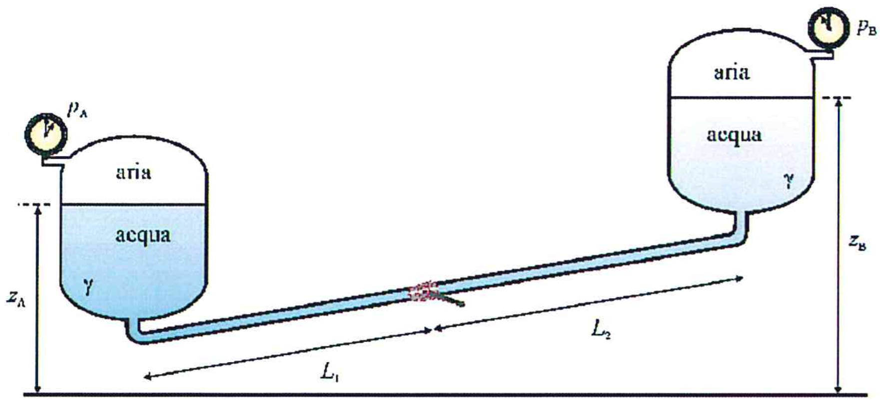
COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 1 giugno 2017 – fila A

Esercizio 1: ANALISI DIMENSIONALE (5 punti). Ci interessa la potenza $\dot{W}$ che un organismo di lunghezza L deve spendere per nuotare sott'acqua a velocità costante U. In generale $\dot{W} = f(\rho, U, L, \mu)$. La legge di Kleiber (1947) ci dice che, dai microbi alle balene, la produzione metabolica globale di energia varia come il peso del corpo elevato alla 3/4.

1. Sotto quali ipotesi, per una data famiglia di animali acquatici, si può concludere che $\dot{W} = C\, L^{9/4}$ (con C approssimativamente costante per ogni data famiglia)?
2. Si supponga che un pesce odierno, di lunghezza L = 0.5 m e capace di nuotare a U = 1 m/s abbia avuto un antenato preistorico di lunghezza L = 5 m. Per numeri di Reynolds, Re, sufficientemente grandi la resistenza al moto sperimentata dal pesce è: $D = 0.5\, c_D\, \rho\, U^2\, L^2$, con c_D un coefficiente adimensionale che dipende solo dalla forma del corpo. Sapendo che $\dot{W}$ è proporzionale al prodotto D U, quale potrebbe essere la velocità del pesce ormai estinto?
3. Si assuma che un batterio di lunghezza L = 1 μm si muova alla velocità di 20 μm/s tramite il movimento un flagello. Per Re « 1 la forza resistente è $D = k\, \mu\, U\, L$, con k un altro coefficiente adimensionale che dipende solo dalla forma del corpo. Se si considera un altro batterio geometricamente simile al primo ma di lunghezza doppia, quanto velocemente ci si può aspettare che nuoti?

Esercizio 2: CONDOTTE IN PRESSIONE (8 punti)
Nell'impianto di figura i due serbatoi sono pressurizzati e collegati da una condotta in acciaio (ε = 0.02 mm) di diametro D = 50 mm. Le pressioni relative lette dai manometri sono p_A = 15 bar, p_B = 8 bar, e le quote sono z_A = 30 m, z_B = 40 m. Una saracinesca separa la condotta in due tronchi di lunghezza L_1 = 35 m e L_2 = 30 m. Si assuma che il coefficiente di perdita di carico nella saracinesca sia $K_L = (\eta^{-1} - 1)^2$, con η il grado di apertura della saracinesca. Si assuma inoltre che $K_{L\,imbocco}$ = 0.5, $K_{L\,sbocco}$ = 1, $K_{L\,curva}$ = 0.3; il fluido è acqua (γ = 9800 N/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s). Calcolare la portata che transita nel caso di saracinesca completamente aperta (η = 1) e di saracinesca parzialmente aperta (η = 0.5).



Esercizio 3: MOTI POTENZIALI BIDIMENSIONALI (5 punti). Si consideri un moto uniforme parallelo all'asse y, di intensità U e verso $-\mathbf{e}_y$, una sorgente centrata in (0, b) e un pozzo in (0, -b). Sorgente e pozzo hanno portata (per unità di profondità) uguale in modulo a $\dot{V}/L$. Si trovi il campo di velocità, il campo di pressione e si faccia uno schizzo delle linee di corrente. Esistono punti di ristagno? Se esistono, li si trovino.

Esercizio 4: RESISTENZA DI UNA SFERA (5 punti). Determinare la velocità terminale di caduta di un granello di sabbia in aria, assumendo il granello sferico di diametro D = 1 mm e densità pari a $\rho_0 = 3000$ kg/m^3. Le proprietà dell'aria sono $\rho = 1.2$ kg/m^3 e $\nu = 1.06 \times 10^{-5}$ m^2/s. Il coefficiente di resistenza di una sfera è approssimato dalle relazioni seguenti:

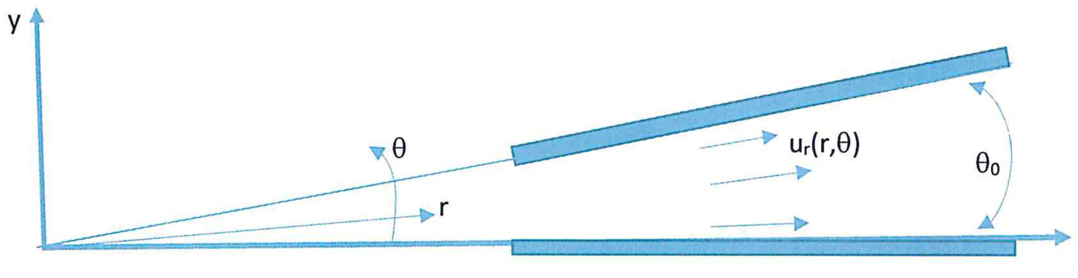
$$
\begin{cases}
c_D = 24\,Re^{-1} & \text{per } Re < 1\text{, moto di Stokes} \\
c_D = 0.28 + 6\,Re^{-0.5} + 21\,Re^{-1} & \text{per } 0.1 < Re < 4000 \\
c_D = 0.445 & \text{per } 750 < Re < 2 \times 10^5
\end{cases}
$$

Esercizio 5: APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES (8 punti). Il flusso nel canale bidimensionale divergente di figura si può trattare come un moto puramente radiale, con $u_r = u_r(r, \theta)$, nell'ipotesi di moto incomprimibile e stazionario.

1. Si mostri che la velocità può essere espressa come $u_r = F(\theta)/r$.
2. Si scrivano le equazioni di Navier-Stokes – trascurando la gravità – lungo le due coordinate r e θ, e si elimini la pressione (ad esempio usando il rotore). Si mostri che si arriva all'unica equazione differenziale nonlineare ordinaria (che non si chiede di provare a risolvere!):

$$2\,F\,F' + \nu\,(F''' + 4\,F') = 0.$$

3. Quali sono le condizioni al contorno da usare per una risoluzione (ad esempio numerica) di questa equazione. Due condizioni al contorno sono sufficienti?



Esercizio 6: STRATO LIMITE (4 punti). La distribuzione della componente longitudinale della velocità per lo strato limite che si sviluppa su una lastra piana lambita da una corrente incomprimibile U_∞, posta in y = 0, può essere approssimato da:

$$
\begin{cases}
u = U_\infty\, y/\delta(x) & \text{per } 0 < y < \delta(x) \\
u = U_\infty & \text{per } y > \delta(x)
\end{cases}
$$

Che cosa rappresenta $\delta(x)$? Si calcolino lo spessore di spostamento e lo spessore di quantità di moto. Si commenti l'affermazione che il coefficiente di attrito globale sulla lastra, per una lastra di lunghezza L nella direzione del moto esterno e di apertura w, è uguale allo spessore di quantità di moto normalizzato con L.

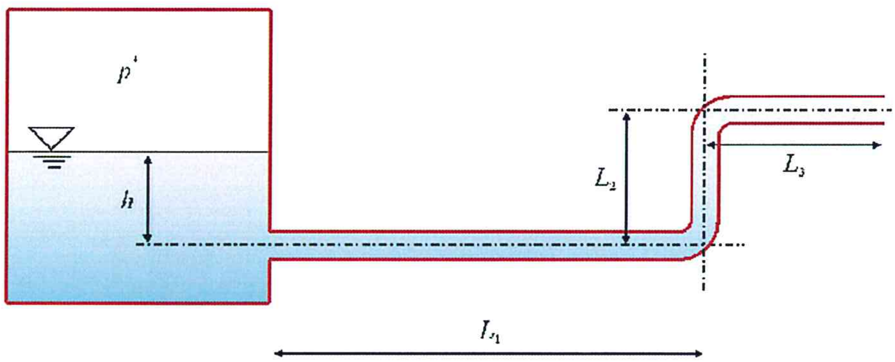
(i punteggi di ciascun esercizio sono indicativi)

COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 1 giugno 2017 – fila B

Esercizio 1: ANALISI DIMENSIONALE (4 punti). La frammentazione in goccioline di un getto liquido che sbuca in aria da un orifizio è importante per il funzionamento delle stampanti a getto di inchiostro. Si indichino quali sono le forze che influenzano di più il getto di inchiostro (e quelle eventualmente trascurabili), una volta che il getto ha lasciato l'ugello di stampa a velocità U, nell'ipotesi che il diametro del getto sia D = 32 μm, U = 7 m/s, $\mu_{inchiostro} = 10^{-2}$ Pa s, $\sigma_s = 3 \times 10^{-2}$ N/m, $\rho_{inchiostro} = 10^3$ kg/m^3. Per rispondere alla domanda si usino numeri adimensionali (noti e meno noti).

Esercizio 2: CONDOTTE IN PRESSIONE (4 punti). Nel sistema di figura il recipiente è in pressione e la condotta è in acciaio (scabrezza ε = 0.2 mm) di diametro D = 200 mm. La portata d'acqua è pari a Q = 0.1 m^3/s con h = 100 m. I tronchi hanno lunghezza L_1 = 500 m, L_2 = 150 m e L_3 = 200 m. I coefficienti di perdita di carico concentrati valgono $K_{L\,imbocco}$ = 0.5 e $K_{L\,curva}$ = 0.3; il fluido è acqua con γ = 9800 N/m^3 e $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

1. Si calcoli la pressione assoluta del recipiente necessaria per garantire il moto del fluido.
2. Si calcoli la pressione assoluta del recipiente capace di garantire l'*efflusso incipiente*, cioè con portata tendente a zero.



Esercizio 3: MOTI POTENZIALI BIDIMENSIONALI (5 punti). Si consideri un vortice antiorario centrato in (0, b) ed uno orario (con stessa circolazione Γ, in modulo) centrato in (0, -b). Si determini il campo di velocità e il campo di pressione, assumendo che all'infinito (dove la velocità è trascurabile) si ha $p = p_\infty$. Si mostri che nell'origine si ha $p = p_\infty - 0.5\,\rho\,\Gamma^2/(\pi\,b)^2$.

Esercizio 4: RESISTENZA DI UN DISCO (4 punti). Si consideri un disco circolare di spessore molto piccolo investito da una corrente d'aria in moto uniforme che scorre perpendicolarmente al disco stesso. In questo caso valgono le correlazioni:

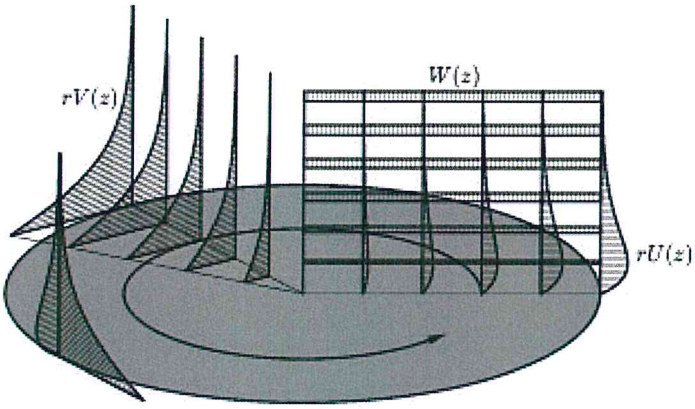
$$\begin{cases} c_D = 64\,\pi^{-1}\,Re^{-1}\,(1 + 0.138\,Re^{0.792}) & \text{per } Re < 133 \\ c_D = 1.17 & \text{per } Re > 133 \end{cases}$$

Il numero di Reynolds è basato sul diametro del disco. Se il disco ha diametro pari a D = 1 mm e la resistenza misurata è di 9.6×10^{-7} N, quanto vale la velocità della corrente? Dati: $\nu = 1.06 \times 10^{-5}$ m^2/s, ρ = 1.25 kg/m^3.

Esercizio 5: APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES (9 punti). Si consideri un disco solido di spessore infinitesimo e raggio molto grande, immerso in un fluido newtoniano inizialmente a riposo. Il disco viene messo in rotazione a velocità angolare ω costante di modo che, dopo il transitorio iniziale, il moto del fluido prodotto dalla rotazione del disco si può trattare come incomprimibile, stazionario e assialsimmetrico. L'effetto della gravità può essere trascurato. Il vettore velocità del fluido ha tre componenti non nulle, come illustrato in figura. Se la componente verticale u_z si può assumere dipendere solo dalla coordinata z, cioè $u_z = W(z)$, si mostri che u_r ha la forma: $u_r = r\,U(z) = -W'\,r/2$. Si consideri che anche u_θ possa essere espressa in modo simile, cioè $u_\theta = r\,V(z)$, e si inseriscano queste espressioni nelle equazioni di Navier-Stokes. Si mostri che si arriva al seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nonlineari (che non si chiede di provare ad integrare!):

$$\begin{cases} V'W - VW' = \nu V'' \\ 4\,VV' + WW''' = \nu W''''. \end{cases}$$

Quali sono le condizioni al contorno di questo sistema? Sono in numero sufficiente?



Esercizio 6: MOTO INCOMPRIMIBILE CON VISCOSITA' VARIABILE (7 punti). L'equazione di Cauchy nel caso di moto incomprimibile (div $\boldsymbol{u}$ = 0) si scrive $\rho\, D\boldsymbol{u}/Dt = \rho\, \boldsymbol{g} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{T}$, con $\boldsymbol{u}$ il vettore velocità e il tensore $\boldsymbol{T}$ dato da $\boldsymbol{T} = -\boldsymbol{I}\,p + \mu\,(\mathrm{grad}\, \boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\, \boldsymbol{u}^T)$ per fluido newtoniano ($\boldsymbol{I}$ è il tensore identità e l'apice T indica la trasposta del tensore grad $\boldsymbol{u}$). Usando la notazione con gli indici si può scrivere: $\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho\, g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]$. Supponiamo che il moto sia bidimensionale, nel piano (*x, y*), e che la viscosità dipenda dalla posizione *y*, cioè $\mu = \mu(y)$. Come si scrivono le due componenti dell'equazione di Cauchy?

(i punteggi di ciascun esercizio sono indicativi)

File A

Es. 1

$$\dot{W} = f(\rho, U, L, \mu)$$

Kleiber : $\dot{W} \propto (\rho L^3)^{3/4} \rightarrow \dot{W} = C L^{9/4}$

1. ρ, U, L : G.F. dimensionalmente indipendenti

$$\frac{\dot{W}}{\rho U^3 L^2} = g(Re)$$ per moti dominati da <u>inerzia</u>

$$\frac{C L^{9/4}}{\rho U^3 L^2} = g(Re) \rightarrow C = \rho U^3 L^{-1/4} g(Re)$$

nell'ipotesi che i pesci di ogni data famiglia abbiano dimensioni e velocità che variano poco

μ, U, L : G.F. dimensionalmente indipendenti

$$\frac{\dot{W}}{\mu U^2 L} = h(Re)$$

$$\frac{C L^{9/4}}{\mu U^2 L} = h(Re) \rightarrow C = \mu U^2 L^{-5/4} h(Re)$$

sotto la stessa ipotesi di cui al caso precedente

2. $\dot{W} \propto DU = \frac{1}{2} C_D \rho U^3 L^2 = C L^{9/4}$ <u>$Re_{piccolo} = 5 \times 10^5$</u>

$$C_D = \frac{2 C L^{1/4}}{\rho U^3} \Rightarrow \frac{L^{1/4}_{piccolo}}{U^3_{piccolo}} = \frac{L^{1/4}_{grande}}{U^3_{grande}}$$

$$U_{grande} = U_{piccolo} \left(\frac{L_{grande}}{L_{piccolo}} \right)^{\frac{1}{12}} \simeq 1.21 \ \mathrm{m/s}$$

3. $\dot{W} \propto DU = k \mu U^2 L = C L^{9/4} \rightarrow k = \frac{C L^{5/4}}{\mu U^2}$ <u>$Re_{piccolo} = 2 \times 10^{-5}$</u>

$$k_{grande} = k_{piccolo} \rightarrow U_{grande} = U_{piccolo} \left(\frac{L_{grande}}{L_{piccolo}} \right)^{5/8} = 30.8 \ \frac{\mu m}{s}$$

Es. 2

Bilancio energie tra i due peli liberi :

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} + K_L\frac{V^2}{2g} \qquad K_L = 0.5+1+2\times0.3+\left(\frac{1}{\eta}-1\right)^2$$

Saracinesca aperta : $\eta = 1 \Rightarrow K_L = 2.1$

saracinesca parzialmente aperta : $\eta = 0.5 \Rightarrow K_L = 3.1$

$L = L_1 + L_2 = 65$ m , $\varepsilon = 0.02$ mm $\quad \frac{\varepsilon}{D} = 4\times10^{-4}$

$\rho = 10^3$ kg/m^3 $\quad D = 50$ mm

$$V = \sqrt{\frac{2\frac{p_A - p_B}{\rho} + 2g(z_A - z_B)}{f\frac{L}{D} + K_L}}$$

Saracinesca aperta : sostituendo $V = \sqrt{\frac{1203.8}{1300 f + 2.1}}$

assumo moto completamente turbolento ; per $\frac{\varepsilon}{D} = 4\times10^{-4} \rightarrow f = 0.016$

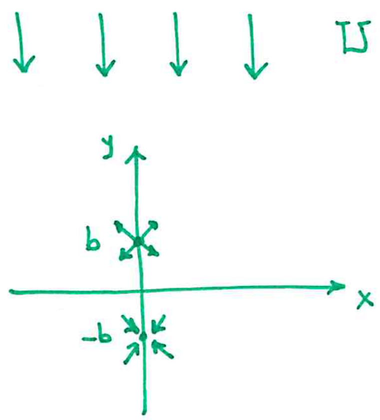
f	V [m/s]	Re	f
0.0160	7.25	3.6×10^5	0.0175
0.0175	$\boxed{6.96}$	3.48×10^5	0.0175

saracinesca parzialmente aperta : $V = \sqrt{\frac{1203.8}{1300 f + 3.1}}$

anche ora assumo moto completamente turbolento per $\frac{\varepsilon}{D} = 4\times10^{-4}$

f	V [m/s]	Re	f
0.016	7.10	3.55×10^5	0.0174
0.0174	$\boxed{6.84}$	3.42×10^5	0.0174

Es. 3



$$\phi_{\text{moto uniforme}} = -U y$$

$$\phi_{\text{sorgente}} = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+(y-b)^2}$$

$$\phi_{\text{pozzo}} = \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+(y+b)^2}$$

$$\dot{V}/L > 0$$

$$\phi = -U y + \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{x^2+(y-b)^2}{x^2+(y+b)^2}}$$

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\dot{V}/L}{\cancel{4}\pi} \frac{\cancel{4}xyb}{\left[x^2+(y-b)^2\right]\left[x^2+(y+b)^2\right]}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -U - \frac{\dot{V}/L}{\cancel{4}\pi} \frac{\cancel{4}b\left(x^2-y^2+b^2\right)}{\left[x^2+(y-b)^2\right]\left[x^2+(y+b)^2\right]}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = u^2+v^2 = U^2 + \left(\frac{\dot{V}/L}{\pi}\right)^2 \frac{x^2y^2b^2 + b^2\left(x^2-y^2+b^2\right)^2}{\left[x^2+(y-b)^2\right]^2\left[x^2+(y+b)^2\right]^2} +$$

$$+ 2U \frac{\dot{V}/L}{\pi} \frac{b\left(x^2-y^2+b^2\right)}{\left[x^2+(y-b)^2\right]\left[x^2+(y+b)^2\right]}$$

Assumendo che $p = p_\infty$ lontano da sorgente e pozzo, Bernoulli si ha:

$$p_\infty + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho U^2} = p + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho U^2} + \tfrac{1}{2}\rho\left\{\left(\frac{\dot{V}/L}{\pi}\right)^2 \frac{\cdots}{\cdots} + 2U\frac{\dot{V}/L}{\pi}\frac{\cdots}{\cdots}\right\}$$

$$p = p_\infty - \tfrac{1}{2}\rho\left\{\cdots\right\}$$

Punti di ristagno:

$u=0$ per $x=0$, oppure $y=0$

$v=0$ per $\frac{\dot{V}/L}{\pi} b\left(x^2-y^2+b^2\right) = -U\left[x^2+(y-b)^2\right]\left[x^2+(y+b)^2\right]$

Quando $y=0$: $-\frac{\dot{V}/L\ b}{\pi U} = x^2+b^2 \rightarrow x^2 = -b^2 - \frac{\dot{V}/L\ b}{\pi U} < 0$

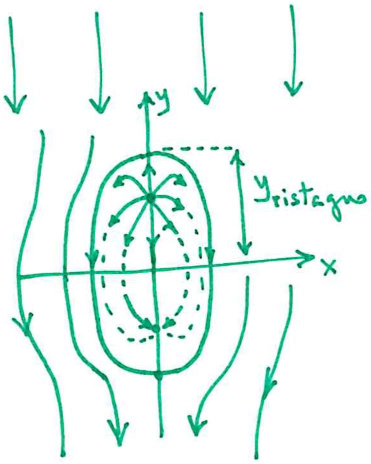
$\exists\ x$ di ristagno per $y=0$

Quando $x = 0$: $$\frac{\dot{V}/L}{\pi}\frac{b}{U}(y^2-b^2) = [y-b]^2[y+b]^2 = [y^2-b^2]^2$$

$$\frac{\dot{V}/L}{\pi}\frac{b}{U} = y^2-b^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{b^2+\frac{\dot{V}/L}{\pi}\frac{b}{U}}$$

Ci sono quindi due punti di ristagno simmetrici per

$$x = 0 \quad e \quad y = \pm\sqrt{b^2+\frac{\dot{V}/L}{\pi}\frac{b}{U}} = \pm y_{ristagno}$$



Le linee di corrente formano quello che è noto come l'ovale di Rankine

Es. 4

$D = 10^{-3}\ m$, $\rho_0 = 3000\ kg/m^3$, $\rho_{aria} = 1.2\ kg/m^3$

$\nu_{aria} = 1.06\times10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$

Posso trascurare le forze di Archimede:

$$W = c_D\frac{1}{2}\rho U^2\pi R^2 \quad con \quad W = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0 g$$

$$\rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{gD}{c_D}} = \sqrt{\frac{32.7}{c_D}}$$

Ipotizzo moto di Stokes, $c_D = \frac{24}{Re} = \frac{24}{UD}\nu = \frac{0.2544}{U}$

$$U = \sqrt{\frac{32.7}{0.2544}U} = 11.34\sqrt{U}$$

$U = 0$ NA

$U = 128.5\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = 12126$

$\rightarrow c_D = 0,445 \rightarrow U = 8.57\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = 808,7$

$\rightarrow c_D = 0.28 + \frac{6}{\sqrt{808.7}} + \frac{21}{808.7} = 0.517 \rightarrow U = 7.95\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = 750.3$

$\rightarrow c_D = 0,527 \rightarrow U = 7,88\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = 743.1$

$\rightarrow c_D = 0.528 \rightarrow \boxed{U = 7.87\ \frac{m}{s}} \rightarrow Re = 742.1$

Es. 5 Moto bidimensionale, incomprimibile, nel piano (r, θ). $\exists$ solo u_r

1. Eq. continuità: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) = 0$ $\quad r u_r = f(\theta) \rightarrow u_r = \frac{F(\theta)}{r}$

2. Navier-Stokes lungo r:
nell'ipotesi di moto stazionario

$$\rho\left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left[\underbrace{\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)}}_{0}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}\right]$$

N-S lungo θ: $\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\left[\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho\left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \mu \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} = \rho \frac{F^2}{r^3} + \mu \frac{F''}{r^3} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^3} F' \rightarrow \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^2} F' \qquad (2)$$

Derivo la prima rispetto a θ, la seconda rispetto a r, e uguaglio:

$$\rho \frac{2FF'}{r^3} + \mu \frac{F'''}{r^3} = -\frac{4\mu}{r^3} F'$$

Per $r \neq 0$: $\boxed{2FF' + \nu(F''' + 4F') = 0}$ (3)

Le equazioni di partenza (1) e (2) sono al massimo del 2° ordine in θ $\Rightarrow$ sono necessarie due condizioni al contorno:

$u_r = 0$ per $\theta = 0, \theta_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{F(0) = F(\theta_0) = 0}$

sono sufficienti. Infatti si può integrare la (3) una volta e si trova che $F^2 + \nu(F'' + 4F) = g(r)$

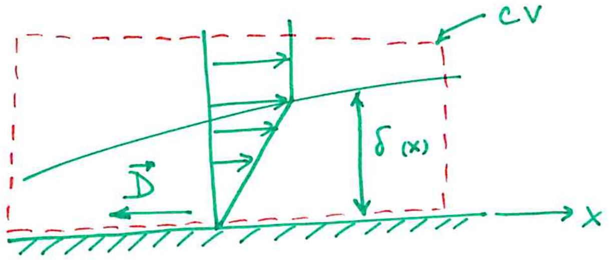
con $g(r)$ che contiene il gradiente di pressione (radiale) che provoca il moto.

Es. 6

$\delta(x)$ è lo spessore dello strato limite

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^{\delta(x)} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy = \frac{\delta(x)}{2}$$

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^{\delta(x)} \left(\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy = \frac{\delta(x)}{6}$$



Prendendo una lastra di lunghezza L e spessore w, e facendo un bilancio integrale sul volume di controllo in figura, si trova che il modulo della resistenza di attrito è pari a:

$$D = \rho\, U_\infty^2\, w\, \Theta$$

e quindi:

$$c_F = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \underbrace{(2L\cdot w)}_{\text{due lati}}} = \frac{\Theta}{L}.$$

Fila B

Es. 1

$$F_{inerzia} \simeq \rho U^2 D^2 = 5 \times 10^{-5}\ N$$

$$F_{viscose} \simeq \mu U D = 2.2 \times 10^{-6}\ N$$

$$F_{capillari} \simeq \sigma_s D = 9.6 \times 10^{-7}\ N$$

$$F_{gravitazionali} \simeq \rho g D^3 = 3.2 \times 10^{-10}\ N$$

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = 22 \qquad Bo = \frac{\rho g D^2}{\sigma_s} = 3.3 \times 10^{-4}$$ (numero di Bond)

$$Ca = \frac{\mu U}{\sigma_s} = 2.3$$ (numero di capillarità)

La sola forza trascurabile è la gravità.

Es. 2

Bilancio di energia tra il pelo libero e la sezione di uscita della condotta:

$$\frac{p_{gage}}{\gamma} + h = \frac{V^2}{2g} + L_2 + h_L$$

$$h_L = f\left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{D}\right)\frac{V^2}{2g} + \left(k_{L\,imbocco} + 2\,k_{L\,curva}\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$p_{gage} = \gamma(L_2 - h) + \rho\frac{V^2}{2}\left[1 + f\frac{\Sigma L}{D} + \Sigma k\right] \qquad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.2}{200} = 10^{-3}$$

1. $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 3.18\ \frac{m}{s} \qquad Re = 6.37 \times 10^5 \qquad f = 0.0204$

$$p_{gage} = 9800 \times 50 + 1000\,\frac{3.18^2}{2}\left[1 + 0.0204\,\frac{850}{0.2} + 1.1\right] = 9.39 \times 10^5\ Pa$$

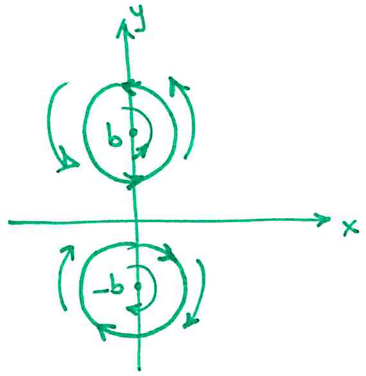
$$p_{assoluta} = 1.042 \times 10^6\ Pa$$

2. efflusso incipiente $\rightarrow$ $V \rightarrow 0$

$$p_{gage} = \gamma(L_2 - h) = 4.90 \times 10^5\ Pa$$

$$p_{assoluta} = 5.93 \times 10^5\ Pa$$

Es. 3



$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{x^2+(y-b)^2}}{\sqrt{x^2+(y+b)^2}}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2b\left[x^2 - y^2 + b^2\right]}{\left[x^2+(y+b)^2\right]\left[x^2+(y-b)^2\right]}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{4xyb}{\left[x^2+(y+b)^2\right]\left[x^2+(y-b)^2\right]}$$

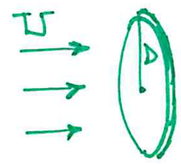
Bernoulli :

$$p_\infty = p + \frac{1}{2}\rho(u^2+v^2) \rightarrow p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma}{\pi}\right)^2 \frac{b^2\left[x^4+y^4+b^4+2x^2y^2+2x^2b^2-2y^2b^2\right]}{\left[x^2+(y+b)^2\right]^2\left[x^2+(y-b)^2\right]^2}$$

Nell' origine $(0,0)$ si ha $p(0,0) = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\Gamma}{\pi b}\right)^2$

Es. 4

$$F_D = 9.6 \times 10^{-7}\ N = C_D \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{\pi D^2}{4}$$



$$U = \sqrt{\frac{8F_D}{C_D \rho \pi D^2}} = \frac{1.3985}{\sqrt{C_D}}$$

Se $C_D = 1.17 \longrightarrow U = 1.293\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = 121.9$

$\rightarrow C_D = 1.2023 \longrightarrow U = 1.275\ \frac{m}{s} \rightarrow Re = 120.32$

$\rightarrow C_D = 1.2073 \longrightarrow \boxed{U = 1.273\ \frac{m}{s}} \rightarrow Re = 120$

Es. 5

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} = 0 \qquad \vec{g} = 0$$

$$u_z = W(z)$$

eq. continuità : $\displaystyle \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$

$$-rW' = \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) \quad \longrightarrow \quad r u_r = \int -rW' dr =$$

$$= -\frac{r^2}{2}W' + f(z)$$

$$\Longrightarrow \quad u_r = -\frac{r}{2}W' + \underbrace{\cancel{\frac{f(z)}{r}}}_{=0} = rU \qquad \left(U = -\frac{W'}{2}\right)$$

$=0$ perché la velocità radiale non può $\to \infty$ nell'origine

$$u_\vartheta = rV$$

Navier - Stokes :

$$r: \quad \rho\left(rU^2 - rV^2 + WrU'\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[rU''\right]$$

$$\vartheta: \quad \rho\left(rUV + rUV + rWV'\right) = -\frac{1}{r}\underbrace{\cancel{\frac{\partial p}{\partial \vartheta}}}_{=0} + \mu\left[rV''\right]$$

$$z: \quad \rho\left(rU\cancel{\frac{\partial}{\partial r}W} + WW'\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[W''\right]$$

Condizioni al contorno :

$z = 0$: $\quad u_\vartheta = \omega r \quad \rightarrow \quad V(0) = \omega$

$\qquad\qquad u_z = u_r = 0 \quad \rightarrow \quad U(0) = W(0) = 0$

$z \to \infty$: $\quad u_r = u_\vartheta = 0 \quad \rightarrow \quad V(\infty) = U(\infty) = 0$

non si può dire niente riguardo u_z per $z \to \infty$ perché non si conosce la velocità del fluido che viene aspirato dalla rotazione del disco lontano dal disco.

Eliminiamo U dall'equazione di continuità:

$$r: \quad \rho r\left[\frac{W'^2}{4} - V^2 - \frac{WW''}{2}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + r\mu\left(-\frac{W'''}{2}\right)$$

$$\vartheta: \quad \rho \cancel{r}\left[-W'V + WV'\right] = \cancel{r}\mu V''$$

$$z: \quad \rho WW' = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu W''$$

servono 3 condizioni per W e 2 condizioni per V

Con condizioni al contorno

$$V(0) = \omega$$
$$W(0) = W'(0) = 0$$
$$V(\infty) = W'(\infty) = 0$$

$\rightarrow$ condizioni al contorno sufficienti

L'eq. lungo ϑ è: $\boxed{V'W - VW' = \nu V''}$

L'eq. lungo z si può integrare una volta:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho WW' + \mu W'' = \rho \frac{d}{dz}\left(-\frac{W^2}{2} + \nu W'\right)$$

Inoltre $\dfrac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} = 0$.

Derivando l'equazione lungo r rispetto a z elimino p:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = r\left[\rho\left(\frac{W'^2}{4} - V^2 - \frac{WW''}{2}\right) + \mu\frac{W'''}{2}\right]$$

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial z} = \rho r\left[\cancel{\frac{2W'W''}{4}} - 2VV' - \cancel{\frac{W'W''}{2}} - \frac{WW'''}{2} + \nu\frac{W''''}{2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4VV' + WW''' = \nu W''''}$$

Es. 6

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$(x, y)\longrightarrow(x_1, x_2)$$

$$\mu=\mu(x_2)$$

Il termine viscoso si scrive:

$i=1$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\right]=$$

$$=\cancel{\frac{\partial\mu}{\partial x_1}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\mu\cdot 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_1$$

$i=2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]=$$

$$=\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+\cancel{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)}\right)+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\left(2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\mu\cancel{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)}=$$

$$=2\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_2$$

In definitiva:

x: $$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u+\mu'\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

con $\mu'=\frac{d\mu}{dy}$

y: $$\rho\frac{Dv}{Dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v+2\mu'\frac{\partial v}{\partial y}$$