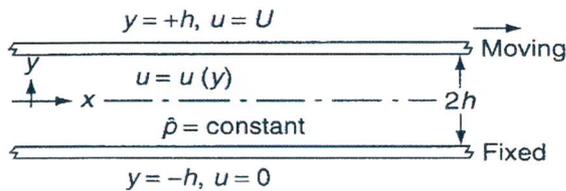


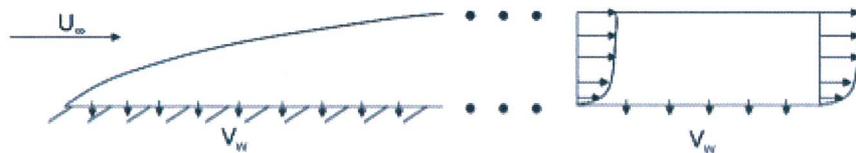
## COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 29 maggio 2018 – fila A



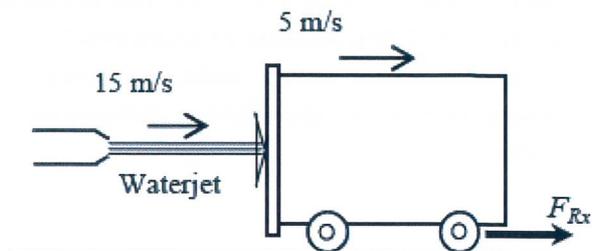
**Esercizio 1.** Si consideri il problema del flusso di Couette tra due lastre piane parallele (vedi figura), in cui esiste solo  $u = u(y)$  e  $v = 0$ , assumendo che il fluido sia non-newtoniano con legge di potenza:  $\tau_{xy} = K (du/dy)^n$ , con  $K$  una costante e  $n$  un parametro,  $n \neq 1$ . Ipotizzando che la pressione del fluido tra le due lastre sia costante e che non siano presenti forze di massa, si trovi la distribuzione di velocità nel piano x-y di figura, e si paragoni alla soluzione Newtoniana.

**Esercizio 2.** Un sottile disco circolare di alluminio ( $\rho_{\text{alluminio}} = 2700 \text{ kg/m}^3$ ) di diametro  $d$  e spessore  $t = d/10$  cade in un bagno di glicerina ( $\rho_{\text{glicerina}} = 1300 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_{\text{glicerina}} = 1.5 \text{ Pa s}$ ) mantenendosi sempre con la sezione circolare perpendicolare alla direzione della gravità. Si può dimostrare che nell'ipotesi di moto di Stokes la resistenza al moto è pari a  $D = 8 \mu U d$ , con  $U$  la velocità di caduta. Qual è il diametro massimo del disco per il quale l'approssimazione di Stokes resta accettabile? E quanto vale la velocità corrispondente?

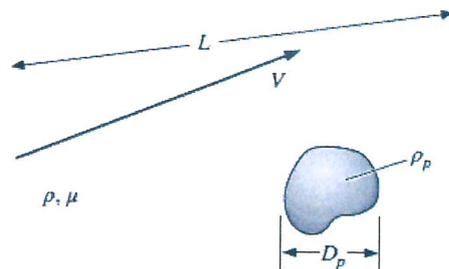
**Esercizio 3.** Si usino le equazioni di Prandtl dello strato limite incomprimibile per studiare il cosiddetto *strato limite di aspirazione asintotica* (vedasi figura) in assenza di gradiente di pressione. La parete è porosa e la condizione al contorno da impiegare alla parete in  $y = 0$  è  $u = 0$ ,  $v = -V_w$ , con  $V_w$  una velocità di aspirazione costante. Cosa succede nella prima parte dello strato limite (parte sinistra della figura)? A partire da una certa distanza dal bordo di attacco in poi, lo strato limite diventa completamente sviluppato dal punto di vista idrodinamico. In tale regione si chiede di calcolare le componenti del campo di velocità,  $\mathbf{u} = (u, v)$ , e di scrivere le espressioni dello sforzo di parete,  $\tau_w$ , e dello spessore di strato limite,  $\delta_{99}$ . Si calcolino infine gli spessori di spostamento e di quantità di moto.



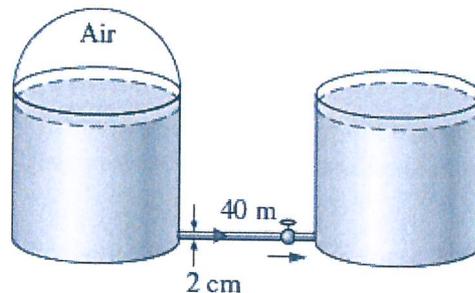
**Esercizio 4.** Dell'acqua esce da un ugello alla velocità di 15 m/s e impatta sulla superficie verticale posteriore di un carrello che si muove orizzontalmente alla velocità costante di 5 m/s. La portata d'acqua in uscita dall'ugello (in termini di un sistema di riferimento assoluto, solidale con il suolo) è pari a 25 kg/s. Si determini la forza  $F_{Rx}$  (modulo, direzione e verso) che deve essere applicata dai freni del carrello per evitare che acceleri, e la potenza dissipata dai freni.



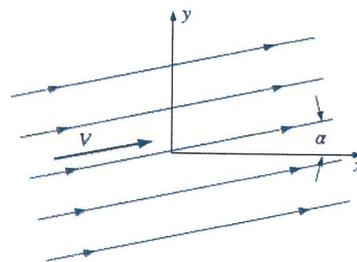
**Esercizio 5.** Una particella molto piccola di densità  $\rho_p$  e la cui dimensione caratteristica è  $D_p$  si muove in un fluido di densità  $\rho$  e viscosità  $\mu$ . Il fluido a sua volta ha una velocità caratteristica  $V$  e una taglia caratteristica  $L$  (ad esempio la taglia dei grandi vortici). Facendo il bilancio di forze sulla particella, si giustifichi con l'analisi dimensionale che la scala di tempo caratteristica (detta *tempo di rilassamento della particella*) della particella ha la forma:  $\tau_p = \rho_p D_p^2 / (18 \mu)$ . Si impieghino  $V$  ed  $L$  per normalizzare  $\tau_p$  e si discuta il parametro adimensionale risultante.



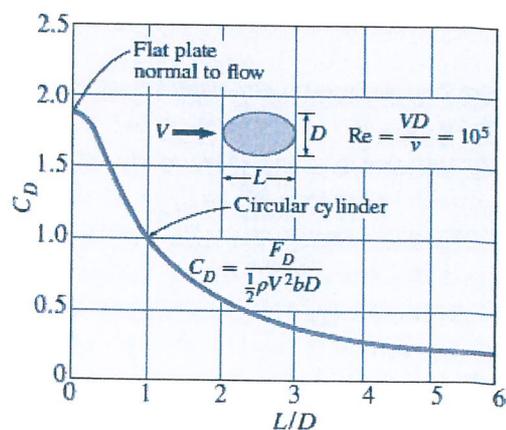
**Esercizio 6.** Due serbatoi A e B sono collegati tramite un condotto in ghisa (*cast iron*) lungo 40 m, di diametro pari a 2 cm, e con un imbocco ed uno sbocco a spigoli vivi ( $K_{L\text{imbocco}} = 0.5$ ;  $K_{L\text{sbocco}} = 1$ ). Nel condotto sono inoltre presenti valvole caratterizzate da  $\Sigma K_{L\text{valvole}} = 2.2$ . I livelli dell'acqua nei due serbatoi sono uguali; il serbatoio A viene mantenuto in pressione con aria compressa, mentre il serbatoio B è aperto all'atmosfera con  $P_B = 95$  KPa. Se la portata iniziale di acqua è pari a 1.5 l/s, si determini la pressione assoluta dell'aria nel serbatoio A. Dati:  $\rho_{\text{acqua}} = 1000$  Kg/m<sup>3</sup>;  $\mu_{\text{acqua}} = 1.307 \times 10^{-3}$  Pa s.



**Esercizio 7.** Per il moto uniforme, incomprimibile, piano ed irrotazionale di figura si derivino le funzioni potenziale di velocità e di corrente.



**Esercizio 8.** Un cilindro ellittico viene posto in galleria del vento ( $\rho = 1.225$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu = 1.81 \times 10^{-5}$  Pa s) con una corrente in moto a 50 m/s. Sapendo che  $L = 6$  cm,  $D = 3$  cm e  $b = 2$  m, quanto vale la resistenza  $F_D$ ? Se si ruotasse il cilindro di 90° quale sarebbe il nuovo valore della resistenza? Si commentino e si giustifichino fisicamente i risultati trovati.



A1. Eq. di Cauchy:  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\sigma}$

Proiettato in x:  $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$

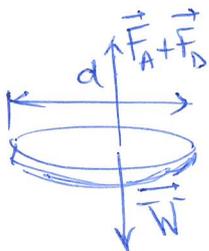
$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{du}{dx} = -p \quad \rightarrow$   
 $\sigma_{xy} = \tau_{xy} = k \left( \frac{du}{dy} \right)^n$   
 $-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d}{dy} \left[ k \left( \frac{du}{dy} \right)^n \right] = 0$   
 NON c'è GRAD PRESSIONE

$k \left( \frac{du}{dy} \right)^n = A \quad \frac{du}{dy} = \left( \frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = B \quad \rightarrow \boxed{u = By + C}$

stessa soluzione del caso newtoniano

$y = -h : u = 0 \quad -Bh + C = 0$   
 $y = h : u = U \quad Bh + C = U \quad \rightarrow C = \frac{U}{2}, B = \frac{U}{2h}$

A2. Assumiamo moto di Stokes:



$(\rho_{al} - \rho_{gl}) g \left( \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d}{10} \right) = 8\mu U d$

$1400 \times 9.81 \times \frac{\pi d^3}{40} \cdot \frac{\rho_{gl}}{8\mu_{gl}^2} = \frac{\rho_{gl} U d}{\mu_{gl}} = Re \lesssim 1$

$d^3 \lesssim \frac{320 \times (1.5)^2}{1400 \times 9.81 \times \pi \times 1300}$

↑  
affinchè  
valga Stokes

$d_{max} \approx 2.34 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad U = 0.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

A3. Nella parte iniziale lo strato limite si sviluppa, fino a che - a partire da una certa distanza dal bordo di attacco - il moto non diventa invariante in x. E' questa regione che ci interessa.

Eq. di Prandtl :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \rightarrow v = \text{cost} \rightarrow v = -V_w \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & -\frac{V_w}{\nu} \frac{du}{dy} = \frac{d^2 u}{dy^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dy} = A e^{-\frac{V_w}{\nu} y} \quad u = -\frac{A\nu}{V_w} e^{-\frac{V_w}{\nu} y} + C$$

$$\begin{aligned} y=0 \rightarrow u=0 &= -\frac{A\nu}{V_w} + C \\ y \rightarrow \infty \rightarrow u=U_\infty &= C \end{aligned} \quad \rightarrow u = U_\infty \left[ 1 - e^{-\frac{V_w}{\nu} y} \right]$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu A e^{-\frac{V_w}{\nu} y} \Big|_{y=0} = \mu A = \rho \nu \frac{U_\infty V_w}{\nu} = \rho U_\infty V_w$$

Quando  $y = \delta_{99}$  si ha  $u = 0.99 U_\infty$

$$0.99 U_\infty = U_\infty \left[ 1 - e^{-\frac{V_w}{\nu} \delta_{99}} \right]$$

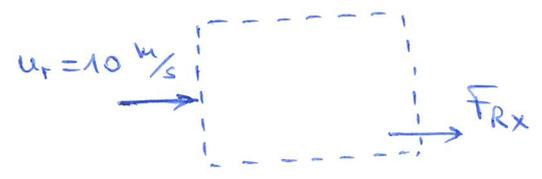
$$\rightarrow -\frac{V_w \delta_{99}}{\nu} = \ln 0.01 \quad \delta_{99} = 4.605 \frac{\nu}{V_w}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy = \int_0^\infty e^{-\frac{V_w}{\nu} y} dy = -\frac{\nu}{V_w} \left( e^{-\frac{V_w}{\nu} y} \Big|_0^\infty \right) = \frac{\nu}{V_w}$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy = \int_0^\infty e^{-\frac{V_w}{\nu} y} - e^{-2\frac{V_w}{\nu} y} dy = 0.5 \frac{\nu}{V_w}$$

A4.

Lavoro in termini di velocità relative :  $\vec{u}_r = \vec{u} - \vec{u}_{cv}$





A6.

$$\dot{V} = 1.5 \frac{l}{s} \rightarrow \dot{m} = 1.5 \frac{kg}{s}$$

$$\bar{V} = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} = \frac{6 \times 10^{-3}}{\pi (0.02)^2} = 4.77 \frac{m}{s} \text{ (velocità media)}$$

Eq. dell'energia tra i due poli liberi nei serbatoi (con  $z_A = z_B$ ):

$$p_A + \underbrace{\frac{1}{2} \rho \bar{V}_A^2}_{\text{trascurabile}} + \rho g z_A = p_B + \underbrace{\frac{1}{2} \rho \bar{V}_B^2}_{\text{trascur.}} + \rho g z_B + \rho g h_L$$

$$\text{con } h_L = f \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} + \sum K_L \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

$$\rightarrow p_A = p_B + \left( f \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \rho \frac{\bar{V}^2}{2}$$

$$Re = \frac{\bar{V} D}{\nu} = \frac{4.77 \times 0.02}{1.307 \times 10^{-6}} = 7.3 \times 10^4$$

Chiusa:  $\epsilon = 0.26 \text{ mm} \rightarrow \frac{\epsilon}{D} = \frac{0.26}{20} = 0.013 \rightarrow f \approx 0.041$   
(da Moody)

$$p_A = 95 \times 10^3 + \left( 0.041 \frac{40}{0.02} + 3.7 \right) 500 (4.77)^2 = 0.95 \times 10^5 + 9.75 \times 10^5 = 1.07 \times 10^6 \text{ Pa}$$

A7.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V \cos \alpha \rightarrow \phi = V \cos \alpha x + f(y) \quad \text{for } \phi = V(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = V \sin \alpha \rightarrow \phi = V \sin \alpha y + g(x) \quad \text{trascuro la costante}$$

$$V \cos \alpha = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \psi = Vy \cos \alpha + h(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{dh}{dx} = V \sin \alpha \quad h = -Vx \sin \alpha + \text{cost}$$

$$\rightarrow \psi = V(y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad \text{(trascuro la costante)}$$

A8.

$$\frac{L}{D} = 2$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{50 \times 0.03}{1.478 \times 10^{-5}} \approx 10^5 \quad \text{posso usare il grafico}$$

$$C_D \approx 0.6 \rightarrow F_D = C_D \frac{1}{2} \rho V^2 b D =$$

$$\frac{0.6}{2} 1.225 \times 50^2 \times 2 \times 0.03 = 55.1 \text{ N}$$

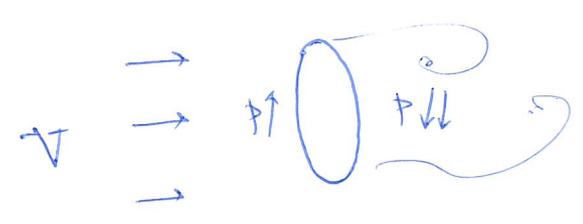
Se il cilindro fosse ruotato di 90°  $L \rightleftharpoons D$

$$\frac{L}{D} = 0.5 \quad Re = \frac{50 \times 0.06}{1.478 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^5 \quad \text{non posso usare il grafico!}$$

Supponiamo che il grafico rimanga valido ...

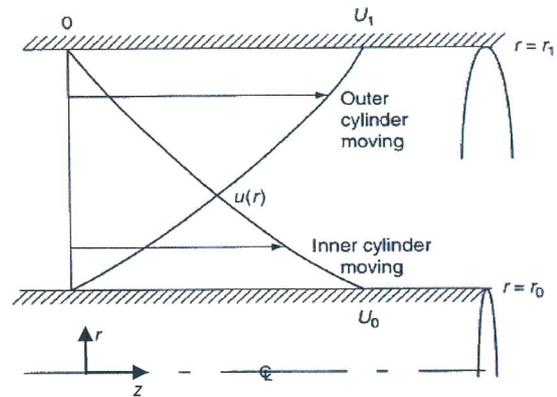
$$C_D \approx 1.5 \rightarrow F_D = \frac{1.5}{2} 1.225 \times 50^2 \times 2 \times 0.06 = 275.6 \text{ N}$$

La resistenza è molto più grande. Aumenta perché aumenta la resistenza di forma, legata alla forte depressione che si crea dietro il cilindro quando la situazione è:



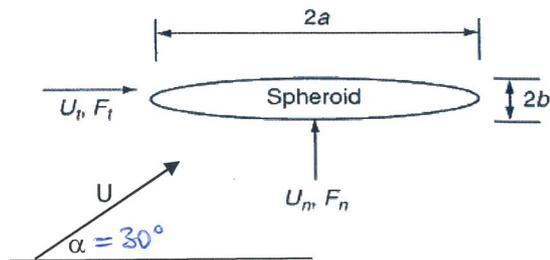
## COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 29 maggio 2018 – fila B

**Esercizio 1.** Si considerino due lunghi cilindri coassiali con un fluido viscoso contenuto nell'interstizio tra i due cilindri. Si può immaginare che il cilindro interno ( $r = r_0$ ) sia in moto lungo la direzione  $z$  a velocità  $U_0$ , oppure che il cilindro esterno ( $r = r_1$ ) si sposti a velocità  $U_1$  (cf. la figura). Si studi questo moto (noto come flusso di Couette assiale) nei casi in cui entrambi i cilindri si muovono, nei tre casi seguenti: (a)  $U_1 = U_0$ , (b)  $U_1 = -U_0$ , (c)  $U_1 = 2U_0$ .

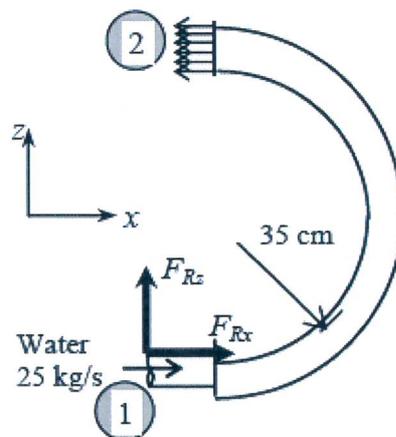


**Esercizio 2.** Lo sferoide di figura viene investito da una corrente a velocità  $U$  che forma un angolo  $\alpha$  con l'asse di rivoluzione (orizzontale in figura) dello sferoide. Le componenti tangenziale e normale della velocità che investe lo sferoide sono quindi pari a  $U_t = U \cos(\alpha)$  e  $U_n = U \sin(\alpha)$ . Nell'ipotesi di moto di Stokes la componente normale della forza è  $F_n = C_n \mu U_n b$ , mentre la componente tangenziale è  $F_t = C_t \mu U_t b$ , con i coefficienti numerici  $C_t$  e  $C_n$  che valgono:  $C_t \approx 6\pi \frac{4+a/b}{5}$  e  $C_n \approx 6\pi \frac{3+2a/b}{5}$ . Le espressioni di  $C_t$  e  $C_n$  sembrano ragionevoli? Spiegare. Calcolare il modulo della forza resistente nell'ipotesi in cui il fluido sia glicerina ( $\rho_{\text{glicerina}} = 1300 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_{\text{glicerina}} =$

$1.5 \text{ Pa s}$ ), lo sferoide abbia dimensioni  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 0.2 \text{ cm}$ , e la velocità della corrente sia pari a  $U = 5 \text{ cm/s}$ . Si spieghi il ragionamento che si è seguito e si giustifichi l'uso dell'approssimazione di Stokes.

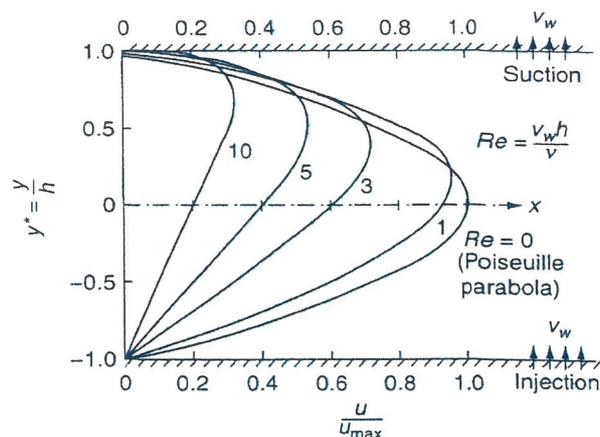


**Esercizio 3.** Un raccordo ad U di raggio di curvatura pari a 35 cm viene usato per invertire il senso di una portata d'acqua pari a 25 kg/s, con sbocco nell'atmosfera (sezione 2). Il diametro del condotto nel raccordo è pari a 10 cm. Si determini la forza di ancoraggio  $F_R = (F_{Rx}, F_{Rz})$  necessaria a mantener fermo il gomito (in modulo, direzione e verso), sapendo che i coefficienti di ragguglio del flusso di quantità di moto valgono  $\beta = 1.03$  sia in ingresso (sezione 1) che in uscita. Si trascuri il peso del condotto e dell'acqua in esso contenuta.



**Esercizio 4.** Due condotti, A e B, di stessa lunghezza e stesso materiale sono connessi in parallelo. Il diametro del condotto A è il doppio del diametro del condotto B. Assumendo che il coefficiente di attrito sia lo stesso nei due casi, e trascurando le perdite concentrate, si determini il rapporto tra le portate volumetriche  $\dot{V}$  nei due condotti.

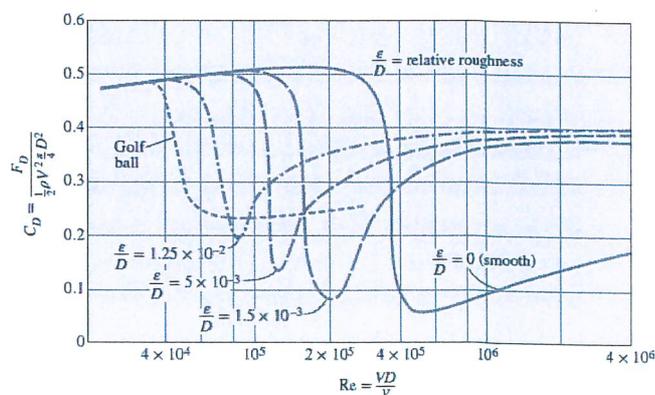
**Esercizio 5.** Si consideri il moto tra due lastre porose in  $y = \pm h$  generato da un gradiente di pressione costante  $dp/dx$ . Su tutta la parete inferiore c'è un'iniezione costante di fluido e su tutta la parete superiore c'è un'aspirazione costante (vedasi figura); su entrambi le pareti si può anche assumere che  $u = 0$ . Si scrivano le equazioni del moto, nell'ipotesi di moto completamente sviluppato; si provi a risolvere l'equazione differenziale risultante per la componente  $u$  del vettore velocità, sapendo che un'equazione differenziale non omogenea come quella che risulta ha per soluzione la somma della soluzione dell'equazione omogenea associata, più una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.



**Esercizio 6.** Un condotto ha sezione trasversale rettangolare, con i lati che misurano 1 m e 0.5 m. Lo si vuole usare per trasportare acqua alla portata di  $\dot{V}_p = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ . Si propone di costruire dapprima un modello di più piccole dimensioni, e di determinare, tramite esperimenti, le caratteristiche della pompa necessaria per il condotto di dimensioni reali. La pompa disponibile per l'esperimento in scala sul modello eroga acqua con una portata  $\dot{V}_m = 0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ . Calcolare la scala geometrica di riduzione del modello. Gli esperimenti sul modello appena trovato portano ad un gradiente di pressione pari a  $\Delta P_{L,m}/L_m = 30\,000 \text{ Pa/m}$  (con  $L_m$  la lunghezza del condotto nel modello). Calcolare il gradiente di pressione  $\Delta P_{L,p}/L_p$  nel prototipo.

**Esercizio 7.** Si scriva l'espressione della doppietta che si ottiene avvicinando sull'origine una sorgente ed un pozzo (di uguale portata) che si trovano sull'asse  $y$  nei punti  $(0, \pm b)$ . Si definisca l'intensità della doppietta nel limite per  $\dot{V}/L$  molto grande e " $b$ " molto piccolo.

**Esercizio 8.** Una palla da golf colpita verso la buca ( $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 1.81 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$ ) sperimenta una forza resistente  $F_D = 0.094 \text{ N}$  durante il volo. Se la pallina ha diametro pari a 5 cm, a che velocità sta muovendosi? E se la forza fosse 1.051 N quanto varrebbe la velocità?



B1.

Esiste solo una distribuzione omica di velocità, indotta dal moto delle pareti, in assenza di gradienti di pressione.

$$\int \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

permanente
 $u_r=0$ 
assialsim.
complet. sviluppato
P cost
assialsim.
complet. svilupp.

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right) = 0 \rightarrow r \frac{du_z}{dr} = A \rightarrow u_z = A \ln r + B = A \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) + \bar{B}$$

(ponendo  $B = \bar{B} - A \ln r_0$ )

$$\begin{aligned} r=r_0 : u=U_0 &= A \ln \left( \frac{r_0}{r_0} \right) + \bar{B} \\ r=r_1 : u=U_1 &= A \ln \left( \frac{r_1}{r_0} \right) + \bar{B} \end{aligned} \rightarrow A = \frac{U_1 - U_0}{\ln \left( \frac{r_1}{r_0} \right)}, \quad \bar{B} = U_0$$

$$\Rightarrow u_z = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{\ln \left( \frac{r_1}{r_0} \right)} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right)$$

- (a)  $U_1 = U_0 \quad u_z = U_0$
- (b)  $U_1 = -U_0 \quad u_z = U_0 \left( 1 - 2 \frac{\ln r/r_0}{\ln r_1/r_0} \right)$
- (c)  $U_1 = 2U_0 \quad u_z = U_0 \left( 1 + \frac{\ln r/r_0}{\ln r_1/r_0} \right)$

B2.

I coef.  $C_f$  e  $C_m$  sono ragionevoli nel limite  $a \rightarrow b$ , perché per una sfera si ha  $C = 6\pi$ . Siccome il problema di Stokes è lineare, calcolo  $F_m$  ed  $F_t$  indipendentemente; li

posso poi sommare vettorialmente.

$$\frac{a}{b} = 5 \begin{cases} C_m = \frac{78}{5} \pi & U_m = U \sin \alpha = \frac{U}{2} = 0.025 \frac{m}{s} \\ C_t = \frac{54}{5} \pi & U_t = U \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} U = 0.0433 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$F_m = C_m \mu U_m b = \frac{78}{5} \pi \times 1.5 \times 0.025 \times 2 \times 10^{-3} = 3.67 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_t = C_t \mu U_t b = \frac{54}{5} \pi \times 1.5 \times 0.0433 \times 2 \times 10^{-3} = 4.41 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$\rightarrow F = \sqrt{F_m^2 + F_t^2} = 5.74 \times 10^{-3}$$

B3.

$\vec{F}_R = (F_{Rx}, F_{Rz})$  e' la forza esterna, di ancoraggio, applicata al gomito.

$$\vec{F}_R + p_{gauge 1} A \vec{e}_x = \rho \dot{m} (\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})$$

$$F_{Rz} = 0 \quad (\text{trascurando i pesi})$$

$$F_{Rx} + p_{gauge 1} \frac{\pi d^2}{4} = \rho \dot{m} (-v_2 - v_1)$$

$$v_1 = v_2 = \frac{4 \dot{m}}{\rho \pi d^2} = 3.183 \frac{m}{s}$$

$$p_{gauge 1} + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \underbrace{p_{gauge 2}}_{\text{ATMOSFERA}} + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

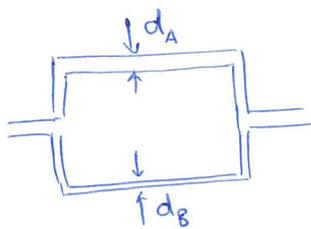
$v_1 = v_2$  perché la sezione non varia

$$p_{gauge 1} = \rho g (z_2 - z_1) = 1000 \times 9.81 \times 0.7 = 6867 \text{ Pa}$$

$$F_{Rx} = 1.03 \times 25 (-2 \times 3.183) - 6867 \frac{\pi (0.1)^2}{4} = -217.86 \text{ N}$$

Il verso di  $F_{Rx}$  e' opposto a quello di figura.

B4.



$$d_A = 2 d_B$$

$$l_A = l_B, \epsilon_A = \epsilon_B, f_A = f_B \quad K_L \text{ trascurabile}$$

$$\Delta P_A = \Delta P_B = f_A \frac{l_A}{d_A} \frac{\rho v_A^2}{2} = f_B \frac{l_B}{d_B} \frac{\rho v_B^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{v_A^2}{d_A} = \frac{v_B^2}{d_B} \rightarrow \left( \frac{\pi d_A^2}{4} \right)^2 v_A^2 \frac{1}{d_A^5} = \left( \frac{\pi d_B^2}{4} \right)^2 v_B^2 \frac{1}{d_B^5}$$

$$\frac{\dot{V}_A^2}{d_A^5} = \frac{\dot{V}_B^2}{d_B^5} \quad \frac{\dot{V}_A}{\dot{V}_B} = \left( \frac{d_A}{d_B} \right)^{5/2} = 5.657$$

$\frac{dp}{dx} \text{ cost.}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  (moto completamente irrotazionale)

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$  (moto stazionario)

1)  $u_x + v_y = 0 \rightarrow v_y = 0 \rightarrow v = \text{cost} \rightarrow v = v_w$  per la condizione di parete

2)  $\int \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$

$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = + \int v_w \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\int v_w \frac{du}{dy} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$u = 0 \quad @ \quad y = \pm h$$

3)  $\int \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} - \int v_w \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx}$

$u^* = \frac{u}{u_{max}} \quad (x^*, y^*) = \frac{(x, y)}{h} \quad p^* = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho v_w^2}{2}}$

$\mu \frac{u_{max}}{h^2} \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} - \int v_w \frac{u_{max}}{h} \frac{du^*}{dy^*} = \frac{\int u_{max}^2}{h} \frac{dp^*}{dx^*}$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} - Re \frac{du^*}{dy^*} = \frac{u_{max}}{v_w} Re \frac{dp^*}{dx^*} \\ u^* = 0 \quad @ \quad y^* = \pm 1 \end{cases} \quad \text{con } Re = \frac{v_w h}{\nu}$

Eq. omogenea associata:  $\frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} - Re \frac{du^*}{dy^*} = 0 \rightarrow \frac{du^*}{dy^*} = \tilde{A} e^{Re y^*}$

$u_h^* = \frac{\tilde{A}}{Re} e^{Re y^*} + \tilde{B} = A e^{Re y^*} + \tilde{B}$

Soluzione particolare del sistema non-omogeneo:

$u_p^* = -\frac{u_{max}}{v_w} \frac{dp^*}{dx^*} y^* + C$

Soluzione completa: 
$$u^* = A e^{Re y^*} - \frac{u_{max}}{v_w} \frac{dp^*}{dx^*} y^* + B \quad (B = \tilde{B} + C)$$

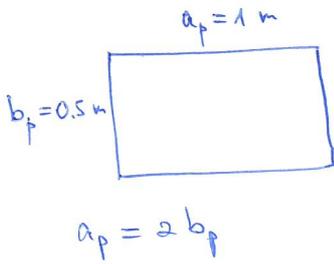
$y^* = 1 : 0 = A e^{Re} - \frac{u_{max}}{v_w} \frac{dp^*}{dx^*} + B$

$y^* = -1 : 0 = A e^{-Re} + \frac{u_{max}}{v_w} \frac{dp^*}{dx^*} + B$

$$A = \frac{u_{max}}{v_w} \frac{dP^*}{dx^*} \frac{1}{\sinh(Re)}$$

$$B = -\frac{u_{max}}{v_w} \frac{dP^*}{dx^*} \coth(Re)$$

B6



$$d_{hp} = \frac{4 A_p}{P} = \frac{4 a_p b_p}{2(a_p + b_p)} = 2 \frac{a_p b_p}{a_p + b_p} = \frac{2}{3} a_p$$

$$Re_p = \frac{v_p d_{hp}}{\nu} = \frac{v_p}{\nu} \frac{2}{3} a_p$$

$$\dot{V}_p = 2 \frac{m^3}{s} \rightarrow v_p = \frac{\dot{V}_p}{a_p b_p} = \frac{2}{0.5} = 4 \frac{m}{s}$$

$$\dot{V}_m = 0.4 \frac{m^3}{s} \rightarrow v_m = \frac{\dot{V}_m}{a_m b_m} = \frac{\dot{V}_m}{\frac{a_m^2}{2}} = \frac{2 \dot{V}_m}{a_m^2}$$

perché il modello deve rispettare la similitudine geometrica del prototipo

Similitudine dinamica:  $Re_m = Re_p \quad \frac{v_m}{\nu} \left(\frac{2}{3} a_m\right) = \frac{v_p}{\nu} \left(\frac{2}{3} a_p\right)$

$$\rightarrow v_m a_m = v_p a_p$$

$$\frac{2 \dot{V}_m}{a_m} = v_p a_p = 4 \frac{m^2}{s} \rightarrow a_m = \frac{0.4}{2} = 0.2 \text{ m}$$

$$b_m = 0.1 \text{ m}$$

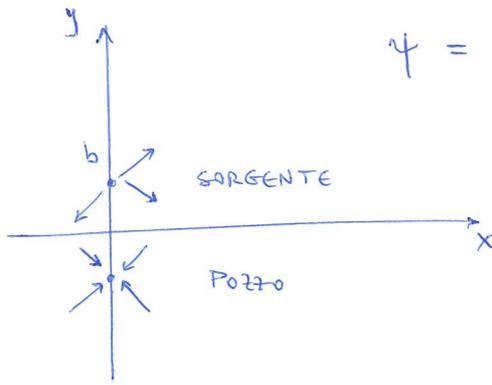
La scala geometrica  $\lambda = \frac{a_m}{a_p} = 1:5$ ; inoltre  $v_m = \frac{2 \times 0.4}{0.04} = 20 \frac{m}{s}$

$$\frac{\Delta P_{Lm}}{L_m} = f_m \frac{1}{d_{hm}} \frac{\rho v_m^2}{2} = 30000 \frac{Pa}{m} \rightarrow f_m = 0.02$$

Assumo che  $\frac{E}{dh}$  sia lo stesso in modello e prototipo  $\rightarrow$

$$f_p = f_m = 0.02 \rightarrow \frac{\Delta P_{Lp}}{L_p} = 0.02 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot 1} \frac{10^3 \cdot 4^2}{2} = 240 \frac{Pa}{m}$$

B7



$$\psi = \frac{\dot{V}/L}{2\pi} \theta_1 + \frac{-\dot{V}/L}{2\pi} \theta_2$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{y-b}{x} \right) \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{y+b}{x} \right)$$

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = \tan (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$= \frac{\frac{y-b}{x} - \frac{y+b}{x}}{1 + \frac{y^2 - b^2}{x^2}} = \frac{-2bx}{x^2 + y^2 - b^2}$$

$$\tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} = -\frac{2br \cos \theta}{r^2 - b^2}$$

$$\text{Se } \dot{V}/L \rightarrow \infty : \tan \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} \rightarrow \frac{2\pi\psi}{\dot{V}/L} \Rightarrow \psi = -\frac{\dot{V}/L}{2\pi} \frac{2br \cos \theta}{r^2 - b^2}$$

Prendo il limite per  $b \rightarrow 0$  di modo che  $\frac{\dot{V}/L}{\pi} b = k = \text{intensità della doppietta}$

$$\rightarrow \psi = -\frac{k \cos \theta}{r}, \quad \phi = -\frac{k \sin \theta}{r}$$

B8

$$F_D = 0.094 \text{ N}, \quad D = 5 \text{ cm}$$

$$C_D = \frac{8 F_D}{\rho v^2 \pi D^2} = \dots = \frac{8 \rho F_D}{\pi \mu^2 Re^2} = \frac{8.95 \times 10^8}{Re^2}$$

$$\text{Per tentativi trovò che se } Re = 6 \times 10^4 \rightarrow C_D = \frac{8.95}{36} = 0.25$$

che coincide con il valore del grafico, per cui  $v = 17.73 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

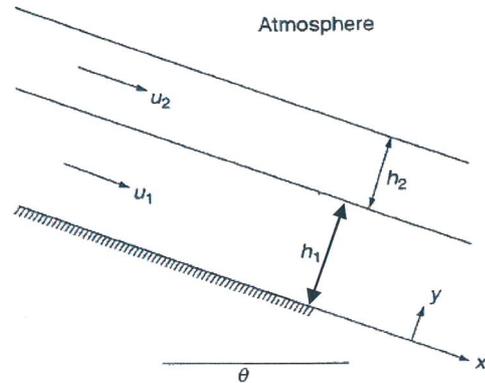
$$\text{Per } F_D = 1.051 \text{ N} \rightarrow C_D = \frac{10^{10}}{Re^2}$$

Se  $Re = 2 \times 10^5 \rightarrow C_D = 0.25$  che coincide con il valore del

grafico e che fornisce  $v = Re \frac{\mu}{\rho D} = 59.10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

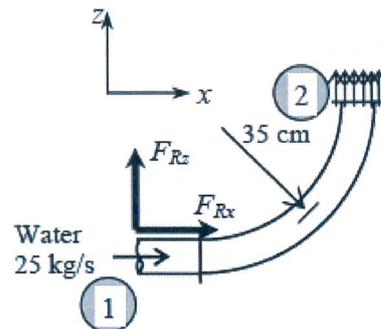
## COMPITO DI MECCANICA DEI FLUIDI – 29 maggio 2018 – fila C

**Esercizio 1.** Si consideri un film di spessore costante, formato da due liquidi non mescolabili sovrapposti l'uno sull'altro, di densità e viscosità pari a  $(\rho_1, \mu_1)$  e  $(\rho_2, \mu_2)$ . Il film scorre su un piano inclinato di un angolo  $\theta$  per effetto della gravità. L'atmosfera esercita una pressione costante sul film superiore ed uno sforzo tangenziale trascurabile. Si calcoli la distribuzione (laminare) di velocità nei due fluidi.

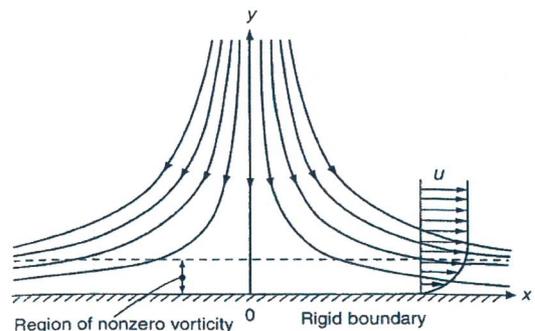


**Esercizio 2.** Una piccola sfera di alluminio ( $\rho_{\text{alluminio}} = 2600 \text{ kg/m}^3$ ) di diametro  $d$  cade in una mistura di acqua e glicerina ( $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu = 0.5 \text{ Pa s}$ ). Qual è il diametro massimo della sfera per il quale l'approssimazione di Stokes resta accettabile? E quanto vale la velocità corrispondente?

**Esercizio 3.** Un gomito a  $90^\circ$  di raggio di curvatura pari a 35 cm viene usato per far fuoriuscire verticalmente in atmosfera (sezione 2) una portata d'acqua pari a 25 kg/s. Il diametro del condotto nel gomito è pari a 12 cm. Si determini la forza di ancoraggio  $F_R = (F_{Rx}, F_{Rz})$  necessaria a mantener fermo il gomito (in modulo, direzione e verso), sapendo che i coefficienti di ragguglio del flusso di quantità di moto valgono  $\beta = 1.04$  sia in ingresso (sezione 1) che in uscita. Si trascuri il peso del condotto e dell'acqua in esso contenuta.



**Esercizio 4.** Il flusso bidimensionale, stazionario ed incomprimibile di figura si chiama moto di punto di ristagno (l'origine degli assi è il punto di ristagno). Si scrivano le equazioni di Navier Stokes per questo moto in termini della funzione di corrente  $\psi$ , e si assuma che  $\psi = A x f(y)$ , con A una costante. Si semplifichino le equazioni e si mostri che si arriva ad una ODE, cioè si giustifichi l'esistenza di una soluzione di similitudine (simile alla soluzione di Blasius) per questo problema, con l'ipotesi fatta per  $\psi$ .



**Esercizio 5.** Un corpo immerso è progettato per muoversi nell'olio alla velocità di 2 m/s. Un modello in scala ridotta 1:8 viene fatto funzionare in acqua e produce una forza resistente pari a  $F_D = 300$  N. A quale velocità deve funzionare il modello? Qual è la forza resistente sul corpo immerso in olio?

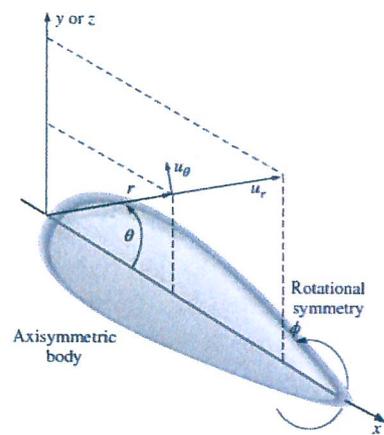
Dati:  $\rho_{olio} = 880$  kg/m<sup>3</sup>;  $\mu_{olio} = 0.082$  Pa s;  $\rho_{H_2O} = 998$  kg/m<sup>3</sup>;  $\mu_{H_2O} = 0.0009$  Pa s.

**Esercizio 6.** Della benzina ( $\rho = 680$  kg/m<sup>3</sup> e  $\nu = 4.29 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s) viene trasportata con portata di 240 l/s per una distanza pari a 2 km in un condotto la cui scabrezza superficiale è pari a 0.03 mm. Se la perdita di carico per attrito non deve essere superiore a 10 m, quanto vale il diametro minimo del condotto?

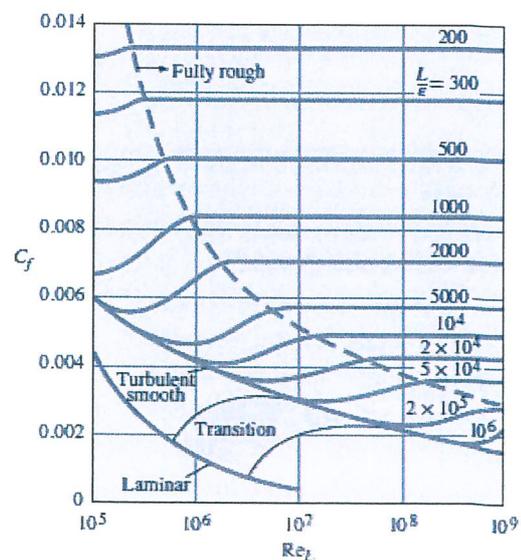
**Esercizio 7.** Si consideri un moto incomprimitibile espresso in coordinate polari sferiche ( $r, \phi, \theta$ ). Il moto è assialsimmetrico, cioè indipendente dalla variabile  $\phi$  (si veda la figura). L'equazione di continuità ha la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0.$$

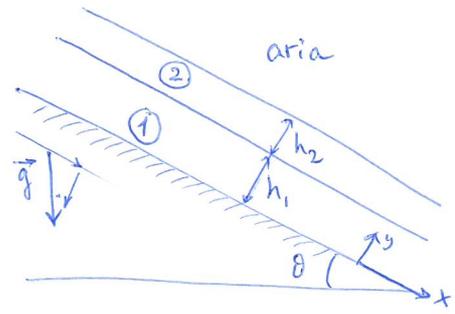
Si definisca una funzione di corrente  $\psi$  che soddisfa tale equazione (con  $\psi$  una funzione derivabile in  $r$  e  $\theta$ ). Data la componente lungo  $\phi$  della vorticità:  $\zeta_\phi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$ , si definisca una funzione potenziale di velocità nell'ipotesi di moto irrotazionale e si mostri che le linee equipotenziale sono ortogonali alle linee di corrente del moto.



**Esercizio 8.** Il coefficiente di attrito per il moto su una lastra piana lunga  $L = 1$  m, in assenza di gradiente di pressione esterno, si può esprimere come  $C_f = f(Re_L, L/\epsilon)$  [vedasi figura], con  $\epsilon = 2$  mm la scabrezza della lastra. Si fanno esperimenti in acqua ( $\rho_{H_2O} = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>;  $\mu_{H_2O} = 1.3 \times 10^{-3}$  Pa s) e si misura una resistenza al moto (per unità di profondità della lastra) pari a 150 N/m. A che velocità si sposta la lastra in acqua? La resistenza misurata è legata all'attrito o alla caduta di pressione tra la regione a monte e quella a valle della lastra?



C1.



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

L'eq. di continuita' e le eq. di quantita' di moto si applicano ai due fluidi, ① e

②, con le ipotesi:  $\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = f(x) \rightarrow v = \text{cost} \rightarrow v = 0 \quad (\text{condizione di parete})$$

$$\rho g \sin \theta + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \cos \theta \rightarrow p = -\rho g y \cos \theta + \text{cost.}$$

$$\begin{cases} p_1 = -\rho_1 g y \cos \theta + A \rightarrow -\rho_1 g h_1 \cos \theta + A = -\rho_2 g h_1 \cos \theta + B \\ p_2 = -\rho_2 g y \cos \theta + B \rightarrow p_{atm} = -\rho_2 g (h_1 + h_2) \cos \theta + B \end{cases}$$

$$B = p_{atm} + \rho_2 g (h_1 + h_2) \cos \theta \quad A = p_{atm} + (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) g \cos \theta$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g}{\nu} \sin \theta \rightarrow u = -\frac{g}{2\nu} \sin \theta y^2 + C_1 y + D$$

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{g}{2\nu_1} \sin \theta y^2 + C_1 y + D_1 & u_1(0) = 0 ; u_1(h_1) = u_2(h_2) ; \\ u_2 = -\frac{g}{2\nu_2} \sin \theta y^2 + C_2 y + D_2 & \mu_1 \frac{du_1}{dy} \Big|_{h_1} = \mu_2 \frac{du_2}{dy} \Big|_{h_2} ; \frac{du_2}{dy} \Big|_{h_1+h_2} = 0 \end{cases}$$

$$D_1 = 0, \quad C_2 = \frac{g}{\nu_2} (h_1 + h_2) \sin \theta ; \quad C_1 = \frac{g \sin \theta}{\mu_1 \mu_2} (\mu_1 \rho_1 h_1 + \mu_2 \rho_2 h_2)$$

$$D_2 = \frac{g \sin \theta}{\mu_1 \mu_2} \left[ h_1 (\mu_1 \rho_1 h_1 + \mu_2 \rho_2 h_2 - \mu_1 \rho_2 h_2) - \frac{h_1^2}{2} (\mu_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_1) \right]$$

C2. Stokes on re  $Re_{max} \sim 1$   $Re = \frac{UD}{\nu} \rightarrow D_{max} \sim \frac{\nu}{U}$

$$(\rho_{al} - \rho_{fl}) g \frac{\pi D^3}{6} = 3\pi \mu U D \rightarrow U^3 = \frac{\nu^2 g}{18 \rho_f} \Delta \rho \rightarrow U = 0.064 \frac{m}{s}$$

$$e \quad D_{max} = \frac{\mu_f}{\rho_f U} = 0.0065 \text{ m} = 6.5 \text{ mm}$$

C3

$$\vec{F}_R = \beta_2 \dot{m} \vec{v}_2 - \beta_1 \dot{m} \vec{v}_1 - p_{\text{gage1}} \frac{\pi d^2}{4} \vec{e}_x$$

$$F_{Rx} = -\beta_1 \dot{m} v_1 - p_{\text{gage1}} \frac{\pi d^2}{4} \quad F_{Ry} = \beta_2 \dot{m} v_2$$

$$p_{\text{gage1}} + \frac{1}{2} \cancel{\rho v_1^2} + \rho g h_1 = p_{\text{gage2}} + \frac{1}{2} \cancel{\rho v_2^2} + \rho g h_2$$

$v_1 = v_2$        $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$$v_1 = v_2 = \frac{4 \cdot 25}{10^3 \pi (0.12)^2} = 2.21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

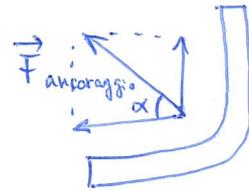
$$p_{\text{gage1}} = \rho g (h_2 - h_1) = 9810 \times 0.35 = 3433.5 \text{ Pa}$$

$$F_{Rx} = -1.04 \times 25 \times 2.21 - 3433.5 \times \frac{\pi (0.12)^2}{4} = -96.3 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = 1.04 \times 25 \times 2.21 = 57.46 \text{ N}$$

Le forze di ancoraggio al gomito e orientate come in figura.

$$\text{Ha modulo } F_{\text{ancoraggio}} = \sqrt{96.3^2 + 57.46^2} = 112.1 \text{ N}$$



e fa un angolo con l'orizzontale  $\alpha = \tan^{-1} \frac{57.46}{96.3} = 30.8^\circ$

C4

$$u_x + v_y = 0$$

$$u = \psi_y \quad v = -\psi_x \quad \text{soddisfano l'eq. di continuità}$$

$$u u_x + v v_y = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu (u_{xx} + v_{yy})$$

$$u v_x + v v_y = -\frac{1}{\rho} p_y + \nu (v_{xx} + u_{yy})$$

$$\begin{cases} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu (\psi_{xxy} + \psi_{yyy}) \\ \psi_y \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xy} = \frac{1}{\rho} p_y + \nu (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) \end{cases}$$

Prendendo il rotore delle equazioni si elimina la pressione:

$$\psi_y (\psi_{xx} + \psi_{yy})_x - \psi_x (\psi_{xx} + \psi_{yy})_y = \nu (\psi_{xxxx} + 2\psi_{xxyy} + \psi_{yyyy})$$

$$\text{Per } \psi = A \times f(y) \rightarrow A \times f'(A f'') - A f(A \times f''') = \nu A \times f''''$$

e - come nel caso della soluzione di Blasius - la variabile  $x$  si può eliminare quando  $x \neq 0$ . Si trova:

$$f' f'' - f f''' = \frac{\nu}{A} f''''$$

Questa è una ODE non lineare che va risolta con quattro

condizioni al contorno:  $u = v = 0$  per  $y = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_{\text{potenziale}} \\ v = v_{\text{potenziale}} \end{array} \right. \text{ per } y \rightarrow \infty$$

La soluzione potenziale esterna ha la forma  $\psi_{\text{potenziale}} = B \times y$

e il "matching" per  $y \rightarrow \infty$  fornisce  $\begin{cases} Af' = B \\ Af = By \end{cases}$ . La condizione

$Af' = B$  è ~~superflua~~ ~~redundant~~ ~~inutile~~, una volta noto  $Af = By$  e quindi

manca una condizione. Ripartiamo da NS e rimpiazziamo subito

$\psi = A \times f(y)$  nel sistema:

$$\begin{cases} A^2 \times f'f' - A^2 \times ff'' = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu A \times f''' \\ -A^2 ff' = \frac{1}{\rho} p_y + \nu A f'' \end{cases}$$

Affinchè esista una soluzione simile deve essere  $p = p_0 - \frac{1}{2} \rho B^2 (x^2 + F(y))$

con  $p_0$  la pressione di ristagno. Ciò perché:

1.  $p_x$  deve variare come  $x$  affinché  $x$  sparisca dalla 1ª eq.
2.  $p_y = h(y)$  della seconda e quindi  $p = h_1(y) + h_2(x)$
3. Per il moto potenziale Bernoulli fornisce  $p = p_0 - \frac{1}{2} \rho B^2 (x^2 + y^2)$

Le equazioni diventano:  $A^2 f'^2 - A^2 ff'' = B^2 + \nu A f'''$  (1)

$-A^2 ff' = -\frac{1}{2} B^2 F' + \nu A f''$  (2)

Nel punto di ristagno  $(x, y) = (0, 0)$  si ha  $p = p_0 \rightarrow F(0) = 0$

Inoltre  $u = v = 0$  per  $y = 0$  fornisce:

$$\left. \begin{array}{l} u = A \times f' \rightarrow f'(0) = 0 \\ v = A f \rightarrow f(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ condizioni} \\ \text{al contorno} \end{array}$$

$Af'(0) = B$

$u = U = Bx$  per  $y \rightarrow \infty$

A questo punto posso risolvere la (1) per trovare  $f$ , successivamente uso la (2) per avere  $F(y)$ .

C5. Similitudine di Reynolds:  $Re_m = Re_p$

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{U_m L_m}{\nu_m} = \frac{U_p L_p}{\nu_p}$$

$$U_m = \frac{L_p}{L_m} \frac{\nu_m}{\nu_p} U_p = 8 \cdot \frac{9.018 \times 10^{-6}}{9.318 \times 10^{-5}} \cdot 2 = 1.55 \frac{m}{s}$$

$$F_p = F_m \frac{\rho_p U_p^2 L_p^2}{\rho_m U_m^2 L_m^2} = 300 \frac{880 \cdot 4 \cdot 64}{998 \cdot (1.55)^2} = 28243 \text{ N}$$

C6.  $h_{L_{max}} = 10 \text{ m}$

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = f \frac{L}{D} \left( \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} \right)^2 \frac{1}{2g} = \left( \frac{8\dot{V}^2 L}{\pi^2 g} \right) \frac{f}{D^5} = 9.52 \times 10^6 \frac{f}{D^5} \approx 10$$

$$\rightarrow \frac{D^5}{f} \approx 9.52 \times 10^5 \rightarrow D_{min} = (9.52 \times 10^5 f)^{1/5}$$

$$Re = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} \frac{D}{\nu} = \left( \frac{4\dot{V}}{\pi D} \right) \frac{1}{\nu} = \frac{7.123 \times 10^8}{D}$$

$D^{(0)} = 0.1 \text{ m}$	$Re^{(0)} = 7.1 \times 10^9$	$\left(\frac{\epsilon}{D}\right)^{(0)} = 2 \times 10^{-4}$	$f^{(0)} = 0.015$	$D^{(1)} = 6.78 \text{ m}$
$D^{(1)} = 6.78 \text{ m}$	$Re^{(1)} = 1.05 \times 10^8$	$\left(\frac{\epsilon}{D}\right)^{(1)} = 4.4 \times 10^{-6}$	$f^{(1)} = 0.0073$	$D^{(2)} = 5.87 \text{ m}$
$D^{(2)} = 5.87 \text{ m}$	$Re^{(2)} = 1.21 \times 10^8$	$\left(\frac{\epsilon}{D}\right)^{(2)} = 5.1 \times 10^{-6}$	$f^{(2)} = 0.0077$	$D^{(3)} = 5.93 \text{ m}$

$$D_{min} = 5.93 \text{ m}$$

C7.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta u_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \sin \theta u_\theta \right) = 0$$

$$\rightarrow u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Moto potenziale se  $\zeta_\phi = 0 \rightarrow \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$

$$\rightarrow \text{definisco } u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Affinché le linee  $\phi = \text{cost}$  e le linee  $\psi = \text{cost}$  siano ortogonali è necessario che  $\vec{\nabla} \phi \perp \vec{\nabla} \psi \Rightarrow \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi = 0$

$$\vec{\nabla} \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = (u_r, u_\theta)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = (-r \sin \theta u_\theta, r \sin \theta u_r)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 ! \end{array} \right\}$$

C8.

$$F_D = 150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$c_f = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L} = \frac{2 \cdot 150}{10^3 \cdot 1} \cdot \frac{1}{U_\infty^2} = \frac{0.3}{U_\infty^2} =$$

$$= \frac{0.3 L^2}{U^2} \frac{1}{Re_L^2} = 1.775 \times 10^{11} \frac{1}{Re_L^2}$$

$\frac{L}{\varepsilon} = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} = 500$ . Immaginiamo di essere nella regione

"fully rough"; si avrebbe  $c_f = 0.010$ . Dalla formula

$$Re_L^2 = \frac{1.775 \times 10^{11}}{0.010} \Rightarrow$$

$Re_L = 4.21 \times 10^6$  che è sufficientemente alto per soddisfare il criterio "fully rough".

$$U = \frac{Re_L \nu}{L} = \frac{4.21 \times 10^6 \times 1.3 \times 10^{-6}}{1} = 5.47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Questa forza resistente di  $150 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  è legata esclusivamente (o quasi) all'attrito. Non c'è quindi resistenza di pressione (o di forma).