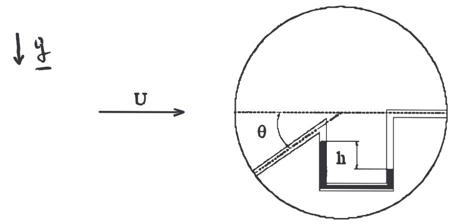
**Università di Genova**
**Facoltà di Ingegneria**

Compitino di **Fondamenti di Meccanica dei Continui**
5 giugno 2006, Aula B2

**Meccanica dei Fluidi**
"Foglio aiuti" formato A4 ammesso **FILA A**

**Esercizio 1: Moto potenziale attorno ad un cilindro** **(8 punti)**

Si consideri un cilindro investito da una corrente uniforme ortogonale all'asse del cilindro. Lungo il perimetro del cilindro sono praticati due fori a cui è collegato un manometro ad U come in figura. Se la differenza di quota tra i due menischi è h ed il liquido manometrico è alcool ($\rho_m$ = 780 Kg/m$^3$) calcolare la velocità della corrente d'aria ($\rho_{aria}$ = 1 Kg/m$^3$) che investe il cilindro. (Trascurare gli effetti viscosi; si possono utilizzare i risultati già ottenuti in corso senza doverli ri-derivare dal principio).




$h = 2.06\text{cm} \quad \theta = 30^o$

**Esercizio 2: Moto incomprimibile di fluido reale** **(16 punti)**

Il moto incomprimibile di un fluido reale di viscosità dinamica $\mu$ presenta il campo di velocità seguente:

$$\begin{cases} v_x = a(x^2-y^2), \\ v_y = \text{sconosciuto}, \\ v_z = b, \end{cases} \qquad \text{a, b costanti note.}$$

1. Quale deve essere la forma della velocità $v_y$?
2. Si consideri ora il seguente campo di velocità:

$$\begin{cases} v_x = a(x^2-y^2), \\ v_y = -2axy, \\ v_z = 0. \end{cases} \qquad \text{a costante nota,}$$

   Tale moto è rotazionale o irrotazionale?
3. Determinare per quali condizioni tale moto è soluzione delle equazioni di Navier-Stokes (cioè, esiste un campo di pressione tale che le espressioni di cui sopra definiscano un campo di velocità accettabile?). Se esiste, si determini la

pressione. Si consideri l'accelerazione di gravità orientata lungo l'asse z negativo e si verifichi se l'equazione di Bernoulli è soddisfatta. Se lo fosse, vi sembra accettabile un tale risultato?

4. Si calcoli la funzione di corrente e si faccia uno schizzo di alcune linee di corrente. Si provi ad interpretare il moto risultante.
5. Esiste un potenziale di velocità per questo flusso? Se esiste lo si calcoli e si schizzino alcune linee equipotenziale.

**Esercizio 3: Onde in uno strumento musicale a fiato** **(9 punti)**

Si consideri uno strumento a fiato di lunghezza L chiuso ad un estremo ed aperto all'atmosfera sull'altro estremo, all'interno del quale è stata generata un'onda stazionaria di piccola ampiezza che si può scrivere come:

$$\delta v_x = A \sin(\alpha x) \cos(\omega t).$$

Si mostri graficamente – quindi senza cercare esplicitamente gli autovalori del problema - che l'onda più lunga (corrispondente alla nota più grave) e la seconda onda più lunga che possono essere generate da tale strumento hanno numeri d'onda pari a

$$\alpha_1 = \pi/(2L); \quad \alpha_2 = 3\pi/(2L).$$

Si dia l'espressione di $\omega_1$ e $\omega_2$ e si disegni il disturbo di pressione e quello di velocità del primo modo di oscillazione, indicando chiaramente il lato aperto e quello chiuso.

# Compitino 5/6/06 FILA A

## Esercizio 1

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

$$C_{p(180°)} - C_p(30°) = \frac{p(180°) - p(30°)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 4\left(\sin^2 30° - \sin^2 180\right) = 1$$

$$p(180°) - p(30°) = \rho_m g h = \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\longrightarrow \quad U = \sqrt{\frac{2\rho_m g h}{\rho}} = 17.53 \; [m\, s^{-1}]$$

## Esercizio 2

1. $v_y$ deve soddisfare l'eq.: $\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2ax \quad \longrightarrow \quad v_y = -2axy + g(x,z)$$

2. $$\begin{cases} v_x = a(x^2 - y^2) \\ v_y = -2axy \\ v_z = 0 \end{cases}$$

moto piano, bidimensionale, incomprimibile e irrotazionale: $\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$

3. N.S. $\quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$

lungo x: $\quad 2ax(ax^2 - ay^2) - 2ay(-2axy) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

lungo y: $\quad a(x^2 - y^2)(-2ay) - 2axy(-2ax) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

lungo z: $\quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$

la diffusione viscosa non agisce, malgrado che $\nu \neq 0$

$$p = -\rho g z + f_1(x,y)$$ (solo componente idrostatica di $p$ lungo $z$, normale in quanto $v_z \equiv 0$)

$$x: \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 2a^2(x^3 + xy^2) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_1}{\partial x} \qquad (1)$$

$$y: \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 2a^2(x^2 y + y^3) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_1}{\partial y} \qquad (2)$$

Affinché esista una funzione $f_1(x,y)$ che soddisfi le 2 equazioni bisogna che le 2 derivate miste siano uguali

lungo $x$: $$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2a^2(x^3 + xy^2)\right) = 4a^2 xy$$

lungo $y$: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2a^2(x^2 y + y^3)\right] = 4a^2 xy$$

E' quindi possibile determinare una pressione $f_1(x,y)$ che verifichi le equazioni di N.S. piane; integrando l'eq. (1):

$$f_1(x,y) = -2a^2\rho\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}\right) + f_2(y)$$

Derivando rispetto ad $y$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -2a^2\rho\, y x^2 + \frac{df_2}{dy} \underset{\text{eq.}(2)}{=} -2a^2\rho(x^2 y + y^3)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{df_2}{dy} = -2a^2\rho y^3 \quad \longrightarrow \quad f_2 = -\frac{1}{2}a^2\rho y^4 + C$$

E quindi: $$\boxed{p(x,y,z) = -\rho g z - \frac{1}{2}a^2\rho(x^2+y^2)^2 + C}$$

Per un tale moto stazionario l'eq. di Bernoulli si scrive :

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = cost.$$

e siccome $V^2 = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = a^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) = a^2(x^2+y^2)^2$ l'eq. di Bernoulli è soddisfatta. Tale risultato non è sorprendente in quanto la viscosità non gioca alcun ruolo nel definire il campo di moto. Inoltre, siccome il moto è irrotazionale la costante C è la stessa in tutti i punti del mezzo fluido.

4. $$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a(x^2 - y^2) \quad ; \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy$$

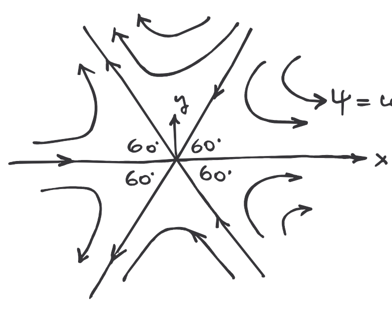
$\uparrow$ integrando

$$\psi = a x^2 y - \frac{1}{3} a y^3 + f(x)$$

(vedi sopra)

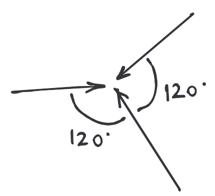
$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy - \frac{df}{dx} \implies \frac{df}{dx} = 0 \rightarrow f = k_1$$

$$\psi = a\left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) + k_1$$




schizzo delle linee di corrente

Questo potrebbe essere il moto prodotto da 3 getti che si incontrano



5. Siccome $\omega_z = 0 \longrightarrow \exists\ \phi$, potenziale di velocità

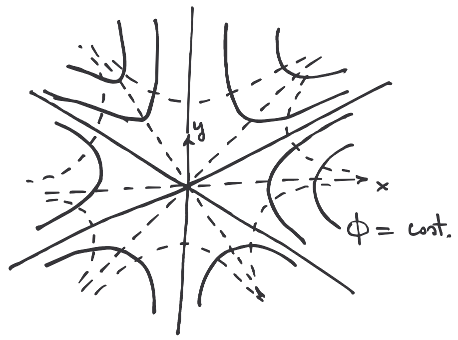
$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = a\,(x^2 - y^2) \quad ; \qquad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2axy$$

↓ integrando

$$\phi = a\,\frac{x^3}{3} - a y^2 x + g(y)$$

(vedi sopra)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2axy + \frac{dg}{dy} \Longrightarrow \frac{dg}{dy} = 0 \longrightarrow g = k_2$$

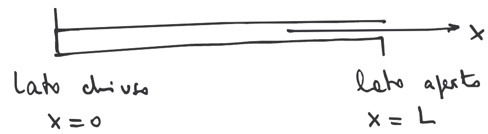


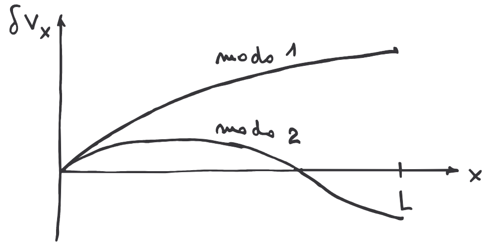

schizzo (linee continue) delle linee equi-potenziale

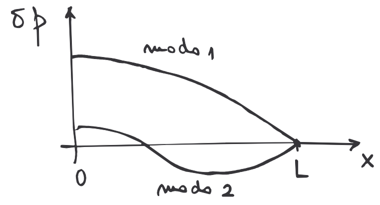
## Esercizio 3

Onda stazionaria

$$\boxed{\delta v_x = A \sin(\alpha x) \cos(\omega t)}$$




$\frac{\partial}{\partial x}(\delta p(0)) = 0 \qquad \delta p(L) = 0$

$\delta v_x(x=0) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta v_x(x=L)\right) = 0$

modo 1: $\lambda_1 = 4L = \frac{2\pi}{\alpha_1} \mapsto \alpha_1 = \frac{\pi}{2L} \longrightarrow \omega_1 = c_s \alpha_1 = \frac{c_s \pi}{2L}$

modo 2: $\lambda_2 = \frac{4}{3}L = \frac{2\pi}{\alpha_2} \mapsto \alpha_2 = \frac{3\pi}{2L} \longrightarrow \omega_2 = \frac{3 c_s \pi}{2L}$