Università degli Studi di Genova
Facoltà di Ingegneria

Esame di Meccanica dei Continui
Parte 2: **Meccanica dei fluidi**
14 Novembre 2005, ore 10:00, biblioteca DISEG
Appunti del corso e testi ammessi
Rispondete dettagliatamente e giustificate tutte le vostre risposte

Esercizio 1: Moti potenziali e viscosi **(17 punti)**

Si consideri il moto permanente, incomprimibile ed **irrotazionale** di un vortice libero, centrato in O. Tale moto è dato, in coordinate cilindriche, da:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \Gamma/(2\pi r), \quad v_z = 0,$$

con Γ la circuitazione, $\Gamma = \int_C \underline{v} \cdot d\underline{l}$, C un cammino di integrazione circolare di raggio r centrato in O.

1. Trascurando le forze di massa si calcoli il campo di pressione p(r).

Il moto permanente incomprimibile e **viscoso** generato dalla rotazione attorno al proprio asse di un cilindro di raggio R di lunghezza infinita immerso in un mezzo fluido Newtoniano infinito ha la **stessa velocità** $\underline{\mathbf{v}}$ e lo **stesso campo di pressione** p (per r > R).

2. Si dimostri questa affermazione risolvendo le equazioni di continuità e di Navier-Stokes in coordinate cilindriche nelle due variabili indipendenti r e θ, trovando v_r, v_θ e p, e dimostrando che in questo secondo caso si ha $\Gamma = 2\pi R\, u_{superficie}$, con $u_{superficie}$ la velocità tangenziale del cilindro in r = R.

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta = 0 \; ; \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \; ;$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right);$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right).$$

[Può essere utile sfruttare il fatto che la cosiddetta equazione "equidimensionale" (o di Cauchy), che si scrive: $x^2 f'' + x f' - f = 0$, ha soluzione generale $f(x) = c_1/x + c_2 x$]

3. Dopo aver osservato che $\underline{\mathbf{v}}$ e p sono gli stessi nei due casi, si discuta questo apparente paradosso, cercando di mostrare come in ambedue i casi le equazioni del moto si riducano a:

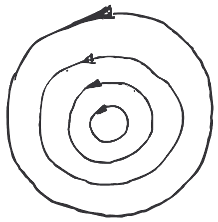
$$\nabla^2\phi = 0, \quad (\nabla\phi)^2/2 + p/\rho = \text{costante}, \quad \text{con } \phi \text{ il potenziale di velocità.}$$

In particolare si spieghi come è possibile che un moto potenziale risulti essere la stessa cosa di un moto generato dalla viscosità (tramite la condizione di aderenza alla parete).

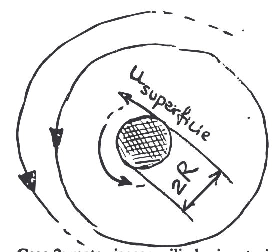
4. Mentre nel primo caso la forza viscosa (per unità di massa) è, ovviamente, uguale a zero (perchè?), la si calcoli nel secondo caso.

   [Può essere utile sapere che $\nabla^2 \underline{\mathbf{v}} = \nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{v}}) - \nabla (\nabla \cdot \underline{\mathbf{v}})$]

5. Si mostri che per il moto in oggetto la pressione di ristagno p_t è costante lungo una linea di corrente (cioè si mostri che $Dp_t/Dt = 0$, e si spieghi anche perché è proprio questa la relazione che si vuole provare)



Caso 1: vortice libero, moto potenziale



Caso 2: moto viscoso, cilindro in rotazione

Esercizio 2: Moto radiale di un flusso Newtoniano tra dischi paralleli (16 punti)

Si consideri il moto permanente, incomprimibile e laminare nello spazio tra due dischi circolari fissi paralleli e distanti b tra loro (si veda la figura). Il moto si produce in direzione radiale, verso l'esterno, per effetto di una differenza di pressione ($p_1 - p_2$) tra la sezione interna (dove $r = r_1$) e quella esterna (dove $r = r_2$). Si può dimostrare che dp/dr è costante nella regione $r_1 < r < r_2$. Ci si concentri solo sulla regione definita da $-b \le z \le b$ e da $r_1 < r < r_2$ e si trascurino gli effetti di bordo (cioè quello che accade nelle immediate vicinanze di r_1 e r_2).

1. Semplicare l'equazione di continuità (vedi esercizio precedente) per ottenere $v_r = f(z)/r$.
2. Semplificare le equazioni della quantità di moto (vedi esercizio precedente) e ottenere l'espressione di v_r sotto l'ipotesi che il termine convettivo (non lineare) sia trascurabile (tale approssimazione, detta di Stokes, è verificata per questa geometria in alcuni flussi detti di lubrificazione).
3. Qual'é la scala di pressione appropriata per i moti di lubrificazione?
4. Si calcoli la portata in massa.

MMC, Esame del 14/11/2005

Meccanica dei Fluidi

1.

Moto potenziale:

$$v_r = v_z = 0$$
$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

1. Il campo di pressione si calcola dall'eq. di Bernoulli. Trascurando le forze di massa si ha:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{cost.}$$

$$\boxed{p = \rho\,\frac{v^2}{2} + \text{cost.} = \rho\,\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} + \text{cost.}}$$

La cost. è proprio la pressione di ristagno p_t che si ha allorché la velocità si annulla.

2. **Moto viscoso**:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p + \nu \nabla^2 \underline{v} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p + \underline{F}_{viscose}$$

Nel caso di moto non-viscoso ($\nu = 0$) le forze viscose per unità di massa sono - ovviamente - nulle.

Nel secondo caso – $\nu \neq 0$ – le forze (per unità di massa) viscose sono anche nulle perché:

$$\underline{F}_{viscose} = \nu \nabla^2 \underline{v} = \nu \left[\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v}) - \underline{\nabla} \underbrace{\cancel{(\underline{\nabla} \cdot \underline{v})}}_{=0 \text{ continuità}} \right]$$

$= \underline{0}$ in quanto

<u>si dimostra</u> che $\underline{\nabla} \times \underline{v} = \underline{\omega} = \underline{0}$.

Infatti:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \boxed{v_\theta = v_\theta(r)}$$

(non c'è velocità radiale, solo azimutale)

$$\begin{cases} -\dfrac{v_\theta^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} & \text{q. di moto lungo } r \\ 0 = \nu \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \dfrac{v_\theta}{r^2} \right] & \text{q. di moto lungo } \theta \end{cases}$$

$$r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - v_\theta = 0 \qquad r^2 v_\theta'' + r v_\theta' - v_\theta = 0$$

equazione "equidimensionale"

$$\rightarrow \quad v_\theta = \frac{c_1}{r} + c_2 r$$

$$\left.\begin{array}{l} r = R \rightarrow v_\theta = u_{superficie} = \dfrac{c_1}{R} + c_2 R \\ r \rightarrow \infty \rightarrow v_\theta = 0 = c_2 \end{array}\right\} \rightarrow c_1 = u_{sup} R$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} v_\theta = u_{sup.} \dfrac{R}{r} = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \\ \text{con } \Gamma = 2\pi R \, u_{superficie} \end{array}}$$

In queste coordinate : $\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \underline{e}_z \, \omega_z$

con $\omega_z = \frac{1}{r}\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} v_r}_{v_r = 0} \right]$.

poiché $r v_\theta = u_{superficie} R = \text{cost.}$

Quindi , $\underline{\omega} = \underline{0}$ anche per questo moto viscoso.
Non $\exists$ contraddizione : un moto viscoso (come quello generato dal cilindro che ruota) può essere irrotazionale. Dall' equazione della q. di moto lungo r si trova : $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} = \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^3}$

Integrando : $\boxed{p = \rho \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} + \text{cost.}}$ stesso risultato che nel caso di moto potenziale

Caso potenziale : le equazioni del moto sono ovviamente :

$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \phi) = \nabla^2 \phi = 0$ continuità (ϕ = potenziale di velocità)

$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{(\underline{\nabla}\phi)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_t}{\rho} = \text{cost.}$ Bernoulli

Caso viscoso : le equazioni del moto sono :

$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$, ma siccome $\underline{\nabla} \times \underline{v} = 0$
$\exists$ un potenziale di velocità ϕ t.c. $\nabla^2 \phi = 0$

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} + \frac{\underline{\nabla} p}{\rho} = \underline{F}_{viscose} = \underline{0}$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}}}_{\text{moto permanente}} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{v} + \underline{\nabla}\int\frac{dp}{\rho} = 0$$

Si sa che: $(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{v} = \frac{1}{2}\underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{v}) - \underline{v}\times\underbrace{\cancel{(\underline{\nabla}\times\underline{v})}}_{\underline{\omega}=\underline{0}}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\underline{\nabla}(v^2) + \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p = 0 \qquad$ (perché ρ = cost.)

$\Rightarrow \quad \underline{\nabla}\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}(\underline{\nabla}\phi)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{cost.}}$

Quindi le equazioni del moto sono le stesse (e la cosa non è paradossale). Nel caso di moto potenziale la soluzione $(\underline{v}, p)$ vale per $\forall\, r$, nel caso di moto viscoso la soluzione vale per $r \in [R, \infty)$.

Un'espressione del tasso di variazione della pressione di ristagno lungo una linea di corrente si ottiene, per un moto stazionario e incomprimibile, prendendo il prodotto scalare della velocità con l'eq. della q. di moto:

$$\underline{v}\cdot\frac{D\underline{v}}{Dt} + \underline{v}\cdot\frac{\nabla p}{\rho} = \underbrace{\cancel{\underline{v}\cdot\underline{F}_{viscose}}}_{=0} = 0$$

$$\underline{v} \cdot \left[\frac{D\underline{v}}{Dt} + \frac{\nabla p}{\rho} \right] = 0$$

$$\underline{v} \cdot \left[(\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{v} + \frac{\nabla p}{\rho} \right] = 0 = \underline{v} \cdot \left[\frac{1}{2} \underline{\nabla}(v^2) + \frac{\nabla p}{\rho} \right] =$$

$$= \underline{v} \cdot \left[\underline{\nabla}\left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \underline{v} \cdot \left[\nabla \frac{p_t}{\rho} \right] = \frac{1}{\rho} \underline{v} \cdot \underline{\nabla} p_t$$

Siccome $\frac{\partial p_t}{\partial t} = 0$ (moto permanente)

$$\rightarrow \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_t}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} p_t \right] = \underline{v} \cdot \underline{F}_{viscose} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{Dp_t}{Dt} = 0}$$

cioè la pressione di ristagno è costante lungo una linea di corrente.

$\boxed{2.}$ Moto viscoso, permanente radiale

Continuità: $\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) = 0$

$v_\theta = 0$; $v_z = 0$

$$\Rightarrow r v_r = \text{cost.} \qquad \boxed{v_r = \frac{\text{cost.}}{r}}$$

In realtà la costante è una funzione di z e θ (ma il moto ha simmetria azimutale $\rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$ solo $f(z)$) $\Rightarrow$ $\boxed{v_r = \frac{f(z)}{r}}$

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{v_\theta^2}{r}} + \cancel{v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}\right]$$

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + \cancel{v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{v_r v_\theta}{r}} + \cancel{v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu\left[\cancel{\nabla^2 v_\theta} - \cancel{\frac{v_\theta}{r^2}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}}\right]$$

$$\rho\,\cancel{\frac{Dv_z}{Dt}} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{\mu\nabla^2 v_z} \qquad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dalle ultime 2 equazioni si trova $\boxed{p = p(r)}$

Rimpiazzo $v_r = \dfrac{f(z)}{r}$ nella prima e trovo:

$$\underbrace{\rho\left[-\frac{f^2}{r^3}\right]} = -\frac{dp}{dr} + \mu\left[\cancel{\frac{f}{r^3}} + \frac{f''}{r} - \cancel{\frac{f}{r^3}}\right]$$

trascuro il termine di inerzia (che suppongo piccolo) e

trovo: $\underbrace{r\dfrac{dp}{dr}}_{f_1(r)} = \underbrace{+\mu f''}_{f_2(z)} \longrightarrow$ Affinché una funzione solo di r sia uguale ad una funzione solo di z, ambedue devono essere costanti.

$$r\frac{dp}{dr} = c_1 \longrightarrow \int_1^2 dp = \int_1^2 \frac{c_1}{r}\,dr \qquad \boxed{p_2 - p_1 = c_1 \ln\frac{r_2}{r_1}}$$

(siccome $p_1 > p_2$ deve risultare $c_1 < 0$)

$$\mu f'' = c_1 \qquad f' = \frac{c_1}{\mu} z + c_2$$

$$f = \frac{c_1}{\mu}\frac{z^2}{2} + c_2 z + c_3$$

$$f = 0 \quad \text{per} \quad z = \pm b \quad \to \quad \frac{c_1}{\mu}\frac{b^2}{2} \pm c_2 b + c_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c_2 = 0 \ ; \quad c_3 = -\frac{c_1}{2\mu} b^2$$

$$\boxed{f(z) = \frac{c_1}{2\mu}(z^2 - b^2)} \to \boxed{v_r(z) = \frac{c_1}{2r\mu}(z^2 - b^2)}$$

$$\text{con} \quad c_1 = \frac{p_2 - p_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

La scala di pressione appropriata per i moti di lubrificazione ($\underline{\nabla} p = \mu \nabla^2 \underline{v}$) e' ovviamente :

$$P = \frac{\mu V}{L} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} V = \text{scala di velocita'} \\ L = \text{scala di lunghezza} \end{array}$$

(si ricorda che, nel caso in cui il termine convettivo non e' trascurabile, si sceglie usualmente $P = \rho V^2$).

Portata in massa : $\boxed{\dot{M}} = \rho \int_{-b}^{b} v_r \, 2\pi r \, dz = \rho \int_{-b}^{b} 2\pi f \, dz$

$$= \cancel{2}\pi \rho \frac{c_1}{\cancel{2}\mu}\left[\frac{z^3}{3} - b^2 z\right]_{-b}^{+b} = \boxed{-\frac{4\pi}{3\mu} c_1 \rho b^3} \quad (>0 \text{ poiche' } c_1 < 0)$$