

Es. 1. Il campo di moto bidimensionale nel piano (x, y) di un fluido è dato da $\mathbf{u} = (a + bx)\mathbf{i} - by\mathbf{j}$, con a, b costanti; si chiede di trovare le componenti dell'accelerazione. Si vuole sapere inoltre se il moto è stazionario, incomprimibile e irrotazionale. Si calcoli infine l'equazione delle linee di corrente.

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = b(a + bx)$$

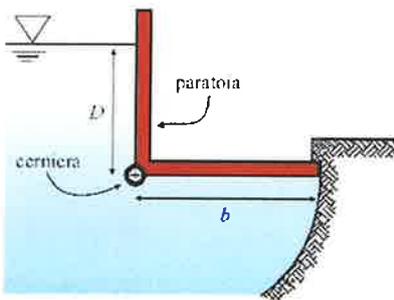
$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -b^2 y$$

$$\frac{dx}{a+bx} = -\frac{dy}{by} \rightarrow \ln(a+bx) = -\ln(by) + \text{cost} \Rightarrow (a+bx)by = k$$

Moto stazionario: il campo NON dipende da t
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow$ INCOMPRIMIBILE
 $\vec{\zeta} = \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \vec{0} \rightarrow$ IRROTAZIONALE

Es. 2. La paratoia basculante di figura è rigida ed incernierata in corrispondenza dello spigolo.

Mostrare che, affinché la paratoia inizi a ruotare in verso orario, è necessario che $D > \sqrt{3}b$.



$$S_x = \gamma \frac{D}{2} D p \quad p = \text{profondità}$$

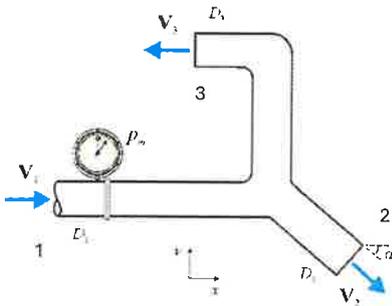
braccio: $D/3$

$$S_y = \gamma D b p, \quad \text{braccio: } b/2$$

Inizia a ruotare quando $S_x \frac{D}{3} > S_y \frac{b}{2}$

$$\gamma \frac{D^3}{6} p > \gamma D \frac{b^2}{2} p \rightarrow \frac{D^2}{3} > \frac{b^2}{2} \rightarrow D > \sqrt{3}b$$

Es. 3. Dell'acqua scorre nel sistema di figura ed esce in atmosfera dalle condotte 2 e 3. Trascurando il peso, si determinino le forze esercitate dal fluido sulla flangia. Dati: $V_1 = 6 \text{ m/s}$, $V_3 = 9 \text{ m/s}$, $D_1 = D_2 = 300 \text{ mm}$, $D_3 = 200 \text{ mm}$, $\alpha = 40^\circ$, $p_{m \text{ gage}} = 0.7 \text{ bar}$.



(R_x, R_y) reazione sul fluido, $\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 + V_3 D_3^2 \rightarrow V_2 = V_1 - V_3 \left(\frac{D_3}{D_1} \right)^2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

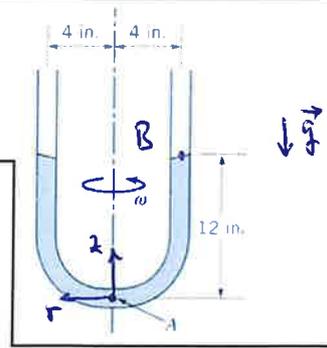
x: $p_{m \text{ gage}} \frac{\pi D_1^2}{4} + R_x = \dot{m}_2 V_2 \cos \alpha - \dot{m}_3 V_3 - \dot{m}_1 V_1$

y: $R_y = -\dot{m}_2 V_2 \sin \alpha$

$$R_x = \rho_2 V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \cos \alpha - \rho_1 V_1^2 \frac{\pi D_1^2}{4} - \rho_3 V_3^2 \frac{\pi D_3^2}{4} - p_{m \text{ gage}} \frac{\pi D_1^2}{4} = -9820.8 \text{ N}; R_y = -181.7 \text{ N}$$

Le spinte del fluido sono orientate come in figura, con $S_x = 9820.8$, $S_y = 181.7 \text{ N}$

Es. 4. IL tubo ad U in figura è parzialmente riempito d'acqua. Determinare la velocità angolare ω che provoca un inizio di vaporizzazione dell'acqua nel punto A. Dati: $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$, $p_{\text{vapor}} = 3 \text{ kPa}$.



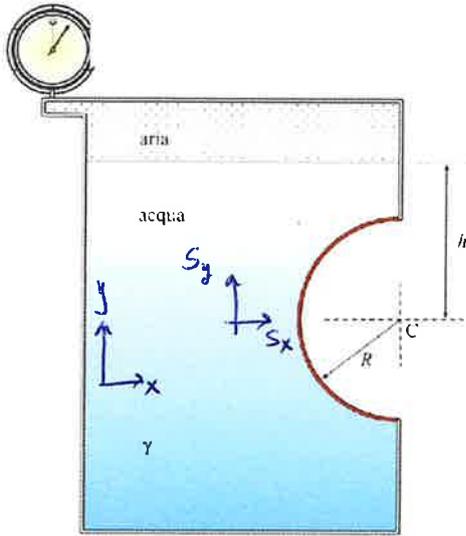
$$dp = \rho r \omega^2 dr - \rho g dz$$

Prendiamo un punto sul pelo libero: $r_B = 4 \times 2.54 \text{ cm}$, $z_B = 12 \times 2.54 \text{ cm}$

e il punto A: $r_A = z_A = 0$

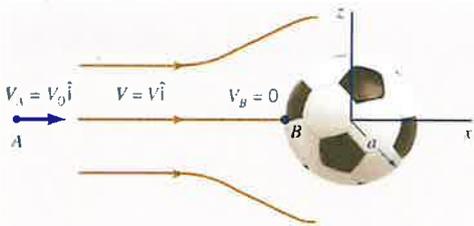
Inizia a vaporizzare quando: $\int \frac{\omega^2}{2} r^2 = (p_{\text{atm}} - p_{\text{vapor}}) - \rho g z_B \rightarrow \omega = 1.36 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Es. 5. Il recipiente di figura (non in scala) contiene aria in depressione, con $p_{\text{aria void}} = 5 \times 10^4 \text{ Pa}$. Sulla parete è inserita una semisfera di raggio $R = 0.25 \text{ m}$. Calcolare modulo, direzione e retta d'azione della spinta idrostatica dell'acqua sulla semisfera. Dati: $h = 1 \text{ m}$, $\gamma_{\text{acqua}} = 9806 \text{ N/m}^3$.



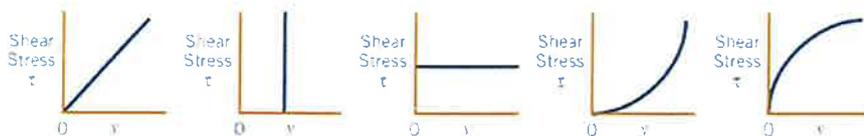
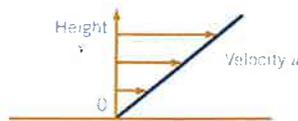
$p_{\text{gasce aria}} = -5 \times 10^4 \text{ Pa}$
 Spinta verticale sulla semisfera: $S_y = \frac{2}{3} \pi R^3 \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 320.9 \text{ N}$
 Spinta orizzontale sulla faccia della semisfera: $S_x = (p_{\text{gasce aria}} + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} h) \pi R^2 = -7892 \text{ N}$
 negativa, quindi diretta verso sinistra
 $S = (S_x^2 + S_y^2)^{1/2} = 7898.5 \text{ N}$
 $\alpha = \text{atan} \frac{S_y}{S_x} = 2.33^\circ$
 retta d'azione per il punto C

Es. 6. Per il moto di figura, incomprimibile, stazionario ed in assenza di effetti viscosi, una teoria mostra che lungo la linea di corrente AB la velocità è data da $V = V_0[1+(a/x)^3]$, con V_0 costante e a il raggio del pallone. Si usi l'equazione di Bernoulli per trovare il gradiente di pressione $\frac{\partial p}{\partial x}$ lungo la linea di corrente.



Sulle linee di corrente AB:
 $p_A + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = p_B = p + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^3\right]^2 = \text{cost}$
 $\frac{\partial p}{\partial x} = 3 \rho V_0^2 \left[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^3\right] \frac{a^3}{x^2}$

Es. 7. Un fluido Newtoniano in moto laminare ha la distribuzione di velocità mostrata in figura. Quale tra le cinque immagini sottostanti rappresenta la variazione dello sforzo tangenziale τ con la distanza dal piano $y=0$? Si giustifichi la risposta data.

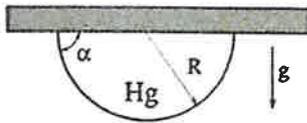


$\hat{\tau} = \hat{\tau}_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \text{cost}$ per il profilo anegato -

Un foglio aiuti A4 ammesso, **fila B**

Es. 1. Una goccia di mercurio a 20 °C di forma semisferica aderisce ad una superficie orizzontale con angolo di contatto $\alpha = 90^\circ$; quale dimensione massima R può raggiungere prima di cadere?

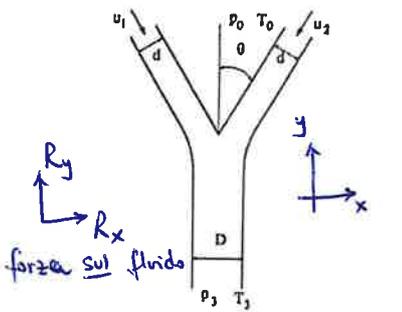
Dati: $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_s = 0.484 \text{ N/m}$.



$$\sigma_s (2\pi R) = \rho_{Hg} g \frac{2}{3} \pi R^3 \rightarrow R^2 = \frac{3\sigma_s}{\rho_{Hg} g}$$

$$R = \sqrt{\frac{3\sigma_s}{\rho_{Hg} g}} = 0.0033 \text{ m} = 3.3 \text{ mm}$$

Es. 2. Aria a pressione atmosferica e temperatura $T_0 = 15^\circ\text{C}$ entra dalle sezioni 1 e 2 con velocità u_1 e u_2 . Il sistema di figura è simmetrico e posto su un piano orizzontale. Se il moto nella sezione di uscita è a velocità u_3 e l'aria è a pressione p_3 e temperatura T_3 , calcolare le componenti della forza (specificando direzione e verso) che il corpo esercita sul fluido. La costante dei gas perfetti per l'aria è $R = 287 \text{ J/(kg K)}$.



$D = 18 \text{ cm}$ $d = 5.3 \text{ cm}$
 $u_1 = 92 \text{ m/s}$ $u_2 = 63 \text{ m/s}$
 $p_3 = 92000 \text{ Pa}$ $T_3 = 422 \text{ K}$
 $\theta = 16^\circ$
 Sezioni circolari.

Assumo moto stazionario

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{p_{atm}}{RT_0} = \frac{101300}{287 \cdot 288} = 1.226 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_3 = \frac{p_3}{RT_3} = \frac{92000}{287 \cdot 422} = 0.760 \text{ kg/m}^3$$

$$p_{3 \text{ gage}} = -9300 \text{ Pa} \quad u_3 = (u_1 + u_2) \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_3} = 21.68 \text{ m/s}$$

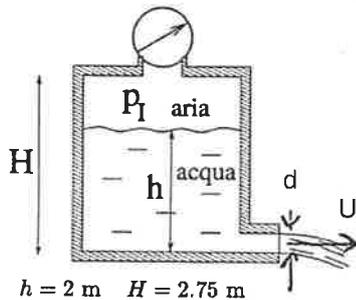
$$\dot{m}_1 = \rho_1 u_1 \frac{\pi d^2}{4} = 0.249 \frac{\text{kg}}{\text{s}}; \quad \dot{m}_2 = 0.170 \frac{\text{kg}}{\text{s}}; \quad \dot{m}_3 = 0.419 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$R_x = -\dot{m}_1 u_1 \sin \theta + \dot{m}_2 u_2 \sin \theta = -3.36 \text{ N}$$

$$R_y + p_{3 \text{ gage}} \frac{\pi D^2}{4} = -\dot{m}_3 u_3 + \dot{m}_1 u_1 \cos \theta + \dot{m}_2 u_2 \cos \theta \rightarrow R_y = 259.9 \text{ N}$$

$$R = 260 \text{ N}, \quad \alpha = 89.26^\circ$$

Es. 3. Se il serbatoio di figura fosse aperto in cima, dal foro uscirebbe una portata pari a $Q = U \pi d^2/4$. Si trascuri l'abbassamento del livello dell'acqua nel serbatoio nella valutazione di U. Calcolare la pressione relativa dell'aria, $P_{I \text{ gage}}$, affinché la portata sia $1.5 Q$.



$$P_{I \text{ gage}} + \rho g h = \frac{1}{2} \rho U^2 \rightarrow U = \sqrt{2 \left(\frac{P_{I \text{ gage}}}{\rho} + g h \right)}$$

Se aperto in cima: $U = \sqrt{2 g h}$

$$2 \left(\frac{P_{I \text{ gage}}}{\rho} + g h \right) = 1.5^2 (2 g h) \quad P_{I \text{ gage}} = (1.5^2 - 1) \rho g h$$

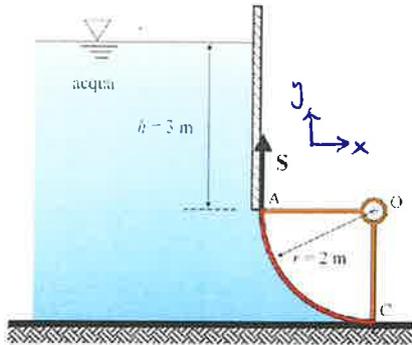
$$\rho_{H_2O} = 998 \text{ kg/m}^3 \rightarrow P_{I \text{ gage}} = 24476 \text{ Pa}$$

Es. 4. Perché il punto di applicazione (centro di spinta) della forza risultante esercitata da un liquido su una superficie piana verticale si avvicina sempre di più al baricentro della superficie man mano che la superficie viene immersa sempre più in profondità?

$$y_p = y_c + \frac{I_{xx,c}}{y_c A}$$

$I_{xx,c}$ e A rimangono costanti
 per $y_c \uparrow$ il secondo termine $\rightarrow 0$
 $\rightarrow y_p \approx y_c$ (man mano la lastra è immersa in profondità)

Es. 5. La paratoia di chiusura di un serbatoio ha forma cilindrica, come in figura, è profonda $b = 2 \text{ m}$ ed è incernierata in O. Calcolare la spinta totale esercitata dall'acqua (modulo, verso e retta d'azione) e il modulo della forza **S** necessaria per aprire la paratoia.



$$R_x = F_H = \rho g \left(h + \frac{r}{2} \right) (rb) = 156960 \text{ N}$$

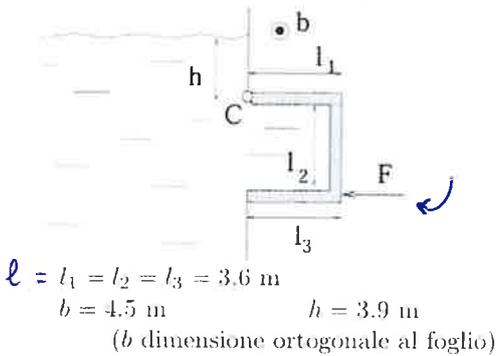
$$R_y = F_V - W = \rho g (h+r)(rb) - \rho g \left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right) b = 179358 \text{ N}$$

↑ reazioni sul fluido

Spinta del fluido: \vec{S}_F (passante per O) $S_F = 238340 \text{ N}$
 $\alpha = 48,8^\circ$

La spinta non genera momento rispetto ad O.
 Per aprire la paratoia è sufficiente una forza \vec{S} verticale infinitesimale (in realtà necessaria a bilanciare peso paratoia)

Es. 6. Calcolare il modulo minimo della forza **F** in modo da impedire l'apertura dello sportello incernierato in C sotto la spinta dell'acqua.



$$F_1 = \rho g h (lb) \quad \text{braccio} = l/2 \quad \curvearrowright$$

$$F_3 = \rho g (h+l)(lb) \quad \text{braccio} = l/2 \quad \curvearrowright$$

$$F_2 = F_{20} + F_{2\Delta}$$

$$F_{20} = \rho g h (lb) \quad \text{braccio} = l/2 \quad \curvearrowright$$

$$F_{2\Delta} = \rho g \frac{l}{2} (lb) \quad \text{braccio} = \frac{2}{3} l \quad \curvearrowright$$

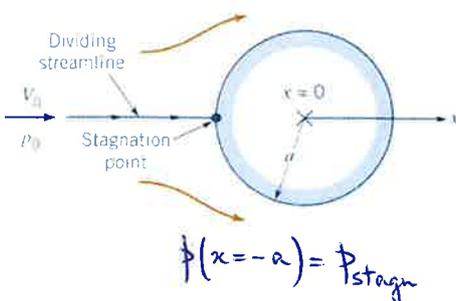
$$F_1 = 619796 \text{ N} \quad F_3 = 1191915 \text{ N}$$

$$F_{20} = 619796 \text{ N} \quad F_{2\Delta} = 286060 \text{ N}$$

$$F l + F_3 \frac{l}{2} = F_1 \frac{l}{2} + F_{20} \frac{l}{2} + F_{2\Delta} \frac{2}{3} l$$

$$F = \frac{F_1}{2} + \frac{F_{20}}{2} + \frac{2F_{2\Delta}}{3} - \frac{F_3}{2} = 214545 \text{ N}$$

Es. 7. Si consideri il moto incomprimibile e stazionario di un fluido attorno ad un cilindro. La velocità del fluido lungo la linea di corrente di ristagno ("dividing streamline") per $-\infty \leq x \leq -a$ ha equazione $V = V_0 [1 - (a/x)^2]$, con V_0 la velocità di monte, costante. Si determini il gradiente di pressione $\frac{\partial p}{\partial x}$ lungo la linea di corrente di ristagno. Se la pressione sufficientemente a monte del cilindro è pari a p_0 , si integri il gradiente di pressione per ottenere $p(x)$ per $-\infty \leq x \leq -a$. Da quest'ultimo risultato si mostri che la pressione nel punto di ristagno anteriore (in $x = -a$) è pari a $p_{\text{stagn}} = p_0 + \rho V_0^2 / 2$. Potevate aspettarvi questo valore di p_{stagn} ?



$$p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = p_{\text{stagn}} = p + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[1 - \left(\frac{a}{x} \right)^2 \right]^2 = \text{cost.}$$

risultato immediato da Bernoulli

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 \cdot 2 \left[1 - \frac{a^2}{x^2} \right] \cdot \frac{a^2}{x^3} = -2 \rho V_0^2 \frac{a^2}{x^3} \left[1 - \left(\frac{a}{x} \right)^2 \right]$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi = p(x) - p_0 = -2 \rho V_0^2 a^2 \int_{-\infty}^x \left(\xi^{-3} - a^2 \xi^{-5} \right) d\xi$$

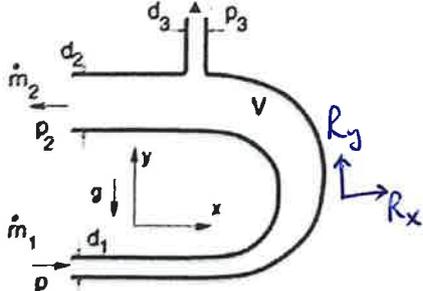
$$= \rho V_0^2 \frac{a^2}{x^2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} \right)$$

$$p(x) = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 \frac{a^2}{x^2} \left[2 - \left(\frac{a}{x} \right)^2 \right]$$

quando $x = -a$ si ritrova il risultato sopra

Un foglio aiuti A4 ammesso, fila C

Es. 1. Dell'acqua a pressione (assoluta) p_1 e portata \dot{m}_1 entra nella sezione 1 del condotto in figura. Dalla sezione 2 esce una portata \dot{m}_2 a pressione p_2 , mentre dalla sezione 3 esce \dot{m}_3 a pressione p_3 . Calcolare le forze necessarie (modulo, direzione e verso) a mantenere il condotto fermo se il fenomeno è stazionario e il volume di fluido in transito nel sistema è pari a V .



$\dot{m}_1 = 33 \text{ Kg/s}$ $\dot{m}_2 = 19 \text{ Kg/s}$
 $p_1 = 113 \text{ kPa}$ $p_2 = 108 \text{ kPa}$
 $p_3 = 110.5 \text{ kPa}$ $d_1 = 12 \text{ cm}$
 $d_2 = 21 \text{ cm}$ $d_3 = 5 \text{ cm}$
 $V = 34 \text{ litri}$

Prendo $p_{atm} = 101300 \text{ Pa}$ $v_1 = 2.92 \text{ m/s}$
 $\dot{m}_3 = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = 14 \text{ kg/s}$ $v_2 = 0.549 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_3 = 7.13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

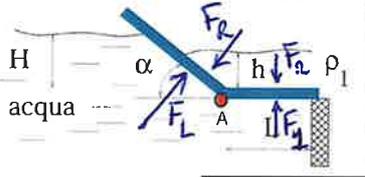
$$R_x + p_1 gage A_1 + p_2 gage A_2 = \dot{m}_2 (-v_2) - \dot{m}_1 v_1$$

$$\rightarrow R_x = 471 \text{ N}$$

$$R_y - p_3 gage A_3 - W = \dot{m}_3 v_3$$

$$\rightarrow R_y = 451 \text{ N}$$

Es. 2. Calcolare il massimo valore che la densità del fluido 1 può assumere prima che lo sportello ad angolo, rigido, inizi a ruotare attorno alla cerniera A in senso antiorario. Nota: sul lato destro lo sportello è semplicemente appoggiato al muro.



$H = 1.8 \text{ m}$ $h = 1.56 \text{ m}$
 $L = 1.86 \text{ m}$ $\alpha = 26^\circ$

$$F_L = \rho_{H_2O} \frac{H}{2} \left(\frac{H}{\sin \alpha} \times w \right)$$

$$F_R = \rho_1 g \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\sin \alpha} \times w \right)$$

$$F_1 = \rho_{H_2O} H L w$$

$$F_2 = \rho_1 g h L w$$

$$F_L \frac{H}{3 \sin \alpha} - F_R \frac{h}{3 \sin \alpha} + F_2 \frac{L}{2} - F_1 \frac{L}{2} = 0 \quad \text{all'equilibrio}$$

$$\rightarrow \rho_1 = 3273 \text{ kg/m}^3$$

Es. 3. Sia dato il campo di moto Lagrangiano descritto da: $x = A \cos(\omega t)$, $y = -B \sin(\omega t)$, con A e B due costanti, t il tempo e ω la frequenza angolare. Calcolare velocità e accelerazione sia nel sistema Lagrangiano che Euleriano e verificare i risultati. Si trovi poi l'equazione delle linee di corrente: che forma hanno? Il moto è incomprimibile; è stazionario? Per quali valori di A e B è irrotazionale?

Lagrangiano \rightarrow Euleriano

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t) \rightarrow u = \frac{A}{B} \omega y$$

$$\dot{y} = -B\omega \cos(\omega t) \rightarrow v = -\frac{B}{A} \omega x$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t) \rightarrow a_x = -\omega^2 x$$

$$\ddot{y} = B\omega^2 \sin(\omega t) \rightarrow a_y = -\omega^2 y$$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega^2 x$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\omega^2 y$$

LINEE DI CORRENTE: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

$$B^2 x dx = -A^2 y dy \rightarrow B^2 x^2 + A^2 y^2 = \text{cost}$$

ellissi

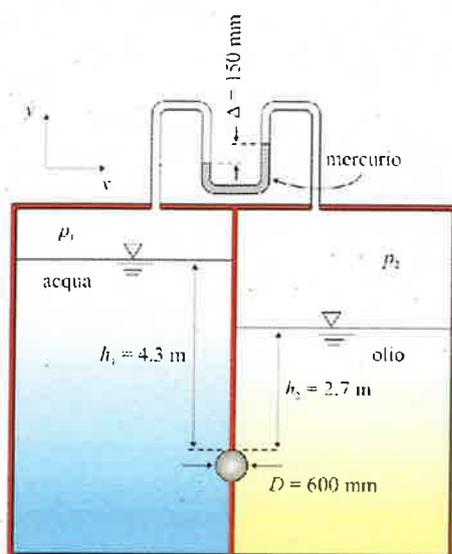
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \text{INCOMP.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{STAZIONARIO}$$

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \vec{k} \left[-\frac{B}{A} - \frac{A}{B} \right] \omega$$

Questo moto non è mai irrotazionale, per $A \neq 0, B \neq 0$

Es. 4. Un piccolo tappo sferico di legno ($SG_{\text{legno}} = 0.6$) separa i liquidi nei due contenitori pressurizzati. La differenza di pressione dell'aria nei due contenitori è misurata con un manometro differenziale che misura $D = 150 \text{ mm}$ ($SG_{\text{Hg}} = 13.6$). Se la densità relativa dell'olio è pari a $SG_{\text{olio}} = 0.8$ si calcolino le forze agenti sulla sfera.



$$P_2 = P_1 - \gamma_{\text{Hg}} \Delta \rightarrow P_2 = P_1 - 20012 \text{ Pa}$$

Acqua

$$F_x = \left[P_1 + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \left(h_1 + \frac{D}{2} \right) \right] \frac{\pi D^2}{4} = 0.28 P_1 + 12759 \text{ [N]}$$

$$F_y = F_{\text{Arch}_{\text{H}_2\text{O}}} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \frac{V}{2} = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \frac{\pi D^3}{12} = 555 \text{ [N]}$$

Olio

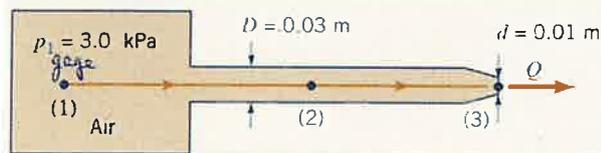
$$F_x = \left[P_2 + \gamma_{\text{olio}} \left(h_2 + \frac{D}{2} \right) \right] \frac{\pi D^2}{4} = 0.28 P_2 + 6592 \text{ [N]}$$

$$F_y = F_{\text{Arch}_{\text{olio}}} = \gamma_{\text{olio}} \frac{V}{2} = 444 \text{ [N]}$$

$$F_{x_{\text{TOT}}} = F_{x_{\text{H}_2\text{O}}} - F_{x_{\text{olio}}} = 11770 \text{ [N]} \quad \text{verso destra}$$

$$F_{y_{\text{TOT}}} = F_{y_{\text{olio}}} + F_{y_{\text{H}_2\text{O}}} - \underbrace{W}_{\text{peso sfera legno}} = 333 \text{ [N]} \quad \text{verso l'alto}$$

Es. 5. Si consideri un grosso recipiente (1) pieno d'aria in pressione, con $p_{1 \text{ gage}} = 3 \text{ kPa}$, che si mantiene costante nel tempo. Attraverso un tubo (2), l'aria fuoriesce in atmosfera tramite un ugello (3). Si trovi la portata d'aria in uscita e la pressione nel tubo, trascurando gli attriti. Dato: $R_{\text{aria}} = 287 \text{ J/(kg K)}$.



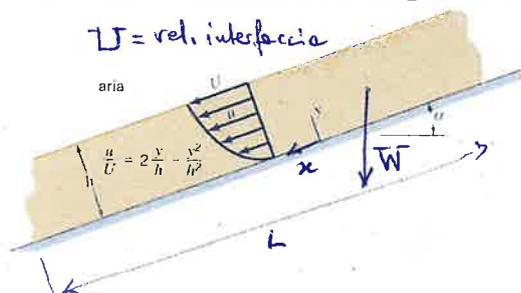
$$P_3 = P_3 R T_3 \quad T_3 = T_{\text{atm}} = 300 \text{ K}$$

$$\rho_3 = \frac{101300}{287 \times 300} = 1.177 \text{ kg/m}^3$$

$$P_{1 \text{ gage}} = \frac{1}{2} \rho_3 v_3^2 \rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{2 P_{1 \text{ gage}}}{\rho_3}} = 71.4 \text{ m/s} \quad \text{abbastanza bene da considerare il moto in comprimibile, } \rho = \text{cost.}$$

$$\dot{V}_3 = v_3 A_3 = v_3 \frac{\pi d^2}{4} = 0.0056 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow v_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{4 \dot{V}}{\pi D^2} = 7.93 \text{ m/s}; \quad P_{2 \text{ gage}} = \frac{1}{2} \rho (v_3^2 - v_2^2) = 2963 \text{ Pa}$$

Es. 6. Un sottile strato di glicerina (densità e viscosità note) scivola lungo un piano, inclinato di un angolo α , sotto l'effetto del suo peso. Il moto viene bilanciato dallo sforzo di attrito alla parete. Sapendo che la distribuzione di velocità della glicerina è quella data in figura, potete trovare l'espressione della velocità della glicerina all'interfaccia con l'aria (dove $y = h$)?



Il peso del liquido è bilanciato dalla forza di attrito sulla parete

Peso: $\rho g (L h w) \sin \alpha$

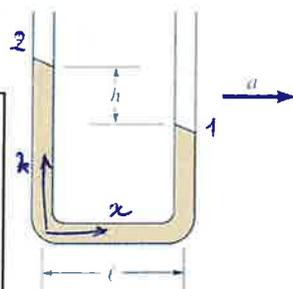
Attrito: $\tau_w (L w) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} L w = \mu \frac{U^2}{h} (L w)$

$$U = \frac{\rho g h^2 \sin \alpha}{2 \mu}$$

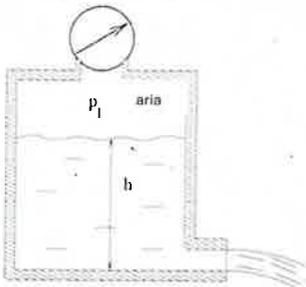
Es. 7. Per il tubo ad U di figura, aperto all'atmosfera, si determini la relazione tra a , h e l quando il tubo viene accelerato verso destra con accelerazione a .

$$dp = -\rho a dx - \rho g dz \quad \int_1^2 dp = -\rho a (x_2 - x_1) - \rho g (z_2 - z_1)$$

$$0 = -\rho a (-l) - \rho g h \rightarrow al = gh$$



Es. 1. Se il sistema in figura producesse una portata d'acqua dal foro in basso pari a Q con il serbatoio aperto, quanto deve valere la pressione dell'aria p_1 affinché la portata risulti $3.1Q$? Dato: $h = 2.52$ m.

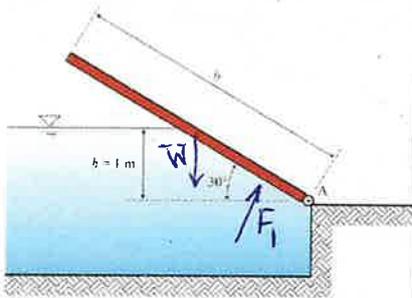


Serbatoio aperto: $Q = \sqrt{2gh} A$

Serbatoio chiuso: $p_1 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q_{chiuso}}{A} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho (3.1 \sqrt{2gh})^2 = 9.61 \rho g h$

$\rightarrow p_{1\text{gauge}} = 8.61 \rho g h = 2.13 \times 10^5 \text{ Pa}$ ($\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Es. 2. Una paratoia di massa $M = 1000$ kg è incernierata in A. La profondità della paratoia è pari a 8 m. Il liquido a sinistra è acqua. Quanto vale b affinché il sistema rimanga in equilibrio come in figura?



$F_1 = \rho g \frac{h}{2} \left(\frac{h}{\sin 30^\circ} w \right) = 9810 \times 8 = 78480 \text{ N}$

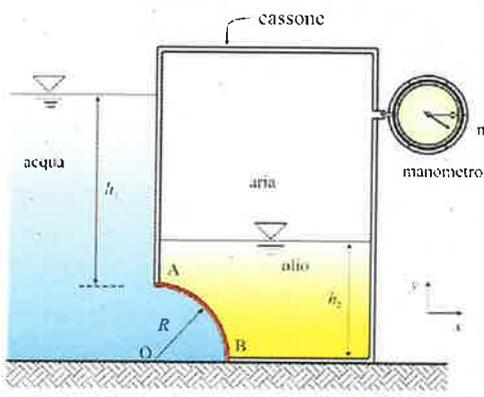
$W_{\text{paratoia}} = Mg = 9810 \text{ N}$

Bilancio i momenti rispetto ad A:

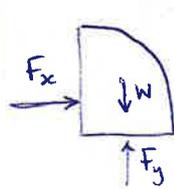
$F_1 \frac{h}{3 \sin 30^\circ} = W_{\text{paratoia}} \frac{b}{2} \cos 30^\circ$

$b = 12.31 \text{ m}$

Es. 3. L'aria nel cassone pressurizzato, di profondità unitaria, è pari a $p_{\text{gauge}} = 0.2$ bar. Determinare modulo, verso e retta di applicazione della spinta esercitata sulla paratia a quarto di cerchio AB. Dati: $\gamma_{\text{olio}} = 8000 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{\text{acqua}} = 9800 \text{ N/m}^3$, $h_1 = 3$ m, $h_2 = 2$ m, $R = 1.5$ m.



H_2O

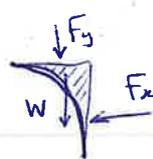


$F_x = \int_{h_2}^{h_1+R} \rho g (h_1 + \frac{R}{2}) R \cdot 1 = 55125 \text{ N}$

$W = \rho g \frac{\pi R^2}{4} \cdot 1 = 17318 \text{ N}$

$F_y = \rho g \int_{h_2}^{h_1+R} (h_1 + R) R \cdot 1 = 60450 \text{ N}$

$olio$



$F_x = \left[p_{\text{gauge}} + \rho_{\text{olio}} g \left(h_2 - \frac{R}{2} \right) \right] R = 45000 \text{ N}$

$F_y = \left[p_{\text{gauge}} + \gamma_{\text{olio}} (h_2 - R) \right] R = 36000 \text{ N}$

$W_{\text{olio}} = \gamma_{\text{olio}} \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4} \right) \cdot 1 = 3863 \text{ N}$

$H_2O: F_H = 55125 \text{ N} \quad F_V = 48832 \text{ N}$

$olio: F_H = -45000 \text{ N} \quad F_V = -39863 \text{ N}$

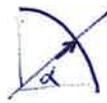
Forze totale sulla paratia \widehat{AB} :

x: $F_{x\text{TOT}} = 10125 \text{ N}$ verso dx

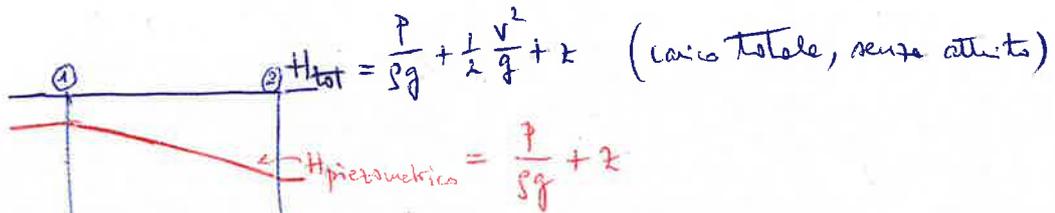
y: $F_{y\text{TOT}} = 8969 \text{ N}$ verso l'alto

retta d'azione per O,

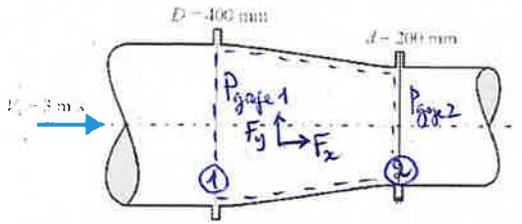
modulo pari a 13526 N



$\alpha = \arctan \frac{F_{y\text{TOT}}}{F_{x\text{TOT}}} = 41.53^\circ$



Es. 4. Nella riduzione tronco-conica di figura fluisce un olio con $SG = 0.8$. La pressione relativa nella sezione maggiore è 88 kPa , e la pressione assoluta nella sezione ristretta è 109 kPa . Il volume della riduzione è $V = 0.6 \text{ m}^3$. Calcolare la spinta del fluido sulle flange della riduzione, tenendo conto del peso del fluido e fare uno sketch della linea del carico piezometrico e del carico totale.



$$P_{\text{gage1}} = 88 \text{ kPa} \quad P_{\text{gage2}} = 7.7 \text{ kPa}$$

$$\dot{m} = \rho_{\text{olio}} V_1 A_1 = 302 \text{ kg/s} \quad P_{\text{atm}} = 101300 \text{ Pa}$$

$$x: F_x + P_{\text{gage1}} A_1 - P_{\text{gage2}} A_2 = \dot{m} (v_2 - v_1)$$

$$v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_2 = v_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

↑ forze sul fluido, trascurati attriti

$F_x = -8102 \text{ N}$ La spinta del fluido ha componente in x verso dx pari a 8102 N

$y: F_y - W = 0 \quad F_y = +W = +\int_{\text{olio}} V g = +4709 \text{ N}$. La reazione del fluido è verso il basso ed ha modulo pari a 4709 N .

Es. 5. La velocità Euleriana bidimensionale di un moto fluido è data in un sistema cartesiano da $u = -V_0 y / (x^2 + y^2)^{1/2}$, $v = V_0 x / (x^2 + y^2)^{1/2}$, con V_0 costante. In quali punti dello spazio la velocità ha modulo uguale a V_0 ? Si calcoli l'equazione delle linee di corrente e delle traiettorie (i.e. $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$).

$$u = -V_0 \frac{r \sin \theta}{r} = -V_0 \sin \theta \quad v = \frac{V_0 r \cos \theta}{r} = V_0 \cos \theta$$

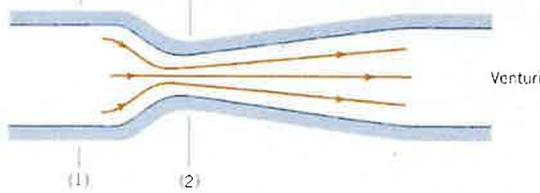
$$u_r = u \cos \theta + v \sin \theta = 0$$

$$u_\theta = v \cos \theta - u \sin \theta = V_0$$

La velocità è solo azimutale (le traiettorie coincidono con le linee di corrente e sono circolari) e il modulo è dappertutto $= V_0$

Traiettorie: $r u_r dt = u_\theta dr = 0 \quad dr = 0 \quad r = \text{cost.}; \quad r d\theta = u_\theta dt \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \frac{V_0}{r_0} (t - t_0)$

Es. 6. Si mostri come, misurando le pressioni relative nelle sezioni 1 e 2 di un tubo di Venturi, si possa ottenere un'espressione per la portata volumetrica. Ipotesi: moto incomprimibile.

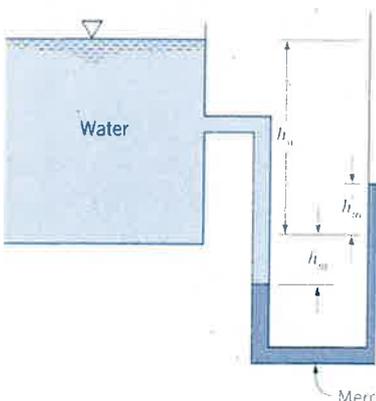


$$P_{\text{gage1}} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 = P_{\text{gage2}} + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q}{A_2}\right)^2$$

$$Q^2 \left[\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1^2 A_2^2} \right] = \frac{2}{\rho} (P_2 - P_1)$$

$$Q = \left[\frac{2}{\rho} (P_2 - P_1) \frac{A_1^2 A_2^2}{A_2^4 - A_1^4} \right]^{1/2}$$

Es. 7. Il manometro a mercurio ($SG_{\text{Hg}} = 13.6$) di figura è collegato ad un largo serbatoio d'acqua. Si determini il rapporto h_w/h_m .



$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} g (h_w + h_m) = \rho_{\text{H}_2} g (2 h_m)$$

$$h_w + h_m = 2 SG_{\text{Hg}} h_m$$

$$h_w = 26.2 h_m$$

$$\frac{h_w}{h_m} = 26.2$$