Università di Genova
Facoltà di Ingegneria

Compitino di **Fondamenti di Meccanica dei Continui**
5 giugno 2006, Aula B2

Meccanica dei Fluidi
"Foglio aiuti" formato A4 ammesso **FILA B**

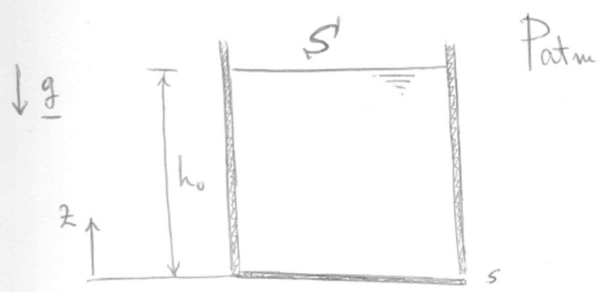
Esercizio 1: Svuotamento di un serbatoio **(13 punti)**

Si consideri un serbatoio aperto pieno d'acqua; la sezione del serbatoio è pari ad S ed il livello iniziale del fluido vale h_0. In fondo al serbatoio si stappa un forellino di sezione s ($s \ll S$) per lasciar defluire l'acqua nell'ambiente.

1. Si supponga il fluido ideale e si consideri il moto incomprimibile, irrotazionale e quasi-stazionario ($\partial\Phi/\partial t \approx 0$, Φ potenziale di velocità). Partendo dall'equazione di Bernoulli, si scriva l'equazione differenziale verificata dal livello dell'acqua h(t), la si risolva e si dimostri che il tempo impiegato a svuotare il serbatoio è pari a:

$$t_{svuotamento} = S/s\ (2h_0/g)^{1/2}.$$

2. Mostrare, a posteriori, che l'approssimazione di moto stazionario (cioè l'approssimazione $\partial\Phi/\partial t \rightarrow 0$) è effettivamente accettabile.

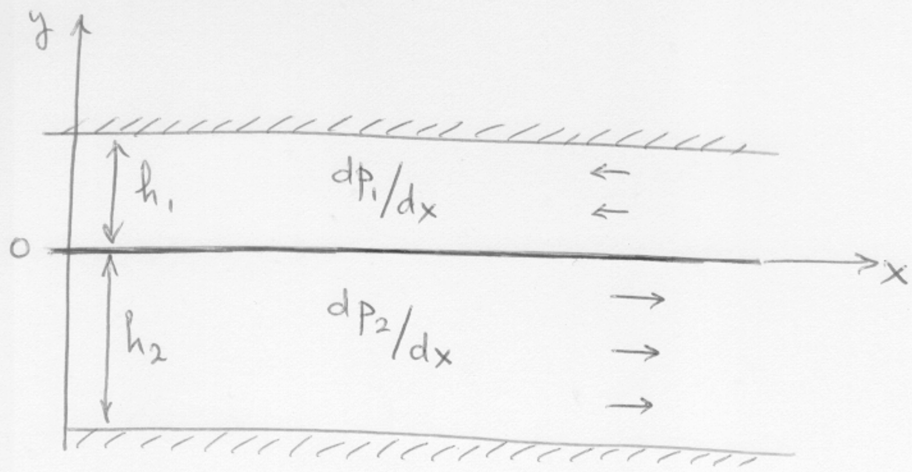


Esercizio 2: Correnti incomprimibili di fluido reale **(14 punti)**

Nella figura della pagina seguente sono rappresentate tre lastre piane rigide, di lunghezza infinita e spessore infinitesimo. La lastra superiore e quella inferiore sono fisse, mentre quella centrale può muoversi sul suo piano. Un fluido (acqua, viscosità dinamica $\mu = 0.0011$ Pa s) può scorrere nei canali formati dalle lastre, sotto l'azione di gradienti di pressione assiali. In particolare nel canale superiore (canale 1) di spessore $h_1 = 0.3$ mm si ha $dp_1/dx = 300$ Pa/m, nel canale inferiore (2) di spessore $h_2 = 0.5$ mm si ha $dp_2/dx = -300$ Pa/m. Si è in condizioni di moto laminare piano, permanente, incomprimibile e completamente sviluppato.

1. Si dimostri che $v_y = 0$ sia nel canale superiore che in quello inferiore.
2. Si diano le espressioni formali delle distribuzioni di velocità v_{x1} e v_{x2} nei due canali, utilizzando le condizioni al contorno e prestando particolare attenzione alle condizioni di raccordo da scrivere in corrispondenza della lastra centrale, che può essere messa in moto <u>uniforme</u> sotto l'azione delle forze di taglio esercitate dal fluido soprastante e sottostante.

3. Calcolare la velocità (costante) della lastra centrale e specificare il verso del vettore.
4. Calcolare il valore massimo della velocità del fluido in entrambi i canali e fare uno schizzo dei profili di velocità.



Esercizio 3: Onde viaggianti e onde stazionarie **(6 punti)**

Si considerino due onde armoniche viaggianti in direzione x, di (piccola) ampiezza A, pulsazione ω e numero d'onda k. Le due onde si propagano in verso opposto l'una rispetto all'altra. Si mostri che la sovrapposizione di tali due onde (scritte come due funzioni circolari reali, ad esempio come due funzioni coseno) produce un'onda stazionaria, di cui si chiede la definizione e che si chiede di disegnare per due istanti di tempo separati tra loro di un semi-periodo π/ω.

Compitino 5/6/06 FILA B

Esercizio 1

$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = \text{cost.}$

↑ il moto è irrotazionale, la costante è la stessa in tutto il campo di moto

Integro tra la superficie superiore dell'acqua (dove $p = p_{atm}$, $v = +\frac{dh}{dt}$, $z = h(t)$) e il forellino in basso (dove $p = p_{atm}$, $v = v_{foro}$, $z = 0$):

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \cancel{p_{atm}} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_{foro}^2 + \cancel{p_{atm}}$$

Inoltre, per l'eq. di continuità: $S\frac{dh}{dt} = s\, v_{foro}$

$$\rightarrow v_{foro} = \frac{S}{s}\frac{dh}{dt}$$

Quindi: $\frac{1}{2}\rho\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\left[\frac{S^2}{s^2} - 1\right] = \rho g h$

e siccome $S \gg s \rightarrow \frac{1}{2}\rho\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\frac{S^2}{s^2} \cong \rho g h$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2gh\frac{s^2}{S^2} \qquad \boxed{\frac{dh}{dt} = \pm\frac{s}{S}\sqrt{2gh}}$$

↑ scelgo il segno − in quanto il livello h ↓ per t ↑

$$h^{-1/2}\, dh = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\, dt$$

$$2h^{1/2} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\, t + \text{cost.}$$

Per $t = 0$: $h = h_0$ $\Longrightarrow \text{cost} = 2h_0^{1/2}$

$$\boxed{2h^{1/2} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\, t + 2h_0^{1/2}}$$

Quando $t = t_{svuotamento}$ si ha: $h = 0$ $\longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{t_{svuotamento} = \sqrt{2h_0/g}\,\frac{S}{s}}$$

Approx. moto stazionario : $\frac{\partial \phi}{\partial t} \to 0$

$$V = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2gh}$$

$\to$ il potenziale di velocità vale dunque:

$$\phi = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2gh}\, z + f(x,y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\, z\, \frac{\partial}{\partial t}(h^{1/2}) = -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\, z\, \frac{1}{2} h^{-1/2} \frac{dh}{dt}$$

$$= -\frac{\sigma}{S}\sqrt{2g}\, z\, \frac{1}{2} h^{-1/2}\left(-\frac{\sigma}{S}\sqrt{2gh}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2 g z \ll g z$$ $\to$ l'approx. $\frac{\partial \phi}{\partial t} \to 0$ è accettabile poiché il termine $\frac{\partial \phi}{\partial t} \ll gz$

Esercizio 2

1. Moto completamente sviluppato : $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ ($\to v_y = 0$ dall'eq. di continuità)

Nei 2 canali si ha : $\frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

2.

① $v_{x_1} = \frac{1}{\nu}\frac{dp_1}{dx}\frac{y^2}{2} + A_1 y + B_1$

② $v_{x_2} = \frac{1}{\nu}\frac{dp_2}{dx}\frac{y^2}{2} + A_2 y + B_2$

C.C. $v_{x_1}(h_1) = 0 \qquad v_{x_2}(-h_2) = 0$

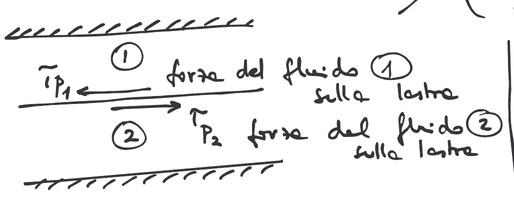
$v_{x_1}(0) = U = v_{x_2}(0)$, U incognita, moto uniforme della lastra centrale

$\Rightarrow B_1 = B_2 = U$

$A_1 = -\left(\frac{1}{\nu}\frac{dp_1}{dx}\frac{h_1}{2} + \frac{U}{h_1}\right) \qquad A_2 = \frac{1}{\nu}\frac{dp_2}{dx}\frac{h_2}{2} + \frac{U}{h_2}$

3. La forza netta (per unità di superficie) sulla lastra è uguale a zero (la lastra centrale si può muovere a velocità costante):

$$\mu \left(\frac{dv_{x_1}}{dy} - \frac{dv_{x_2}}{dy} \right)\Bigg|_{y=0} = 0$$



la normale alla parete è opposta nei 2 casi

$$\frac{dv_{x_1}}{dy}\bigg|_{y=0} = A_1 \qquad \frac{dv_{x_2}}{dy}\bigg|_{y=0} = A_2$$

$$A_1 = A_2 \longrightarrow -\frac{1}{\nu}\frac{dp_1}{dx}\frac{h_1}{2} - \frac{U}{h_1} = \frac{1}{\nu}\frac{dp_2}{dx}\frac{h_2}{2} + \frac{U}{h_2}$$

$$U \frac{2(h_1+h_2)}{h_1 \cdot h_2} = -\frac{1}{\nu}\left(h_1 \frac{dp_1}{dx} + h_2 \frac{dp_2}{dx} \right)$$

$$\boxed{U} = -\frac{1}{\nu}\frac{h_1 \cdot h_2}{2(h_1+h_2)}\left(h_1 \frac{dp_1}{dx} + h_2 \frac{dp_2}{dx} \right) =$$

$$= -\frac{10^6}{1.1}\,\frac{0.3 \times 0.5 \times 10^{-3}}{1.6}\left(0.3 \times 0.3 - 0.5 \times 0.3\right) = \boxed{5.11 \ m s^{-1}}$$

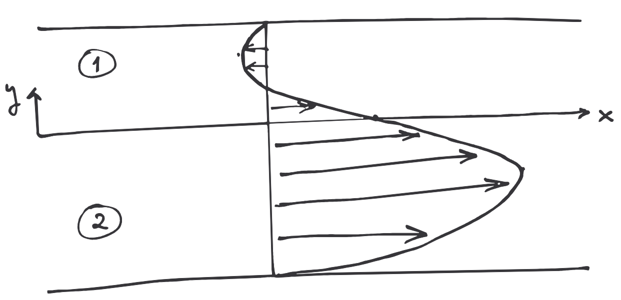
La lastra centrale si muove nel verso delle x crescenti.

4. $$\frac{\partial v_{x_1}}{\partial y} = \frac{1}{\nu}\frac{dp_1}{dx} y + A_1 \qquad \frac{\partial v_{x_1}}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y_1 = \frac{-\nu A_1}{\frac{dp_1}{dx}} = \dots = 0{,}2125 \text{ mm}$$

$$\frac{\partial v_{x_2}}{\partial y} = \frac{1}{\nu}\frac{dp_2}{dx} y + A_2 \qquad \frac{\partial v_{x_2}}{\partial y} = 0 \longrightarrow y_2 = -0{,}2125 \ [mm]$$

$$|v_{max\,1}| = 1{,}05 \ [m\,s^{-1}]$$

$$v_{max\,2} = 11.26 \ [m\,s^{-1}]$$



Esercizio 3

$$\phi_1 = A \cos(kx - \omega t)$$
$$\phi_2 = A \cos(kx + \omega t)$$

Sovrapponendo le 2 onde:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = A\left(\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)\right) =$$

$$= A\left[\cos(kx)\cos(+\omega t) + \cancel{\sin(kx)\sin(+\omega t)} + \cos(kx)\cos(\omega t) - \cancel{\sin(kx)\sin(\omega t)}\right]$$

$$= 2A \cos kx \cos \omega t$$

questa è l'eq. di un'onda stazionaria, cioè un'onda i cui nodi sono fissi, con creste e cavi che oscillano nel tempo.

T = periodo onda $= \frac{2\pi}{\omega}$

λ_x = lunghezza d'onda $= \frac{2\pi}{k}$