Nome studente e matricola: ______________________________ FILA A - 10 Aprile 2026

A1. Derivare l'equazione che descrive le linee di corrente per il seguente campo di moto bidimensionale, non-stazionario: $u = u_0$, $v = kt$, $w = 0$. Disegnare le linee di corrente al tempo t_1=1s e t_2=5s. Derivare le equazioni che descrivono la traiettoria di una generica particella fluida. Tracciare la traiettoria della particella che parte da (x_0,y_0)=(-1m,1m) al tempo t = 0. Calcolare il campo di accelerazione in ogni punto dello spazio e del tempo. Dati: u_0 = - 1m/s; k = 1m/s^2.

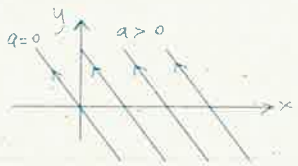
1A

Linee di corrente $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{kt}{u_0}$

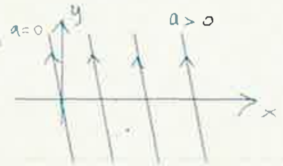
$t=t_0 \to y = \frac{kt_0}{u_0}x + a = -x + a$

$t=t_1 \to y = \frac{kt_1}{u_0}x + a = -5x + a$

@t_1

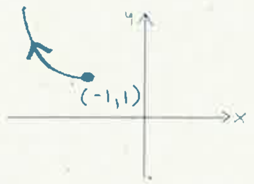


@t_2



Traiettorie $x(t) = x_0 + \int_0^t u(x(s),y(s))\,ds = x_0 + \int_0^t u_0\,dt = x_0 + u_0 t \to t = \frac{x(t)-x_0}{u_0}$

$y(t) = y_0 + \int_0^t ks\,ds = y_0 + \frac{1}{2}kt^2 \longrightarrow y = y_0 + \frac{k}{2}\left(\frac{x-x_0}{u_0}\right)^2 = y_0 + \frac{k}{2u_0^2}(x^2 - 2xx_0 + x_0^2)$



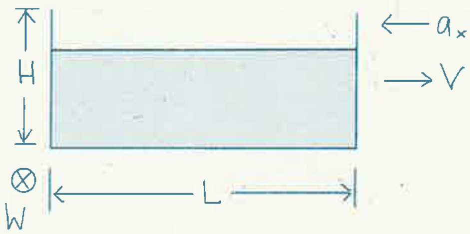
PARABOLE convesse $\left(\frac{k}{2u_0^2} = \frac{1}{2} m^{-1}\right)$

con estremo in (x_0,y_0) $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2u_0^2}(2x - 2x_0) = 0 \leftrightarrow x = x_0 \to y = y_0\right)$

percorse verso sinistra ($u_0 < 0$)

$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = (0, k)$

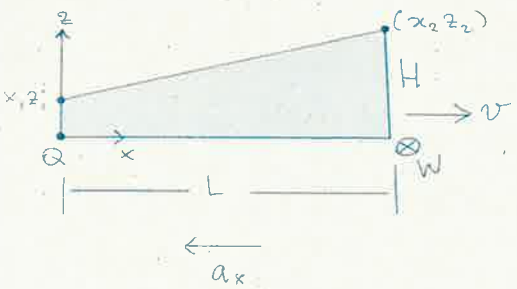
A2. Un camion viaggia a velocità costante su una strada rettilinea in piano e trasporta 12 quintali d'acqua. Se il camion dovesse frenare, qual è la decelerazione massima alla quale l'acqua non fuoriesce dal contenitore, sapendo che è contenuta in un serbatoio aperto a forma di parallelepipedo, profondo W=1,1 m; largo L=1,5 m e alto H = 80 cm? Alla decelerazione massima, indicare il punto sulla superficie di base del contenitore dove la pressione è minima e calcolarla.



$dp = \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial x}dx = -\rho g\,dz - \rho(-|a_x|)dx = -\rho g\,dz + \rho|a_x|dx$

$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) + \rho|a_x|(x_2 - x_1)$

$|a_x| = g(z_2 - z_1)/(\underbrace{x_2 - x_1}_{L})$



$V_{H_2O} = \frac{m_{H_2O}}{\rho} = \frac{1200\ kg}{1000\ kg/m^3} = 1,2\ m^3$

$\frac{(z_1 + z_2)LW}{2} = V_{H_2O}$

$z_1 = \frac{2V_{H_2O}}{LW} - \underbrace{z_2}_{H} = 0,6545\ m$

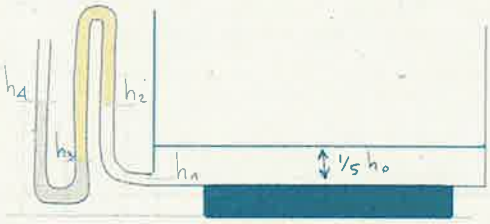
$\to |a_x| = 9,81\frac{(1,2 - 0,255)}{1,5} = 0,95\ \frac{m}{s^2}$

$p_{MIN} \to Q = (0,0)$

$\underbrace{p_Q - p_1}_{p_0} = -\rho g(\underbrace{z_Q}_{0} - z_1) + \rho|a_x|(\cancel{x_Q - x_1})$

$\overset{BASE}{p_Q} = \rho g z_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,6545 = 6,42\ kPa$

A3. Un agricoltore svuota una cisterna mediante un sifone, per l'irrigazione di un campo. Quando il livello dell'acqua all'interno della cisterna scende sotto $h_0/5$, il manometro a più fluidi emette un allarme di avvertimento: calcolare l'altezza h_4 allo scattare dell'allarme. Dati: SG_3=13.6; SG_2= 0.85; h_0=3m; h_1=15 cm; h_2= 1,7 m; h_3=1,5 m ($SG = \rho/\rho_{H2O}$)



$$SG_3 = \frac{\rho_3}{\rho_1} = 13{,}6 \qquad SG_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}85$$

$$\cancel{p_0} + \frac{1}{5}\rho_1 \cancel{g} h_0 - \rho_1 \cancel{g}(h_2 - h_1) + \rho_2 \cancel{g}(h_2 - h_3) - \rho_3 \cancel{g}(h_4 - h_3) = \cancel{p_0}$$

$$h_4 = \underbrace{\frac{\rho_1}{\rho_3}}_{1/SG_3}\left(\frac{1}{5}h_0 - h_2 + h_1\right) + \underbrace{\frac{\rho_2}{\rho_3}}_{SG_2/SG_3}(h_2 - h_3) + h_3 = 1{,}44\,m$$

A4. Si consideri un sistema in cui due bolle di sapone di raggio R_1 e R_2 (con $R_1 > R_2$), inizialmente separate, vengono collegate da un tubicino. All'esterno la pressione è p_{atm}. Cosa accadrà al sistema?

a. Non accadrà nulla; il sistema è in equilibrio.
b. La bolla piccola si sgonfierà in quella grande
c. La bolla grande si sgonfierà in quella piccola
d. Le due bolle raggiungeranno un raggio uguale.

Verrà assegnato credito soltanto se la risposta è adeguatamente giustificata.

$\Delta p = \frac{4\sigma_s}{R}$ per una bolla di sapone

$R_1 > R_2 \rightarrow \Delta p_1 < \Delta p_2 \qquad p_1 - \cancel{p_{atm}} < p_2 - \cancel{p_{atm}}$

Visto che $p_2 > p_1$ la bolla piccola si sgonfierà in quella grande.

A5. Due serbatoi d'acqua aperti all'atmosfera sono collegati da una tubazione. Il dislivello tra i peli liberi è $\Delta z = 15$. Una pompa è posizionata subito a monte del primo serbatoio, e spinge l'acqua dal serbatoio più in basso verso quello più in alto con portata $Q = 0.05\ \mathrm{m^3/s}$. Il diametro della tubazione è D = 150 mm. Le perdite di carico totali valgono $h_L =$ 8 m. La pompa ha rendimento $\eta_p = 0.72$. Calcolare la prevalenza h_{pump} che deve fornire la pompa, la potenza idraulica e la potenza elettrica assorbita.

$$h_{pump} = \Delta z + h_L = 15 + 8 = 23\ m$$

$$\rho g \dot{V} = 1000 \times 9.81 \times 0.05 = 490.5\ \frac{N}{s}$$

$$\dot{W}_{idraulica} = \rho g \dot{V} h_{pump} = 490.5 \times 23 = 11.3\ kW$$

$$\dot{W}_{elettrica} = \frac{\dot{W}_{idraulica}}{\eta_p} = \frac{11.3}{0.72} = 15.7\ kW$$

A6. Un diffusore orizzontale allarga da $D_1 = 0.10$ m a $D_2 = 0.20$ m. La velocità in ingresso è $V_1 = 8$ m/s e la pressione manometrica $p_1 = 20$ kPa. Assumere che il peso agisca ortogonalmente al piano del foglio e trascurare le perdite (flusso ideale). Trovare:

- V_2 e p_2;
- la forza assiale che le flange esercitano sul fluido.

$A_1 = 7.85 \times 10^{-3}\ m^2 \qquad A_2 = 3.14 \times 10^{-2}\ m^2$

continuità: $V_2 = V_1 \dfrac{A_1}{A_2} = 2\ \dfrac{m}{s}$; Bernoulli: $p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(V_1^2 - V_2^2\right) = 50$ kPa

$\dot V = V_1 A_1 = 0.0628\ m^3/s \qquad \dot m = \rho \dot V = 62.8\ \dfrac{kg}{s}$ (se acqua!)

$F_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot m (V_2 - V_1) \rightarrow F_x = 1.04$ kN

La forza esercitata dalle flange è nel verso della corrente $\vec V \rightarrow \quad \vec F \rightarrow$

A7. Un tubo di Venturi orizzontale (condotto con restringimento di sezione e successivo allargamento, usato per misurare portate) ha diametro di ingresso $D_1 = 15$ cm e diametro di gola $D_2 = 7.5$ cm. Un manometro differenziale a mercurio ($\rho_{Hg} = 13600\ kg/m^3$) è collegato tra ingresso e gola. Il dislivello del mercurio è $\Delta h = 12$ cm. Calcolare la portata di acqua nel condotto (trascurare le perdite).

Nel manometro differenziale: $p_1 - p_2 = \left(\rho_{Hg} - \rho_{H_2O}\right) g\,\Delta h = 14.8$ kPa

Bernoulli + continuità: $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$; $V_1 A_1 = V_2 A_2$

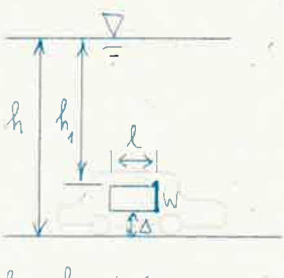
$V_2^2 - V_1^2 = 2\,\dfrac{p_1 - p_2}{\rho} = 29.7\ \dfrac{m^2}{s^2} \qquad V_1 = V_2 \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{V_2}{4}$

$V_2^2 - \dfrac{V_2^2}{16} = 29.7\ \dfrac{m^2}{s^2} \rightarrow V_2 = 5.6\ m/s$

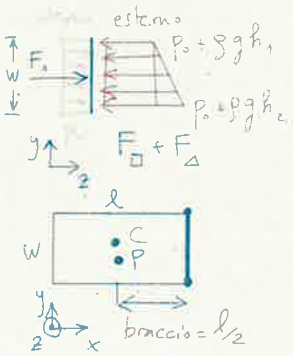
$\dot V = V_2 A_2 = 5.6 \times 4.418 \times 10^{-3} = 2.49 \times 10^{-2}\ \dfrac{m^3}{s}$

$\dot m = \rho \dot V = 24.9\ kg/s$

A8. Determinare il momento della forza necessaria ad aprire la portiera di un'automobile che si trova in fondo a un lago profondo 9 metri. Assumere che la portiera sia rettangolare (lunga 1,2 m e alta 0,95 m) e posizionata a 30 cm dal fondo e che l'auto sia perfettamente sigillata. Cosa cambia se si rompe un vetro e l'automobile si riempie d'acqua?



$h_1 = h - w - \Delta = 9 - 0{,}95 - 0{,}3 = 7{,}75$ m



$F_1 = P_0\, l w$

$F_\square = \left(P_0 + \rho g h_1\right) l w = F_1 + \rho g h_1 l w$

$F_\Delta = \rho g \frac{w}{2} l w$

$M = -\cancel{F_1 b} + (\cancel{F_1} + \rho g h_1 l w) b + \rho g \frac{w}{2} l w b$

$= \rho g \left(h_1 + \frac{w}{2}\right) l w\, l/2 = 5{,}52 \times 10^4$ N m

Vetro rotto $\rightarrow$ spinta interno = spinta esterno

$\rightarrow$ momento per aprire $= 0$

Nome studente e matricola: ______________________________ FILA B - 10 Aprile 2026

B1. Calcolare il campo di accelerazione e di vorticità per il campo di moto tridimensionale $\vec{V} = 2xy\,\hat{\imath} + 4tz^2\,\hat{\jmath} - yz\,\hat{k}$. Riportare i valori di accelerazione e vorticità nel punto (2,-1,1) al tempo $t = 2$. Il campo di moto è incomprimibile? Calcolare la circolazione sul bordo di un quadrato di lato unitario nel piano xy con il vertice inferiore sinistro nell'origine. Tutte le variabili si intendono misurate nel sistema internazionale.

1B $\quad u = 2xy \quad v = 4tz^2 \quad w = -yz$

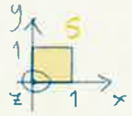
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V} \rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 4xy^2 + 8tz^2x \\ a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 4z^2 - 8tyz^2 \\ a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -4tz^3 + y^2z \end{cases}$$

$$\vec{\xi} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} = (-z - 8tz)\hat{\imath} - 2x\,\hat{k}$$

$$(x\,y\,z\,t) = (2,-1,1,2) \longrightarrow \vec{a} = (4\cdot 2 + 8\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\hat{\imath} + (4 - 8\cdot 2\cdot(-1))\hat{\jmath} + (-4\cdot 2 + (-1)^2)\hat{k} = 40\,\hat{\imath} + 20\,\hat{\jmath} - 7\,\hat{k}$$

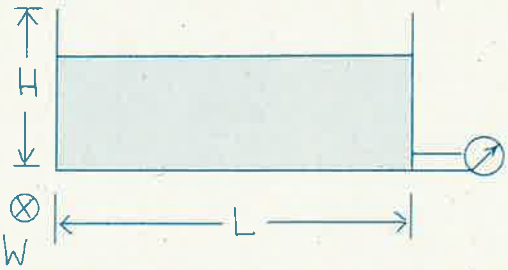
$$\longrightarrow \vec{\xi} = (-1 - 8\cdot 2)\hat{\imath} - 2\cdot 2\,\hat{k} = -17\,\hat{\imath} - 4\,\hat{k}$$

incomprimibile? $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2y - y = y$ $\underline{\underline{\text{no}}}$



$$\Gamma = \oint \vec{V}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\xi}\cdot\hat{n}\,ds = \int_S \xi_3\,dx\,dy = \int_S -2x\,dx\,dy = -2\int_0^1 dy \int_0^1 x\,dx = -2\underbrace{[y]_0^1}_{1}\underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1}_{1/2} = -1$$

B2. Un veicolo viaggia su una strada rettilinea in piano e trasporta 11 quintali di acqua in un serbatoio aperto a forma di parallelepipedo, di profondità W=1,3 m, L=larghezza 1,2 m e altezza H, il manometro segna il valore di pressione P_1. Il veicolo accelera e quando la pressione misurata dal manometro scende di 1kPa rispetto a P_1, l'acqua inizia a fuoriuscire dal serbatoio: calcolare l'altezza H del serbatoio e l'accelerazione del veicolo.



$$dp = \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial x}dx = -\rho g\,dz - \rho(-|a_x|)\,dx = -\rho g\,dz + \rho|a_x|\,dx$$

$$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) - \rho a_x(x_2 - x_1)$$

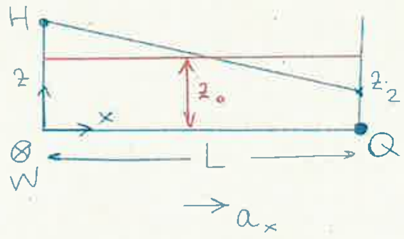
$$P_Q - P_2 = -\rho g(z_Q - z_2) + \rho|a_x|(\cancel{x_Q - x_1})$$

$P_Q^{GAGE} = \rho g z_2$

$V = \frac{m}{\rho} = 1{,}1\ m^3$

$z_0 = \frac{V}{LW} = 0{,}7051\ m \quad P_1^{GAGE} = \rho g z_0$ a riposo

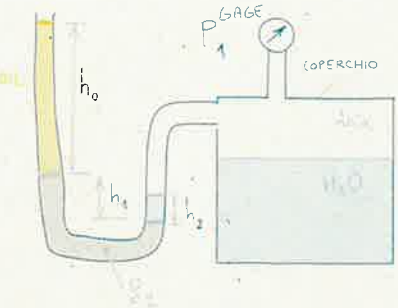
$z_2 = z_0 - \frac{\Delta P}{\rho g} = 0{,}6032\ m$



$$\frac{H + z_2}{2}LW = V \longrightarrow H = \frac{2V}{LW} - z_2 = 0{,}807\cancel{1}\ m$$

$$a_x = -g\frac{z_2 - \overset{H}{z_1}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{L}} = g\frac{H - z_2}{L} = 1{,}20\ \frac{m}{s^2}$$

B3. La pressione relativa dell'aria nel contenitore in figura è 69,3 kPa; qual è il fluido nel tratto del manometro compreso fra l'acqua e l'olio? Dati: ρ_{oil}=770 kg/m^3; h_0 = 1,6 m; h_1 = 45 cm; h_2 = 30 cm. Come cambierebbero le letture h_1 e h_2 se il coperchio del contenitore si forasse?



$$\cancel{P_0} + \rho_{OIL}\, g h_0 + \rho_2\, g h_1 - \rho_{H_2O}\, g h_2 = P_1^{GAGE} + \cancel{P_0}$$

$$\rho_2 = \frac{P_1^{GAGE}/g + \rho_{H_2O} h_2 - \rho_{OIL} h_0}{h_1} = 13600\ \frac{kg}{m^3}$$

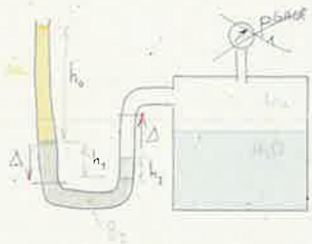
$\rightarrow$ mercurio

Foro $\rightarrow P_1^{GAGE} = 0$

$$\cancel{P_0} + \rho_{OIL}\, \cancel{g} \underbrace{h_0'}_{h_0} + \rho_2\, \cancel{g} \underbrace{h_1'}_{h_1-\Delta} - \rho_{H_2O}\, \cancel{g} \underbrace{h_2'}_{h_2+\Delta} = \cancel{P_0}$$

$$\Delta = \frac{\rho_{OIL} h_0 + \rho_2 h_1 - \rho_{H_2O} h_2}{\rho_2 + \rho_{H_2O}} = 48{,}3\ cm$$

(scende interfaccia olio/Hg; sale Hg/H_2O)



B4. Giustificare in modo convincente il fatto che, se si comprime un liquido a temperatura costante in modo che la sua densità aumenti dello 0.1%, la variazione relativa di volume ΔV/V sarà pari a -0.1%.

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_T = -\frac{1}{v} \left.\frac{\partial v}{\partial p}\right|_T \qquad K = \rho \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_T = -v \left.\frac{\partial p}{\partial v}\right|_T \rightarrow \rho \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \simeq -v \frac{\Delta p}{\Delta v}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta v}{v} = -0.1\%$$

Anche da cons. massa:

$m = cost$, $m = \rho V$, $dm = \rho dV + V d\rho = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$

B5. Un condotto forzato porta acqua da un lago a una turbina. Il dislivello tra lago e turbina è $\Delta z = 120$ m, la portata è $Q = 2$ m^3/s, e la condotta ha diametro $D = 50$ cm. Le perdite di carico totali (h_L, in metri) sono pari al 25% dell'energia cinetica (per unità di peso) nella condotta. Rendimento della turbina $\eta_t = 0.88$. Rendimento del generatore $\eta_g = 0.96$.

Si chiede di calcolare la velocità nella condotta, le perdite di carico h_L in metri, il carico utile alla turbina $h_{turbine}$ (salto netto), e la potenza elettrica prodotta.

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 10{,}19\ \frac{m}{s} \qquad h_L = 0{,}25 \left(\frac{V^2}{2g}\right) = 1{,}32\ m$$

$$h_{turbina} = \Delta z - h_L - \frac{V^2}{2g} = 120 - 1{,}32 - \frac{10{,}19^2}{2 \cdot 9{,}81} = 113.4\ m$$

$$\dot{W}_{turbina} = \dot{m}\, g\, h_{turbina} = 1000 \times 9{,}81 \times 2 \times 113.4 = 2.22\ MW$$

potenza idraulica alla turbina

$$\dot{W}_{meccanica\ della\ turbina} = \eta_t\, \dot{W}_{turbina} = 0.88 \times 2{,}22 = 1{,}96\ MW$$

$$\dot{W}_{elettrica} = \eta_g\, \dot{W}_{meccanica} = 0.96 \times 1{,}96 = 1{,}88\ MW$$

B6. Una curva a 90° appoggiata su un piano (gravità ortogonale al piano) ha diametro di ingresso $D = 0.1$ m. e diametro di uscita D/2. La portata di acqua nella curva è $Q = 0.03\ \text{m}^3/\text{s}$. La pressione relativa all'ingresso è $p_{gage\,1} = 150$ kPa. Calcolare la forza totale (modulo, direzione e verso) che il fluido esercita sulla curva, assumendo che non ci siano perdite di carico.

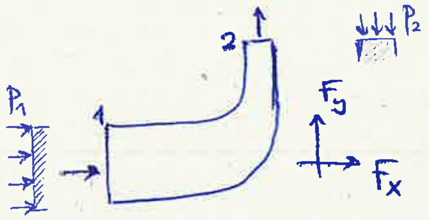
$V_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 3.82\ \frac{m}{s}$ $V_2 = \frac{Q}{A_2} = 15.28\ \frac{m}{s}$ $\dot m = 30\ kg/s$

$\underset{gage}{p_2} = \underset{gage}{p_1} + \frac{1}{2}\rho\left(V_1^2 - V_2^2\right) = 40555$ Pa F_x, F_y forze sul fluido

$F_x + p_1 A_1 = -\dot m V_1$ $F_y - p_2 A_2 = \dot m V_2$

$F_x = -1292$ N $F_y = 538$ N

La forza del fluido sarà: $F_{fluido\,y}$, $F_{fluido\,x}$ (stesso modulo)

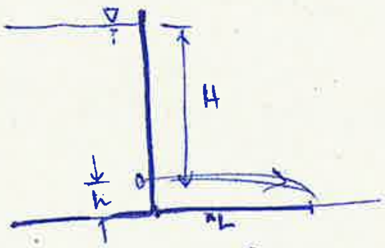


B7. Un grande serbatoio aperto all'atmosfera contiene acqua mantenuta ad una quota costante $H = 2$ m sopra un foro circolare di diametro $D = 3$ cm praticato sulla parete laterale. Il foro si trova a una distanza $h = 0.5$ m dal fondo del serbatoio, che è appoggiato sul suolo. Il foro, inizialmente tappato, viene aperto. Calcolare:

a) La velocità di efflusso.

b) La portata.

c) La gittata orizzontale del getto (distanza dal serbatoio al punto in cui il getto tocca il suolo).



Velocità di Torricelli: $V = \sqrt{2gH} = 6.26\ m/s$

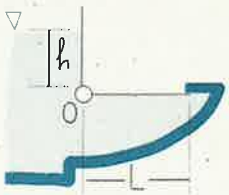
Portata: $Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V = 4.43 \times 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$

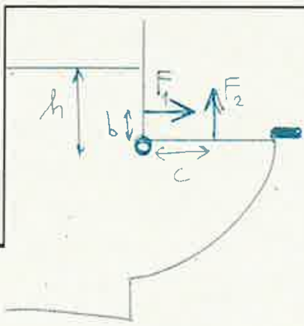
$\dot m = 4.43\ kg/s$

Gittata: $h = \frac{1}{2} g t^2 \to t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} = 0.32$ s

$x_L = vt = 6.26 \times 0.32 = 2$ m

B8. Qual è l'altezza minima h di liquido che consente l'apertura della paratoia rettangolare incernierata in O?
Dati: L = 1.5 m.





$F_1 \times b > F_2 c \to$ si apre   w ≡ profondità ⊥ foglio

$F_1 = \frac{h}{2}\rho g h w$ $b = \frac{1}{3}h$ $\rho g w \frac{h^3}{6} \geq \rho g w \frac{h l^2}{2}$

$F_2 = \rho g h l w$ $c = l/2$ $\leftrightarrow h \geq \sqrt{3}\, l$

Nome studente e matricola: ______________________________ FILA C - 10 Aprile 2026

C1. Quanto valgono accelerazione e vorticità per il campo di moto bidimensionale $\overline{\boldsymbol{U}} = (u_r, u_\theta) = \left(\left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\cos\theta, -\left(2 + \frac{8}{r^2}\right)\sin\theta\right)$ in coordinate cilindriche, nel punto $r = 1m, \theta = 180°$? Esistono punti di ristagno? Se sí, dove? Nota: in coordinate cilindriche la componente convettiva della derivata materiale si scrive: $\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta{}^2}{r}, u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r}\right)$, si ha inoltre $\Gamma_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(u_r)}{\partial \theta}$.

$u_r = \left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\cos\theta \qquad u_\theta = -\left(2 + \frac{8}{r^2}\right)\sin\theta$

$a_r = u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \cancel{u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}} - \frac{u_\theta^2}{r} = \left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\cos^2\theta\frac{16}{r^3} + \left(2 + \frac{8}{r^2}\right)\frac{\sin\theta}{r}\left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\sin\theta - \left(2 + \frac{8}{r^2}\right)^2\frac{\sin^2\theta}{r}$

$\to a_r(r = 1m, \theta = 180°) = -96\ m/s^2$

$a_\theta = u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \cancel{u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}} + \frac{u_r u_\theta}{r} = \left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\cos\theta\frac{16}{r^3}\sin\theta + \left(2 + \frac{8}{r^2}\right)^2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} - \left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\frac{\cos\theta}{r}\left(2 + \frac{8}{r^2}\right)\sin\theta$

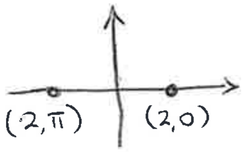
$\to a_\theta(r = 1m, \theta = 180°) = 0\ m/s^2$

$\Gamma_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(u_r)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[-r\left(2 + \frac{8}{r^2}\right)\right] - \frac{1}{r}\left(2 - \frac{8}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\cos\theta\right] =$

$= \frac{1}{r}\sin\theta\left(-2 + \frac{8}{r^2}\right) + \frac{1}{r}\sin\theta\left(2 - \frac{8}{r^2}\right) = \frac{1}{r}\sin\theta\left(-\cancel{2} + \cancel{\frac{8}{r^2}} + \cancel{2} - \cancel{\frac{8}{r^2}}\right) = 0$

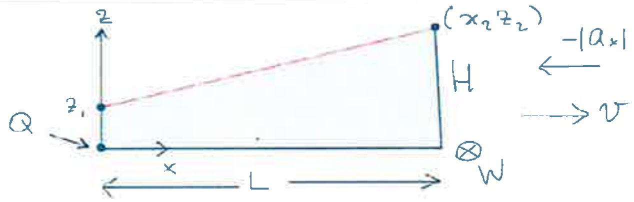
$\to \Gamma_z(r = 1m, \theta = 180°) = 0\ s^{-1}$

PUNTI DI RISTAGNO: $\begin{cases} u_r = 0 \leftrightarrow r = 2 \text{ o } \theta = \pm\pi/2 \\ u_\theta = 0 \leftrightarrow \theta = 0, \pi \end{cases}$ $(2, 0)\ ;\ (2, \pi)$



C2. Un camion viaggia su una strada rettilinea in piano e trasporta 2,5m³ di un liquido sconosciuto. Il manometro segna P_1. Quando il camion frena a 0,89 m/s², il liquido inizia a fuoriuscire dal bordo del serbatoio che ha forma di parallelepipedo, profondo W=1,45 m e largo L=2,25 m: quanto è alto il serbatoio? Se la lettura nel manometro scende di 910 Pa rispetto a P_1, qual è la densità del fluido?

$\frac{(H + z_1)LW}{2} = V \to z_1 = \frac{2V}{LW} - H$



$dp = \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial x}dx = -\rho g\, dz - \rho(-|a_x|)dx = -\rho g\, dz + \rho|a_x|dx$

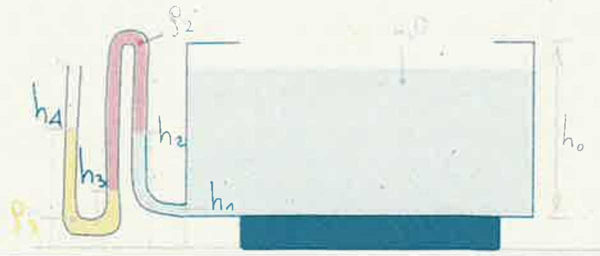
$P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) + \rho|a_x|(x_2 - x_1)$ $\quad H - \frac{2V}{LW} + H = \frac{|a_x|L}{g} \quad 2H = 2\frac{V}{LW} + \frac{|a_x|L}{2g} = 0{,}868\ m$

$z_1 = \frac{2V}{LW} - H = 0{,}6642\ m$ $\begin{cases} P_Q - P_1 = -\rho g(z_Q - z_1) + \rho|a_x|(x_Q - x_1) \\ P_1^{GAGE} = \rho g z_0 \end{cases}$ $\to P_1^{GAGE} - P_Q^{GAGE} = \rho g z_0 - \rho g z_1$

$z_0 = \frac{V}{WL} = 0{,}7663\ m$

$\rho = \frac{\Delta P}{g\Delta z} = 908\ \frac{kg}{m^3}$

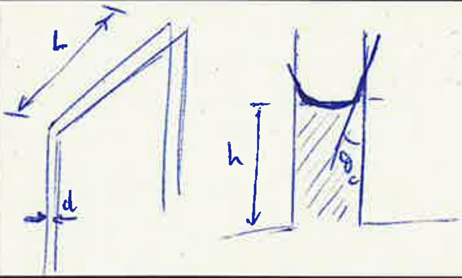
C3. Un agricoltore utilizza l'acqua contenuta in una cisterna per l'irrigazione di un campo. Quando il livello dell'acqua all'interno della cisterna sale sopra 95% h_0, il manometro a più fluidi emette un allarme di avvertimento: calcolare la densità del fluido 2 allo scattare dell'allarme. Dati: $\rho_3 = 1260$ kg / m^3; $h_0 = 2{,}4$ m; $h_1 = 0{,}2$ m; $h_2 = 2{,}1$ m; $h_3 = 0{,}1$ m; $h_4 = 1{,}8$ m.



$$\cancel{P_0} + \rho_1 \cancel{g}\left(\frac{95}{100} h_0 - h_2 + h_1\right) + \rho_2 \cancel{g}(h_2 - h_3) - \rho_3 \cancel{g}(h_4 - h_3) = \cancel{P_0}$$

$$\rho_2 = \frac{-\rho_1\left(\frac{95}{100} h_0 - h_2 + h_1\right) + \rho_3 (h_4 - h_3)}{h_2 - h_3} = 881 \text{ kg/m}^3$$

C4. Due piastre di vetro parallele di lunghezza L e distanti d (d << L) sono immerse parzialmente in un liquido con tensione superficiale σ, densità ρ e angolo di contatto nullo. Qual è l'altezza h di risalita del liquido tra le piastre? Sarà assegnato credito solo se la risposta fornita è sufficientemente giustificata.



$$F_{capillare} = 2\,\sigma_s L \cos\vartheta_c = 2\,\sigma_s L \quad (\vartheta_c = 0°)$$

$$W_{liquido} = \rho g h (dL) = \rho g h d L \quad (\text{peso del liquido})$$

Altezza di risalita all'equilibrio: $h = \dfrac{2\,\sigma_s}{\rho g d}$

C5. Un impianto idraulico ha un serbatoio A (monte) a quota 50 m e un serbatoio B (valle) a quota 80 m. Nell'impianto c'è una pompa vicino ad A che spinge verso B, e una turbina vicino a B che recupera energia prima dello scarico. La portata nel condotto è pari a $Q = 0.1$ m^3/s e la prevalenza della pompa (fornita dal costruttore per la portata data) è pari a $h_{pump} = 50$ m. Le perdite totali nel circuito valgono $h_L = 12$ m. Infine, la pompa ha rendimento $\eta_p = 0.75$, mentre la turbina ha $\eta_t = 0.82$.

1. Qual è il carico utile $h_{turbine}$ della turbina?
2. Si mostri che il sistema assorbe una potenza elettrica netta pari a circa 59 kW dalla rete (trascurare le perdite nei generatori/motori, considerare solo i rendimenti delle macchine idrauliche).
3. Se la turbina fosse assente e ci fosse solo la pompa, quale sarebbe il dislivello massimo superabile con $h_{pump} =$ 50 m e con le stesse perdite?

$$z_A + h_{pump} = z_B + h_{turbina} + h_L \qquad h_{turbina} = (z_A - z_B) + h_{pump} - h_L = 8 \text{ m}$$

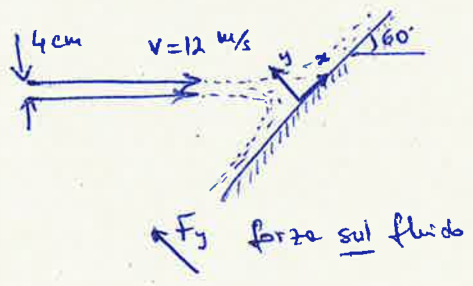
Potenza assorbita dalla pompa: $\dot{W}_{el,pump} = \dfrac{\dot{m} g h_{pump}}{\eta_p} = 65.4$ kW

Potenza prodotta dalla turbina: $\dot{W}_{turb} = \eta_t \dot{m} g h_{turbina} = 6.43$ kW

Potenza netta assorbita: $\dot{W}_{el,pump} - \dot{W}_{turb} \simeq 59$ kW

Se la turbina fosse assente: $\Delta z_{max} = h_{pump} - h_L = 50 - 12 = 38$ m

C6. Un getto piano (di profondità unitaria) arriva orizzontalmente da sinistra e impatta su una lastra inclinata di 60° rispetto all'orizzontale). L'acqua dopo l'impatto scorre lungo la piastra. Il getto ha spessore 4 cm e velocità 12 m/s. Trascurando gravità e attrito, si calcoli la forza normale alla piastra esercitata dal getto. Specificarne modulo e verso.



La pressione è costante dappertutto (Bernoulli).

$F_y = -\dot{m}\, v_{in}$ $\qquad v_{out} \equiv 0$ lungo y

$v_{in} = -\frac{\sqrt{3}}{2} v = -10.39$ m/s

$F_y = 0.04 \times \underset{\text{profondità}}{1} \times 12 \times 1000 \times 10.39 = 4.99$ kN

La forza normale esercitata dal getto ha stesso modulo e direzione, e verso opposto

C7. Si consideri un flusso stazionario, incomprimibile e non viscoso di un fluido ideale in un campo di moto bidimensionale. Una linea di corrente del flusso è descritta dalla seguente equazione parametrica:

$$x(s) = s$$
$$y(s) = h_0 + b \sin(s/L)$$

dove s è l'ascissa curvilinea lungo la linea di corrente, h_0, b e L sono costanti positive note. La velocità del fluido lungo la linea di corrente varia secondo la legge:

$$v(s) = v_0 (1 + \alpha s/L)$$

dove v_0 e α sono costanti note.

1. Scrivere l'equazione di Bernoulli tra due punti A e B della linea di corrente, corrispondenti rispettivamente a s = 0 e s = L.
2. Determinare la differenza di pressione $p_A - p_B$ tra i due punti.
3. Determinare il valore di α per cui $p_A = p_B$.

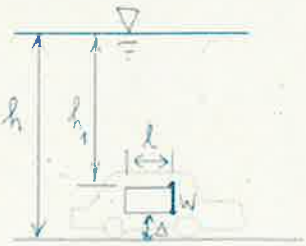
Bernoulli tra A e B : $\quad p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho\left(V_B^2 - V_A^2\right) + \rho g\left(y_B - y_A\right) =$

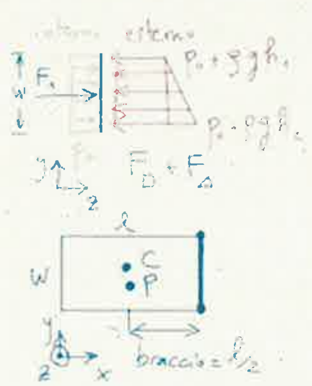
$= \frac{1}{2}\rho V_0^2 \alpha(\alpha+2) + \rho g b \sin(1)$

$p_A = p_B$: $\quad \frac{1}{2} V_0^2 \alpha(\alpha+2) + g b \sin(1) = 0 \rightarrow \alpha = -1 \mp \sqrt{1 - \frac{2 g b \sin(1)}{V_0^2}}$

soluzione reale solo se $V_0^2 > 2 g b \sin(1)$

C8. Per aprire la portiera di un'automobile che si trova in fondo a un lago, bisogna esercitare un momento di 4.82×10^4 Nm. Assumere che la portiera sia rettangolare (lunga 1 m e alta 1,1 m) e che l'auto sia rimasta perfettamente sigillata. Quanto è profondo il lago? Trascurare lo strato d'acqua sotto il bordo inferiore della portiera. Diventa più facile o più difficile aprire la portiera quando l'auto inizia ad imbarcare acqua? Argomentare la risposta.





$F_1 = P_0 \, l w$

$F_\square = (P_0 + \rho g h_1) l w = F_1 + \rho g h_1 l w$

$F_\Delta = \rho g \frac{w}{2} l w$

$M = -F_1 b + (F_1 + \rho g h_1 l w) b + \rho g \frac{w}{2} l w b$

$= \rho g \left(h_1 + \frac{w}{2}\right) l w \, l/2$

$\rightarrow h_1 = \frac{2M}{l^2 w \rho g} - \frac{w}{2} = 8{,}38$ m

$h = h_1 + w = 9{,}48$ m

Quando inizia a imbarcare acqua P_{in} aumenta $\rightarrow$ spinta totale su portiera diminuisce & momento x aprirla anche. Diventa più facile aprire

Nome studente e matricola: ______________________________ FILA D - 10 Aprile 2026

D1. Un campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile è espresso in coordinate cartesiane dall'espressione: $(u, v) = (a + bx)\hat{\imath} - by\hat{\jmath}$ dove a e b sono costanti. Calcolare l'accelerazione delle particelle di fluido che si trovano sull'asse delle y. Disegnare le due linee di corrente che passano per il punto (0,1.5m) e (0,-1m), considerando a = 1 m/s e b = 5 s^{-1}. Il campo di moto è irrotazionale? Incomprimibile? Esistono punti di ristagno? Se si dove?

$\vec{a} = \left(\partial_t u + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y},\ \partial_t v + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(b(a+bx), -by\cdot(-b)\right)$

$\to \vec{a}(x=0, y) = (ab, b^2 y)$

LINEE DI FLUSSO: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \to \frac{dx}{a+bx} = \frac{dy}{-by} \to \frac{1}{b}\int_{x_0}^{x}\frac{b}{a+bx}dx = -\frac{1}{b}\int_{y_0}^{y}\frac{-b}{-by}dy$

$\to \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a+bx}{a+bx_0}\right) = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \to \left(\frac{a+bx}{a+bx_0}\right)\left(\frac{y}{y_0}\right) = 1$

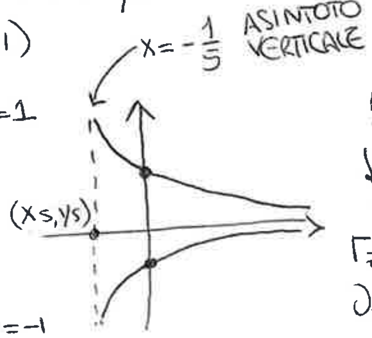
$(x_0, y_0) = (0, 1.5)$; $(x_0, y_0) = (0, -1)$

$\frac{a+bx}{a}\cdot\frac{y}{1.5} = 1$; $\frac{a+bx}{a}\cdot\frac{y}{-1} = 1$

$y = \frac{1{,}5a}{a+bx}$; $y = \frac{-a}{a+bx}$

$y = \frac{1{,}5}{1+5x}$; $y = \frac{-1}{1+5x}$

$x\to\infty, y\to 0 \mid x=0\ y=1.5$; $x\to\infty\ y\to 0 \mid x=0\ y=-1$



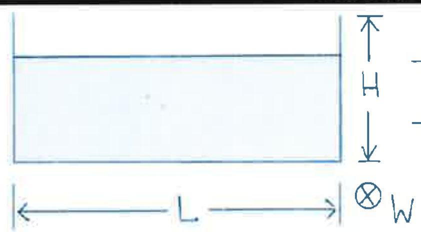
PUNTI DI RISTAGNO

$\begin{cases} a + bx_s = 0 \\ b^2 y_s = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} x_s = -\frac{a}{b} = -0.2\ m \\ y_s = 0\ m \end{matrix}$

$\Gamma_z = \partial_x v - \partial_y u = 0$ IRROTAZ.

$\partial_x u + \partial_y v = b - b = 0$ INCOMPRIMIBILE

D2. Un carrello automatizzato trasporta una vasca aperta con un acido corrosivo di densità rho=1,198g/cm^3. Se la vasca è profonda W=3m, larga L=1,5m e alta H=90 cm, qual è il volume massimo di liquido che può essere trasportato senza che si rovesci, considerando che l'accelerazione massima è $a_x = 0{,}56$ m/s^2? Per sicurezza, la vasca viene riempita con 2/3 del volume massimo, qual è il punto Q in cui la pressione è massima e quanto vale la pressione di Gage in Q?

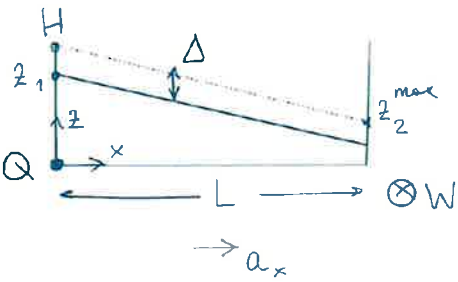


$dp = \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial x}dx = -\rho g\,dz - \rho a_x\,dx$

$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) - \rho a_x(x_2 - x_1)$

$z_2^{max} = H - \frac{a_x}{g}L = 0{,}8144\ m$; $V^{max} = \frac{z_2^{max} + H}{2}WL = 3{,}8573\ m^3$

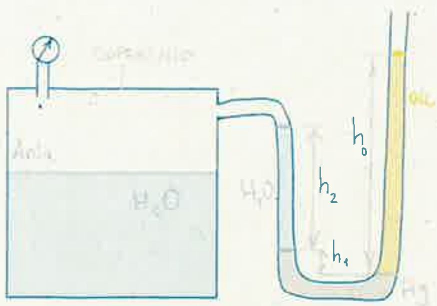
$V = \frac{(z_2^{max} - \Delta) + (H - \Delta)}{2}WL = \underbrace{\frac{z_2^{max} + H}{2}WL}_{V_{max}} - \Delta WL = \frac{2}{3}V_{max} \to \Delta = \frac{1}{3}\frac{V_{max}}{WL} = 0{,}2857\ m$



$Q = (0,0)$

$p_Q - p_{ATM} = -\rho g(0 - z_1) - \rho a_x(0 - 0) = \rho g(H - \Delta) =$

$= 1198 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}9 - 0{,}2857) = 7219\ Pa$



D3. Conoscendo le letture del manometro, calcolare la pressione nell'aria all'interno del contenitore. Cosa succederebbe alle letture di h_0, h_1 e h_2 se il coperchio si rompesse? Dati: ρ_{oil}=880 kg/m^3; ρ_{Hg}=13600 kg/m^3; h_0 = 1,4 m; h_1 = 11 cm; h_2 = 1m.

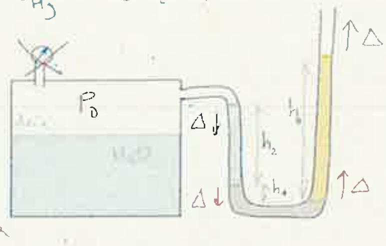
$$P_0 + \rho_{oil} g h_0 - \rho_{Hg} g h_1 - \rho_{H_2O} g h_2 = P_1 \qquad P_1^{GAGE} = \rho_{oil} g h_0 - \rho_{Hg} g h_1 - \rho_{H_2O} g h_2 = -12{,}4\ kPa$$

Rottura $\rightarrow P_1^{GAGE} = 0$

$$\cancel{P_0} + \rho_{oil} g h_0' - \rho_{Hg} g h_1' - \rho_{H_2O} g h_2' = P_1' \rightarrow \cancel{P_0}$$

$h_0' \downarrow h_0$, $h_1' \searrow$, $h_2' \rightarrow h_2$

Suppongo $2\Delta < h_1$.
$\rightarrow$ colonna mercurio resta a sinistra
$h_1' = h_1 - 2\Delta$



$$\Delta = \frac{-\rho_{oil} h_0 + \rho_{H_2O} h_2 + \rho_{Hg} h_1}{2\rho_{Hg}} = 4{,}65\ cm \qquad 2\Delta < h_1 \ \checkmark$$

D4. Due serbatoi d'acqua aperti all'atmosfera sono collegati da una condotta. Il serbatoio **A** (monte) ha il pelo libero a quota $z_A = 10$ m. Il serbatoio **B** (valle) ha il pelo libero a quota $z_B = 45$ m. La portata richiesta è $Q = 0.06$ m^3/s. Le perdite di carico totali nella condotta sono $h_L = 7$ m. La pompa ha un rendimento $\eta_p = 0.68$.

1. Calcolare la prevalenza h_{pump} che la pompa deve fornire.
2. Calcolare la potenza idraulica e la potenza elettrica assorbita.
3. Se si raddoppiasse la portata (sempre $Q = 0.12$ m^3/s) e le perdite diventassero $h_L = 22$ m (le perdite crescono più che linearmente con la portata), quale dovrebbe essere la nuova prevalenza h_{pump}?
4. Per il secondo caso (portata raddoppiata), calcolare la nuova potenza elettrica assorbita (stesso rendimento).

$$h_{pump} = (z_B - z_A) + h_L = 35 + 7 = 42\ m \qquad \dot{m} = 60\ kg/s$$

$$\dot{W}_{pump} = \dot{m} g h_{pump} = 60 \times 9.81 \times 42 = 24.7\ kW$$

$$\dot{W}_{elettrica} = \frac{\dot{W}_{pump}}{\eta_{pump}} = \frac{24.7}{0.68} = 36.4\ kW$$

Se $\dot{m} = 120\ kg/s$, $h_L = 22\ m \rightarrow h_{pump} = 35 + 22 = 57\ m$

$$\dot{W}_{elettrica} = \frac{\dot{m} g h_{pump}}{\eta_{pump}} = \frac{120 \times 9.81 \times 57}{0.68} = 98.6\ kW$$

D5. Cosa accade alla sovrapressione di Laplace ΔP in una goccia se questa evapora dimezzando il suo volume? Resta uguale? Si riduce (se sì, di quanto)? Aumenta (se sì, di quanto)? Giustificate adeguatamente la risposta per avere credito.

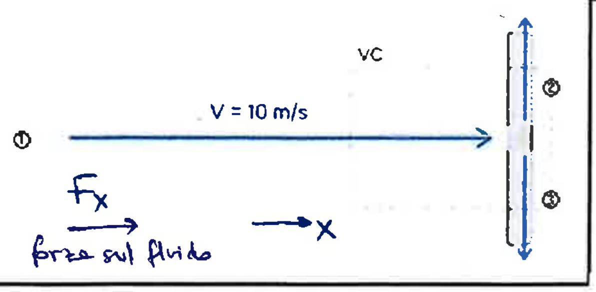
$$\Delta P_0 = \frac{2\sigma_s}{R_0} \qquad V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \qquad V_f = \frac{V_0}{2} = \frac{4}{3}\pi R_f^3 = \frac{2}{3}\pi R_0^3 \rightarrow R_f^3 = \frac{R_0^3}{2}$$

$$R_f = \frac{R_0}{\sqrt[3]{2}} = \frac{R_0}{1.26}$$

Stato finale : $\Delta P_{finale} = \dfrac{2\sigma_s}{R_f} = \dfrac{2\sigma_s}{R_0/1.26} = \dfrac{2.52\,\sigma_s}{R_0}$

AUMENTA DI UN FATTORE 1,26

D6. Un getto d'acqua circolare con velocità V = 10 m/s e sezione A = 5 cm^2 impatta perpendicolarmente una piastra piana stazionaria. Il getto si divide simmetricamente e defluisce lungo la piastra (pressione atmosferica ovunque sulla superficie libera). Calcolare la forza (modulo, direzione e verso) esercitata dal getto sulla piastra.



Pressione costante dappertutto.

Per simmetria c'è forza solo lungo x (trascurando gravità e attriti).

$F_x = -\dot{m} V_{in} = -\rho V^2 A = $ ~~[illegible]~~

$= -1000 \times 100 \times 5 \times 10^{-4} = -50$ N

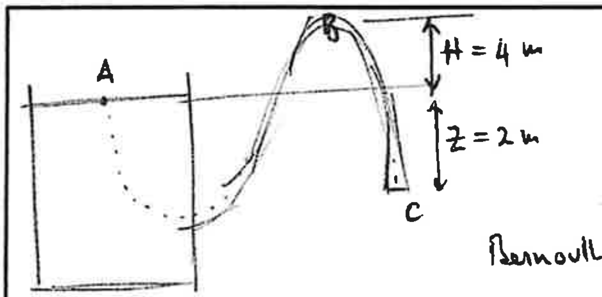
La forza del fluido è negativa, quindi il verso è a sinistra.

Il fluido esercita una forza sulla piastra verso destra, modulo 50 N

D7. Un grande serbatoio a pelo libero, contenente acqua (ρ = 1000 kg/m^3), alimenta un sifone che scarica in atmosfera. Il tubo del sifone presenta una sezione variabile: nel punto più alto **B**, situato a una quota H = 4 m sopra il pelo libero del serbatoio, il diametro è D_B = 50 mm. Il tubo termina in una sezione di uscita **C** con diametro D_C = 80 mm, posta a una quota Z = 2 m sotto il pelo libero del serbatoio.

Assumendo il fluido ideale e il moto stazionario:

1. Calcolare la velocità di efflusso nella sezione di uscita **C**.
2. Determinare la pressione assoluta nel punto più alto **B**.
3. Se la pressione di vapore dell'acqua è P_v = 2.34 kPa (assoluti) e la pressione atmosferica è P_{atm} = 101.3 kPa, determinare se il sifone può funzionare in queste condizioni senza che avvenga cavitazione in **B**.



Bernoulli tra pelo libero A e C:

$$P_A + \frac{1}{2}\cancel{\rho V_A^2} + \rho g \cancel{z_A} = P_C + \frac{1}{2}\rho V_C^2 - \rho g Z$$

$P_A = P_C = P_{atm}$ $\qquad V_C = \sqrt{2gZ} = \sqrt{4 \times 9.81} = 6.26 \frac{m}{s}$

Bernoulli tra A e B: $\quad P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho g H =$

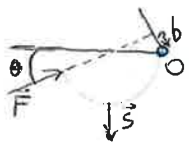
$$= P_B + \frac{1}{2}\rho V_C^2 \left(\frac{D_C}{D_B}\right)^4 + \rho g H$$

$$V_B A_B = V_C A_C \longrightarrow V_B = V_C \frac{A_C}{A_B} = V_C \left(\frac{D_C}{D_B}\right)^2$$

$$P_B = 101.3 \times 10^3 - \frac{1}{2} 1000 \times 6.26^2 \left(\frac{8}{5}\right)^4 - 9810 \times 4 = -66.35 \text{ kPa}$$

! IMPOSSIBILE. Il sifone non funziona nelle condizioni date.

D8. Una grondaia semicilindrica di lunghezza unitaria è incernierata in O come in figura. Calcolare la forza F necessaria a mantenere la grondaia in equilibrio quando è completamente riempita d'acqua piovana. Dati: D=20 cm; $\vartheta = \pi/3$. Come cambia il risultato se $\vartheta = 0$?



$\vec{S}$ = spinta fluido → grondaia

Equilibrio volume fluido semicilindrico:

$\vec{W} - \vec{S} = 0 \longrightarrow S = W = \rho V g = \rho \frac{\pi D^2}{8} H g = 154{,}1$ N

Equilibrio rotazione grondaia: (braccio di $S = \frac{D}{2}$, braccio di $F = \frac{D}{2}\sin\theta$)

$S \cdot \frac{\cancel{D}}{\cancel{2}} = F \frac{\cancel{D}}{\cancel{2}} \sin\theta \longrightarrow F = \frac{S}{\sin\theta} = 177{,}9$ N

$\theta = 0 \longrightarrow$ F non esercita momento, non è possibile mantenere la grondaia in equilibrio