Compito di meccanica dei fluidi

3 giugno 2004

Correzione

1 Moto potenziale attorno ad una sfera

1. $$\phi_{TOT} = \left(U_\infty r + \frac{m}{4\pi r^2} \right) \cos\varphi + \text{cost.}$$

2. $$\psi_{TOT} = \left(\frac{1}{2} U_\infty r^2 - \frac{m}{4\pi r} \right) \sin^2\varphi + \text{cost.}$$

3. $$v_r = \frac{\partial \phi_{TOT}}{\partial r} = U_\infty \cos\varphi - \frac{m}{2\pi r^3} \cos\varphi$$

$$v_r(r=R) = 0 \qquad (\text{non-penetrazione})$$

$$\rightarrow \quad U_\infty = \frac{m}{2\pi R^3} \quad \Longrightarrow \quad v_r = U_\infty \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos\varphi$$

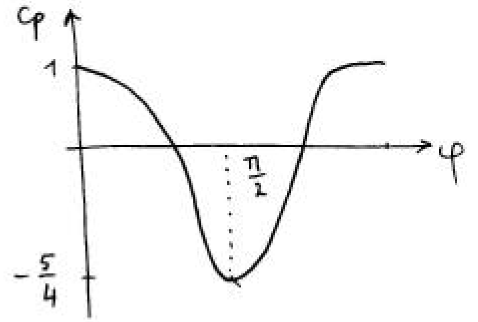
$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{TOT}}{\partial \varphi} = -\left(U_\infty + \frac{m}{4\pi r^3} \right) \sin\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad v_\varphi = -U_\infty \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin\varphi$$

4. $$c_p = \frac{p_{cilindro} - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

$$p_{cilindro} + \frac{1}{2} \rho\, v_\varphi(R)^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = p_{cilindro} + \frac{9}{8} \rho U_\infty^2 \sin^2\varphi$$

$$c_p = 1 - \frac{9}{4} \sin^2\varphi$$



Vista la simmetria della pressione, non $\exists$ una componente netta della forza del fluido sulla sfera, né lungo x né lungo y.

6. Le osservazioni sperimentali si spiegano con la formazione di uno strato limite sulla sfera, e una separazione dello strato limite $\rightarrow$ scia $\rightarrow$ resistenza di <u>attrito</u> e di <u>forma</u>.

2 Moti di Stokes

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \rho \frac{D v_i}{D t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 = \frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_i} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0$$

scala di pressione

$$\boxed{\tilde{p} = \frac{p}{\Pi}} \qquad \Pi\ ?$$

$$\frac{U^2 \rho}{L} \frac{D \tilde{v}_i}{D \tilde{t}} = -\frac{\Pi}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\mu U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}$$

$$\underbrace{\left(\frac{U L \rho}{\mu} \right)}_{= \, Re \, \to \, 0} \frac{D \tilde{v}_i}{D \tilde{t}} = -\frac{\Pi L}{\mu U} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j}$$

Deve quindi essere:
(scala viscosa per la pressione)

$$\boxed{\Pi = \frac{\mu U}{L}}$$

3 Strato limite di aspirazione

Eq. dello strato limite:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$p = p(x)$ soltanto; lo prendo da Bernoulli fuori dallo strato limite: $\left\{ p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{cost.} \right.$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho U \frac{dU}{dx} = 0 \quad \text{poiché} \quad U = U_\infty = \text{cost.}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} v_x = v_x(y) \\ v_y = v_y(y) \end{matrix}} \quad \text{completamente sviluppato}$$

1. $\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \longrightarrow v_y = \text{cost.}$ ma $v_y = -V$ per $y = 0$

$$\Longrightarrow \boxed{v_y(x,y) = -V} \quad \forall x, y$$

2. $$-V \frac{dv_x}{dy} = \nu \frac{d^2 v_x}{dy^2}$$

Chiamo: $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = a(y)$: $\quad -Va = \nu \dfrac{\partial a}{\partial y}$

$$\Longrightarrow a = c_1 e^{-Vy/\nu}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = c_1 e^{-Vy/\nu} \Longrightarrow v_x = c_2 e^{-Vy/\nu} + c_3$$

$v_x(0) = 0$: $\quad c_2 + c_3 = 0$

$v_x(\infty) = U_\infty$: $\quad c_3 = U_\infty$

$$\longmapsto \quad v_x = U_\infty \left[1 - e^{-Vy/\nu} \right]$$

3. $$\tau_{xy}\Big|_{y=0} = \mu \left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=0} = \mu \left[\frac{V U_\infty}{\nu} \right]$$

$$\boxed{F_x = \rho V U_\infty L}$$ (per unità di profondità in z)

4. Lo strato limite con aspirazione è <u>più stabile</u> ai piccoli disturbi. Anche se nel caso laminare la resistenza dovuta all'attrito è più grande, il moto rimane laminare su una lunghezza più grande (e sappiamo che il c_x laminare è $<$ $c_{x\,\text{turbolento}}$ ...)