

# APPUNTI DI GEOMETRIA DEI GALLEGGIANTI

A.A. 2006/7

## CAPITOLO 5 – FONDAMENTI D'IDROSTATICA NAVALE

1.	INTRODUZIONE .....	2
1.1	Ipotesi di base .....	3
2.	PRINCIPIO D'ARCHIMEDE.....	3
2.1	Corpo di forma geometrica semplice.....	3
2.1.1	Immersioni particolari .....	6
2.2	Il caso generale .....	7
2.3	Estensione del caso generale .....	10
3.	CONDIZIONI D'EQUILIBRIO DI UN GALLEGGIANTE.....	11
3.1	Forze .....	12
3.2	Momenti .....	12
4.	DEFINIZIONE DI STABILITÀ .....	14
5.	STABILITÀ INIZIALE .....	16
5.1	Metacentro .....	17
6.	ALTEZZA METACENTRICA .....	18
7.	SPOSTAMENTO DI PESI.....	19
8.	TEOREMA DI EULERO DELL'ASSE D'INCLINAZIONE.....	20
9.	RAGGIO METACENTRICO .....	22
10.	LA CURVA DEI CENTRI DI CARENA .....	25
10.1	L'evoluta metacentrica .....	26
10.2	Metacentri per vari assi d'inclinazione.....	28

## 1. INTRODUZIONE

In questo capitolo ci occuperemo delle **condizioni d'equilibrio** (di forze e momenti) e della **stabilità iniziale** dei galleggianti.

Dapprima sarà esaminata una derivazione del principio d'Archimede e la definizione di centro di carena e dislocamento; il principio d'Archimede costituisce una particolare formulazione della legge d'*equilibrio delle forze* agenti sui galleggianti.

L'*equilibrio dei momenti* esprime la relazione tra *centro di gravità* e *centro di carena* dei galleggianti.

Lo studio della *stabilità iniziale* concerne il comportamento del corpo in prossimità della posizione d'equilibrio; per derivare la condizione di stabilità iniziale sarà introdotto il concetto di **metacentro**.

Nel seguito denoteremo i centri sopra citati con i simboli seguenti:

- **G**, centro di gravità;
- **B**, centro di carena;
- **F**, centro della figura di galleggiamento;
- **M**, metacentro.

A ciascuna posizione del galleggiante corrisponde un centro di carena ed un metacentro; la posizione stessa è definita da tre parametri, p.es. dalla terna di valori costituita da *dislocamento*, *angolo di sbandamento*, *angolo d'assetto*.

Se un solo parametro si mantiene costante e gli altri due variano, **G** e **M** generano due superfici.

In questo capitolo esamineremo brevemente cosa accade quando è costante il dislocamento; in particolare, la discussione del caso in cui varia un solo angolo conduce al concetto d'**evoluta metacentrica**.

## **1.1 Ipotesi di base**

Si assumono le seguenti condizioni alla base di tutte le considerazioni che saranno esposte.

1. L'acqua sia incompressibile:

ciò è praticamente esatto nel campo delle profondità d'interesse in questa sede.

2. La viscosità sia ininfluente:

assunzione esatta in condizioni statiche e ancora valida con buona approssimazione alle bassissime velocità di movimento che interessano in idrostatica navale.

3. La tensione superficiale sia ininfluente:

vero, date le dimensioni dei galleggianti.

4. La superficie libera sia piana:

ciò non è mai vero, tuttavia quest'assunzione consente di ricavare risultati generali utili e calcolare proprietà essenziali dei galleggianti.

I risultati a cui si perverrà in questo capitolo sono generali poiché non sono considerate particolari forme dei corpi; ciò rende possibile estendere le conclusioni a qualsiasi tipo di nave, monoca-rena, catamarani o trimarani.

## **2. PRINCIPIO D'ARCHIMEDE**

### **2.1 Corpo di forma geometrica semplice**

*Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto uguale al peso del fluido spostato (principio d'Archimede).*

Per rendercene conto, evitando d'accettare generiche intuizioni riguardo all'equilibrio delle forze, possiamo accertare matematicamente l'enunciato se teniamo presente un'altra legge generale dell'idrostatica, la cui dimostrazione è fornita in meccanica dei fluidi.

Detta legge è il *principio di Pascal*:

*dato un fluido di peso specifico  $\gamma$ , la pressione<sup>1</sup> idrostatica alla profondità  $z$  è pari al prodotto  $\gamma z$ , che equivale al peso d'una colonna di fluido d'altezza  $z$  ed area unitaria della sezione trasversale ed è la stessa in tutte le direzioni in un punto della massa fluida.*

---

<sup>1</sup> pressione =  $\frac{\text{forza normale alla superficie}}{\text{area della superficie}}$

Calcoliamo ora le *forze idrostatiche* agenti su un corpo solido<sup>2</sup> di forma geometrica semplice. Prendiamo in considerazione dapprima un parallelepipedo a sezione orizzontale rettangolare, di lati  $B$  e  $L$  (fig. 1).

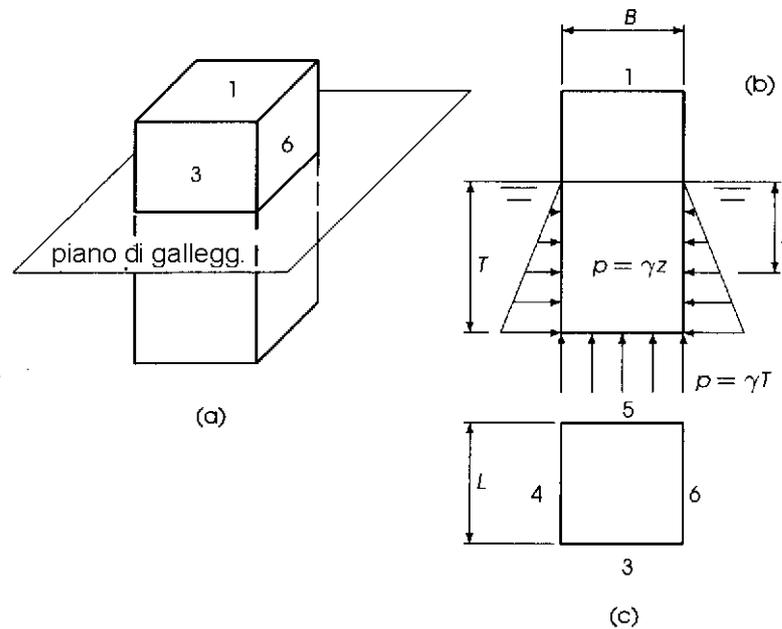


Fig. 1. Forze idrostatiche su un corpo di forma geometrica semplice.

Sia  $T$  l'immersione del corpo e chiamiamo:

- 1, la faccia superiore;
- 2, il fondo;
- 3, 4, 5 e 6, le facce verticali.

La fig. 1 (b) mostra il diagramma delle pressioni idrostatiche sulle facce 4 e 6; per ottenere la *pressione assoluta* dobbiamo aggiungere la pressione atmosferica  $p_0$ .

Assumendo che il verso positivo delle forze sia verso destra ed aggiungendo la pressione atmosferica, abbiamo la forza agente sulla faccia 4

$$F_4 = L \int_0^T \gamma z dz + p_0 LT = \frac{1}{2} \gamma LT^2 + p_0 LT \quad \dots\dots\dots (1)$$

Analogamente, la forza agente sulla faccia 6 è

$$F_6 = -L \int_0^T \gamma z dz - p_0 LT = -\frac{1}{2} \gamma LT^2 - p_0 LT \quad \dots\dots\dots (2)$$

Essendo  $F_4$  e  $F_6$  uguali ed opposte se ne ricava che esse si cancellano a vicenda.

Analogamente, anche le forze  $F_3$  e  $F_5$  sono uguali ed opposte e si cancellano a vicenda.

---

<sup>2</sup> Si assume che il corpo sia solido, cioè che l'acqua non possa penetrarvi.

Rimangono soltanto le forze sulle facce 1 e 2.

Sulla faccia 1 l'unica forza agente è dovuta alla pressione atmosferica; assumendo che il verso positivo per le forze sia verso l'alto, risulterà

$$F_1 = -p_0 L B \quad \dots\dots\dots (3)$$

e sulla faccia 2

$$F_2 = p_0 L B + \gamma L B T \quad \dots\dots\dots (4)$$

La risultante di  $F_1$  e  $F_2$  sarà quindi una forza rivolta verso l'alto, data dalla

$$F = F_1 + F_2 = p_0 L B + \gamma L B T - p_0 L B = \gamma L B T \quad \dots\dots\dots (5)$$

Il prodotto  $L B T$  è in effetti il volume della parte immersa del corpo, quindi la forza  $F$  data dalla (5) è il peso del volume spostato dal corpo immerso; è così verificato il principio d'Archimede.

S'è visto che la pressione atmosferica non ha nessun ruolo nella derivazione del principio d'Archimede, né in nessun problema concernente l'idrostatica dei galleggianti e pertanto ne ometteremo la considerazione da questo punto in avanti.

Guardando ora in dettaglio in fig. 2 una parte della fig. 1, è naturale considerare che la risultante delle forze di pressione sulla faccia 2 sia applicata nel centroide  $P$ .

Nella stessa figura, è indicato il punto  $B$ , centro del volume del solido; se il nostro solido fosse di materiale omogeneo,  $B$  sarebbe il suo centro di gravità.

Il punto  $P$  è situato esattamente sotto  $B$ , a diversa immersione, doppia nel caso in figura.

Il vettore forza risultante, applicato in  $P$  può essere spostato lungo la sua retta d'azione, senza che ne cambino i suoi momenti; s'ammette quindi comunemente che la forza  $L B T$  sia applicata nel punto  $B$ .

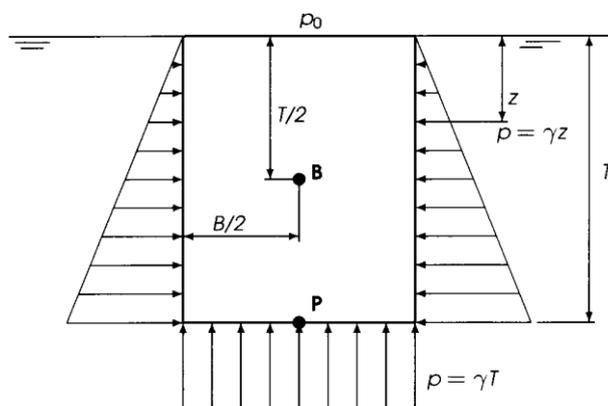


Fig. 2.

Si usa dire che la forza esercitata dal liquido è applicata nel centro del volume spostato, ma è più corretto dire che “*si può considerare che la forza esercitata dal liquido è applicata nel centro del volume spostato.*”

La forza  $L B T$  è chiamata **spinta idrostatica**.

### 2.1.1 Immersioni particolari

Abbiamo considerato il caso che il solido intersechi la superficie libera.

Tuttavia si possono presentare altri due casi, mostrati in fig. 3.

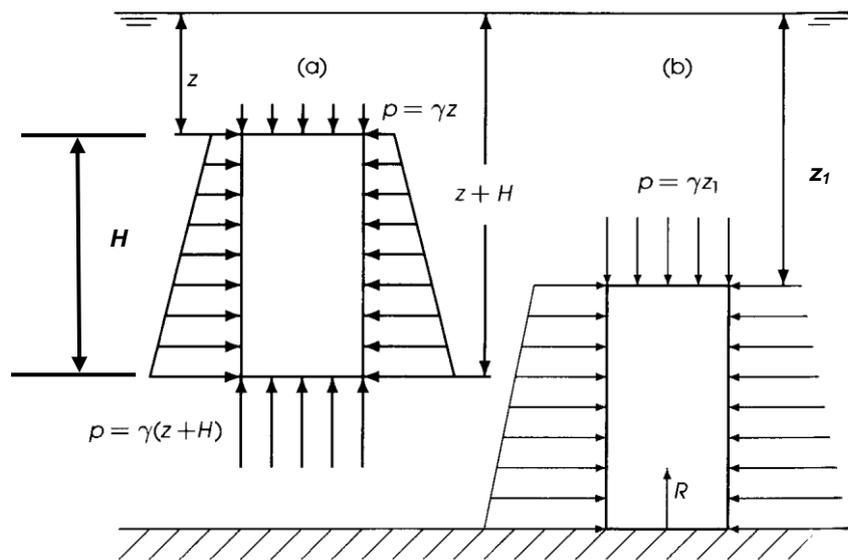


Fig. 3.

Nel caso (a) il corpo è totalmente immerso; le pressioni sono maggiori del caso precedente e la loro distribuzione sulle facce laterali, da 3 a 6, è trapezoidale, ma potremmo ugualmente constatare che la loro somma è nulla.

Rimane la somma delle pressioni sulla faccia superiore 1 e sul fondo 2; risulta

$$\gamma(z + H) L B - \gamma z L B = \gamma L B H \dots\dots\dots (6)$$

Il prodotto  $\gamma L B H$  è il peso del volume spostato dal corpo immerso; il principio d'Archimede rimane quindi valido anche in questo caso.

Nel caso (b) il corpo giace sul fondo del mare, lago, fiume o bacino che sia.

Assumendo che non penetri liquido sotto il corpo, non si ha pressione sulla faccia 2; la forza idrostatica agente è  $\gamma z_1 L B$ , diretta verso il basso; il principio d'Archimede non è più valido ed il corpo rimane in equilibrio grazie alla reazione  $R$  del fondo, pari al peso del corpo più la forza idrostatica agente.

Se volessimo sollevare il corpo dovremmo quindi tirarlo esercitando una forza maggiore del suo peso, tale da vincere la pressione sulla faccia superiore  $I$ .

Tuttavia, se il corpo è appena spostato in modo che l'acqua possa esercitare la sua pressione sulla faccia 2, si sviluppa la spinta idrostatica ed è come se il corpo venisse tirato con una forza pari a

$$\gamma z_1 L B.$$

Forze idrostatiche verso l'alto si sviluppano quindi:

- se il corpo immerso ha forma tale che il liquido possa agire sotto parte della sua superficie, come è il caso delle navi;
- se il fondo del mare non aderisce perfettamente al fondo del corpo che sarà quindi sede di forze verso l'alto, com'è il caso di argini e frangiflutti.

In questi ultimi due casi le forze verso l'alto possono essere inferiori al peso del liquido spostato.

Dovendo quindi agire assumendo le condizioni più gravose è da tener presente che:

- la forza necessaria per riportare un peso alla superficie non dovrebbe tener conto delle spinte verso l'alto;
- viceversa, nel calcolare un peso morto, come p.es. un blocco di cemento, per un sistema d'ancoraggio, le spinte verso l'alto devono essere considerate, poiché possono ridurre quell'attrito tra il corpo ed il fondo che si oppone alle spinte orizzontali.

## **2.2 Il caso generale**

In fig. 4 consideriamo un corpo immerso ed un sistema di coordinate cartesiane  $x, y, z$  in cui  $z$  è verticale ed orientato verso il basso.

L'unica limitazione che poniamo temporaneamente, salvo rimuoverla in seguito onde estendere le conclusioni a corpi di qualsiasi forma, è che nessuna retta parallela ad uno degli assi coordinati intersechi il corpo più di due volte.

Sia  $S$  la superficie del corpo e  $P$  il piano orizzontale su cui giace la sezione massima.

Il piano  $P$  divide la superficie  $S$  in due,  $S_1$  superiore ed  $S_2$  inferiore.

Assumiamo che  $S_1$  ed  $S_2$  siano definite rispettivamente da

$$z = f_1(x, y) \quad \text{e} \quad z = f_2(x, y).$$

La forza idrostatica su un elemento  $dA$  di  $S_1$  è  $p dA$ , diretta secondo  $n$ , normale a  $S_1$  in  $dA$ .

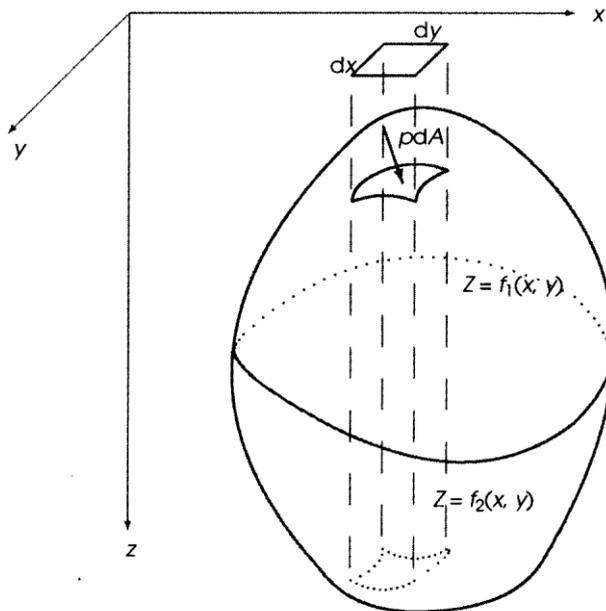


Fig. 4. Principio d'Archimede: forza verticale

Detto  $\cos(n,z)$  il coseno dell'angolo tra  $\mathbf{n}$  e l'asse verticale  $z$ , la componente verticale della forza dovuta alla pressione agente su  $dA$  è pari a

$$\gamma f_1(x,y) \cos(n,z) dA$$

Ma  $\cos(n,z) dA$  è la proiezione di  $dA$  su un piano orizzontale, vale a dire  $dx dy$ ; quindi la forza idrostatica verticale agente su  $S_1$  è

$$\gamma \iint_{S_1} f_1(x,y) dx dy \dots\dots\dots (7)$$

Consideriamo un elemento di  $S_2$  opposto a quello considerato su  $S_1$ ; ripetendo le considerazioni precedenti, avendo cura di adeguare i segni, otteniamo la forza idrostatica agente su  $S_2$

$$-\gamma \iint_{S_2} f_2(x,y) dx dy \dots\dots\dots (8)$$

e quindi la forza totale su  $S$

$$F = \gamma \iint_S |f_1(x,y) - f_2(x,y)| dx dy \dots\dots\dots (9)$$

Nell'equazione sopra scritta l'integrale a secondo membro fornisce il volume del corpo sommerso e quindi  $F$  è pari al peso del liquido spostato.

Rimane da dimostrare che la componente orizzontale della risultante delle forze di pressione è nulla.

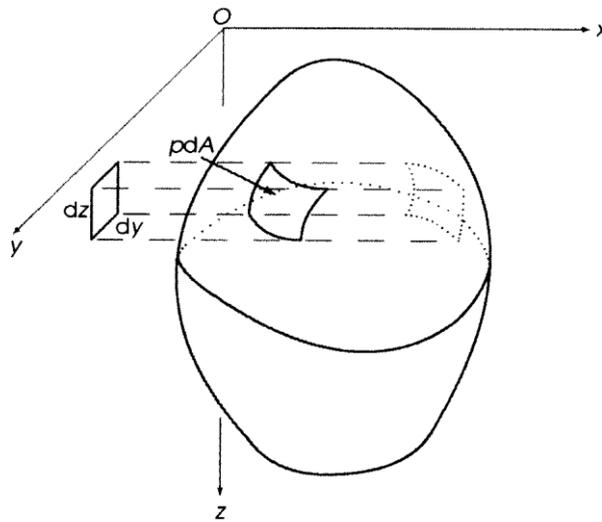


Fig. 5. Principio d'Archimede: forza orizzontale

Con riferimento alla fig. 5 dimostreremo quanto enunciato per la componente parallela ad  $Ox$ .

La componente parallela all'asse  $x$ , agente sull'elemento di area  $dA$  è

$$p \cos(n, x) dA = \gamma z dy dz$$

Dall'altro lato della superficie, alla stessa profondità  $z$ , c'è un elemento di area tale che la forza idrostatica agente su di esso è pari a

$$p \cos(n, x) dA = -\gamma z dy dz$$

La somma delle due forze è nulla.

Dato che l'intera superficie  $S$  è formata da coppie opposte  $dA$ , se ne può concludere che la componente orizzontale della risultante, secondo l'asse  $x$ , è zero.

Questo risultato è anche conseguibile intuitivamente, qualora si pensi che, se la risultante delle forze orizzontali fosse diversa da zero, si avrebbe una forza propulsiva "spontanea".

Quanto sopra completa la dimostrazione del principio d'Archimede con la sola restrizione che il corpo sia di forma tale che nessuna retta parallela agli assi coordinati lo intersechi più di due volte.

### 2.3 Estensione del caso generale

Rimuovendo la limitazione posta alla forma del corpo nel paragrafo precedente, vedremo ora come il principio d'Archimede rimanga ancora valido.

Consideriamo un corpo di forma tale che una linea verticale possa intersecarne quattro volte la superficie esterna, fig. 6 (a).

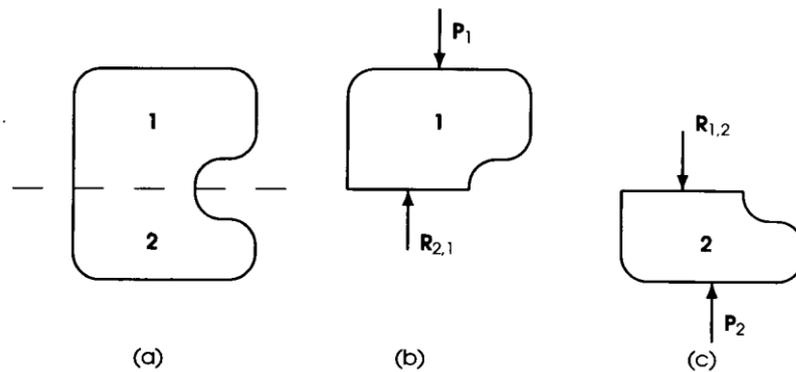


Fig. 6. Estensione del principio d'Archimede

La linea tratteggiata è la traccia di un piano che divide il volume totale in due parti, **1** e **2**, tali che ciascuna di esse non possa essere intersecata più di due volte da una qualsiasi retta parallela agli assi coordinati.

Le forze agenti si distribuiscono come riportato in tab. 1.

Volume <b>1</b> : forze agenti, fig. 6 (b)	Volume <b>2</b> : forze agenti, fig. 6 (c)
$P_1$ : risultante delle pressioni idrostatiche sulla superficie esterna	$P_2$ : risultante delle pressioni idrostatiche sulla superficie esterna
$R_{2,1}$ : forza esercitata dal volume <b>2</b> .	$R_{1,2}$ : forza esercitata dal volume <b>1</b> .

Tab. 1. Forze agenti

Le forze  $R_{2,1}$ ,  $R_{1,2}$  sono uguali ed opposte, pertanto la somma delle forze che agiscono sui due volumi messi assieme è  $P_1 + P_2$ , vale a dire la forza determinata tramite il principio d'Archimede.

Per trovare il punto d'applicazione della spinta idrostatica calcoliamo i momenti della risultante rispetto agli assi  $x$  e  $y$  e dividiamo per la risultante stessa.

Si trova, come si può vedere dalle equazioni (10) e (11) riportate qui di seguito, che le coordinate del punto d'applicazione della spinta coincidono con quelle del centro del volume immerso.

La spinta idrostatica passa quindi per il centro **B** del volume immerso (*centro di carena*).

$$\begin{aligned}
 x_P &= \frac{\int_S \int_S x \gamma z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy}{\int_S \int_S \gamma z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy} \\
 &= \frac{\int_S \int_S x z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy}{\int_S \int_S z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 y_P &= \frac{\int_S \int_S y \gamma z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy}{\int_S \int_S \gamma z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy} \\
 &= \frac{\int_S \int_S y z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy}{\int_S \int_S z |f_1(x, y) - f_2(x, y)| dx dy}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

### 3. CONDIZIONI D'EQUILIBRIO DI UN GALLEGGIANTE

Un corpo è in equilibrio se non è soggetto ad accelerazioni; in base alla seconda legge di Newton, questo accade se sono nulli la risultante ed il momento del sistema di tutte le forze agenti sul corpo.

Su un galleggiante agiscono due forze: il peso e la spinta idrostatica.

La prima condizione d'equilibrio, riguardante la risultante delle forze è espressa dal principio d'Archimede.

La seconda condizione, riguarda la somma dei momenti.

Sul galleggiante possono agire altre forze, come quelle prodotte dal vento, dall'accelerazione centrifuga nelle accostate o dal rimorchio; tutte queste formano oggetto d'interesse di altre discipline, come Statica della Nave e Architettura Navale.

### 3.1 Forze

Assumiamo che i corpi rappresentati nelle fig. 1 e fig. 3 (a) galleggino liberamente.

Il peso del corpo e le forze idrostatiche sono in equilibrio ed il principio d'Archimede è valido nella sua classica formulazione, vedere § 2.1 del presente capitolo.

Detto quindi  $\Delta$ , *dislocamento*, il peso del fluido spostato ed indicando con  $W$  il peso del corpo, l'equilibrio delle forze è espresso dalla

$$\Delta = W \quad \dots\dots\dots (12)$$

Per il volume del liquido spostato usiamo il simbolo  $\nabla$ ; la (12) si può quindi scrivere nella forma

$$\gamma \nabla = W \quad \dots\dots\dots (13)$$

che possiamo ancora scrivere nella forma

$$\gamma C_B LBT = \sum_{i=1}^n W_i \quad \dots\dots\dots (14)$$

in cui  $W_i$  è il peso dell' $i$ -esima componente del peso della nave, p.es. il peso dello scafo o dell'allestimento e così via,  $C_B$  è il coefficiente di finezza definito al § 1.1 del cap. 3.

### 3.2 Momenti

Come accennato, la seconda condizione perché il galleggiante sia in equilibrio è che sia nulla la somma dei momenti delle forze agenti.

Questa condizione è soddisfatta in fig. 7 (a), in cui il centro di gravità  $G$  ed il centro di carena  $B$  si trovano sulla stessa retta verticale ed è quindi nulla la somma dei loro momenti rispetto a qualsiasi riferimento.

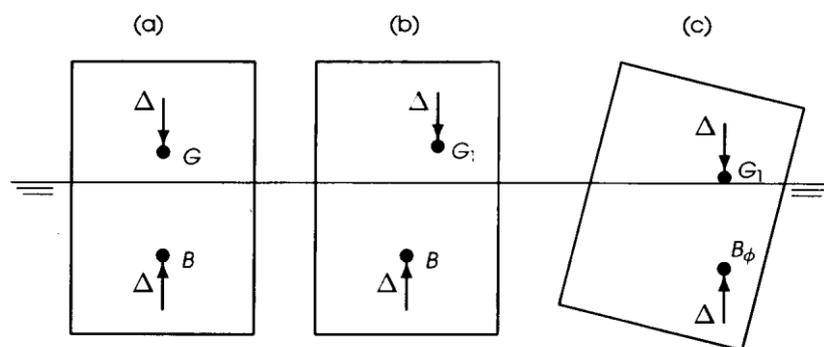


Fig. 7.

Se assumiamo che il centro di gravità si sposta, rimanendo sullo stesso piano, in una nuova posizione  $G_1$ , fig. 7 (b), la somma dei momenti non è più nulla.

Ciò dà luogo ad una rotazione del corpo d'un angolo  $\phi$ , tale che un certo volume s'immerge sul lato destro in figura ed un ugual volume emerge sul lato sinistro.

Il risultato è che il centro di carena si sposta in una nuova posizione  $\mathbf{B}_\phi$  ed il corpo ritroverà una nuova posizione d'equilibrio quando  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{B}_\phi$  saranno di nuovo sulla stessa verticale, fig. 7 (c).

È possibile sintetizzare la fig. 7 rappresentando tutte le situazioni in un unico schema, come mostrato in fig. 8, in cui, invece di ruotare il corpo in senso orario, tenendo ferma la linea d'acqua, rappresentiamo la linea d'acqua inclinata d'un angolo  $\phi$ , in senso antiorario.

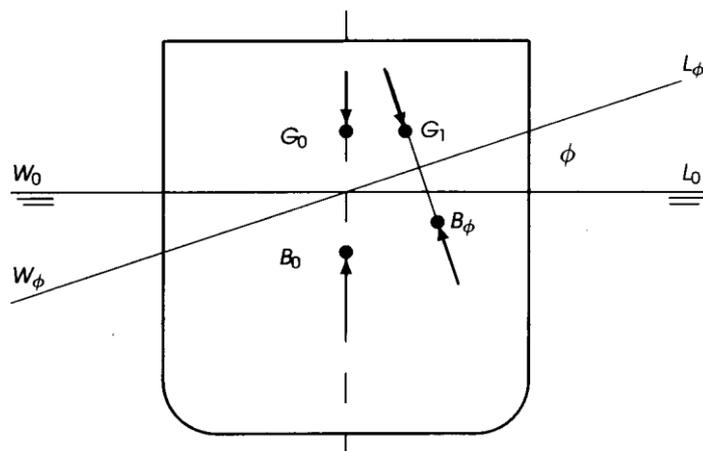


Fig. 8.

La linea d'acqua corrispondente alla posizione iniziale è la  $W_0L_0$  ed il peso, uguale a  $\Delta$ , agisce attraverso il centro iniziale di gravità  $\mathbf{G}_0$ , in direzione verticale, perpendicolare quindi alla  $W_0L_0$ .

La spinta idrostatica, anch'essa uguale a  $\Delta$ , è applicata al centro di carena  $\mathbf{B}_0$ , ed è perpendicolare alla  $W_0L_0$ .

Spostandosi  $\mathbf{G}_0$  in  $\mathbf{G}_1$ , il corpo ruota dell'angolo  $\phi$  ed il nuovo centro di carena  $\mathbf{B}_\phi$  si disporrà sulla verticale passante per  $\mathbf{G}_1$ , cioè sulla perpendicolare alla nuova linea d'acqua  $W_\phi L_\phi$ .

Quindi la seconda condizione d'equilibrio del corpo galleggiante è soddisfatta se il centro di gravità ed il centro di carena si trovano sulla stessa verticale.

Questa condizione è anche detta impropriamente da qualche autore *legge di Stevino*, da non confondere con il *principio* di Stevino, che fornisce il valore della pressione ad una data profondità d'una massa liquida.

Quanto sopra esposto presuppone che il corpo non abbia aperture attraverso le quali possa penetrare acqua in seguito alla variazione della linea di galleggiamento, in altre parole sia *stagno*.

Quando ciò non è verificato, l'equilibrio può ancora essere conseguito, attraverso condizioni più complesse, che formano oggetto di studio in Statica della Nave, sotto il nome di *Stabilità in Allagamento*.

## 4. DEFINIZIONE DI STABILITÀ

Interessa fissare il concetto di stabilità, come esso si applica ai corpi galleggianti.

Consideriamo un galleggiante in equilibrio ed assumiamo che una qualsiasi causa (forza e/o momento) provochi una **piccola variazione** della sua posizione; quando la causa cessa, si possono presentare tre diverse situazioni.

1. Il corpo ritorna alla sua posizione iniziale: si dice che l'equilibrio è **stabile**.
2. La posizione del corpo continua a cambiare: diciamo che l'equilibrio è **instabile**, il che in termini pratici, per un galleggiante significa che si capovolge e/o affonda.
3. il corpo rimane nella nuova posizione finché una nuova perturbazione non lo riporta nella posizione iniziale o continua ad allontanarlo da essa: si dice che l'equilibrio è **indifferente**.

Ad esempio consideriamo il corpo di fig. 1; se esso galleggia liberamente, l'eq. (13) ci dice che il suo volume totale è maggiore del rapporto tra il suo peso ed il peso specifico del liquido.

Il corpo galleggia in equilibrio stabile rispetto all'immersione.

Infatti, se immaginiamo che una qualsiasi forza lo spinga verso il basso, in modo da farne aumentare l'immersione di una quantità  $\delta T$ , per il principio d'Archimede sorgerà una spinta idrostatica  $\gamma L B \delta T$ , rivolta verso l'alto.

Supponendo ora che la causa dell'aumento d'immersione cessi progressivamente, la forza precedentemente generata,  $\gamma L B \delta T$ , riporterà il corpo nella sua posizione iniziale.

In effetti, man mano che il corpo risale,  $\delta T$  diminuisce fino ad annullarsi ed il movimento cessa.

Se la causa dell'aumento d'immersione cessasse bruscamente il corpo oscillerebbe intorno alla sua posizione iniziale, per ritornare successivamente allo stato di quiete iniziale, grazie allo smorzamento, sempre presente nel moto dei corpi in un fluido.

In modo analogo, se la perturbazione dell'equilibrio portasse il corpo verso l'alto, avremmo una diminuzione d'immersione  $\delta T$  ed una forza ( $-\gamma L B \delta T$ ) rivolta verso il basso riporterebbe il corpo verso il basso, con le stesse modalità prima viste.

Ciò prova che il corpo galleggia libero sulla superficie, in equilibrio stabile, per quanto riguarda l'immersione; infatti, come si vedrà nel seguito, il corpo potrebbe essere instabile per quanto riguarda lo sbandamento.

Quando il corpo galleggia ma è completamente immerso, il suo peso uguaglia esattamente il prodotto del suo volume totale per il peso specifico del liquido.

Il corpo è allora in equilibrio indifferente, in quanto che esso può galleggiare a **qualsiasi** profondità.

Una piccola perturbazione sposterebbe il corpo da una profondità ad un'altra.

Se infine, il peso del corpo fosse maggiore del prodotto sopra citato, il corpo affonderebbe.

In definitiva possiamo distinguere tre casi.

1. Volume totale del corpo maggiore del rapporto tra il suo peso ed il peso specifico del liquido:

$$V_{totale} > W/\gamma$$

Il corpo galleggia in superficie e ne possiamo controllare l'immersione aggiungendovi o sottraendone peso.

2. Volume totale del corpo esattamente uguale al rapporto tra il suo peso ed il peso specifico del liquido:

$$V_{totale} = W/\gamma$$

Il corpo galleggia a qualsiasi profondità e non ne possiamo controllare l'immersione aggiungendovi o sottraendone peso; una riduzione di peso lo riporterebbe nella condizione del caso 1, un'aggiunta di peso lo porterebbe nella condizione del caso 3.

3. Volume totale del corpo minore del rapporto tra il suo peso ed il peso specifico del liquido:

$$V_{totale} < W/\gamma$$

Il corpo affonda; per cambiarne la posizione dovremo ridurre il peso fino a raggiungere perlomeno la condizione 2 o aumentarne in qualche modo la spinta idrostatica.

## 5. STABILITÀ INIZIALE

In fig. 9 (a) è rappresentata una sezione trasversale di una nave in posizione diritta, vale a dire non sbandata<sup>3</sup>.

Se questa sezione contiene il centro di carena  $\mathbf{B}_0$ , per la legge di Stevino (equilibrio dei momenti) contiene anche il centro di gravità  $\mathbf{G}$ ; la linea d'acqua è  $W_0L_0$ , la forza peso è applicata in  $\mathbf{G}$ , la spinta idrostatica è applicata in  $\mathbf{B}_0$  e la nave è in condizioni d'equilibrio.

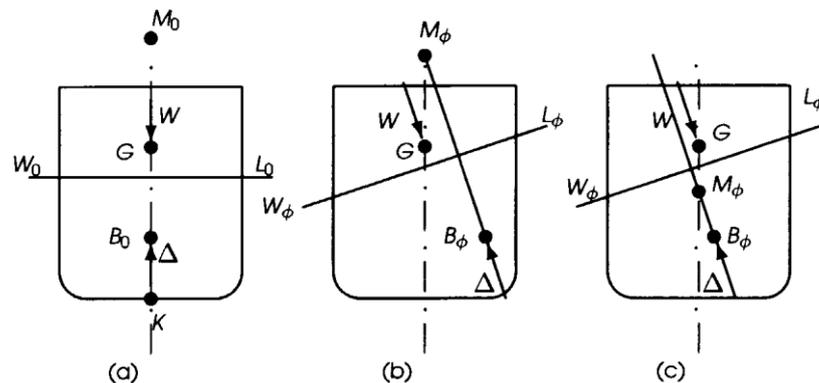


Fig. 9. Condizione di stabilità iniziale.

Supponiamo che la nave sbandi sulla destra, inclinandosi d'un angolo  $\phi$ , come rappresentato in fig. 9 (b), in cui la nuova linea d'acqua è  $W_\phi L_\phi$ .

Se i pesi sono fissati, come si deve a bordo d'una nave, il centro di gravità rimane nella stessa posizione  $\mathbf{G}$  ed a causa della variazione di forma del volume, come visto al § 3.2, il centro di carena si sposta in  $\mathbf{B}_\phi$ .

Peso e spinta sono verticali, vale a dire perpendicolari alla linea d'acqua  $W_\phi L_\phi$ ; si genera quindi un momento che tende a riportare la nave in posizione parallela alla  $W_\phi L_\phi$ , cioè verso sinistra, in posizione orizzontale.

Si dice che in queste condizioni la nave è stabile.

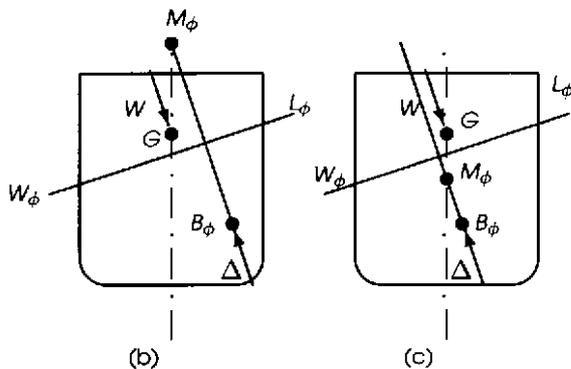
Se si verificasse la situazione mostrata in fig. 9 (c), in cui la verticale per  $\mathbf{B}_\phi$  si trova a sinistra della verticale per  $\mathbf{G}$ , il momento tenderebbe a far ancora ruotare la nave verso destra.

Si dice che in queste condizioni la nave è instabile.

<sup>3</sup> Per la definizione di sbandamento si rimanda al § 4 del cap. 1.

## 5.1 Metacentro

La differenza tra le condizioni di fig. 9 (b) e (c) può essere descritta introducendo il concetto di *metacentro*.



Tornando a considerare la fig. 9 (b) e (c), osserviamo che la retta verticale, disegnata con linea tratto-punto, rappresenta la traccia del piano diametrale della nave.

Più in generale, detta linea è la retta d'azione della spinta prima dello sbandamento.

Se denominiamo **metacentro M** l'intersezione della retta d'azione della spinta con il piano diametrale, possiamo osservare che si presentano le due situazioni riportate in fig. 9 (b) e (c):

- in (b) il metacentro **M** si trova sopra il centro di gravità **G**;
- in (c) il metacentro **M** si trova sotto il centro di gravità **G**.

Ne possiamo concludere che *l'equilibrio di un galleggiante è stabile se il metacentro si trova sopra il centro di gravità*.

È bene porre attenzione che nelle figure considerate il metacentro giace sul piano diametrale, essendo la nave di forma simmetrica.

Più in generale, si può riformulare la definizione di metacentro come segue.

*Dato un galleggiante ed il suo centro di carena  $B_\phi$ , sia  $R$  la retta d'azione della spinta.*

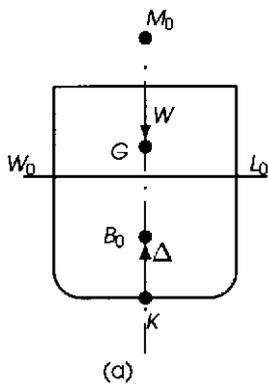
*Se il corpo cambia la sua inclinazione d'un angolo  $\delta\phi$ , il centro di carena cambia la sua posizione in  $B_{\phi+\delta\phi}$ ; sia  $S$  la nuova retta d'azione della spinta.*

*Si chiama metacentro il punto a cui tende l'intersezione delle rette  $R$  ed  $S$  quando  $\delta\phi$  tende a zero.*

Quanto sopra esposto è valido, per motivi che vedremo nel seguito, a condizione che *l'angolo di sbandamento sia piccolo*.

Si richiama infine l'attenzione sulla proprietà del metacentro, discendente da considerazioni di geometria differenziale, di essere il **centro di curvatura della curva dei centri di carena**.

## 6. ALTEZZA METACENTRICA



Abbiamo visto che una nave di superficie è stabile in una certa condizione se il suo metacentro si trova sopra il centro di gravità.

Per ricavare una formulazione matematica da usare nei calcoli, consideriamo ancora la fig. 9 (a), in cui scegliamo un punto di riferimento, **K**, all'intersezione della linea di mezzeria con la linea di base, a partire dal quale misuriamo le coordinate verticali, positive verso l'alto.

Vale a dire che **K** è l'origine delle altezze *z*.

Nella stessa figura **M<sub>0</sub>** è il **metacentro iniziale**, corrispondente cioè alla posizione diritta della nave.

Abbandonando i pedici **0** possiamo scrivere:

$$\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG} \quad \dots\dots\dots (15)$$

e la condizione di stabilità iniziale è espressa dalla

$$\overline{GM} > 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

Il vettore  $\overline{GM}$  si chiama **altezza metacentrica**.

Il vettore  $\overline{KB}$  è la coordinata *z* del centro di carena, dipendente dalle forme della nave.

Il vettore  $\overline{BM}$  è il **raggio metacentrico**, dipendente dalle forme della nave, generalmente indicato come *r*, raggio metacentrico trasversale o **R**, raggio metacentrico longitudinale, il cui significato sarà visto nel seguito.

Il vettore  $\overline{KG}$  è la coordinata *z* del centro di gravità della nave, dipendente dalla distribuzione dei pesi a bordo.

Infine, nella letteratura tecnica italiana si fa uso delle notazioni:

- (*r* - *a*), per indicare l'altezza metacentrica trasversale;
- (**R** - *a*), per indicare l'altezza metacentrica longitudinale.

Nei due binomi sopra riportati il termine *a* denota l'elevazione  $\overline{BG}$  del centro di gravità sopra il centro di carena.

## 7. SPOSTAMENTO DI PESI

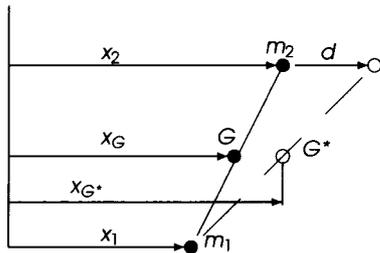


Fig. 10.

Sia dato un sistema di due masse,  $m_1, m_2$ , aventi ascisse  $x_1, x_2$ , di cui sia  $G$  il baricentro, la cui ascissa sarà

$$x_G = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

Spostiamo la massa  $m_2$  di una distanza  $d$  in direzione  $x$ .

Sia  $G^*$  il nuovo baricentro; la sua ascissa sarà

$$\dots\dots\dots (18)$$

Il prodotto  $d m_2$  è la variazione di momento causata dallo spostamento di  $m_2$ .

Il baricentro del sistema s'è spostato d'una distanza pari al rapporto  $\frac{\text{variazione di momento}}{\text{massa totale}}$ .

In termini più generali:

*Dato un sistema di masse, se uno dei suoi componenti viene spostato in una certa direzione, il baricentro del sistema si sposta nella stessa direzione d'una distanza pari alla variazione di momento divisa la massa totale.*

Questo lemma è valido qualunque sia il sistema di masse considerato, vale a dire siano esse pesi, linee, superfici o volumi.

## 8. TEOREMA DI EULERO DELL'ASSE D'INCLINAZIONE

Sia  $W_0L_0$  il piano di galleggiamento iniziale del corpo rappresentato in fig. 11.

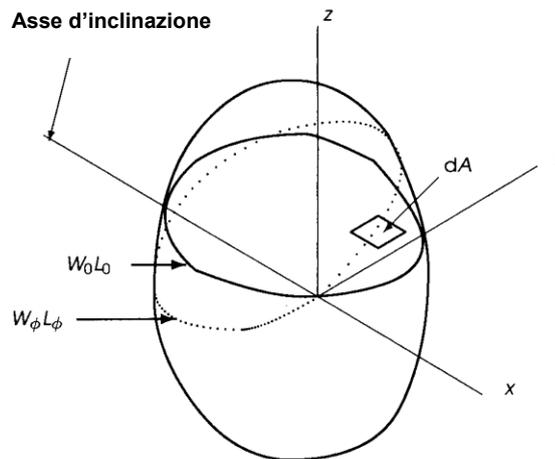


Fig. 11. Teorema di Eulero dell'asse d'inclinazione.

Consideriamo ora il corpo inclinato di un piccolo angolo  $\phi$  e sia  $W_\phi L_\phi$  il nuovo galleggiamento.

Non essendo variato il peso del corpo, non cambia il volume della parte immersa.

In conseguenza, il volume del menisco che s'immerge a destra, tra i piani  $W_0L_0$  e  $W_\phi L_\phi$  uguaglia quello che emerge a sinistra, tra gli stessi piani.

Assumiamo come asse  $x$  l'intersezione dei due piani, vale a dire l'asse d'inclinazione.

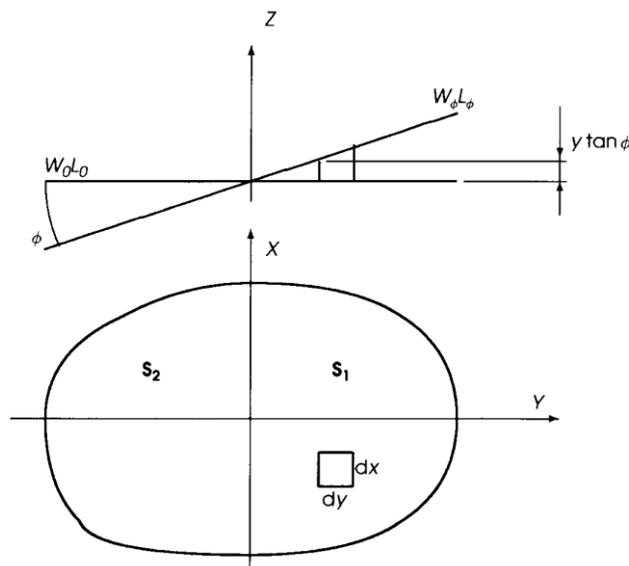


Fig. 12. Teorema di Eulero dell'asse d'inclinazione.

Come mostrato in fig. 12,  $y \tan \phi$  è l'altezza d'un elemento di volume posto a distanza  $y$  dall'asse d'inclinazione; se  $dA = dx dy$  è l'area della base dell'elemento, il suo volume sarà

$$y \tan \phi dx dy$$

Siano  $S_1$  e  $S_2$  le aree delle porzioni di  $W_\phi L_\phi$  site rispettivamente a destra e sinistra dell'asse  $x$ .

Il volume che s'immerge è quindi

$$V_1 = \iint_{S_1} y \tan \phi dx dy \quad \dots\dots\dots (19)$$

ed il volume che emerge

$$V_2 = - \iint_{S_2} y \tan \phi dx dy \quad \dots\dots\dots (20)$$

Le relazioni (19), (20) sono valide assumendo che l'angolo di sbandamento  $\phi$  sia piccolo e quindi i volumi dei due menischi, immerso ed emerso, siano assimilabili a corpi "wall sided"<sup>4</sup>.

La condizione che i volumi dei due menischi siano uguali è espressa dalla

$$V_1 = V_2$$

vale a dire

$$\iint_{S_1} y \tan \phi dx dy = - \iint_{S_2} y \tan \phi dx dy \quad \dots\dots\dots (21)$$

ed infine

$$\iint_S y dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

essendo  $S = S_1 + S_2$  l'intero piano di galleggiamento.

In altre parole, il momento statico della figura di galleggiamento, rispetto all'asse d'inclinazione è nullo, come dire che l'asse d'inclinazione passa per il baricentro della figura.

Ricordiamo che le coordinate di detto baricentro, chiamato **centro di galleggiamento**, sono

$$x_C = \frac{\iint_S x dx dy}{\iint_S dx dy} \qquad y_C = \frac{\iint_S y dx dy}{\iint_S dx dy}$$

Quanto sopra dimostrato si può riassumere enunciando quanto segue.

---

<sup>4</sup> Letteralmente con pareti a muro, quindi del tipo qui di seguito rappresentato,  ; ne sono un tipico esempio chiatte, pontoni, bacini galleggianti, bettoline e porzioni più o meno rilevanti di carene di navi mercantili, come petroliere, portarinfuse, ecc.

Siano  $W_0L_0$  e  $W_\phi L_\phi$  i galleggiamenti rispettivamente iniziale e finale dopo un'inclinazione d'un angolo  $\phi$ , a volume costante.

L'intersezione dei due galleggiamenti è l'asse d'inclinazione.

Al tendere a zero dell'angolo, l'asse d'inclinazione tende ad una retta passante per bari-centro della superficie di galleggiamento.

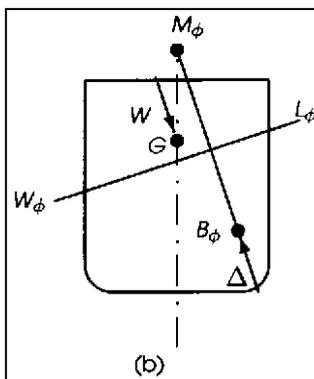
In pratica, questa proprietà si mantiene valida se l'angolo d'inclinazione è sufficientemente piccolo, il che significa entro valori che vanno da 5 gradi per alcune forme, a 15 gradi per altre, essendo plausibili i valori maggiori per le carene tendenzialmente "wall sided" (v. nota <sup>4</sup>).

Inoltre, quando l'inclinazione costituisce una variazione d'assetto longitudinale (rotazione intorno all'asse nave  $y$ ), gli angoli sono generalmente piccoli e questa proprietà è sempre valida.

## 9. RAGGIO METACENTRICO

Con riferimento alla fig. 9 (b), riportata qui sotto, il vettore  $B_\phi M_\phi$  è importante per la stabilità.

Omettendo il pedice  $\phi$  chiameremo  $\overline{BM}$  **raggio metacentrico**.



Per calcolarlo dovremo determinare lo spostamento del centro di carena  $\mathbf{B}$  per un piccolo angolo d'inclinazione  $\phi$ .

Ricorriamo al lemma sullo spostamento di masse, applicandolo al volume di carena

$$\text{variazione di coordinate} = \frac{\text{variazione di momento del volume}}{\text{volume totale}}$$

Come visto nelle fig. 11 e 12, la variazione di volume elementare è  $y \tan \phi dx dy$ ; per determinarne la variazione di momento rispetto ai piani coordinati dobbiamo moltiplicare il volume elementare per le coordinate del suo baricentro.

Poniamo l'origine delle coordinate nel centro iniziale di carena  $\mathbf{B}_0$  e facciamo riferimento alla terna di assi coordinati avente  $x$  longitudinale, positivo verso prora,  $y$  trasversale positivo verso il lato sinistro della nave e  $z$  verticale verso l'alto.

Le coordinate del centro di carena  $\mathbf{B}_\phi$  s'ottengono integrando il momento della variazione di volume elementare, estesa alla superficie di galleggiamento e rapportandolo al volume totale.

Ne conseguono le espressioni seguenti, tenendo presente che le componenti dello spostamento del centro sono  $x$ ,  $y$  e  $z = 1/2 y \tan \phi$ .

$$x_B = \frac{\iint_S x y \tan \phi \, dx \, dy}{\nabla} = \frac{J_{xy}}{\nabla} \tan \phi \quad \dots\dots\dots (23.1)$$

$$y_B = \frac{\iint_S y^2 \tan \phi \, dx \, dy}{\nabla} = \frac{J_x}{\nabla} \tan \phi \quad \dots\dots\dots (23.2)$$

$$z_B = \frac{\iint_S \frac{1}{2} y^2 \tan^2 \phi \, dx \, dy}{\nabla} = \frac{J_x}{2\nabla} \tan^2 \phi \quad \dots\dots\dots (23.3)$$

in cui  $J_x$  = momento d'inerzia della superficie di galleggiamento intorno all'asse d'inclinazione;

$J_{xy}$  = momento centrifugo intorno agli assi  $x$  e  $y$ .

Avendo assunto che  $\phi$  sia piccolo possiamo riscrivere le tre relazioni

$$\left. \begin{aligned} x_B &= \frac{J_{xy}}{\nabla} \phi \\ y_B &= \frac{J_x}{\nabla} \phi \\ z_B &= \frac{J_x}{2\nabla} \phi^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

La  $z_B$  è del secondo ordine e può quindi essere trascurata essendo  $\phi$  piccolo.

La  $x_B$ , nel caso delle carene simmetriche rispetto al piano verticale  $xOz$ , è nulla essendo nullo il momento centrifugo.

Pertanto  $\overline{B_0 B_\phi}$ , fig. 13, è essenzialmente uguale a  $y_B$ .

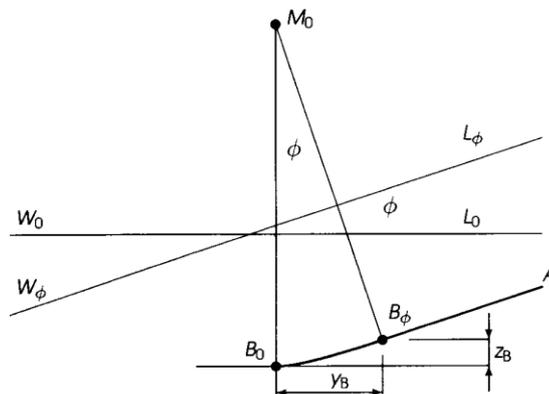


Fig. 13. Calcolo del raggio metacentrico

Basterà quindi considerare la proiezione della curva dei centri di carena **B** sul piano che ne contiene la posizione iniziale **B**<sub>0</sub> ed è perpendicolare all'asse d'inclinazione.

In questo piano possiamo assumere che la lunghezza dell'arco  $\widehat{\mathbf{B}_0\mathbf{B}_\phi}$  sia uguale a  $\overline{\mathbf{BM}} \phi$  e quindi, essendo  $z_B$  di secondo ordine,

$$\frac{J_x}{\nabla} \phi = \overline{\mathbf{BM}} \phi \quad \text{da cui} \quad \overline{\mathbf{BM}} = \frac{J_x}{\nabla} \dots\dots\dots (25)$$

Si può quindi affermare che

*Il raggio metacentrico  $\overline{\mathbf{BM}}$  è il rapporto tra il momento d'inerzia della superficie di galleggiamento, intorno all'asse d'inclinazione ed il volume del dislocamento.*

Poiché dalla terza delle (24) si vede che  $z_B$  è sempre positivo, possiamo anche concludere che la curva dei centri di carena presenta sempre la concavità verso l'alto.

## 10. LA CURVA DEI CENTRI DI CARENA

La fig. 14 mostra un galleggiante inclinato d'un certo angolo, la corrispondente linea d'acqua  $W_1L_1$  ed il centro di carena  $B_1$ .

Supponiamo che l'inclinazione aumenti d'un piccolo angolo  $\phi$  e siano:  $W_2L_2$  la nuova linea d'acqua e  $B_2$  il nuovo centro di carena, le cui coordinate  $y_B$  e  $z_B$  sono date dalla (24).

Differenziando otteniamo

$$dy_B = \frac{J}{\nabla} d\phi \qquad dz_B = \frac{J}{\nabla} \phi d\phi$$

che dimostra che la pendenza della tangente alla curva dei  $B$  in  $B_2$  è

$$\left. \frac{dz_B}{dy_B} \right|_{B_2} = \phi \qquad \text{che è l'angolo d'inclinazione assunto.}$$

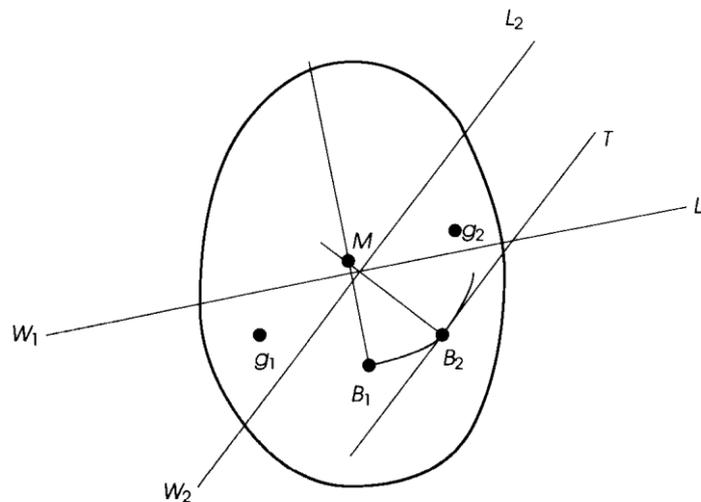


Fig. 14. Proprietà delle curve di  $B$  e  $M$ .

Se ne può concludere che la tangente alla curva dei centri di carena in un punto  $B_\phi$  è parallela alla corrispondente linea d'acqua  $W_\phi L_\phi$ .

### 10.1 L'evolva metacentrica

La spinta idrostatica è sempre normale al galleggiamento e quindi anche alla curva dei centri di carena.

S'è anche definito il metacentro **M** come il punto intersezione della retta d'azione della spinta con il piano diametrale, a partire dalla posizione di nave trasversalmente diritta, la cui distanza dalla linea di base è la somma del raggio metacentrico e dell'altezza del centro di carena **B**.

In effetti, estendendo il campo degli angoli di sbandamento, si presenta la situazione rappresentata in fig. 15.

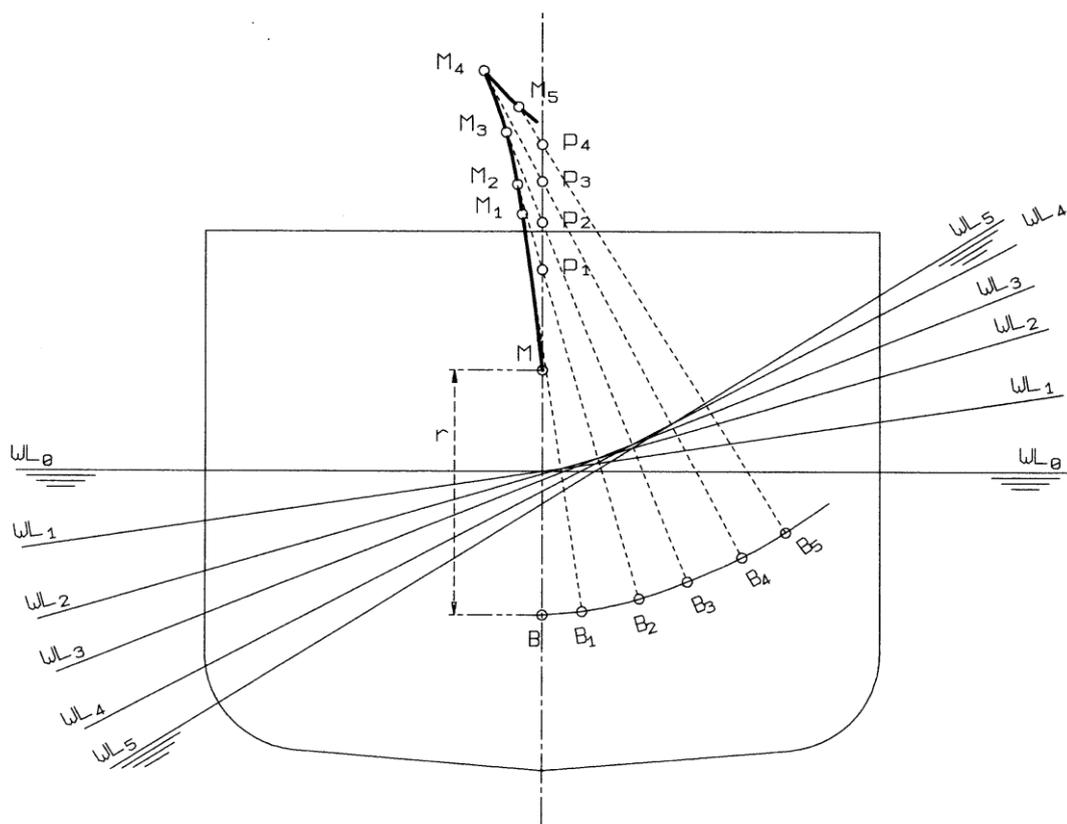


Fig. 15. Evolva metacentrica.

Il tratto iniziale,  $\widehat{B B_1}$  può essere considerato un arco di cerchio il cui centro è il metacentro **M** ed il raggio  $r$  è il raggio metacentrico; man mano che aumenta l'angolo d'inclinazione i centri di curvatura dei singoli archetti  $B_i B_{i+1}$  sono i punti  $M_i$ , che descrivono una curva, detta **evolva metacentrica**.

Le intersezioni delle diverse successive rette d'azione della spinta, normali alle relative linee d'acqua, intersecano la verticale del centro di carena iniziale nei punti  $P_i$ , detti *falsi metacentri* o *prometacentri*.

La forma dell'evolva metacentrica dipende dai valori assunti dal momento d'inerzia della figura di galleggiamento  $J_x$  intorno all'asse longitudinale  $x$  ed in conseguenza, dal raggio metacentrico  $r$ , man mano che aumenta l'inclinazione, come segue:

- $J_x$  crescente al crescere dell'inclinazione, ramo iniziale ascendente;
- $J_x$  decrescente al crescere dell'inclinazione, ramo iniziale discendente;
- $J_x$  costante al crescere dell'inclinazione, l'evolva si riduce ad un punto che è il metacentro trasversale.

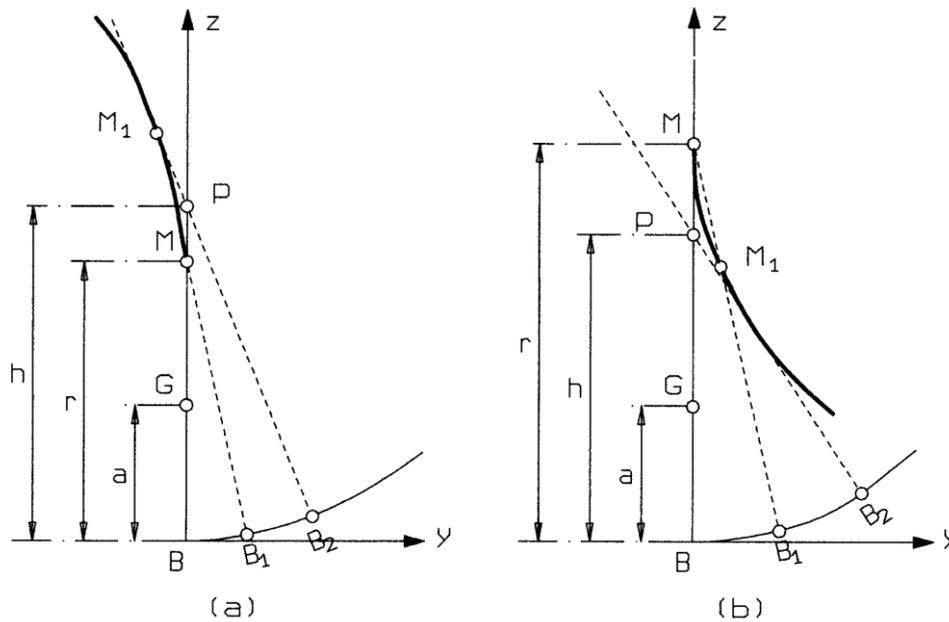


Fig. 16. Evoluta metacentrica a rami iniziali ascendenti (a) e discendenti (b).

## 10.2 Metacentri per vari assi d'inclinazione

Nell'eq. (25)  $J$  è calcolato intorno all'asse d'inclinazione, che passa per il baricentro della figura di galleggiamento.

Dalla teoria dei momenti d'inerzia risulta che per un sistema piano di masse, come è la figura di galleggiamento, esistono due assi ortogonali, definiti *assi principali d'inerzia*, intorno ai quali  $J$  assume i valori massimo e minimo.

Quando la figura di galleggiamento ha un asse di simmetria, come è in genere la traccia orizzontale del piano diametrale, questi è asse principale d'inerzia, intorno al quale il momento d'inerzia è minimo.

Questo è l'asse usato per calcolare il raggio metacentrico trasversale.

Esiste un altro asse principale d'inerzia, perpendicolare al precedente e passante per il centro  $F$  del galleggiamento; questo è quindi l'asse intorno al quale è da calcolare il raggio metacentrico longitudinale.

Per avere un'idea dell'ordine relativo di grandezza dei raggi metacentrici, consideriamo una chiatte, avente figura di galleggiamento rettangolare, di lunghezza  $L$ , larghezza  $B$  e sia  $T$  l'immersione della chiatte.

$$\text{Raggio metacentrico trasversale, } r: \quad \frac{LB^3}{12} \frac{1}{LBT} = \frac{B^2}{12T}$$

$$\text{Raggio metacentrico longitudinale, } R: \quad \frac{BL^3}{12} \frac{1}{LBT} = \frac{L^2}{12T}$$

$$\text{Rapporto tra i due raggi:} \quad \frac{R}{r} = \left( \frac{L}{B} \right)^2$$

Il rapporto  $L/B$  varia in genere da circa 3 ad oltre 10, secondo i diversi tipi di naviglio.

Conseguentemente  $R/r$  va approssimativamente da 10 a 100.

In prima approssimazione, sia pur empirica, il raggio longitudinale  $R$  è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza nave.