Meccanica dei continui (fluidi)

Es. 1 La componente lungo x dell'equazione della quantità di moto (Navier-Stokes) per un moto completamente sviluppato si scrive semplicemente:

$$\Pi = \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dy}\tau_{xy}$$

con Π una costante negativa poiché il moto è da sinistra verso destra in figura.

Quindi: $\tau_{xy} = \Pi y + b$, b una costante

Siccome $\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} + \epsilon \left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 = \Pi y + b$

è facile trovare che:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{2\epsilon}\left[-\mu \mp \sqrt{\mu^2 + 4\epsilon(\Pi y + b)}\right] ;$$

$$\left[\mu^2 + 4\epsilon(\Pi y + b)\right]^{1/2} = \mu\left[1 + \frac{4\epsilon}{\mu^2}(\Pi y + b)\right]^{1/2} = \mu(1 + \epsilon A)^{1/2}$$

$$\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \mu\left(1 + \epsilon\frac{A}{2} - \epsilon^2\frac{A^2}{8} + \dots\right)$$

dove $A = \frac{4(\Pi y + b)}{\mu^2}$

Quindi :

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\mu}{2\epsilon}\left[-1 \mp \left(1 + \frac{2\epsilon}{\mu^2}(\pi y + b) - \frac{2\epsilon^2}{\mu^4}(\pi y + b)^2 + \dots\right)\right]$$

scelgo il segno + perché quando $\epsilon \equiv 0$ devo trovare il caso del moto di Poiseuille: $\mu \frac{dv_x}{dy} = \pi y + b$

$$\longrightarrow v_x(y) = \frac{\pi}{\mu}\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}hy\right)$$ (con le condizioni al contorno $b = -\frac{\pi h}{2}$)

Al prim' ordine in ϵ si ha quindi :

$$\boxed{\frac{dv_x}{dy} \cong \frac{\pi y + b}{\mu} - \frac{\epsilon}{\mu^3}(\pi y + b)^2}$$

Integrando :

$$v_x(y) = -\frac{\epsilon}{3\mu^3}\pi^2 y^3 + \left(\frac{\pi}{2\mu} - \frac{\pi b\epsilon}{\mu^3}\right)y^2 + \frac{b}{\mu}\left(1 - \frac{\epsilon b}{\mu^2}\right)y + c$$

↑ nuova costante

Le due condizioni al contorno sono :

$v_x(0) = 0$, $v_x(h) = 0$

per cui : $c = 0$ e $0 = -\frac{\epsilon}{3\mu^3}\pi^2 h^3 + \left(\frac{\pi}{2\mu} - \frac{\pi b\epsilon}{\mu^3}\right)h^2 + \frac{b}{\mu}\left(1 - \frac{\epsilon b}{\mu^2}\right)h$

cioè : $\epsilon b^2 + b(\epsilon\pi h - \mu^2) + \frac{(\pi h)^2\epsilon}{3} - \frac{\pi h \mu^2}{2} = 0$

la cui soluzione è : $b = \frac{\mu^2}{2\epsilon}\left[1 - \frac{\epsilon\pi h}{\mu^2} \mp \sqrt{1 - \frac{1}{3}\frac{\epsilon^2\pi^2 h^2}{\mu^4}}\right]$

si sviluppa il termine con la radice, come in precedenza:

$$\sqrt{1-\frac{1}{3}\epsilon^2\frac{\pi^2 h^2}{\mu^4}} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 1-\frac{\epsilon^2}{6}\frac{\pi^2 h^2}{\mu^4}+\cdots$$

cosicché:

$$b=\frac{\mu^2}{2\epsilon}\left[1-\frac{\epsilon\pi h}{\mu^2}\mp\left(1-\frac{\epsilon^2}{6}\frac{\pi^2 h^2}{\mu^4}\cdots\right)\right]$$

scelgo il segno $-$, se no la costante b tenderebbe a $b\to\infty$ per $\epsilon\to 0$

$$\Rightarrow \quad b=-\frac{\pi h}{2}+\epsilon\,\frac{1}{12}\left(\frac{\pi h}{\mu}\right)^2+\cdots$$

Rimpiazzando tale valore di b nell'espressione di V_x, si trova, al prim'ordine in ϵ:

$$\boxed{V_x(y)=\frac{\pi}{\mu}\left[-\frac{\epsilon\pi y^3}{3\mu^2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\epsilon\pi h}{2\mu^2}\right)y^2-\left(\frac{h}{2}+\frac{\epsilon\pi h^2}{6\mu^2}\right)y\right]\cdots}$$

e tale profilo tende al profilo di Poiseuille per $\epsilon\to 0$.

Es. 2

a)

1. Uno scalare ψ $\exists$ solo per moti nel piano
2. ϕ può essere definito in 2D e in 3D
3. $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, mentre per coordinate cartesiane
$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
4. ψ $\exists$ per tutti i flussi incomprimibili (e piani) perché $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \equiv 0$
5. ϕ $\exists$ per tutti i moti irrotazionali perché:
$$\omega_z = \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \equiv 0 \quad (\text{in } 2D),$$
e nel caso 3D si ha $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) \equiv 0.$
6. Se abbiamo $\nabla^2 \phi = 0$ abbiamo, caso 2D,
che $\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} = 0 \rightarrow$ cioè il moto potenziale è <u>incomprimibile</u>.
Se abbiamo $\nabla^2 \psi = 0$ il moto è piano e irrotazionale. Quindi, in 2D, un moto incomprimibile ed irrotazionale ha $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$.

b) Linee equipotenziali (per moto 2D, incompr. e irrotaz.)
$$\phi = \text{cost.} \rightarrow d\phi = 0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy =$$
$$= V_x dx + V_y dy = 0$$
e quindi $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi = \text{cost.}} = -V_x/V_y$

linee di corrente : $\psi = \text{cost.}$

$$d\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = - v_y dx + v_x dy$$

$$\rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi = \text{cost.}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Tali 2 famiglie di linee sono quindi ortogonali tra loro in ogni punto.

c) L'eq. di Bernoulli $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g z = C$

e' valida lungo una linea di corrente per tutti i moti
- inviscidi
- permanenti
- incomprimibili

ed e' valida in tutto il campo di moto per un flusso irrotazionale.

$\boxed{\text{Es. 3}}$ Strato limite

Vedi appunti del corso.