

Capitolo 2

Analisi dimensionale e similitudine

Considerazioni generali

Nella meccanica dei fluidi le grandezze puramente meccaniche sono esprimibili dimensionalmente secondo tre dimensioni, che costituiscono una terna di grandezze fondamentali di base.

Nella risoluzione di alcuni problemi può essere conveniente sostituire la terna fondamentale con un'altra terna. La sostituzione è lecita se le nuove grandezze assunte come fondamentali sono dimensionalmente indipendenti, cioè se è diverso da zero il determinante costruito con le dimensioni che tali grandezze presentano rispetto a quelle di base.

Le equazioni che regolano i fenomeni fisici sono omogenee (cioè i loro due membri presentano le stesse dimensioni) e possono essere riconducibili ad equazioni tra termini adimensionali (numeri puri) come si deduce applicando il teorema π . Questo teorema stabilisce, in sostanza, che se un fenomeno fisico involge $m + 1$ quantità dimensionali con k dimensioni base ($k=3$ nei fenomeni meccanici), le $m + 1$ quantità possono essere raggruppate tra loro in $m + 1 - k$ termini adimensionali. La funzione che correla tali termini, che è caratteristica del fenomeno in esame, non risulta tuttavia individuata: per la sua determinazione è necessario ricorrere ad analisi teoriche o ad osservazioni sperimentali.

I numeri puri più importanti che intervengono (in generale non contemporaneamente) nei fenomeni della meccanica dei fluidi sono: il numero di Newton Ne che considera le forze fluidodinamiche e che, quando è presente, costituisce, almeno nella maggior parte dei casi, la variabile dipendente; i numeri di Reynolds Re , di Froude Fr , di Mach Ma , di Weber We , che tengono conto rispettivamente degli effetti della viscosità, dell'accelerazione

di gravità, della comprimibilità, della tensione superficiale; altri numeri puri specifici, legati a comportamenti particolari; parametri che descrivono la forma geometrica del sistema.

La *similitudine meccanica* tra fenomeni fluidodinamici richiede che siano definite le scale di riduzione dei tempi e delle forze, assegnata la scala di riduzione delle lunghezze. Poiché l'operazione si traduce in un cambiamento delle unità di misura, che peraltro non altera i termini adimensionali, si deduce per la similitudine meccanica la seguente condizione necessaria: ogni termine adimensionale che compare nella equazione fenomenologica che interpreta, in forma adimensionale, il processo fisico considerato, deve mantenere lo stesso valore passando dal prototipo ad un suo modello. La similitudine così definita è una similitudine completa: essa tuttavia non è praticamente realizzabile in quanto, oltre al numero di Newton, necessario per definire la scala delle forze, è possibile al più conservare: (a) un solo numero puro se si utilizza lo stesso fluido; (b) due numeri puri se si utilizzano fluidi diversi.

Di conseguenza, si deve ricorrere a similitudini meccaniche parziali in cui, oltre a Ne , si conserva ad esempio Re (similitudine parziale di Reynolds) o Fr (similitudine parziale di Froude), ovvero Re e Ma (similitudine parziale di Reynolds e Mach). Il tipo di similitudine parziale da adottare dipende dal fenomeno fisico che si considera; ad esempio le dissipazioni viscosse sono regolate da similitudine parziali di Reynolds mentre le propagazioni ondose su acqua sufficientemente profonda rientrano in similitudini parziali di Froude.

2.1 Grandezze: dimensioni e indipendenza dimensionale

Le *grandezze* sono delle quantità che possono essere espresse con il prodotto di un *numero puro* per una *unità di misura*. Tale unità è un "campione" scelto tra le grandezze aventi la stessa natura, oppure è derivata da altre unità attraverso le formule che definiscono la grandezza considerata in funzione di quelle assunte come fondamentali.

Assunte come grandezze fondamentali la massa m , la lunghezza l e il tempo t , le cui unità di misura sono state fissate in maniera convenzionale, una grandezza meccanica Q ha *dimensioni* α, β, γ rispetto alla massa m , lunghezza l , tempo t , cioè

$$[Q] = m^\alpha l^\beta t^\gamma \quad (2.1)$$

2.1. Grandezze: dimensioni e indipendenza dimensionale

se moltiplicando le unità di misura di m, l, t per le quantità μ, λ e τ rispettivamente, l'unità di misura di Q risulta moltiplicata per la quantità

$$q = \mu^\alpha \lambda^\beta \tau^\gamma \quad (2.2)$$

La eq.ne (2.1) è una equazione simbolica mentre la eq.ne (2.2) è una equazione numerica¹.

Se α, β e γ sono tutti nulli l'unità di misura di Q resta invariata al cambiare delle unità di misura delle grandezze fondamentali, pertanto costituisce una grandezza adimensionale, cioè un *numero puro*.

Il *criterio di omogeneità* stabilisce che le equazioni che regolano i fenomeni fisici devono essere dimensionalmente omogenee, cioè si assume devono comparire grandezze e numeri puri in modo tale che i loro due membri presentino le stesse dimensioni.²

Le grandezze meccaniche, denominate genericamente Q_1, Q_2, Q_3 , possono essere assunte come grandezze fondamentali in luogo di m, l, t se esse sono idonee a definire dimensionalmente qualsiasi altra grandezza meccanica e, in particolare, le grandezze m, l, t . Per individuare la condizione che deve essere soddisfatta affinché ciò si verifichi, si opera nel seguente modo:

(a) si esprime dimensionalmente Q_1, Q_2, Q_3 in funzione di m, l, t e si perviene a tre equazioni numeriche del tipo della eq.ne (2.2)

$$q_1 = \mu^{\alpha_{11}} \lambda^{\alpha_{12}} \tau^{\alpha_{13}}; \quad q_2 = \mu^{\alpha_{21}} \lambda^{\alpha_{22}} \tau^{\alpha_{23}}; \quad q_3 = \mu^{\alpha_{31}} \lambda^{\alpha_{32}} \tau^{\alpha_{33}} \quad (2.3)$$

equivalenti alle

$$\begin{aligned} \log q_1 &= \alpha_{11} \log \mu + \alpha_{12} \log \lambda + \alpha_{13} \log \tau \\ \log q_2 &= \alpha_{21} \log \mu + \alpha_{22} \log \lambda + \alpha_{23} \log \tau \\ \log q_3 &= \alpha_{31} \log \mu + \alpha_{32} \log \lambda + \alpha_{33} \log \tau; \end{aligned} \quad (2.4)$$

¹ Ad esempio la velocità $[v] = lt^{-1}$ presenta $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -1$ e nel sistema SI ha come unità di misura $m s^{-1}$. Se si vuole esprimere la velocità in nodi (miglio ora⁻¹) si deve passare dai metri alle miglia marine e dai secondi alle ore. Essendo $1 m \cdot 1852 = 1$ miglio; $1 s \cdot 3600 = 1$ ora quindi $\lambda = 1852$; $\tau = 3600$, risulta $q = 1852 \cdot 3600^{-1} = 0.514$.
² Adottando tale criterio dovuto ad una osservazione di Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, (1823) si possono sia ottenere le dimensioni di grandezze derivate sia determinare le dimensioni di costanti che intervengono in equazioni di derivazione sperimentale.

(b) si risolve il sistema formato dalle eq.ni (2.4) rispetto a $\log \mu, \log \lambda, \log \tau$. Tale sistema ammette soluzione non banale se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, cioè

$$|\alpha_{ij}| \neq 0. \quad (2.5)$$

Se è soddisfatta la condizione (2.5) risulta

$$\log \mu = \beta_{11} \log \eta_1 + \beta_{12} \log \eta_2 + \beta_{13} \log \eta_3$$

$$\log \lambda = \beta_{21} \log \eta_1 + \beta_{22} \log \eta_2 + \beta_{23} \log \eta_3 \quad (2.6)$$

$$\log \tau = \beta_{31} \log \eta_1 + \beta_{32} \log \eta_2 + \beta_{33} \log \eta_3$$

dove

$$\beta_{ij} = \frac{1}{|\alpha_{ij}|} (-1)^{i+j} M_{ji} \quad (2.7)$$

essendo M_{ji} i minori estratti dalla matrice dei coefficienti. Si avranno quindi le equazioni numeriche:

$$\mu = \eta_1^{\beta_{11}} \eta_2^{\beta_{12}} \eta_3^{\beta_{13}}; \quad \lambda = \eta_1^{\beta_{21}} \eta_2^{\beta_{22}} \eta_3^{\beta_{23}}; \quad \tau = \eta_1^{\beta_{31}} \eta_2^{\beta_{32}} \eta_3^{\beta_{33}}$$

e le relative relazioni simboliche

$$[m] = Q_1^{\beta_{11}} Q_2^{\beta_{12}} Q_3^{\beta_{13}}; \quad [l] = Q_1^{\beta_{21}} Q_2^{\beta_{22}} Q_3^{\beta_{23}}; \quad [t] = Q_1^{\beta_{31}} Q_2^{\beta_{32}} Q_3^{\beta_{33}}$$

che esprimono dimensionalmente m, l, t , in funzione di Q_1, Q_2, Q_3 .

Qualsiasi altra grandezza Q_n , in quanto esprimibile in funzione di m, l, t risulta esprimibile in funzione di Q_1, Q_2, Q_3 . In generale, se $[Q_n] = m^{\alpha_{n1}} l^{\alpha_{n2}} t^{\alpha_{n3}}$ si ottiene:

$$[Q_n] = Q_1^{\beta_{n1}} Q_2^{\beta_{n2}} Q_3^{\beta_{n3}} \quad \text{con} \quad \beta_{nj} = \beta_{ij} \alpha_{ni} \quad (2.8)$$

dove β_{ij} è fornito dalle eq.ne (2.7) e l'indice i , ripetuto e figurato solo a secondo membro, si intende sommato da 1 a 3.

In definitiva, per assumere Q_1, Q_2, Q_3 come grandezze fondamentali è necessario e sufficiente che si sia verificata la condizione (2.5) che assicura l'indipendenza dimensionale di tali grandezze, cioè l'impossibilità di costruire con esse un monomio di dimensioni zero, che rappresenterebbe una quantità adimensionale, come è facile dimostrare (V. Esempio 2.1).

2.2 Il teorema π

Le equazioni che regolano i fenomeni fisici devono essere riconducibili ad equazioni tra termini adimensionali. A questo scopo uno dei metodi più frequentemente impiegati è quello che utilizza il *teorema π* , noto anche come *teorema di Riabucinsky - Buckingham*, per quanto già enunciato da Vaschy. Si supponga che nello studio di un fenomeno fisico si sia pervenuti, in base alle leggi elementari che intervengono nel fenomeno o ad osservazioni sperimentali, alla formulazione di una equazione funzionale del tipo

$$Q_0 = f_0(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_m, \tau_i) \quad (2.9)$$

che esprime, senza precisarla, la dipendenza del parametro dimensionale Q_0 dai parametri dimensionali $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_m$ e dai termini adimensionali τ_i (rapporti tra grandezze con le stesse dimensioni, ad esempio coefficienti di forma, di scabrezza, ecc.).

Se il fenomeno è meccanico, assunte Q_1, Q_2, Q_3 come grandezze fondamentali³, è possibile riscrivere l'eq.ne (2.9) nella forma

$$Q_0/Q_1^{\beta_{01}} Q_2^{\beta_{02}} Q_3^{\beta_{03}} =$$

$$= f'(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4/Q_1^{\beta_{41}} Q_2^{\beta_{42}} Q_3^{\beta_{43}}, \dots, Q_m/Q_1^{\beta_{m1}} Q_2^{\beta_{m2}} Q_3^{\beta_{m3}}, \tau_i) \quad (2.10)$$

e utilizzare l'eq.ne (2.8) per determinare gli esponenti dei parametri che compaiono nel monomio a denominatore di ciascun rapporto, affinché questo risulti un termine adimensionale, che si indica con π . Risulta pertanto:

$$[Q_0] = Q_1^{\beta_{01}} Q_2^{\beta_{02}} Q_3^{\beta_{03}}; \quad [Q_i] = Q_1^{\beta_{i1}} Q_2^{\beta_{i2}} Q_3^{\beta_{i3}}; \quad \dots; [Q_m] = Q_1^{\beta_{m1}} Q_2^{\beta_{m2}} Q_3^{\beta_{m3}} \quad (2.11)$$

$$\pi_0 = Q_0/Q_1^{\beta_{01}} Q_2^{\beta_{02}} Q_3^{\beta_{03}}; \quad \pi_1 = Q_4/Q_1^{\beta_{41}} Q_2^{\beta_{42}} Q_3^{\beta_{43}}; \quad \dots; \pi_m = Q_m/Q_1^{\beta_{m1}} Q_2^{\beta_{m2}} Q_3^{\beta_{m3}} \quad (2.12)$$

Introducendo le eq.ni (2.12) nella eq.ne (2.10) si ottiene

$$\pi_0 = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots, \pi_m, \tau_i). \quad (2.13)$$

³Per quanto detto al paragrafo precedente, le grandezze Q_1, Q_2, Q_3 devono essere dimensionalmente indipendenti e contenere le tre dimensioni base m, l, t . In generale, si indica con r il numero delle dimensioni base necessarie per esprimere dimensionalmente le variabili in esame; per un fenomeno puramente cinematico⁴ risulta $r = 2$; per un fenomeno meccanico $r = 3$; per un fenomeno che involve anche grandezze termodinamiche $r = 4$, e così via. Il corretto valore di r si individua come la dimensione del più piccolo minore diverso da zero che si può estrarre dalla matrice dei coefficienti che esprimono le grandezze in esame in funzione delle grandezze fondamentali. L'espressione più generale del teorema π si ottiene ponendo nel seguito r anziché 3.

Cambiando l'unità di misura di Q_1 il primo membro della eq. (2.13) resta invariato perché è un numero puro, mentre a secondo membro restano invariati tutti gli argomenti della funzione f , eccetto Q_1 . Infatti restano invariati sia i termini $\pi_4, \dots, \pi_m, \tau_i$ perché sono numeri puri, sia i parametri Q_2, Q_3 perché non dipendono dimensionalmente da Q_1 . La conclusione è che se la funzione f deve rimanere invariata (perché il primo membro non cambia) essa non può dipendere da Q_1 . In modo analogo si verifica che non può dipendere da Q_2 e Q_3 .

L'eq. (2.13) deve quindi essere sostituita da

$$\pi_0 = f(\pi_4, \dots, \pi_m, \tau_i) \quad (2.14)$$

ovvero dalla equivalente equazione, in forma implicita,

$$f_1(\pi_0, \pi_4, \dots, \pi_m, \tau_i) = 0. \quad (2.15)$$

Il teorema π trasforma quindi una relazione funzionale del tipo (2.9) nella forma (2.14) o (2.15).

L'applicazione del teorema π consente di scrivere una relazione tra soli termini adimensionali, che risultano in numero ridotto rispetto ai parametri dimensionali (numero di parametri dimensionali $m+1$, numero dei termini adimensionali $m+1-3$), ma non precisa, il tipo di dipendenza. Per ottenere la forma della funzione f (o della funzione f_1) è necessario ricorrere ad indagini sperimentali o ad analisi teoriche che utilizzano i principi generali della meccanica.

2.3 Applicazione del teorema π : resistenza al moto uniforme (condotta orizzontale a sezione circolare)

Si indichi con F (diretta con verso contrario al moto) la resistenza globale esercitata sulla corrente fluida dalla parete di un tratto di condotta orizzontale lungo L (Figura 2.1) e con $F_1 = F/L$ la resistenza per unità di lunghezza, costante data l'uniformità del moto⁴.

Analizzando il fenomeno, si può ritenere che la F_1 dipenda dai seguenti parametri:

- massa volumica ρ e viscosità μ del fluido;

⁴Il fluido deve essere incompressibile altrimenti il moto non potrebbe essere uniforme. L'incompressibilità comporta sostanzialmente $\rho = \text{cost}$ (V. Cap. 1).

2.3. Applicazione del teorema π : resistenza al moto uniforme (condotta orizzontale a sezione circolare)¹⁷

- velocità media U della corrente;
 - diametro D della condotta;
 - parametro di scabrezza τ_s ($\tau_s = \epsilon/D =$ rapporto tra l'altezza ϵ della scabrezza della parete e il diametro D della condotta).
- Non si considerano:
- l'accelerazione di gravità g , in quanto il tubo è orizzontale;
 - l'effetto di comprimibilità, in quanto il fluido è incompressibile;
 - il parametro di forma, essendo la forma circolare assunta come forma di riferimento.

L'equazione funzionale che traduce il fenomeno di studio è espressa da

$$F_1 = f_0(\rho, U, D, \mu, \tau_s). \quad (2.16)$$

Assunte come grandezze fondamentali le grandezze ρ, U, D che risultano dimensionalmente indipendenti (V. Esempio illustrativo 2.1) e applicato il teorema π , l'eq. (2.16) si trasforma nella relazione fra termini adimensionali

$$\pi_0 = f(\pi_4, \tau_s) \quad (2.17)$$

essendo

$$\pi_0 = F_1 / \rho U^2 D = \mu / \rho^{1/2} U^{3/2} D^{3/2} \tau_s. \quad (2.18)$$

Gli esponenti si determinano tenendo conto che

$$[F_1] = \rho^{\beta_{01}} U^{\beta_{02}} D^{\beta_{03}}; \quad \alpha_{01} = 1; \quad \alpha_{02} = 0; \quad \alpha_{03} = -2$$

$$[\mu] = \rho^{\beta_{41}} U^{\beta_{42}} D^{\beta_{43}}; \quad \alpha_{41} = 1; \quad \alpha_{42} = -1; \quad \alpha_{43} = -1.$$

Dalla applicazione della eq. (2.8) si ottiene:

$$\beta_{01} = 1; \quad \beta_{02} = 2; \quad \beta_{03} = 1$$

$$\beta_{41} = 1; \quad \beta_{42} = 1; \quad \beta_{43} = 1.$$

Di conseguenza i termini adimensionali π_0 e π_4 risultano

$$\pi_0 = F_1 / \rho U^2 D; \quad \pi_4 = \mu / \rho U D$$

e l'eq. (2.17) si particolarizza nella

$$F_1 / \rho U^2 D = f(\mu / \rho U D, \tau_s)$$

equivalente alla

$$F_1 / \rho U^2 D = \varphi(\mu / \rho U D, \tau_s). \quad (2.19)$$

Nella eq. (2.19) compare il termine adimensionale $\rho U D / \mu = U D / \nu$ ($\nu = \mu / \rho$, viscosità cinematica) che si chiama *numero di Reynolds* e si indica con Re mentre la funzione φ rappresenta la *funzione di resistenza*. Si ha dunque

$$F_1 / \rho U^2 D = \varphi(Re, r_s). \quad (2.20)$$

L'eq. (2.20) evidenzia un fatto del tutto generale, e cioè: i fenomeni della meccanica dei fluidi in cui interviene la viscosità sono rappresentati analiticamente da equazioni nelle quali compare un numero di Reynolds.

La forma della funzione di resistenza φ dipende sostanzialmente dal tipo di regime di moto del fluido. Reynolds, con il suo classico esperimento (Figura 2.2), mise in evidenza la possibilità del verificarsi di due distinti regimi di moto. Infatti, introducendo in una corrente che si muove di moto uniforme entro un tubo trasparente un filetto dello stesso fluido opportunamente colorato, si possono avere due diverse situazioni:

- (a) un *regime laminare*, che si verifica per $Re < \sim 2200$ e che è caratterizzato da velocità tutte parallele all'asse del tubo, senza componenti nelle direzioni trasversali. Il moto avviene per lamine concentriche e il filetto colorato si mantiene rettilineo e separato dal fluido circostante;
- (b) un *regime turbolento*, che si verifica per $Re > \sim 2200$ e che è caratterizzato da velocità con componenti continuamente fluttuanti nel tempo sia nella direzione del moto di trasporto, sia nelle direzioni trasversali. Il moto non avviene più per lamine concentriche e il filetto colorato s'incurva e si spezza dopo un breve percorso, causando un mescolamento delle particelle colorate nel fluido circostante.

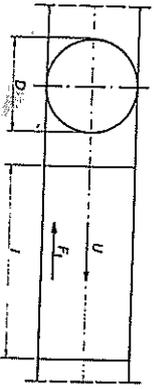


Figura 2.1

2.4 Analisi dimensionale nella meccanica dei fluidi

Nei problemi della meccanica dei fluidi, le grandezze che intervengono si possono in generale classificare come:

- variabili dipendenti che rappresentano gli aspetti del fenomeno che si intende analizzare (forza fluidodinamica F , velocità di propagazione di una perturbazione c , ecc.);
- caratteristiche geometriche (lunghezza significativa L);
- proprietà fisiche del fluido (massa volumica ρ , viscosità dinamica μ , modulo di comprimibilità e , tensione superficiale σ);
- caratteristiche cinematiche (velocità del fluido U);
- forze di campo (forza dovuta alla accelerazione di gravità g , ecc.);
- parametri adimensionali (di scabrezza r_s , di forma r_f , ecc.).

Assumendo come variabile dipendente la forza fluidodinamica F , risulta

$$F = f_0(\rho, U, L, \mu, e, \sigma, g, r_s, r_f) \quad (2.21)$$

equazione che si trasforma, dopo aver adottato come grandezze fondamentali dimensionalmente indipendenti ρ , U , L ed applicato il teorema π , nella equazione tra termini adimensionali

$$\pi_0 = f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, r_s, r_f). \quad (2.22)$$

Utilizzando ancora il procedimento descritto precedentemente si ottengono gli esponenti da introdurre nei diversi termini adimensionali

$$\pi_0 = F / \rho U^2 L^2; \quad \pi_1 = \mu / \rho U L; \quad \pi_2 = e / \rho U^2; \quad \pi_3 = \sigma / \rho U^2 L; \quad \pi_4 = g L / U^2,$$

che consentono di formalizzare i seguenti numeri puri

$$\begin{aligned} Ne &= F / \rho U^2 L^2 && \text{numero di Newton;} \\ Re &= \rho U L / \mu && \text{numero di Reynolds;} \\ Fr &= U / \sqrt{gL} && \text{numero di Froude;} \\ Ma &= U / \sqrt{e/\rho} && \text{numero di Mach;} \\ We &= U / \sqrt{\sigma/\rho L} && \text{numero di Weber.} \end{aligned}$$

L'eq. (2.22) può quindi essere scritta nella forma equivalente

$$Ne = f(Re, Fr, Ma, We, r_s, r_f). \quad (2.23)$$

nella quale f è ovviamente diversa da f_1 .

I numeri puri introdotti hanno un ben preciso significato fisico.

- il numero di Newton $Ne = F/\rho U^2 L^2$ rappresenta il rapporto fra le forze fluidodinamiche e le forze d'inerzia;
- il numero di Reynolds $Re = \rho U L/\mu \propto \rho U^2 L^2/\mu U L$ rappresenta il rapporto fra le forze di inerzia e le forze viscose;
- il numero di Froude $Fr = U/\sqrt{gL} \propto \rho U^2 L^2/\rho g L^3$ rappresenta una quantità proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze peso;
- il numero di Mach $Ma = U/\sqrt{e/\rho} \propto \rho U^2 L^2/e L^2$ rappresenta una quantità proporzionale al rapporto tra le forze di inerzia e le forze elastiche ($c = \sqrt{e/\rho}$ è la celerità delle onde di pressione nel fluido omogeneo ed illimitato);
- il numero di Weber $We = U/\sqrt{\sigma/\rho L} \propto \rho U^2 L^2/\sigma L$ rappresenta una quantità proporzionale al rapporto fra le forze d'inerzia e le forze dovute alla tensione superficiale.

L'influenza maggiore o minore sulla funzione f di ciascun termine adimensionale che compare nell'argomento di tale funzione dipende dall'importanza che nel fenomeno fluidodinamico considerato hanno le corrispondenti forze relativamente alle forze di inerzia. Ad esempio, il numero di Mach non interviene quando il fluido è incomprimibile o si comporta come tale ($Ma < \sim 0,3$), il numero di Weber non influenza i fenomeni in cui sono assenti superfici libere, ecc. Rivestirà molta importanza nel seguito il numero di Reynolds, che caratterizza, se piccolo, moti fortemente viscosi, e, se grande, moti con effetti di inerzia predominanti sugli effetti viscosi.

Nella descrizione di alcuni fenomeni possono intervenire proprietà fisiche non considerate precedentemente, le quali conducono alla definizione di altri numeri puri.

La *tensione di vapore* p_v che regola il fenomeno della cavitazione vaporosa in seno ad un liquido interviene nel numero di Leroux, $Le = (p - p_v)/\rho U^2$, che è da tenere presente quando sono possibili fenomeni di cavitazione dovuti all'abbassamento della pressione assoluta fino al valore della pressione di vapore del liquido.

Il *coefficiente di diffusività termica* κ interviene nel numero di Peclet, $Pe = UL/\kappa$ e, associato al coefficiente di viscosità cinematica, nel numero di Prandtl, $Pr = \nu/\kappa = Pe/Re$. Quest'ultimo è da tenere presente nei problemi di strato limite di fluidi comprimibili dove gli effetti termodinamici possono essere comparabili agli effetti viscosi.

In fluidi sottoposti a elevate temperature le molecole tendono a vibrare

per le collisioni intermolecolari e possono dissociarsi negli atomi neutri dando luogo a *gas dissociato*. Per valori molto elevati della temperatura il gas si ionizza e diventa *plasma* neutro che contiene ioni negativi e ioni positivi in uguale quantità. Le cariche elettriche tendono il gas elettricamente conduttore quindi suscettibile di effetti magnetici. La dinamica dei gas ionizzati è caratterizzata da valori maggiori di uno del numero di Knudsen, $Kn = L_m/L$, che rappresenta il rapporto tra il libero percorso medio di una molecola L_m e una lunghezza significativa L .⁵

Quando il numero di Mach è molto grande ($Ma > 5 \div 6$), il gas cambia le sue proprietà fisiche nei confronti di quelle di gas perfetto e lo schema di mezzo continuo non è più accettabile. In particolare l'assorbimento di energia associato con i processi di dissociazione causa nei gas reali un innalzamento di temperatura minore di quello relativo al gas perfetto.

Per valori minori del numero di Mach ($1 < Ma < 5 \div 6$), si ha un moto supersonico per il quale è ancora accettabile l'ipotesi di gas perfetto, ma date le elevate temperature occorre comunque tenere in conto le conseguenti variazioni della viscosità.

I moti dei fluidi che presentano *conduttività elettrica* non trascurabile, e sono quindi in grado di interagire anche con campi magnetici, sono oggetto della *magnetoidrodinamica*. Si introduce in tal caso il numero di Hartman⁶, che è proporzionale al rapporto tra le forze magnetiche e le forze viscose; $Ha = \sqrt{s/\mu} BL \propto B^2 L^3 U/\mu U L$, dove L e U sono una lunghezza e una velocità significative, s è la *conduttività elettrica* e B l'*induzione magnetica*; nel SI le rispettive unità di misura sono Siemens su metro ($S m^{-1}$) e Weber su metro quadro ($Wb m^{-2}$). Se il numero di Reynolds è sufficientemente grande gli effetti viscosi sono relativamente poco importanti. La magnetoidrodinamica trova applicazione per il controllo della velocità dei missili al rientro nell'atmosfera, per la propulsione di veicoli spaziali, per il controllo di fluidi nel campo della medicina, per la conversione statica dell'energia.

2.5 Similitudine meccanica tra fenomeni fluidodinamici

Per poter istituire una similitudine meccanica (o dinamica) tra fenomeni fluidodinamici deve esistere, una scala λ di riduzione delle lunghezze (similitu-

⁵La prima definizione della supereroidinamica risale a Tsien, H.S., J. Aeronautic Sci., vol. 13 (2), 1946.

⁶Hartman, J. and F. Lazerns, Kgl. Danske Videnskab. Selskabs, Mat. & Phys. Medd., Vol. 15, n. 6-7, 1937

dine geometrica), una scala τ di riduzione dei tempi (similitudine cinematica) e una scala φ di riduzione delle forze corrispondenti? Risulta evidente come la realizzazione di una similitudine tra un *prototipo* ed un *modello* sia equivalente ad un cambiamento delle unità di misura delle grandezze fondamentali, operazione che mantiene inalterati i valori dei termini adimensionali che compaiono per esempio nella eq.ne (2.23). Se ne deduce la seguente condizione necessaria per la *similitudine meccanica completa*: perché ogni tipo di forza, attiva o reattiva, segua la stessa scala di riduzione φ occorre che i corrispondenti numeri puri, che involgono quella forza, conservino lo stesso valore passando dal prototipo al modello. Indicando con l'apice le grandezze relative al modello, affinché esista una similitudine meccanica completa deve risultare

$$Re = Re' ; Fr = Fr' ; Ma = Ma' ; We = We' ; r_s = r'_s ; r = r' \quad (2.24)$$

Le eq.ni (2.24) associate alla eq.ne (2.23) conducono a

$$Ne = Ne'$$

e non comportano, ovviamente, che le quantità dimensionali, come la velocità, la viscosità, ecc., che intervengono nei vari termini adimensionali, debbano essere eguali nel prototipo e nel modello.

2.6 Modelli fluidodinamici

I modelli fluidodinamici sono riproduzioni di fenomeni fluidodinamici in scala geometrica diversa da 1/1. Poiché la conservazione del numero di Newton nell'originale e nel modello è indispensabile per definire la scala delle forze, è immediato verificare che è impossibile realizzare una similitudine completa.

Ad esempio, si voglia conservare nell'originale e nel modello, le cui grandezze sono ancora indicate con gli apici, gli stessi valori di Re e Fr , cioè

$$\begin{aligned} Re &= \rho U L / \mu = Re' = \rho' U' L' / \mu' \\ Fr &= U / \sqrt{g L} = Fr' = U' / \sqrt{g' L'} \end{aligned}$$

⁷Oltre alla similitudine meccanica tra *modi geometricamente simili*, qui citate, si può realizzare una similitudine meccanica con geometrie distorte opportunamente, per eliminare, o per accentuare, i particolari aspetti del fenomeno in esame.

essendo L e U una dimensione e una velocità significative nell'originale. Si hanno le due situazioni seguenti:

(a) mantenendo lo stesso fluido e operando a parità di accelerazione di gravità g devono sussistere le equazioni

$$UL = U'L' ; U/\sqrt{L} = U'/\sqrt{L'}$$

dalle quali, dividendo membro a membro, si deduce il rapporto scala delle lunghezze, $\lambda = L/L'$. Risulta

$$UL\sqrt{L}/U = U'L'\sqrt{L'}/U' ; \lambda^{3/2} = 1 \quad \text{ovvero } \lambda = 1, \quad (2.25)$$

quindi il modello deve coincidere con l'originale.

(b) cambiando fluido e operando ancora a parità di accelerazione di gravità g risultano le equazioni

$$UL/\nu = U'L'/\nu' ; U/\sqrt{L} = U'/\sqrt{L'} \quad (2.26)$$

dalle quali si deduce

$$UL\sqrt{L}/U = (\nu/\nu')U'L'\sqrt{L'}/U' ; \lambda^{3/2} = \nu/\nu' \quad \text{ovvero } \lambda = (\nu/\nu')^{2/3}. \quad (2.27)$$

La scala del fluido da utilizzare nel modello risulta pertanto legata alla scala delle lunghezze.

Le considerazioni svolte evidenziano la necessità di passare da una similitudine meccanica completa ad una *similitudine meccanica parziale*. Limitando l'indagine al caso in cui si utilizza nell'originale e nel modello lo stesso fluido, si possono conservare solo due numeri puri. Volendo assumere arbitrariamente la scala delle lunghezze λ , si attua la similitudine parziale di Reynolds, o di Froude, o di Mach, o di Weber a seconda che si mantenga oltre al numero di Newton, necessario per la determinazione della scala delle forze, rispettivamente: Re ($Re = Re'$) ; Fr ($Fr = Fr'$) ; Ma ($Ma = Ma'$) ; We ($We = We'$). La scelta del tipo di similitudine parziale da adottare dipende dal fenomeno fisico in studio e dall'importanza delle forze in gioco nei confronti delle forze di inerzia.

• la similitudine di Reynolds è caratteristica dei fenomeni in cui sono significative le forze viscosive : moto uniforme delle condotte, resistenza al moto di

un corpo totalmente immerso in un fluido, ecc. (le forze viscoso diventano trascurabili ad elevati valori di Re);

• la similitudine di Froude è caratteristica dei fenomeni in cui sono significative le forze gravitazionali: efflussi da luci, moti ondosi senza trasporto di massa, ecc. (le forze gravitazionali diventano trascurabili ad elevati valori di F_r);

• la similitudine di Mach è caratteristica dei fenomeni in cui sono significativi gli effetti della comprimibilità del fluido: propagazione di onde di pressione di fluidi comprimibili, ecc. (gli effetti della comprimibilità sono trascurabili a bassi valori di Ma);

• la similitudine di Weber è caratteristica dei fenomeni in cui sono significative le forze dovute alla tensione superficiale come: onde di capillarità, ecc. (le forze dovute alla tensione superficiale diventano trascurabili ad elevati valori di We).

Si esaminano in dettaglio le similitudini parziali di Reynolds e di Froude.

2.7 Similitudine parziale di Reynolds

Supponendo di utilizzare lo stesso fluido nell'originale e nel modello, deve risultare

$$Ne = Ne' \quad (2.28)$$

$$Re = Re' \quad (2.29)$$

Dalla eq. (2.29) si deduce un legame tra la scala delle lunghezze λ e le scale dei tempi, $\tau = t/H$, infatti assumendo ancora L e U come una dimensione e una velocità significative del fenomeno si ottiene

$$UL = UL' ; U/U' = L'/L$$

ovvero, essendo $U/U' = L'/L$,

$$\tau = \lambda^2, \quad (2.30)$$

cioè la scala di riduzione dei tempi è eguale al quadrato della scala di riduzione delle lunghezze.

Dalla eq. (2.28) si deduce quindi la scala di riduzione delle forze, $\varphi = F/F'$, infatti risulta

$$F/F' = \rho U'^2 L^2 / \rho U^2 L^2$$

quindi, tenendo presente l'eq. (2.30),

$$\varphi = \lambda^4 / \tau^2 = 1 \quad (2.31)$$

cioè la scala di riduzione delle forze è unitaria (nel modello e nell'originale si hanno, in punti corrispondenti, forze uguali).

2.8 Similitudine parziale di Froude

Supponendo di utilizzare lo stesso fluido nell'originale e nel modello, e uguale il valore della accelerazione di gravità, deve risultare

$$Ne = Ne' \quad (2.32)$$

$$F_r = F_r' \quad (2.33)$$

Dalla eq. (2.33) si ha

$$U/\sqrt{L} = U'/\sqrt{L'} ; U/U' = \sqrt{L/L'}$$

da cui si deduce

$$\tau = \sqrt{\lambda} \quad (2.34)$$

cioè la scala di riduzione dei tempi è uguale alla radice quadrata della scala di riduzione delle lunghezze.

Dalla eq. (2.32), introducendo la scala di riduzione delle forze $\varphi = F/F'$, si ha

$$\varphi = \lambda^4 / \tau^2$$

quindi, tenendo presente l'eq. (2.34)

$$\varphi = \lambda^3.$$

La scala di riduzione delle forze è uguale al cubo della scala di riduzione delle lunghezze, cioè è uguale alla scala di riduzione dei volumi, essendo g uguale nel modello e nel prototipo.

2.9 Esempi illustrativi

Esempio 2.1

Si dimostri che le grandezze: ρ = massa volumica, U = velocità media, D = diametro di una condotta, sono dimensionalmente indipendenti. Si dimostri inoltre che è impossibile costruire con tali grandezze un monomio privo di dimensioni.

Con riferimento alle grandezze fondamentali m, l, t , si ha:

$$[\rho] = m l^{-3}; \quad \alpha_{11} = 1; \quad \alpha_{12} = -3; \quad \alpha_{13} = -0$$

$$[U] = l t^{-1}; \quad \alpha_{21} = 0; \quad \alpha_{22} = 1; \quad \alpha_{23} = -1 \quad | \quad \alpha_{ij} | = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$[D] = l \quad ; \quad \alpha_{31} = 0; \quad \alpha_{32} = 1; \quad \alpha_{33} = 0$$

Si costruisca ora con le tre grandezze date un monomio con esponenti α, β, γ , tali che $\rho^\alpha U^\beta D^\gamma$ sia un numero puro.

Con riferimento ancora alle grandezze fondamentali, il monomio si può esprimere nella forma $m^\alpha l^{-3\alpha+\beta+\gamma} t^{-\beta}$, con

$$\alpha = 0$$

$$-3\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$-\beta = 0.$$

L'unica soluzione del sistema risulta $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pertanto non è possibile trovare tre esponenti diversi da zero tali che il monomio sia privo di dimensioni.

Esempio 2.2

Una piastra rettangolare liscia di lati L e a si muove in un gas, in direzione normale al suo piano, con velocità costante U . Individuare la relazione funzionale relativa al coefficiente di resistenza C_R .

Ritenendo trascurabile l'effetto della gravità e considerando il fluido indefinito, risulta

$$R = f_0(\rho, U, L, \mu, \nu, a) \quad (2.35)$$

avendo indicato con R_{res} resistenza ed avendo assunto L come lunghezza significativa. L'applicazione del teorema π alla eq.ne (2.35) conduce, dopo aver adottato come grandezze fondamentali ρ, U, L , alla equazione

$$R/\rho U^2 L^2 = f_1(\mu/\rho U L, \nu/\rho U^2, a/L) = f'(Re, Ma, a/L)$$

Introducendo il coefficiente di resistenza C_R definito dalla equazione

$$C_R = R/\frac{1}{2}\rho U^2 A \quad (A = aL \text{ area della piastra})$$

si ottiene

$$C_R = f(Re, Ma, a/L).$$

Nel caso più generale quindi il coefficiente C_R dipende dal numero di Reynolds, dal numero di Mach e dal rapporto a/L . Per precisare la funzione f si può ricorrere a indagini sperimentali. Risulta che:

- per $Ma \leq 0.3$, C_R non dipende praticamente da Ma (effetto della comprimibilità non significativo);
- per $Re \geq 10^4$, C_R non dipende praticamente da Re (effetto della viscosità non significativo);
- per $Ma \leq 0.3$ e $Re \geq 10^4$, C_R dipende da a/L come mostra la Figura 2.3, che riporta la curva ottenuta con indagini sperimentali.

L'analisi precedente può essere estesa a corpi di forma qualsiasi. La Figura 2.4 indica, per un corpo a simmetria assiale, la influenza su C_R della comprimibilità del fluido, per alti valori di Ma , che si realizzano in corrispondenza di alti valori di Re .

Esempio 2.3 *

Studiare per mezzo dell'analisi dimensionale la velocità di propagazione c di onde di ampiezza $H = 2a$ e lunghezza d'onda L , che evolvono su altissime profondità. Trascurando in ogni caso l'effetto della viscosità, considerare le tre condizioni: (a) effetto della gravità predominante; (b) effetto della tensione superficiale predominante; (c) tensione superficiale e gravità ugualmente significative.

- (a) Effetto della gravità predominante (onde di gravità). Risulta

$$c = f_0(\rho, L, g, H, \dots)$$

Assumendo come grandezze fondamentali ρ, L, g ed applicando il teorema π si ottiene

$$c/\sqrt{gL} = f(H/L); \quad Fr = f(H/L).$$

Se $H/L \rightarrow 0$ (teoria lineare, onde sinusoidali), f assume un valore costante che, da analisi teoriche o da indagini sperimentali, risulta $1/\sqrt{2\pi}$. Quindi

$$Fr = 1/\sqrt{2\pi}; \quad c = \sqrt{gL/2\pi}. \quad (2.36)$$

(b) Effetto della tensione superficiale predominante (onde di capillarità).
Risulta

$$c = f_0(\rho, L, \sigma, H).$$

Assumendo come grandezze fondamentali ρ, L, σ e applicando il teorema π si ottiene l'equazione

$$c/\sqrt{\sigma/\rho L} = f(H/L); We = f(H/L).$$

Se $H/L \rightarrow 0$, f assume ancora un valore costante che, da analisi teoriche o da indagini sperimentali risulta $\sqrt{2\pi}$. Quindi

$$We = \sqrt{2\pi}; c = \sqrt{2\pi\sigma/\rho L}. \quad (2.37)$$

(c) Tensione superficiale e gravità egualmente significative. Risulta.

$$c = f_0(\rho, g, \sigma, L, H^2).$$

Assumendo come grandezze fondamentali ρ, g, σ e applicando il teorema π si ottiene l'equazione

$$c/\sqrt{g\sigma/\rho} = f(L/\sqrt{\sigma/\rho g}, H/L) \quad (2.38)$$

Se $H/L \rightarrow 0$, l'eq.ne (2.38) si semplifica nella

$$c/\sqrt{g\sigma/\rho} = f(L/\sqrt{\sigma/\rho g})$$

e da analisi teoriche o da indagini sperimentali si ricava la funzione f . Risulta, dopo opportune trasformazioni,

$$c = \sqrt{gL/2\pi + 2\pi\sigma/\rho L}. \quad (2.39)$$

Il termine adimensionale che compare ad argomento della funzione f nell'eq.ne (2.38) è eguale al rapporto We/Fr . Come indica la Figura 2.5, per piccoli valori di tale rapporto ($< 2\pi$) è predominante l'effetto della tensione superficiale e l'eq.ne (2.37) fornisce una buona approssimazione per c . Per più alti valori di tale rapporto diventa predominante l'effetto della gravità e l'eq.ne (2.36) fornisce una buona approssimazione per c . I due effetti sono entrambi significativi per $We/Fr \approx 2\pi$.

Esempio 2.4 *

Strutturare per mezzo dell'analisi dimensionale la possibilità di valutare con un

modello resistenza R al moto incontrata da una nave.

La resistenza R è sostanzialmente dovuta alla resistenza di attrito della carena e alla resistenza d'onda; risulta di conseguenza, essendo le onde di gravità,

$$R = f_0(\rho, U, L, \mu, g, \tau_s)$$

in cui L, U rappresentano la lunghezza e la velocità della nave; ρ, μ la massa volumica e la viscosità dell'acqua di mare; τ_s il parametro di scabrezza della carena. Assumendo come grandezze fondamentali ρ, U, L e applicando il teorema π , si perviene all'equazione

$$R/\rho U^2 L^2 = f_0(\mu/\rho U L, gL/U^2, \tau_s); Ne = f_0(Re, Fr, \tau_s). \quad (2.40)$$

Essa evidenzia la pratica impossibilità di istituire una similitudine meccanica completa tra il prototipo ed un modello (la sperimentazione su modello si effettua con acqua dolce: di conseguenza il rapporto tra le viscosità cinematiche è molto vicino ad uno ciò che comporta, come risulta dalla eq.ne (2.27), una scala di riduzione delle lunghezze anch'essa prossima a uno e quindi non adottabile). Questa osservazione è di notevole importanza in quanto sta a significare che le vasche navali, utilizzate per determinare la resistenza al moto di un modello per trasferirla al prototipo, devono operare similitudini parziali.

Supponendo di poter sovrapporre gli effetti e indicando R_a e R_o le resistenze di attrito e d'onda, si può adottare per l'eq.ne (2.40) la forma

$$Ne = f_a(Re, \tau_s) + f_o(Fr) = R_a/\rho U^2 L^2 + R_o/\rho U^2 L^2 \quad (2.41)$$

dalla quale si deduce

$$f_o(Fr) = Ne - f_a(Re, \tau_s). \quad (2.42)$$

Riferita al modello, l'eq.ne (2.42) diventa, adottando ancora per il modello le grandezze con apice,

$$f_o'(Fr') = Ne' - f_a'(Re', \tau_s'). \quad (2.43)$$

La funzione $f_o'(Fr')$ può essere individuata ricavando sperimentalmente $Ne' = R'_o/\rho U'^2 L'^2$ e calcolando f_a' utilizzando per esempio la formula di Froude che fornisce la resistenza di attrito R'_a nella forma

$$R'_a = K f S U'^{1.825} \quad (2.44)$$

in cui K è una costante dimensionale, f un coefficiente adimensionale di attrito funzione del parametro di scabrezza, S' la superficie di carena del modello, U' la velocità del modello ($U' = F_r \nu \cdot \sqrt{gD}$; $Re' = U' L / \nu$). Individuata dalla eq. (2.43) la funzione $f_0(F_r)$, si istituisce la similitudine di Prandtl tra il modello e il prototipo, cioè $F_r' = F_r$, ciò che comporta $f_0(F_r) = f_0(F_r')$.

Nota quindi la funzione $f_0(F_r)$, si calcola la funzione f_0 utilizzando ancora l'eq. (2.44) particolarizzata con le grandezze relative al prototipo. Dalla eq. (2.42) si calcola la funzione Ne , quindi la resistenza al moto incontrata dalla nave risulta $R = \rho U^2 L^2 \cdot Ne$.

Esempio 2.5

Indagini sperimentali mostrano che l'energia per unità di peso ΔH , fornita o utilizzata in una turbomacchina, dipende dalle seguenti grandezze: D , diametro del rotore; Q , portata volumetrica del fluido che attraversa la turbomacchina; N , velocità di rotazione; ν , viscosità cinematica; g , gravità. Risulta cioè

$$\Delta H = f(D, Q, N, \nu, g).$$

Esprimere la dipendenza in forma adimensionale.

Osservando che le grandezze in gioco sono puramente cinematiche, in quanto le dimensioni di ΔH sono di una lunghezza e quelle di Q sono un volume diviso per un tempo (V. Cap. 13), è sufficiente scegliere due grandezze dimensionalmente indipendenti, siano D e N . Applicando il teorema π si ottiene

$$\frac{\Delta H}{D} = f\left(\frac{Q}{D^3 N}, \frac{\nu}{D^2 N}, \frac{g}{D N^2}\right).$$

Esempio 2.6

Si vuole determinare la forza esercitata su una torre per effetto di un vento che spirava sulla sezione media alla velocità di 60 Km/h.

Si opera in un tunnel a acqua tramite un modello in scala $\lambda = 1/20$. Assumendo uguali e pari a 60°C la temperatura dell'aria e dell'acqua, si valuti la velocità nel modello e il rapporto scala dei momenti rispetto alla base della torre.

Si adotta la similitudine di Reynolds, quindi, conservando Re e Ne si ha

$$Re' = Re; \quad \frac{U' L'}{\nu'} = \frac{U L}{\nu}$$

$$Ne' = Ne; \quad \frac{F' \rho U'^2 L'^2}{\rho U'^2 L'^2} = \frac{F \rho U^2 L^2}{\rho U^2 L^2}$$

Si ottiene per il rapporto scala tra le velocità

$$\frac{U'}{U} = \frac{\nu'}{\nu} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

da cui, essendo $U = 60$ Km/h = 16,67 m s⁻¹, si ottiene

$$U' = 16,67 \cdot \frac{0,48 \cdot 10^{-6}}{18,8 \cdot 10^{-6}} \cdot 20 = 8,51 \text{ m s}^{-1}$$

Il rapporto scala tra le forze risulta

$$\varphi = \frac{F'}{F} = \frac{\rho' U'^2 \lambda^2}{\rho U^2} = \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^2 = \frac{983}{106} \left(\frac{0,48 \cdot 10^{-6}}{18,8 \cdot 10^{-6}}\right)^2 = 0,60$$

e quello tra i momenti

$$\mu = \frac{M'}{M} = \varphi \lambda = \frac{1}{33}.$$

Esempio 2.7

In un tubo orizzontale di diametro $D = 0,20$ m scorre acqua alla temperatura di 15°C ($\rho = 993,1$ Kg m⁻³, $\mu = 0,00114$ Pa·s), e alla velocità media $U = 3$ m s⁻¹.

Determinare la velocità di un olio combustibile ($\rho = 948$ Kg m⁻³; $\mu = 0,0051$ Pa·s) che si muova nella stessa condotta in modo da avere due moti dinamicamente simili.

Si adotta la similitudine di Reynolds, conservando Re e Ne

$$Re' = Re; \quad \frac{\rho' U' D'}{\mu'} = \frac{\rho U D}{\mu}$$

$$Ne' = Ne; \quad \frac{F' \rho' U'^2 L'^2}{\rho' U'^2 L'^2} = \frac{F \rho U^2 L^2}{\rho U^2 L^2}$$

Si ottiene per il rapporto scala tra le velocità

$$\frac{U'}{U} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{\rho}{\rho'}$$

da cui

$$U' = 3 \cdot \frac{0,0051/948}{0,00114/993,1} = 14,06 \text{ m s}^{-1}$$

Il rapporto scala tra le forze risulta, essendo $\lambda = 1$

$$\varphi = \frac{F'}{F} = \frac{\rho' U'^2}{\rho U^2}$$

da cui

$$\varphi = \frac{948 \cdot 14,06^2}{993,1 \cdot 3^2} = 21.$$

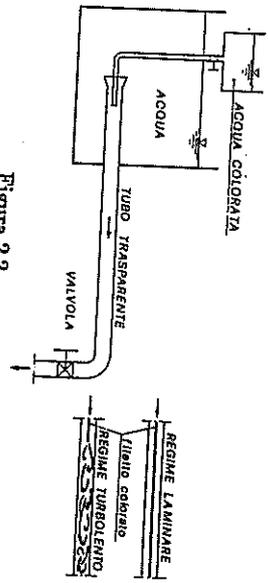


Figura 2.2

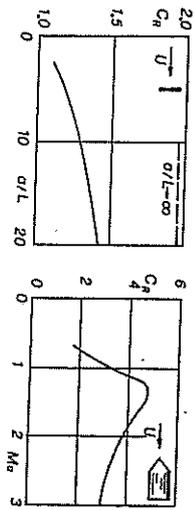


Figura 2.3

Figura 2.4

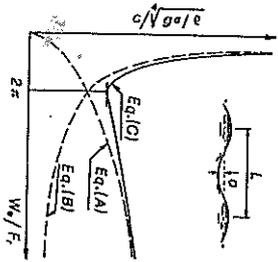


Figura 2.5