb} \cdot \eta_{alt} = 0.85 = \left(\frac{\dot{m}\, g\, \Delta h}{10^5}\right)^{-1} \qquad \dot{m} = \frac{10^5}{0.85 \times 9.81 \times 122} = 98.3 \text{ kg/s}$$

C6.

$$u_\theta = \begin{cases} \dfrac{\beta}{2\pi\sigma^2}\, r & \text{per } r \le \sigma \\ \dfrac{\beta}{2\pi r} & \text{per } r > \sigma \end{cases}$$

Il moto è stazionario.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow$ incomprimibile

Nella regione interna $u_\theta = Ar$; la particella ruota ma non si deforma $\longrightarrow \vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\, \vec{e}_z = \begin{cases} \vec{e}_z \dfrac{\beta}{\pi\sigma^2} & \text{per } r \le \sigma \\ \vec{e}_z\, 0 & \text{per } r > \sigma \end{cases}$$

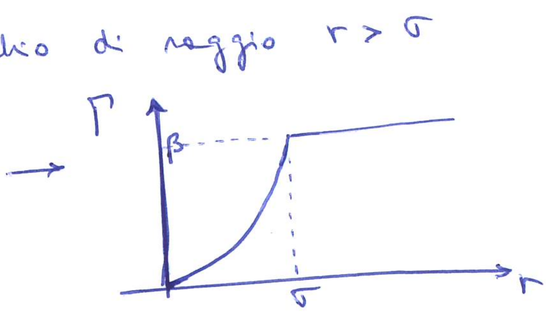
$$\vec{\zeta} \cdot \vec{e}_r = \vec{\zeta} \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{\ell}$ $\qquad \mathcal{C}$ è un cerchio di raggio $r \le \sigma$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\beta}{2\pi\sigma^2} r^2\, d\theta = \beta \frac{r^2}{\sigma^2}$$

$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{\ell}$ $\qquad$ con $\mathcal{C}$ un cerchio di raggio $r > \sigma$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\beta}{2\pi r} r\, d\theta = \beta \rightarrow$$



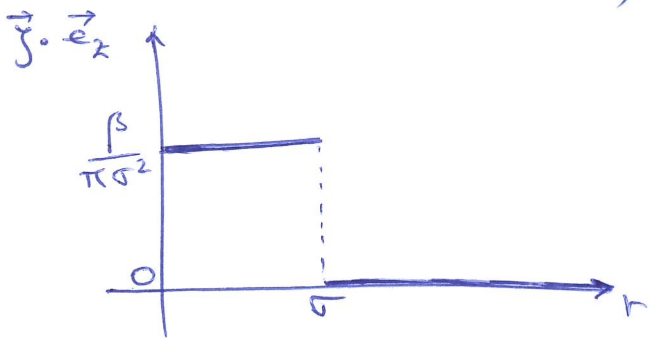
$$\Gamma = \int_A \vec{\zeta} \cdot \vec{e}_z\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{\beta}{\pi\sigma^2}\, r\, dr\, d\theta \qquad \text{quando } r \le \sigma$$

$= \beta \frac{r^2}{\sigma^2}$ $\qquad$ (e questo conferma il teorema di Stokes per $r \le \sigma$)

$$\Gamma = \int_A \vec{\zeta} \cdot \vec{e}_z \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^r \phi \cdot dA \rightarrow \frac{d\Gamma}{dA} = 0 \rightarrow \Gamma = \text{cost}$$

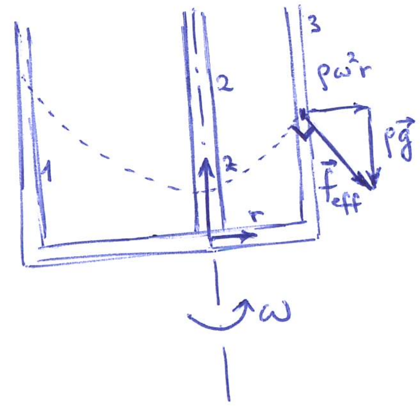
$\rightarrow \Gamma = \beta$ per continuità quando $r = \sigma$

(e anche questo conferma il teorema di Stokes)



Siccome c'è solo u_θ le linee di corrente sono circolari e quindi l'eq. delle linee di corrente è: $r = \text{cost.}$

C7.



$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$\rightarrow dp = \rho\omega^2 r\, dr - \rho g\, dz$

sulla sup. libera $p = p_{atm} = \text{cost.}$

$$dp = 0 \rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{cost.}$$ (eq. sup. libera, tratteggiata in figura)

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_2$$ $z_2 =$ quota del liquido nel ramo 2

$$z_1 = \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} + z_2 = \frac{10^2\,(0.2)^2}{2 \cdot 9.81} + z_2 = 0.2039 + z_2$$

$$z_3 = \frac{\omega^2 r_3^2}{2g} + z_2 = \frac{10^2\,(0.1)^2}{2 \cdot 9.81} + z_2 = 0.0510 + z_2$$

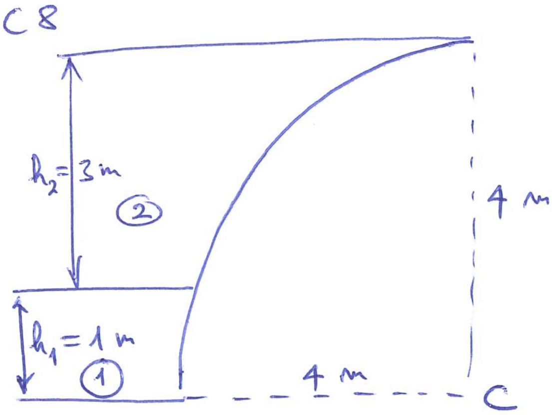
Per conservazione della massa: $z_1 + z_2 + z_3 = 3 \times 0.15 = 0.45$ m

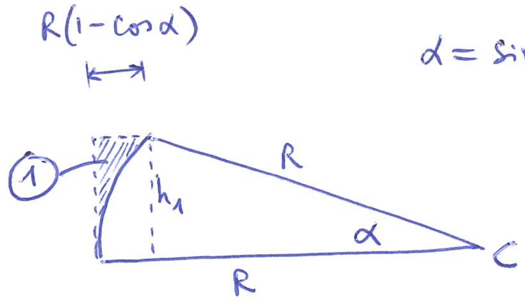
$$0.45 = 3 z_2 + 0.2039 + 0.0510 \rightarrow z_2 = 0.065 \text{ m} = 6.5 \text{ cm}$$

La quota z_2 è uguale a zero quando:

$$\frac{\omega^2 (0.2)^2}{2 \cdot 9.81} + \frac{\omega^2\,(0.1)^2}{2 \cdot 9.81} = 0.45 \longrightarrow \omega = 13.28\ \frac{\text{rad}}{s}$$

C8

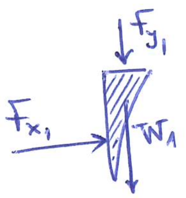




$$\alpha = \sin^{-1}\frac{h_1}{R} = 14.48^\circ$$

$$\gamma_1 = 1.1 \times 10^4 \ \frac{N}{m^3}$$

$$\gamma_2 = 10^4 \ \frac{N}{m^3}$$



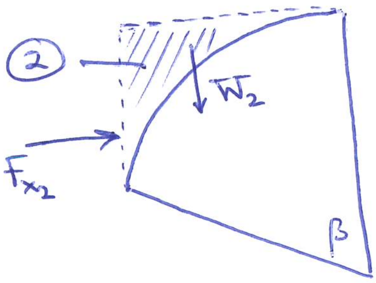
$$F_{x_1} = \gamma_2 h_2 h_1 L + \gamma_1 \frac{h_1^2}{2} L =$$

$$= 7.1 \times 10^4 \ N$$

$$F_{y_1} = \gamma_2 h_2 R(1-\cos\alpha) L =$$

$$= 0.762 \times 10^4 \ N$$

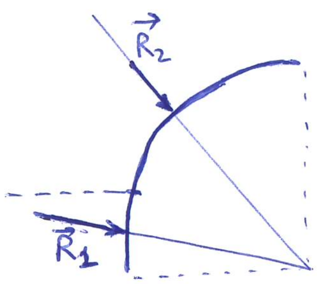
$$W_1 = \gamma_1 \left[\frac{R[1+(1-\cos\alpha)]h_1}{2} - \pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \right] L = 0.093 \times 10^4 \ N$$



$$\beta = 90^\circ - \alpha = 75.52^\circ$$

$$F_{x_2} = \gamma_2 \frac{h_2^2}{2} L = 9 \times 10^4 \ N$$

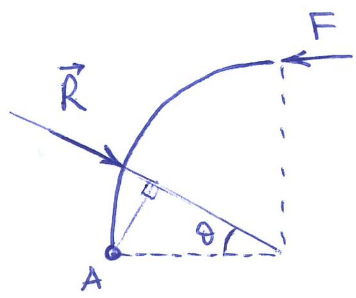
$$W_2 = \gamma_2 \left[\frac{(h_2+R)R}{2} - \pi R^2 \frac{\beta^\circ}{360^\circ} \right] L = 6.910 \times 10^4 \ N$$



$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

$$R_x = F_{x_1} + F_{x_2} = 16.1 \times 10^4 \ N$$

$$R_y = W_1 + F_{y_1} + W_2 = 7.765 \times 10^4 \ N$$



$$|\vec{R}| = 17.875 \times 10^4 \ N$$

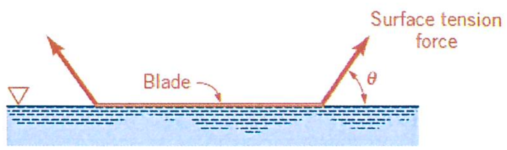
$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 25.75^\circ$$

Equilibrio dei momenti: $F \cancel{R} = |\vec{R}| \cancel{R} \sin\theta$

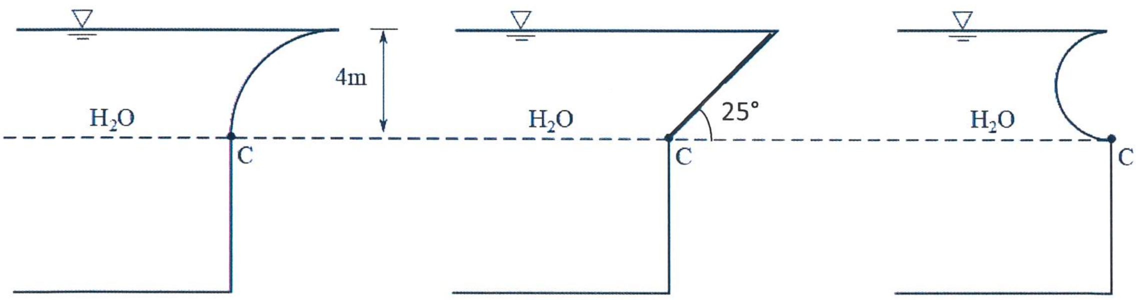
$$F = 7.765 \times 10^4 \ N$$

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 9 aprile 2018 – fila D

Esercizio 1. La forza legata alla tensione superficiale può essere sufficiente a mantenere "in galleggiamento" una lametta da rasoio delicatamente appoggiata sull'acqua. La massa della lametta è 0.64 x 10^{-3} kg e la lunghezza totale dei suoi lati è pari a 206 mm. Si assuma che la forza di tensione superficiale agisca formando un angolo θ rispetto alla superficie dell'acqua. Per σ_s = 0.073 N/m, si determini il valore di θ necessario a mantenere la lametta in equilibrio sulla superficie dell'acqua. Cosa succede se si aggiunge del tensioattivo (ad esempio sapone) all'acqua?

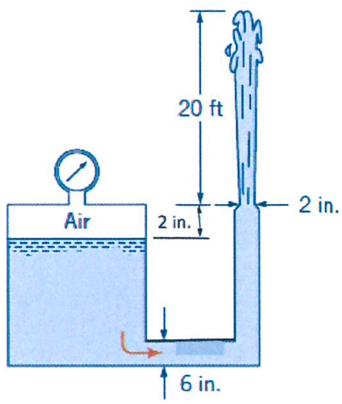


Esercizio 2. Calcolare le spinte risultanti dell'acqua (modulo, direzione e verso) e i momenti rispetto al polo C per le 3 diverse paratie di figura (che vanno da C fino al pelo libero dell'acqua), di profondità unitaria.



Esercizio 3. Dell'acqua scorre da un serbatoio in pressione attraverso un condotto di diametro 6 in. fino ad un ugello di diametro pari a 2 in. e un getto libero si forma con il fluido che sale di 20 ft sopra l'ugello, come mostrato in figura. Il moto è stazionario, incomprimibile e con attriti trascurabili. Si determini la pressione assoluta nel serbatoio e la velocità nel condotto di diametro pari a 6 in.

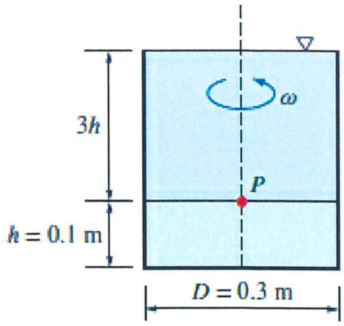
NB. 1 ft = 30.48 cm; 1 in. = 2.54 cm.



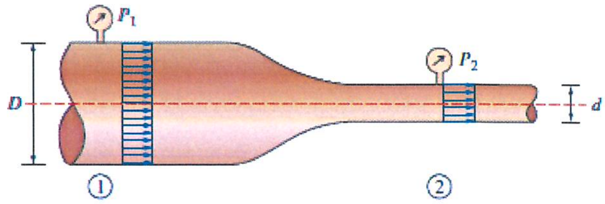
Esercizio 4. Si consideri un moto bidimensionale piano, con le componenti di velocità in forma lagrangiana date da: $\dot{x} = \frac{1}{1+t}$, $\dot{y} = 1$, per $t > -1$. Si scrivano le componenti di velocità in forma euleriana e si specifichi se il moto è permanente oppure no. Trovare e disegnare nel piano (x, y) le seguenti linee:

1. la linea di corrente (*streamline*) al tempo t = 0, che passa per il punto (1, 1);
2. la traiettoria (*pathline*) di una particella rilasciata dal punto (1, 1) al tempo t = 0;
3. la linea di fumo al tempo t = 0 (*streakline*) generata da particelle rilasciate successivamente dal punto (1, 1) nell'intervallo di tempo $-1 < t \leq 0$.

Esercizio 5. Il recipiente cilindrico di figura è riempito fino all'orlo. Il quarto inferiore contiene un fluido denso (SG > 1), mentre nel quarto superiore c'è acqua. I due fluidi non sono mescolabili e formano sempre un'interfaccia ben definita. Il recipiente viene messo in rotazione con velocità angolare ω. Si determini il valore della velocità angolare affinché il punto P sull'interfaccia (per la coordinata radiale r = 0) tocchi il fondo del recipiente, e si trovi quanta acqua fuoriesce dal recipiente a questa velocità angolare.

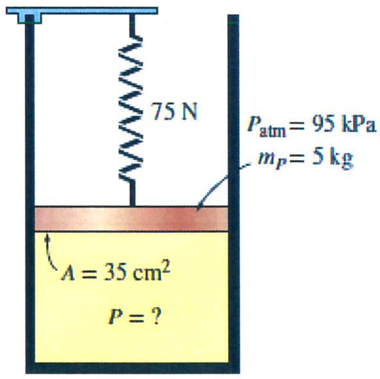


Esercizio 6. Un gas (che può essere trattato come gas perfetto) a 40 °C si muove di moto permanente nel condotto convergente di figura, con $D = 3\ d$. Si assuma che gli attriti siano trascurabili. Le misure forniscono $P_{1\,gage}$ = 2 kPa, $P_{2\,gage}$ = 1 kPa e la velocità media nella sezione 2 vale V_2 = 25 m/s. Se la temperatura dell'aria rimane costante, si mostri che la velocità media nella sezione 1 vale V_1 = 2.75 m/s e che la densità vale ρ_1 = 3.27 kg/m^3. Si assuma p_{atm} = 10^5 Pa.



Esercizio 7. Una turbina idraulica ha un carico disponibile di 50 m per una portata di 1.30 m^3/s. Il rendimento combinato del sistema turbina-alternatore è 78%. Si determini la potenza elettrica fornita dal sistema.

Esercizio 8. Dell'aria è contenuta in un sistema cilindro-pistone, con il pistone che può muoversi verticalmente senza attrito pur assicurando una perfetta tenuta. Il pistone ha una massa di 5 kg ed area di 35 cm^2. Una molla posta sopra il pistone lo comprime esercitando una forza di 75 N. Se la pressione atmosferica è 95 kPa, quanto vale la pressione assoluta dell'aria nel cilindro.

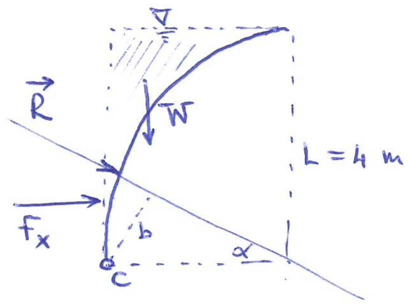


D1. $m_{lametta}\, g = \sigma_s \sin\theta \; L_{TOT}$

$0.64 \times 10^{-3} \times 9.81 = 0.073 \times 0.206 \times \sin\theta \quad \rightarrow \quad \theta = 24.68°$

Se aggiungessi tensioattivi $\sigma_s \downarrow$ e la lametta affonderebbe.

D2.



$F_x = \rho g \frac{L^2}{2} = 78480$ N

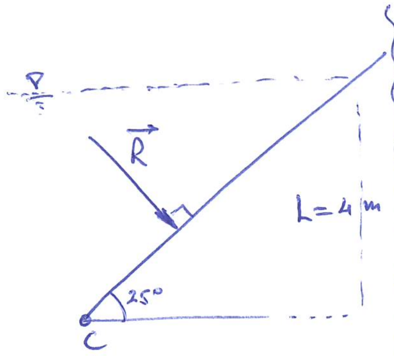
$W = \rho g \left(L^2 - \frac{\pi L^2}{4}\right) = 33684$ N

$|\vec{R}| = 85403$ N

$\alpha = \tan^{-1} \frac{W}{F_x} = 23.23°$

$b = L \sin\alpha = 1.578$ m

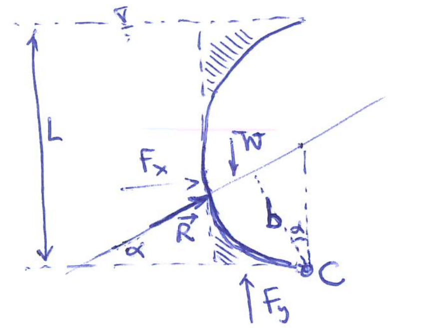
$|\vec{M}_c| = |\vec{R}|\, b = 134736$ N m



$|\vec{R}| = 78480$ N

$b = \frac{1}{3} \frac{4}{\sin 25°} = 3.155$ m

$|\vec{M}_c| = |\vec{R}|\, b = 247599$ N m



$F_x = 78480$ N

$W = \rho g \frac{L^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 16842$ N

$F_y = \rho g \frac{L^2}{2} = 78480$ N

$|\vec{R}| = 99792$ N

$\alpha = \tan^{-1} \frac{61638}{78480} = 38.15°$

$b = \frac{L}{2} \cos\alpha = 1.573$ m

$|\vec{M}_c| = |\vec{R}|\, b = 156961$ N m

D3. Bernoulli dallo sbocco dell'ugello fino alla cima del getto:

$\cancel{p_{atm}} + \frac{1}{2} \rho v_u^2 = \cancel{p_{atm}} + \rho g z \qquad v_u = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20 \times 0.3048} = 10.9 \ \frac{m}{s}$

Bernoulli dal pelo libero dell'acqua nel serbatoio fino allo sbocco dell'ugello:

$p_{gas} = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_u^2 + \rho g (2 \times 0.3048) = 1.671 \times 10^5$ Pa

Conservazione della massa: $\quad v_{condotto} \frac{\pi D^2}{4} = v_u \frac{\pi d^2}{4}$

$$v_{condotto} = v_u \frac{d^2}{D^2} = 1.21 \ \frac{m}{s}$$

D4.

Linea di corrente $\dfrac{dx}{u} = \dfrac{dy}{v}$, ma prima si deve trovare la forma euleriana delle componenti del campo di velocità.

$$dx = \frac{dt}{1+t} \quad \rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} d\bar{x} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{t}}{1+\bar{t}}$$

$$x - x_0 = \ln \frac{1+t}{1+t_0} \qquad \frac{1+t}{1+t_0} = e^{x-x_0}$$

$$dy = dt \quad \rightarrow \quad \int_{y_0}^{y} d\bar{y} = \int_{t_0}^{t} d\bar{t}$$

$$y - y_0 = t - t_0$$

EQ. TRAIETTORIA GENERICA:

$$\frac{y-y_0}{1+t_0} = e^{x-x_0} - 1$$

$$\rightarrow \boxed{u = \frac{e^{x_0 - x}}{1+t_0}}, \quad \boxed{v = 1}$$ $\Rightarrow$ il campo di moto è stazionario!

1) Per la linea di corrente che passa in $(1,1)$ a $t=0$ si ha:

$$u = e^{1-x} \qquad \frac{dx}{e^{1-x}} = dy \qquad \boxed{y = e^{x-1}} + \cancel{A}$$
$$v = 1$$

perché la linea passa per $(1,1)$

2) La traiettoria di una particella rilasciata da $(1,1)$ a $t=0$ si trova da:

$$\frac{dx}{e^{1-x}} = dt \quad \rightarrow \quad t = e^{x-1} - 1 \quad \rightarrow \quad t+1 = e^{x-1}$$

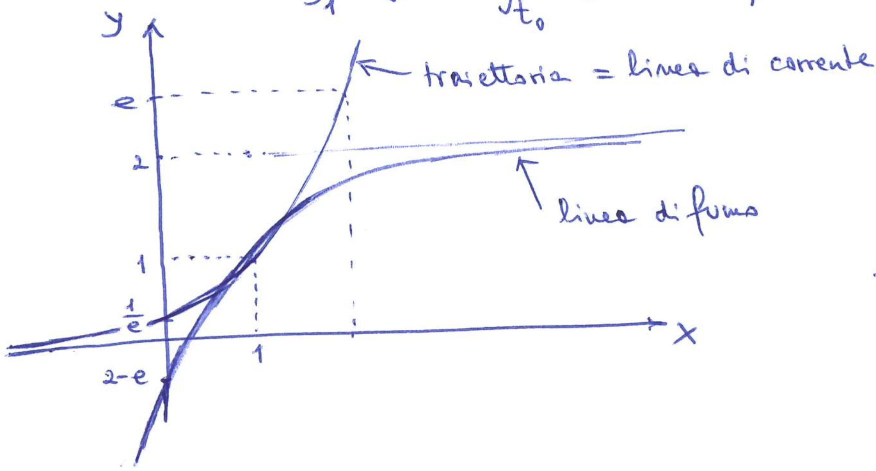
$$dy = dt \quad \rightarrow \quad y = t+1$$

$$\mapsto \boxed{y = e^{x-1}}$$

stessa eq. delle linee di corrente!

3) Linea di fumo: $(1+t_0)\displaystyle\int_1^x e^{\bar{x}-1}\, d\bar{x} = \int_{t_0}^{0} dt$ con $-1 < t_0 \leq 0$

$$\int_1^y d\bar{y} = \int_{t_0}^{0} dt \quad \mapsto$$

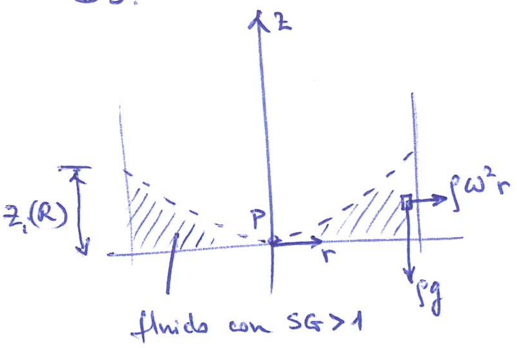


$$\begin{cases} \left[e^{x-1} - 1\right] = -\dfrac{t_0}{1+t_0} \\ y - 1 = -t_0 \end{cases}$$

↓ LINEA DI FUMO

$$\boxed{e^{x-1} = \frac{1}{2-y}} \rightarrow y = 2 - e^{1-x}$$

D5.



$$dp = \rho\omega^2 r\, dr - \rho g\, dz$$

L' eq. dell' interfaccia tra i due fluidi è un' isobara

$$\rightarrow dp = 0 \rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

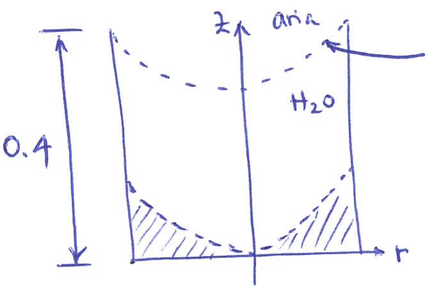
Affinché P sia sul fondo : $z_i = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

Per trovare la velocità angolare si deve uguagliare il volume del fluido inferiore con e senza rotazione :

$$7.07\times10^{-3}\, m^3 = 0.1 \times \frac{\pi D^2}{4} = \int_0^{D/2} z_i\ 2\pi r\, dr \rightarrow \omega = 13.2\ \frac{rad}{s}$$

Per $r = R$ l' interfaccia si trova in $z_i(R) = \dfrac{13.2^2 \times 0.3^2}{2\times4 \times 9.81} = 0.2$ m

A questa velocità di rotazione l'interfaccia con l' aria del fluido superiore si pone come in figura ; il resto del liquido fuoriesce .



$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} \rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + 0.2$$

perché $z(R = 0.15) = 0.4$

Il volume totale di liquido sotto l' interfaccia aria - acqua è : $\displaystyle\int_0^{D/2} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} + 0.2\right) 2\pi r\, dr = 0.0212\ m^3$

Il volume totale è $0.4 \times \dfrac{\pi D^2}{4} = 0.0283\ m^3$.

Il volume d' acqua che fuoriesce è quindi : $0.0071\ m^3$

D6.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 \longrightarrow P_1 - P_2 = P_{1gage} - P_{2gage} = 10^3\ Pa = \frac{1}{2}\left(\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2\right)$$

$$\rho_1 v_1 \frac{\pi D^2}{\cancel{4}} = \rho_2 v_2 \frac{\cancel{\pi} d^2}{\cancel{4}} \qquad 9\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2} \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{101}{102}$$

$$\Longrightarrow v_1 = v_2 \frac{\rho_2}{9\rho_1} = \frac{v_2}{9}\,\frac{101}{102} = 2.75\ \frac{m}{s}$$

$$\rho_1 = \frac{2000\ Pa}{v_1(9v_2 - v_1)} = 3.27\ \frac{m}{s}$$

D7.

$h = 50 \ m$

$\dot{V} = 1.30 \ \frac{m^3}{s}$

$$\Delta \dot{E}_{mech} = \rho \dot{V} g h = 10^3 \times 1.30 \times 9.81 \times 50 = 6.38 \times 10^5 \ W$$

$$\eta_{turb.} \eta_{alt} = \frac{\dot{W}_{elettrica}}{6.38 \times 10^5} = 0.78 \quad \rightarrow \quad \dot{W}_{elettrica} = 4.97 \times 10^5 \ W$$

D8.

Forza totale sull' aria nel pistone (trascurando P_{atm}) : $m_p g + 75 \ N = 5 \times 9.81 + 75 = 124.05 \ N$

$A = 35 \times 10^{-4} \ m^2$

$$p_{aria\ gage} = \frac{124.05}{35 \times 10^{-4}} = 3.54 \times 10^4 \ Pa$$

$$p_{aria} = 9.50 \times 10^4 + 3.54 \times 10^4 = 13.04 \times 10^4 \ Pa = 1.304 \times 10^5 \ Pa$$